

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

ВИПУСК 76



2012

VISNYK OF THE LVIV UNIVERSITY

**Series
Mechanics and Mathematics**

Issue 76

Scientific journal

Published 2 issues per year

Published since 1965

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

**Серія
механіко-математична**

Випуск 76

Збірник наукових праць

Виходить 2 рази на рік

Видається з 1965 року

**Ivan Franko
National University of Lviv**

**Львівський національний
університет імені Івана Франка**

2012

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету
імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ №14606-3577Р від 29.10.2008 р.

У Віснику опубліковано праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Редакційна колегія:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Зарічний** – головний редактор; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Комарницький** – заступник головного редактора; канд. фіз.-мат. наук, доц. **О. Бугрій** – відповідальний секретар; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України **О. Андрейків**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Андрійчук**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Т. Банах**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Я. Єлейко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Заблоцький**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Іванчов**; ; д-р фіз.-мат. наук, доцент **В. Кирилич**; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України **Г. Кіт**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. Кондратюк**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Б. Копитко**; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України **Р. Кушнір**; д-р фіз.-мат. наук, с.н.с. **В. Михаськів**; канд. фіз.-мат. наук, проф. **Я. Притула**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Скасків**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Сторож**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Г. Сулим**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Шеремета**.

Professor **M. Zarichny** – Editor-in-Chief,
Professor **M. Komarnitskyi** – Associate Editor,
Associated Professor **O. Buhrii** – Executive Secretary.

Відповідальний за випуск *Михайло Зарічний*

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний
університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1
79000, Львів, Україна
тел. (38) (032) 274-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
<http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp>

Editorial office address:
Ivan Franko National
University of L'viv,
1, Universytets'ka str.
79000, L'viv, Ukraine
tel. +(38) (032) 274-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

Редактор **Н. ПЛИСА**
Технічний редактор **С. СЕНИК**

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.

вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої
справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції. Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Ум. друк. арк. 19,3.
Тираж 100 прим. Зам. **267**.

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2011

ЗМІСТ

Кирилич Володимир, Філімонов Андрій. Деякі зауваження до задачі Ніколетті з невідомими внутрішніми межами.....	7
Галазюк Віталій, Сулим Георгій, Прокопів Андрій. Ефект межового шару в нестационарній плоскій деформації циліндра за ненульових початкових умов.....	21
Николишин Мирон, Опанасович Віктор, Куротчин Леся, Слободян Микола. Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів і ненаскрізною тріщиною в ній з урахуванням пластичних зон біля її вершин.....	29
Лопушанська Галина, Лопушанський Андрій. Фундаментальний розв'язок рівнянь з частинними дробовими похідними.....	46
Турчин Ольга. Нестационарне температурне поле в півсмузі з покриттям при торцювому нагріванні.....	56
Богданов Владислав, Сулим Георгій. Визначення в'язкості руйнування на підставі розв'язування просторової задачі в квазістатичному пружно-пластичному формулюванні.....	65
Опанасович Віктор, Басса Наталія. Термопружний стан пластини з розміщеними уздовж кола теплопроникними тріщинами, береги яких гладко контактують уздовж усієї довжини.....	76
Кузь Ігор. Пластичне деформування пластин з двома співвісними або компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями).....	91
Бойко Зоя, Нагірний Тарас. До оцінки параметрів моделі структурно неоднорідного твердого тіла.....	99
Пелюшкевич Ольга. Про одну задачу для навантаженої гіперболічної системи напівлінійних рівнянь з горизонтальними характеристиками.....	109
Пастернак Ярослав, Сулим Георгій, Оліярник Назар. Метод граничних елементів у задачах антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями.....	119
Козакевич Тереза. Методика дослідження та оптимізації структурного та напруженого станів сталевих пластин за монотонного теплового навантаження.....	134
Галазюк Віталій, Бубняк Ірина. Осесиметричний напружено-деформований стан у тілі за розтягу обмеженими переміщеннями на нескінченності.....	146
Ірза Євген. До методології оптимізації теплових режимів і напруженого стану в скляному виробництві.....	156
Опанасович Віктор, Звізло Іван, Слободян Микола. Двовісний згин кусково-однорідної пластини з пружною круговою шайбою та радіальною тріщиною у шайбі з урахуванням контакту її берегів.....	164
Твардовська Софія. Поперечна механоелектромагнітна хвиля в пористому насиченому середовищі в зовнішньому постійному електричному полі.....	175
Гуцайлюк Володимир, Сулим Георгій, Турчин Ігор. Динамічна задача теорії пружності для прямокутної пластинки.....	187

Процюк Борис. Термопружний стан кусково-неоднорідних термочутливих сферичних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона.....	196
Чупик Ігор. Оптимізація локального поля температурної витримки осесиметричної оболонки з титанового сплаву з врахуванням поліморфних перетворень.....	209
Опанасович Віктор, Слободян Микола, Бедрій Василь. Згин пластини з круговим отвором і радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів.....	222
М'яус Ольга. Функціональне числення на алгебрі типу Вінера аналітичних функцій нескінченної кількості змінних	231

CONTENTS

<i>Kyrylych Volodymyr, Filimonov Andrij.</i> Some remarks for free boundary Nicoletti's problem.....	7
<i>Galazyuk Vitaliy, Sulym Heorhiy, Prokopiv Andriy.</i> Boundary layer effect in time-dependent plane deformation of a cylinder in the case of nonzero initial conditions	21
<i>Nikolishin Miron, Opanasovych Viktor, Kurotchyn Lesya, Slobodyan Mykola.</i> Biaxial tension of piecewise-homogeneous isotropic plate with a straight boundary between material and non-through crack in it, taking into account the plastic zone at its edges.....	29
<i>Lopushanska Halina, Lopushanskyj Andriy.</i> The fundamental solution of the equations with partial fractional derivatives	46
<i>Turchyn Olha.</i> Unsteady temperature field in half-strip with coating.....	56
<i>Bogdanov Vladislav, Sulym Georgij.</i> The destruction toughness determination on the base of solution of three dimension problem in quasistatic plastic-elastic formulation.....	65
<i>Opanasovych Viktor, Bassa Nataliya.</i> Thermoelastic state of plate with heat-conducting cracks on circle arcs with taking into account the complete smooth contact of the crack faces	76
<i>Kuz' Ihor.</i> Plactical strain of plates with two cuts (the same thin rigid body).....	91
<i>Boiko Zoya, Nahirnyj Taras.</i> To estimation of model parameters structurally heterogeneous solid.....	99
<i>Peliushkevych Olga.</i> About one problem for loaded hyperbolic system of semilinear equations with horizontal characteristics.....	109
<i>Pasternak Iaroslav, Sulym Heorhiy, Oliyarnyk Nazur.</i> Boundary element method for the antiplane shear of anisotropic solids with thin inhomogeneities.....	119
<i>Kozakevych Teresa.</i> Methodic of analysis and optimization of structure stress state for steel plates subjected to monotonous heating	134
<i>Galazyk Vitaliy, Bubnyak Iryna.</i> Axisymmetrical tension-deformed state in body stretched by limited displacements defined at infinity.....	146
<i>Irza Yevgen.</i> To methodology of optimization thermal conditions and stress state in glass industry.....	156
<i>Opanasovych Viktor, Zvizlo Ivan, Slobodyan Mykola.</i> Bilateral bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and radial crack inside the washer with taking into account contact its shores.....	164
<i>Tvardovska Sofiya.</i> The transversal mechano-electromagnetic waves in porous environment saturated by electrolyte solution in the external constant electric field.....	175
<i>Hutsaylyuk Volodymyr, Sulym Heorgiy, Turchyn Ihor.</i> Dynamic problem of elasticity for a rectangular plate.....	187
<i>Protsiuk Borys.</i> Thermoelastic state of piecewise-inhomogeneous thermosensitive spherical bodies at similar constant Poisson's ratios.....	196

<i>Chupyk Ihor</i> . Optimization of local temperature curing for axis-symmetric shells made from titanium alloy taking into account polymorphic transition	209
<i>Opanasovych Viktor, Slobodyan Mykola, Bedriy Vasil</i> . Bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with the width of the contact area of the shores	222
<i>Myaus Olga</i> . Functional calculus on a Wiener type algebra of analytic functions of infinity many variables.....	231

УДК 517.956

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ З НЕВІДОМИМИ ВНУТРІШНІМИ МЕЖАМИ

Володимир КИРИЛИЧ¹, Андрій ФІЛІМОНОВ²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

² Московський державний університет шляхів сполучення,
вул. Образцова, 15 127994 Москва, Росія

Доведено існування та єдиність ліпшицевого розв'язку деякого варіанту задачі Ніколетті.

Ключові слова: задача Ніколетті, невідомі межі, гіперболічна система квазілінійних рівнянь.

Вступ. Задача Ніколетті [1–3] полягає у відшуванні розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_j}{dx} = g_j(x, y_1, \dots, y_n), \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

яка задовольняє умови

$$y_j(x_j) = b_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

де $d_0 \leq x_j \leq d_1$, а $d_0, d_1, b_j (j \in \{1, \dots, n\})$ – задані сталі величини. При такому формулюванні задача є розв'язною для достатньо малого значення $d_1 - d_0$ (див., наприклад, [2], де також розглянуто інші можливі варіанти задачі Ніколетті). Ми отримали теорему про розв'язність задачі Ніколетті без додаткового припущення про малість значення $d_1 - d_0$. Проте значення x_j у цьому разі вже не будуть заданими сталими величинами.

Розглянемо деякий видозмінений варіант цієї задачі, в якому точки x_j в умовах (2) “рухаються” з часом вздовж невідомих ліній $x_j = s_j(t)$, які задовольняють певну систему рівнянь. Ці лінії також підлягають визначенню разом з розв'язком системи (1). Такий варіант задачі природно виникає під час аналізу сингулярних гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними такого типу.

Повне формулювання задачі виглядає так. У прямокутнику $P(T_0) = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T_0\}$, де $\ell > 0$, $T_0 > 0$ – деякі сталі, розглядаємо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + k_i(x, t, u, v) \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u, v), i \in \{1, \dots, m\}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x, t, u, v), j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} s_k(t) = r_k(s(t), t, u(s_k(t), t), v(s_k(t), t)), k \in \{1, \dots, n\}, \quad (5)$$

де $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $s = (s_1, \dots, s_n)^T$, а k – матриця $m \times m$.

Для функцій u_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) ставимо природні початкові та крайові умови [4]. Функції s_j, v_j задовольняють умови

$$s_j(0) = c_j, j \in \{1, \dots, n\}, 0 \leq c_j \leq \ell, \quad (6)$$

$$v_j(s_j(t), t) = \beta_j(t), j \in \{1, \dots, n\}, \quad (7)$$

де функції $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ і сталі c_j ($j \in \{1, \dots, n\}$) задані.

У працях [4–6] доведено локальну та глобальну узагальнену й класичну коректні розв'язності згаданої задачі для системи (3)–(5) у випадку, коли система (3) записана в інваріантах (тобто, коли матриця $k(x, t, u, v)$ є діагональною). Проте запропоноване нами доведення розв'язності розглянутого випадку задачі Ніколетті є не тільки, на наш погляд, самостійним результатом, а й може бути використане для вивчення гіперболічних систем у випадку, коли несингулярна частина системи (3)–(5) має загальний вигляд (3).

Розв'язність задачі. У прямокутнику $\Pi(T)$, $T \leq T_0$ будемо розглядати неперервні за змінними (x, t) і ліпшицеві за x функції $u : \Pi(T) \rightarrow R^m$, $v : \Pi(T) \rightarrow R^n$ зі сталими Ліпшиця L_1^u, L_1^v , відповідно. Простори цих функцій з рівномірною нормою позначимо, відповідно, через E_0^u, E_0^v .

Нехай функції $\beta_j, q_j, r_k, j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, n\}$ – неперервні в своїх областях визначення і задовольняють локальну умову Ліпшиця за всіма аргументами, крім, можливо, аргументу t . Сталі Ліпшиця для зазначених функцій будемо позначати відповідними великими буквами з індексами, що відповідають аргументам, наприклад, Q_1, Q_3, Q_4 означатимуть сталі Ліпшиця функції $(x, t, u, v) \rightarrow q_j(x, t, u, v)$ за аргументами x, u, v , відповідно, а R_1, R_3, R_4 – сталі Ліпшиця функції $(s, t, u, v) \rightarrow r_k(x, t, u, v)$ за аргументами s, u, v , відповідно.

Рівняння (4) і (5) з урахуванням умов (6) і (7) перепишемо у вигляді

$$v_j(x, t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t)}^x q_j(x, t, u(x, t), v(x, t)) dx, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (8)$$

$$s_k(t) = c_k + \int_0^t r_k(s(t), t, u(s_k(t), t), v(s_k(t), t)) dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (9)$$

Припустимо, що виконуються умови.

N1. Нехай функції $(x, t, u, v) \rightarrow q_j(x, t, u, v)$, $(s, t, u, v) \rightarrow r_k(x, t, u, v)$ $j \in \{1, \dots, n\}$ не залежать від тих v_p , для яких $c_p \neq c_j$.

N2. Нехай існує стала Q_0 така, що для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$ виконується нерівність: $|q_j(x, t, u, v)| \leq Q_0(1 + |v|)$.

Відповідно до наведених вище припущень, функції r, q обмежені в своїх областях визначення. Нехай $w = (u, v)$ і

$$D^1 = [0, T_0] \times \{w \mid w \in R^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

$$D^2 = [0, T_0] \times [0, \ell]^n \times \{w \mid w \in R^{m+n}, \|w\| \leq P_0\},$$

де P_0 - деяка стала, $[0, \ell]^n \subset R^n$.

Введемо позначення

$$\max_{D^2} |r| \leq R, \max_{D^1} |q| \leq Q, \max_{[0, T]} |\beta| \leq B.$$

Зауваження 1. Випадок, коли одна або декілька c_j дорівнюють 0 або ℓ , не розглядаємо. В цьому разі при $c_j = 0$ додатково вимагаємо, щоб $r_j \geq 0$, а при $c_j = \ell$ - відповідно, $r_j \leq 0$. Інші міркування в цих випадках будуть аналогічні до наведених нижче. Для того, щоб не перевантажувати викладення, далі розгляд цих випадків опускаємо і вважаємо, що $c_j \neq 0, c_j \neq \ell$ для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$.

Зробимо припущення.

N3. Нехай значення $T > 0$ вибране так, що

$$0 \leq c_j - RT < c_j < c_j + RT \leq \ell, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Лема 1. При сформульованих вище припущеннях для всіх $u \in \mathbb{E}_0^n, v \in \mathbb{E}_0^n$ існує $T > 0$ таке, що на $[0, T]$ маємо єдиний розв'язок системи (9).

Доведення леми випливає з відомої теореми існування та єдиності розв'язку для системи звичайних диференціальних рівнянь [7].

Розв'язок системи (9) $s_j(t)$, зрозуміло, залежить від вибору функцій u, v . Для акцентування на цьому будемо деколи використовувати позначення $s_j(t; u, v)$.

Зафіксуємо деяке $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ і позначимо через J_{j_0} ту множину індексів k , для яких $c_k = c_{j_0}$. Розглянемо систему (8) для $j \in J_{j_0}$. Для кожної фіксованої $u \in \mathbb{E}_0^u$ і для кожного $t \in [0, T]$ для системи (8) виникає аналог задачі Ніколетті з невідомими точками $x_j = s_j(t; u, v)$, $j \in J_{j_0}$, які залежать від розв'язку (8) і від заданої функції $u \in \mathbb{E}_0^u$. Ця залежність визначена системою (9) при $k \in J_{j_0}$.

Означення 1. Для кожної $u \in \mathbb{E}_0^u$ розв'язком системи (8), (9) будемо називати пару $\{v, s\}$, де $v \in \mathbb{E}_0^v$ – розв'язок (8), а s – неперервний розв'язок (9).

Виконується така теорема.

Теорема 1. Для кожної $u \in \mathbb{E}_0^u$ існує $T > 0$ таке, що в $\Pi(T)$ існує єдиний розв'язок системи (8), (9).

Доведення. Зафіксуємо деяку $u \in \mathbb{E}_0^u$ і приймемо $\bar{v}, \hat{v} \in E_0^v$. Із леми 1 випливає: існує $T > 0$ таке, що при $t \in [0, T]$, $j \in \{1, \dots, n\}$ існують єдині розв'язки $s_j(t; u, \bar{v})$, $s_j(t; u, \hat{v})$, які деколи до скорочення будемо позначати через $\bar{s}_j(t)$ і $\hat{s}_j(t)$.

Зафіксуємо довільне $j_0 \in \{1, \dots, n\}$. На підставі умови **N1** далі достатньо аналізувати тільки $j \in J_{j_0}$. Розглянемо

$$\begin{aligned} |s_j(t; u, \bar{v}) - s_j(t; u, \hat{v})| &\leq \int_0^t |r_j(\bar{s}(t), t, u(\bar{s}(t), t), \bar{v}(\bar{s}(t), t)) - \\ &\quad - r_j(\hat{s}(t), t, u(\hat{s}(t), t), \hat{v}(\hat{s}(t), t))| dt \leq \\ &\leq \int_0^t [(R_1 + R_3 L_1^u) \max_{p \in J_{j_0}} |\bar{s}_p(t) - \hat{s}_p(t)| + \\ &\quad + R_4 \max_{p \in J_{j_0}} |\bar{v}_p(\bar{s}_j(t), t) - \hat{v}_p(\hat{s}_j(t), t) \pm \bar{v}_p(\hat{s}_j(t), t)|] dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_0^t [(R_1 + R_3 L_1^u) \max_{p \in J_{j_0}} |\bar{s}_p(t) - \hat{s}_p(t)| + R_4 \|\bar{v} - \hat{v}\|] dt \leq \\ & \leq R_4 T \|\bar{v} - \hat{v}\| + \int_0^t (R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v) \max_{p \in J_{j_0}} |\bar{s}_p(t) - \hat{s}_p(t)| dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Застосуємо до (10) лему Гронуолла-Белмана й одержимо оцінку

$$|s_j(t; u, \bar{v}) - s_j(t; u, \hat{v})| \leq R_4 E T \|\bar{v} - \hat{v}\|, \quad (11)$$

де $E = \exp(R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v) T$.

Зафіксуємо тепер $t \in (0, T]$ і розглянемо відрізок (рис. 1)

$$l_{(t)} = \{x \mid c_{j_0} - Rt \leq x \leq c_{j_0} + Rt\}. \quad (12)$$

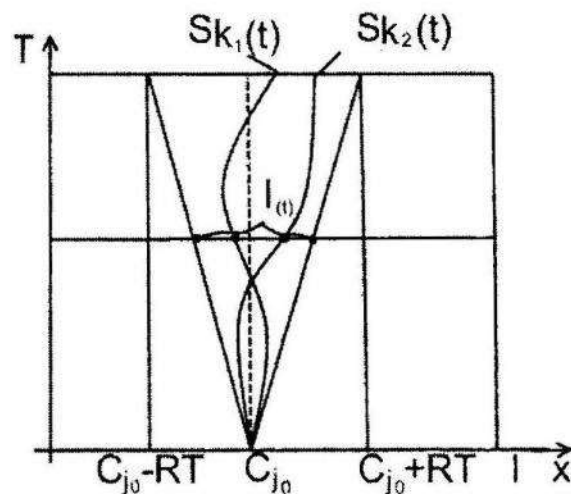


Рис. 1

Очевидно, що $|l_{(t)}| = 2Rt$. Розглянемо кулю

$$\mathbb{E}_{(t)}^v = \left\{ v \in \mathbb{E}_0^v \mid \max_{x \in l_{(t)}} |v(x, t) - \beta(t)| \leq V_1 \right\},$$

де $V_1 > 0$ – деяка стала така, що $V_1 + B < V$.

Для всіх $j \in J_{j_0}$ розглянемо оператор, що діє на v , як функцію x за фіксованого параметра t

$$\mathfrak{B}_t\{v\}_j(x) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t; u, v)}^x q_j(x, t, u(x, t), v(x, t)) dx. \quad (13)$$

Тоді для $x \in \ell_{(t)}$ одержимо

$$|\mathfrak{B}_t\{v\}_j(x) - \beta_j(t)| \leq Q |x - s_j(t; u, v)| \leq 2Rt, \quad (14)$$

тобто при $2RT \leq V_1$ оператор $\mathfrak{B}_t : \mathbb{E}_{(t)}^v \rightarrow \mathbb{E}_{(t)}^v$ (ліпшицевість $\mathfrak{B}_t\{v\}$ за x зі сталою Q очевидна, тому достатньо вважати, що $L_1^v \geq Q$). Далі нехай $\bar{s}_j(t) \leq \hat{s}_j(t)$. Усі можливі випадки взаємного розміщення $\bar{s}_j(t)$ і $\hat{s}_j(t)$ зображені на рис. 2.

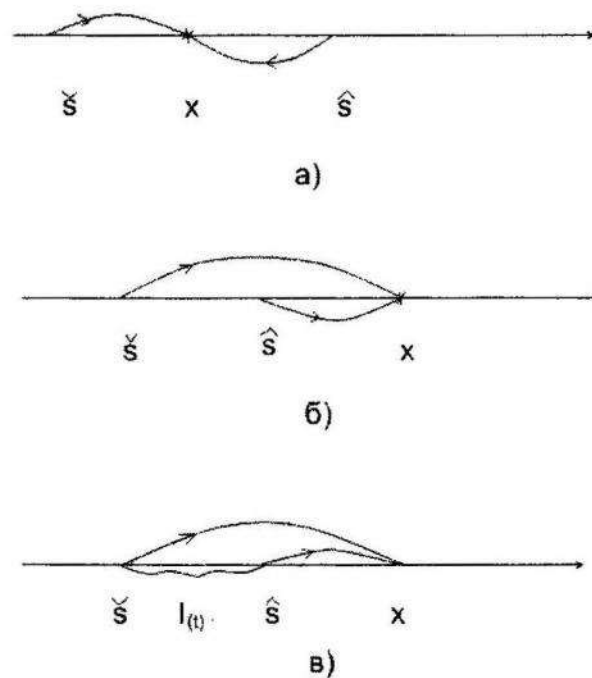


Рис. 2.

Якщо $\bar{s}_j(t) \leq x \leq \hat{s}_j(t)$, то

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{B}_t\{\bar{v}\}_j(x) - \mathfrak{B}_t\{\hat{v}\}_j(x)| \leq \\ & \leq \int_{\bar{s}_j}^x q_j(x, t, u(x, t), \bar{v}(x, t)) dx - \int_{\hat{s}_j}^x q_j(x, t, u(x, t), \hat{v}(x, t)) dx \leq \\ & \leq \int_{\bar{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} 2Q dx \leq 2Q |\hat{s}_j(t) - \bar{s}_j(t)| \leq 2QR_4ET \|\bar{v} - \hat{v}\| \end{aligned} \quad (15)$$

на підставі оцінки (11).

Якщо ж $\bar{s}_j(t) \leq \hat{s}_j(t) \leq x$, то

$$\begin{aligned}
 |B_t\{\tilde{v}\}_j(x) - B_t\{\hat{v}\}_j(x)| &\leq \left| \int_{\hat{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x, t, u(x, t), \tilde{v}(x, t)) dx \right| + \\
 &+ \left| \int_{\hat{s}_j}^x (q_j(x, t, u(x, t), \tilde{v}(x, t)) - q_j(x, t, u(x, t), \hat{v}(x, t))) dx \right| \leq \\
 &\leq Q |\hat{s}_j(t) - \bar{s}_j(t)| + \int_{\hat{s}_j(t)}^x Q_4 \|\tilde{v} - \hat{v}\| dx \leq \\
 &\leq QR_4 ET \|\tilde{v} - \hat{v}\| + Q_4 \|\tilde{v} - \hat{v}\| |x - \hat{s}_j(t)|.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Оскільки ж $x \in \ell_{(t)}$, то $|x - \hat{s}_j(t)| \leq 2Rt$. Тому з (16) одержимо

$$|B_t\{\tilde{v}\}_j(x) - B_t\{\hat{v}\}_j(x)| \leq (QR_4E + 2Q_4R)T \|\tilde{v} - \hat{v}\|. \tag{17}$$

Із (15) та (17) випливає, що при

$$T < \min \left\{ \frac{1}{2QR_4E}, \frac{1}{QR_4E + 2Q_4R} \right\} \tag{18}$$

оператор $\mathfrak{B}_t$ відображає кулю $E_{(t)}^v$ в себе і буде стискувальним. Це доводить існування і єдиність розв'язку системи (8)–(9) при $x \in \ell_{(t)}$.

Далі на підставі умови **N2** можна стандартним способом продовжити розв'язок $v(x, t)$ за x на весь відрізок $[0, \ell]$. Оскільки розв'язок $v(x, t)$ уже визначений у точках $x = c_j \pm Rt$, то одержуємо задачу Коші з початковими умовами в цих точках, що й завершує доведення теореми 1.

Зазначимо, що неперервність за x , t і ліпшицевість за x функції v відразу випливає з (9), причому можна взяти $L_1^v = Q$. Щодо функцій s , то відповідно до зроблених припущень, із (9) отримаємо їхню гладкість.

(0)

У теоремі 1 функція $u \in E_0^u$ була фіксована, і для кожної такої функції (на підставі цієї ж теореми 1) існує єдиний розв'язок системи

$$\begin{cases} v = \mathfrak{B}^{(0)}(u, v, s), \\ s = \mathfrak{C}^{(0)}(u, v, s). \end{cases} \tag{19}$$

Тут через оператори $\mathfrak{B}$ і $\mathfrak{C}$ позначимо праві частини системи (8) і (9), відповідно.

Як ми вже згадували, отримані результати можна застосовувати для дослідження гіперболічних систем з несингулярною частиною (3) загального вигляду. Враховуючи ці застосування, сформулюємо такі дві теореми.

Нехай тепер маємо фундаментальну послідовність $\{u^{(k)}\}$, для всіх $u \in \mathbb{E}_0^u$. Розглянемо відповідні послідовності розв'язків системи (19).

Справджується така теорема.

Теорема 2. Для кожних $\bar{u}, \hat{u} \in E_0^u$ існує $T > 0$ і сталі $M_1^0 > 0, M_2^0 > 0$ такі, що для відповідних розв'язків системи (19) $(\bar{v}, \bar{s}), (\hat{v}, \hat{s})$ виконуються нерівності

$$\|\bar{v} - \hat{v}\| \leq M_1^0 \|\bar{u} - \hat{u}\|, \|\bar{s} - \hat{s}\| \leq M_2^0 \|\bar{u} - \hat{u}\|.$$

Доведення. Нехай $\bar{u}, \hat{u} \in E_0^u$. Тоді на підставі (19) можна знайти відповідні $(\bar{v}, \bar{s})$ і $(\hat{v}, \hat{s})$.

Для кожної множини J_{j_0} розглянемо

$$\begin{aligned} |\bar{s}_j(t; \bar{u}, \bar{v}) - \hat{s}_j(t; \hat{u}, \hat{v})| &\leq \left| \int_0^t [r_j(\bar{s}(t), t, \bar{u}(\bar{s}(t), t), \bar{v}(\bar{s}(t), t)) - \right. \\ &\quad \left. - r_j(\hat{s}(t), t, \hat{u}(\hat{s}(t), t), \hat{v}(\hat{s}(t), t))] dt \right| \leq \int_0^t [R_1 \max_{p \in J_{j_0}} |\bar{s}_p(t) - \hat{s}_p(t)| + \\ &\quad + R_3 |\bar{u}(\bar{s}_j(t), t) - \hat{u}(\hat{s}_j(t), t) \pm \bar{u}(\hat{s}_j(t), t)| + R_4 |\bar{v}(\bar{s}_j(t), t) - \\ &\quad + R_3 \|\bar{u} - \hat{u}\| + R_4 \|\bar{v} - \hat{v}\|] dt \leq (R_3 + R_4)T(\|\bar{u} - \hat{u}\| + \|\bar{v} - \hat{v}\|) + \\ &\quad + \int_0^t (R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v) \max_{p \in J_{j_0}} |\bar{s}_p(t) - \hat{s}_p(t)| dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Застосуємо до (20) лему Гронуолла-Белмана, одержимо

$$\max_{p \in J_{j_0}} |\bar{s}_p(t; \bar{u}, \bar{v}) - \hat{s}_p(t; \hat{u}, \hat{v})| \leq (R_3 + R_4)ET(\|\bar{u} - \hat{u}\| + \|\bar{v} - \hat{v}\|), \quad (21)$$

де $E = \exp((R_1 + R_3 L_1^u + R_4 L_1^v)T)$.

Нехай тепер для визначеності, $\bar{s}_j(t) \leq \hat{s}_j(t)$.

Розглянемо $|\bar{v}_j(x, t) - \hat{v}_j(x, t)|$. Якщо $\bar{s}_j(t) \leq x \leq \hat{s}_j(t)$, то на підставі (21) одержимо

$$\begin{aligned}
 | \bar{v}_j(x, t) - \hat{v}_j(x, t) | &\leq \int_{\bar{s}_j}^x q_j(x, t, \bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) dx - \\
 - \int_{\bar{s}_j}^x q_j(x, t, \hat{u}(x, t), \hat{v}(x, t)) dx &\leq \int_{\bar{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} | q_j(x, t, \bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) | dx + \\
 + \int_{\bar{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} | q_j(x, t, \hat{u}(x, t), \hat{v}(x, t)) | dx &\leq \\
 \leq 2Q | \hat{s}_j(t) - \bar{s}_j(t) | &\leq 2Q(R_3 + R_4)ET(|| \bar{u} - \hat{u} || + || \bar{v} - \hat{v} ||). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Якщо ж $\bar{s}_j(t) \leq \hat{s}_j(t) \leq x \leq c_{j0} + RT$, то

$$\begin{aligned}
 | \bar{v}_j(x, t) - \hat{v}_j(x, t) | &\leq \int_{\bar{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x, t, \bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) dx + \\
 + \int_{\bar{s}_j}^x | q_j(x, t, \bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) - q_j(x, t, \hat{u}(x, t), \hat{v}(x, t)) | dx &\leq \\
 \leq Q | \hat{s}_j(t) - \bar{s}_j(t) | + (Q_3 || \bar{u} - \hat{u} || + Q_4 || \bar{v} - \hat{v} ||) | x - \hat{s}_j(t) |. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Оскільки в розглянутому випадку $x \in \ell_{(t)}$, то із (23) з урахуванням (21) одержимо

$$\begin{aligned}
 | \bar{v}_j(x, t) - \hat{v}_j(x, t) | &\leq Q(R_3 + R_4)ET(|| \bar{u} - \hat{u} || + || \bar{v} - \hat{v} ||) + \\
 + (Q_3 || \bar{u} - \hat{u} || + Q_4 || \bar{v} - \hat{v} ||)2RT &\leq MT(|| \bar{u} - \hat{u} || + || \bar{v} - \hat{v} ||), \quad (24)
 \end{aligned}$$

де $M = 2 \max\{Q(R_3 + R_4)E, (Q_3 + Q_4)R\}$.

Зрештою, якщо $\bar{s}_j(t) \leq \hat{s}_j(t) \leq c_{j0} + RT \leq x \leq \ell$, то з урахуванням (24) одержимо

$$\begin{aligned}
 | \bar{v}_j(x, t) - \hat{v}_j(x, t) | &\leq \int_{\bar{s}_j(t)}^{\hat{s}_j(t)} q_j(x, t, \bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) dx + \\
 + \int_{\bar{s}_j}^{c_{j0}+RT} | q_j(x, t, \bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t)) - q_j(x, t, \hat{u}(x, t), \hat{v}(x, t)) | dx &+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{c_{j_0}+RT}^x |q_j(x, t, \tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t)) - q_j(x, t, \hat{u}(x, t), \hat{v}(x, t))| dx \leq \\
& \leq MT(\|\tilde{v} - \hat{v}\| + \|\tilde{u} - \hat{u}\|) + \int_{c_{j_0}+RT}^x [Q_3 \|\tilde{u} - \hat{u}\| + \\
& + \max_{p \in J_{j_0}} |\tilde{v}_p(x, t) - \hat{v}_p(x, t)|] dx \leq MT \|\tilde{v} - \hat{v}\| + \\
& + M_1 T \|\tilde{u} - \hat{u}\| + \int_{c_{j_0}+RT}^x Q_4 \max_{p \in J_{j_0}} |\tilde{v}_p(x, t) - \hat{v}_p(x, t)| dx, \quad (25)
\end{aligned}$$

де $M_1 = \max\{MT, Q_3\ell\}$.

Застосуємо до (25) лему Гронуолла-Белмана й одержимо

$$\max_{p \in J_{j_0}} |\tilde{v}_p(x, t) - \hat{v}_p(x, t)| \leq (MT \|\tilde{v} - \hat{v}\| + M_1 \|\tilde{u} - \hat{u}\|) \exp(Q_4 \ell). \quad (26)$$

Нерівність (26) справджується для всіх $j_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Отже, зіставляючи (24), (27), (28), одержуємо, що

$$\|\tilde{v} - \hat{v}\| \leq MT \|\tilde{v} - \hat{v}\| \exp(Q_4 \ell) + M_1 \|\tilde{u} - \hat{u}\|. \quad (27)$$

Виберемо $T > 0$ так, щоб

$$MT \exp(Q_4 \ell) < 1$$

Тоді

$$\|\tilde{v} - \hat{v}\| \leq \frac{M_1}{1 - MT \exp(Q_4 \ell)} \|\tilde{u} - \hat{u}\|. \quad (28)$$

Крім того, з (21) і (27) випливає, що

$$\|\tilde{s}(t) - \hat{s}(t)\| \leq (R_3 + R_4)ET \left(\frac{M_1}{1 - MT \exp(Q_4 \ell)} + 1 \right) \|\tilde{u} - \hat{u}\|. \quad (29)$$

Звідки й отримаємо твердження теореми 2 при

$$M_1^0 = \frac{M_1}{1 - MT \exp(Q_4 \ell)}, \quad M_2^0 = (R_3 + R_4)ET \left(\frac{M_1}{1 - MT \exp(Q_4 \ell)} + 1 \right).$$

Зауваження 2. Для спрощення викладення всі твердження доведені в припущеннях виконання умови Ліпшиця для вихідних даних задачі. Однак

цілком аналогічно можна отримати подібні результати в разі заміни умови Лівшиця відповідними умовами Каратеодорі за змінною t .

Зазначимо важливий частинний випадок теореми 2.

Наслідок 1. Нехай $Q_3 = 0$. Тоді з (25) і (28) одержимо, що

$$\| \tilde{v} - \hat{v} \| \leq \frac{MT}{1 - MT \exp(Q_4 \ell)} \| \tilde{u} - \hat{u} \|,$$

тобто можна записати

$$\| \tilde{v} - \hat{v} \| \leq \rho(T) \| \tilde{u} - \hat{u} \|, \quad (30)$$

де $\rho(T) \rightarrow 0^+$ при $T \rightarrow 0^+$.

Н4. Додатково вважатимемо, що функції q і β задовольняють умову Лівшиця за t зі сталими Q_2 і B_2 , відповідно.

Нехай $u \in E^u$ (нагадаємо, що це простір лівшицевих за x, t функцій $u : \Pi(T) \rightarrow R^m$ зі сталими L_1^u, L_2^u , відповідно).

Теорема 3. Нехай $u \in E^u$ і додатково виконується умова **Н4** щодо функцій β, q, r . Тоді функція $(x, t) \rightarrow v(x, t)$, що задовольняє систему (8), (9), є лівшицевою за t зі сталою

$$L_2^v = \max(2QR + B_2, B_2 + QR + Q_2 \ell + Q_3 L_2^u) e^{Q_4 \ell}. \quad (31)$$

Доведення. Нехай $u \in E^u$ і пара (v, s) задовольняє систему

$$\begin{cases} v = \mathfrak{B}\{u, v, s\}, \\ s = \mathfrak{C}\{u, v, s\}. \end{cases}$$

Для кожного фіксованого $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ і $j \in J_{j_0}$ та $t^1, t^2 \in [0, T]$ розглянемо

$$\begin{aligned} |v_j(x, t^1) - v_j(x, t^2)| &\leq B_2 |t^1 - t^2| + \left| \int_{s_j(t^1)}^x q_j(\xi, u(\xi, t^1), v(\xi, t^1)) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{s_j(t^2)}^x q_j(\xi, u(\xi, t^2), v(\xi, t^2)) d\xi \right|. \end{aligned}$$

Нехай $s_j(t^1) \leq x \leq s_j(t^2)$. Тоді

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{s_j(t^1)}^x q_j(\xi, u(\xi, t^1), v(\xi, t^1)) d\xi - \int_{s_j(t^2)}^x q_j(\xi, u(\xi, t^2), v(\xi, t^2)) d\xi \right| \leq \\
& \leq \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi, u(\xi, t^1), v(\xi, t^1))| d\xi + \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi, u(\xi, t^2), v(\xi, t^2))| d\xi \leq \\
& \leq 2Q |s_j(t^2) - s_j(t^1)| \leq 2QR |t^2 - t^1|. \quad (32)
\end{aligned}$$

Якщо ж $s_j(t^1) \leq s_j(t^2) \leq x$, то

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{s_j(t^1)}^x q_j(\xi, u(\xi, t^1), v(\xi, t^1)) d\xi - \int_{s_j(t^2)}^x q_j(\xi, u(\xi, t^2), v(\xi, t^2)) d\xi \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{s_j(t^1)}^{s_j(t^2)} |q_j(\xi, u(\xi, t^1), v(\xi, t^1))| d\xi \right| + \int_{s_j(t^2)}^x |q_j(\xi, u(\xi, t^1), v(\xi, t^1)) - \\
& - q_j(\xi, u(\xi, t^2), v(\xi, t^2))| d\xi \leq QR |t^2 - t^1| + \int_{s_j(t^2)}^x (Q_2 |t^2 - t^1| + Q_3 L_2^u |t^2 - t^1| + \\
& + Q_4 |v(\xi, t^2) - v(\xi, t^1)|) d\xi \leq (QR + Q_2 \ell + Q_3 L_2^u) |t^2 - t^1| + \\
& + \int_0^x Q_4 \max_{\xi, j \in J_{j_0}} |v_j(\xi, t^2) - v_j(\xi, t^1)| d\xi.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\max_{x, j \in J_{j_0}} v_j(x, t^1) - v_j(x, t^2) & \leq (B_2 + QR + Q_2 \ell + Q_3 L_2^u) |t^2 - t^1| + \\
& + \int_0^x Q_4 \max_{\xi, j \in J_{j_0}} |v_j(\xi, t^2) - v_j(\xi, t^1)| d\xi.
\end{aligned}$$

З цього на підставі леми Гронуолла-Белмана та (32) одержимо (31).
Важливий частинний випадок.

Наслідок 2. Нехай $Q_3 = 0$. Тоді з (31) одержимо, що стала Ліпшиця L_2^v не залежить від L_2^u .

Список використаної літератури

1. Nicoletti O. Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali della equazioni differenziali ordinare / O. Nicoletti // Atti della R. Acc. Sc. – Torino. – 1897-1898. – Vol. 33. – P. 746–759.
2. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.
3. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К. : Наук. думка, 1984.
4. Кирилич В. М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В. М. Кирилич, А. М. Филимонов // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.
5. Кирилич В. Локальна гладка розв'язність задачі з вільними межами для сингулярних гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / Володимир Кирилич, Андрій Філімонов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 115–151.
6. Кирилич В. Глобальна гладка розв'язність гіперболічної квазілінійної задачі Валле-Пуссена з вільними межами / Володимир Кирилич, Андрій Філімонов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 38–65.
7. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М. : МГУ, 1984.

**НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧЕ НИКОЛЕТТИ С
НЕИЗВЕСТНЫМИ ВНУТРЕННИМИ ГРАНИЦАМИ**

Владимир КИРИЛИЧ¹, Андрей ФИЛИМОНОВ²

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

²Московский государственный университет путей сообщения,
ул. Образцова, 15, 127994 Москва, Россия

Доказано существование и единственность липшицевого решения некоторого варианта задачи Николетти.

Ключевые слова: задача Николетти, неизвестные грани, гиперболическая система квазилинейных уравнений.

SOME REMARKS FOR FREE BOUNDARY NICOLETTI'S PROBLEM

Volodymyr KYRYLYCH¹, Andrij FILIMONOV²

*¹Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

*²Moskov State University of Railway Engineering,
Obrazcova Str., 15 127994 Moskov, Russia*

The existence and uniqueness of Lipschitz solution of a variant of Nicoletti's problem are proved. We obtained some results which may be applied to hyperbolic system of quasi-linear partial differential equations.

Key words: Nicoletti's problem, unknown boundaries, hyperbolic system of quasi-linear partial differential equations.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.12

Прийнята до друку 31.05.12

УДК 539.3

ЕФЕКТ МЕЖОВОГО ШАРУ В НЕСТАЦІОНАРНІЙ ПЛОСКІЙ ДЕФОРМАЦІЇ ЦИЛІНДРА ЗА НЕНУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Віталій ГАЛАЗЮК, Георгій СУЛИМ, Андрій ПРОКОПІВ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розв'язана плоска динамічна задача теорії пружності для циліндра за ненульових початкових умов та існування на його поверхні межового шару (наношару). З'ясовано, що за певних механічних властивостей межового шару існує ефект фокусування нормальних напружень на осі циліндра.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, початкові умови, ефект фокусування напружень.

У класичному формулюванні нестационарних задач теорії пружності у переміщеннях зазвичай початкові умови приймають нульовими для уникнення потреби виконання узгодженості крайових умов з початковими, як того потребує коректне [1] формулювання задач математичної фізики. Зазначимо, що початкові умови на переміщення і швидкості задаються у всьому тілі, тому однозначно визначають початкові напруження у ньому, враховуючи його межу. У цьому разі початкові розподіли переміщень і швидкостей зумовлюють початкову механічну енергію тіла, тому є визначальними для його подальшого руху. Подальша зміна енергії у кожній точці тіла буде визначатися його фізико-механічними властивостями, геометрією та крайовими умовами, які разом забезпечуватимуть напрям та інтенсивність енергетичних потоків.

У запропонованому формулюванні нестационарної задачі межу циліндра відповідно до відомого [2] ефекту реставрації поверхні моделюємо межовим шаром (наношаром). Введений у розгляд межовий шар реалізує початковий розподіл нормального напруження на поверхні циліндра і створює стежаче нормальне довантаження, яке забезпечує існування зникаючого в часі (дисипативного) нестационарного процесу.

1. Тіло циліндричної форми віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, де R – радіус циліндра, і вважатимемо, що вектор пружного переміщення u має тільки одну радіальну складову $u_\alpha(\alpha, \tau)$, яка не дорівнює нулю. У цьому випадку рівняння руху пружного тіла в переміщеннях

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

зводиться до одного хвильового рівняння

$$\alpha^{-1} \partial_{\alpha} (\alpha \partial_{\alpha} \theta) = \partial_{\tau}^2 \theta, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (1)$$

стосовно об'ємної деформації $\theta(\alpha, \tau) = \alpha^{-1} \partial_{\alpha} (\alpha u_{\alpha})$. В рівнянні (1) ∂_{α} і ∂_{τ} – оператори диференціювання за α і τ , відповідно, $\tau = c_1 t R^{-2}$ – безрозмірний час, $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \mu$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль.

Розв'язок рівняння в частинних похідних (1) подамо інтегралом Фур'є за часовою змінною

$$\theta(\alpha, \tau) = \int_0^{\infty} \xi A(\xi, q) J_0(\xi \alpha) \sin \xi \tau d\xi + \int_0^{\infty} \xi B(\xi, q) J_0(\xi \alpha) \cos \xi \tau d\xi, \quad (2)$$

де $A(\xi, q)$ і $B(\xi, q)$ – довільні функції, які визначаються початковими умовами задачі; $q > 0$ – параметр; $J_0(\xi \alpha)$ – функція Бесселя нульового порядку. Якщо функція $\theta(\alpha, \tau)$ (2) знайдена, то відповідно до її означення шляхом інтегрування знайдемо, що

$$u_{\alpha}(\alpha, \tau) = \int_0^{\infty} A(\xi, q) J_1(\xi \alpha) \sin \xi \tau d\xi + \int_0^{\infty} B(\xi, q) J_1(\xi \alpha) \cos \xi \tau d\xi. \quad (3)$$

За відомим радіальним переміщенням $u_{\alpha}(\alpha, \tau)$ (3) та об'ємною деформацією $\theta(\alpha, \tau)$ (2) і законом Гука знайдемо радіальне напруження через функції $A(\xi, q)$ і $B(\xi, q)$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau) = \mu \left\{ \int_0^{\infty} \xi A(\xi, q) [k^2 J_0(\xi \alpha) - J_2(\xi \alpha)] \sin \xi \tau d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \xi B(\xi, q) [k^2 J_0(\xi \alpha) - J_2(\xi \alpha)] \cos \xi \tau d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Розглянемо рух циліндра за заданого початкового розподілу переміщення

$$u_{\alpha}(\alpha, 0) = u_{\alpha}^0 \alpha f(\alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

у площині його перерізу і відсутності початкової швидкості $\partial_\tau u_\alpha(\alpha, 0) = 0$. Тоді у поданні (3) $A(\xi, q) = 0$, а для визначення функції $B(\xi, q)$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int_0^\infty B(\xi, q) J_1(\xi \alpha) d\xi = u_\alpha^0 \alpha f(\alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (5)$$

розв'язок якого подамо узагальненим рядом [3] Неймана

$$B(\xi, q) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^q}, \quad q > 0, \quad (6)$$

з невідомими коефіцієнтами a_n .

Якщо ряд (6) підставити в інтегральне рівняння (5) і обчислити інтеграл Вебера-Шфегейтліна [4], то одержимо ряд

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n-q+2) \alpha F(n-q+2; -n; 2; \alpha^2)}{2^q \Gamma(n+1)} = u_\alpha^0 \alpha f(\alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (7)$$

Гіпергеометрична функція Гаусса $F(n-q+2; -n; 2; \alpha^2)$ в поданні (7) є поліномом степеня $2n$, тому відповідно до апроксимаційної теореми Вейєрштрасса про наближення неперервної функції поліномом існує єдиний набір коефіцієнтів a_n , які забезпечують виконання рівняння (7).

За відомими коефіцієнтами a_n і функцією $B(\xi, q)$ (6) визначимо переміщення у часі точок площини перерізу циліндра

$$u_\alpha(\alpha, \tau) = \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty \frac{J_1(\xi \alpha) J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^q} \cos \xi \tau d\xi, \quad (8)$$

а також нормальні напруження

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau) = \mu \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty \frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{q-1}} [k^2 J_0(\xi \alpha) - J_2(\xi \alpha)] \cos \xi \tau d\xi, \quad (9)$$

які виникають внаслідок руху за законом (8) і створюють стежаче нормальне довантаження поверхні циліндра. Внаслідок цього динамічний процес у циліндрі завжди зникаючий в часі (дисипативний), хоча у рівнянні руху (1) дисипативних членів немає.

Інтеграли у поданнях (8) і (9) обчислюються числовими методами, проте на осі циліндра $\alpha = 0$ нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau)$ обчислюється

точно. За формулою (9) при $\alpha = 0$ для напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau)$ одержимо розривний інтеграл Фур'є

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) = \mu k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{q-1}} \cos \xi \tau d\xi, \quad (10)$$

тому в інтервалі $0 \leq \tau \leq 1$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) = \mu k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+2) F(n-q+2; -n; \frac{1}{2}; \tau^2)}{2^{q-1} \Gamma(n+1)}, \quad (11)$$

а в інтервалі $1 \leq \tau \leq \infty$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) = \mu k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n-q+2) F(n-q+2; n-q+\frac{5}{2}; 2n-q+3; \tau^{-2})}{2^{q-1} \Gamma(2n-q+3) \Gamma\left(-n+q-\frac{3}{2}\right) \tau^{2n-2q+4}}. \quad (12)$$

З умови існування розривного інтеграла Фур'є [4] та враховуючи умови існування інтеграла Вебера-Шафгейтліна [4] в виразі (8), отримаємо обмеження

$$\frac{1}{2} < q < 2. \quad (13)$$

Нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau)$ на осі циліндра має різні аналітичні вирази (11), (12) в інтервалі $0 \leq \tau \leq 1$ і $1 \leq \tau \leq \infty$. Оскільки процес руху циліндра в часі повинен бути неперервним і обмеженим, то будемо вимагати виконання таких граничних умов:

$$\lim_{\tau \rightarrow 1-0} \sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 1+0} \sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) = 0. \quad (14)$$

Позаяк гіпергеометрична функція Гаусса $F(a; b; c; x^2)$ існує і обмежена при $x < 1$ та в точці $x = 1$ за умови $c - a - b > 0$, то рівності (14) будуть виконуватися $\forall n \in N_0$, якщо

$$\frac{3}{2} \leq q < 2. \quad (15)$$

За виконання нерівності (15) усі характеристики напружено-деформованого стану є неперервними й обмеженими.

3. Як приклад розглянемо випадок, коли початковий розподіл радіального переміщення $u_\alpha(\alpha, 0)$ є лінійним за змінною α . Тоді в інтегральному рівнянні (5) $f(\alpha^2) = 1$ і з рівняння (7) одержимо, що

$$a_0 = \frac{2^q u_\alpha^0}{\Gamma(2-q)}, \quad a_n = 0 \quad \forall n \in N.$$

Тому за поданнями (8) та (9) у цьому випадку знайдемо

$$u_\alpha(\alpha, \tau) = \frac{2^q u_\alpha^0}{\Gamma(2-q)} \int_0^\infty \frac{J_1(\xi\alpha) J_{2-q}(\xi)}{\xi^q} \cos \xi\tau d\xi, \quad (16)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau) = \frac{2^q u_\alpha^0 \mu}{\Gamma(2-q)} \int_0^\infty [k^2 J_0(\xi\alpha) - J_2(\xi\alpha)] \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} \cos(\xi\tau) d\xi. \quad (17)$$

Отже, радіальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau)$ формулою (17) визначене у всіх точках поперечного перерізу циліндра, враховуючи його межу $\alpha = 1$, яка рухається за законом (16), тому не може бути задана довільно.

За поданням (17) обчислимо поведінку в часі напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau)$ на осі циліндра. Відповідно до виразів (11) та (12) отримаємо в інтервалі часу $0 \leq \tau \leq 1$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) = 2\mu k^2 u_\alpha^0 \quad (18)$$

і є сталим, а в інтервалі часу $1 \leq \tau \leq \infty$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) &= 2\mu k^2 u_\alpha^0 \sqrt{\pi} \frac{F\left(2-q; \frac{5}{2}-q; 3-q; \tau^{-2}\right)}{\tau^{4-2q} \Gamma(3-q) \Gamma(q-\frac{3}{2})} = \\ &= 2\mu k^2 u_\alpha^0 \sqrt{\pi} \frac{F\left(1; \frac{1}{2}; 3-q; \tau^{-2}\right)}{\tau(\tau^2-1)^{1.5-q} \Gamma(3-q) \Gamma(q-\frac{3}{2})}. \end{aligned} \quad (19)$$

Зазначимо, що згідно з виразом (19) при $\frac{1}{2} < q < \frac{3}{2}$ напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau)$ при $\tau = 1$ необмежено зростає, зокрема при $q = 1$ має кореневу особливість.

На рисунках зображено графіки переміщень $u_{\alpha}^*(1, \tau) = u_{\alpha}(1, \tau) / u_{\alpha}^0$ та напружень $\sigma_{\alpha\alpha}^*(0, \tau) = \sigma_{\alpha\alpha}(0, \tau) / 2\mu k^2 u_{\alpha}^0$ залежно від різних значень параметра q .

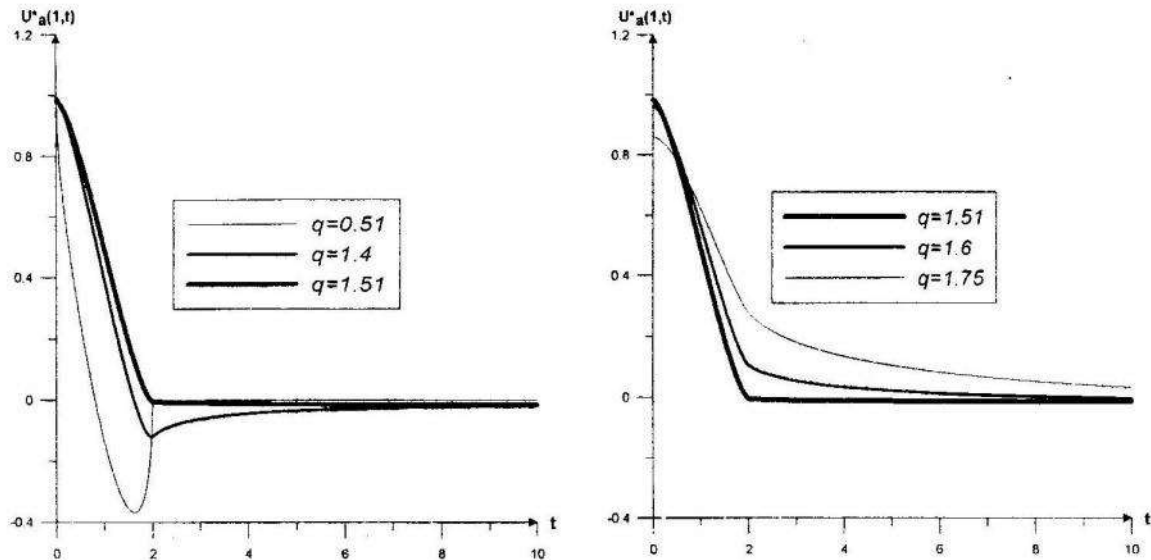


Рис. 1. Переміщення на поверхні циліндра за різних значень параметра q

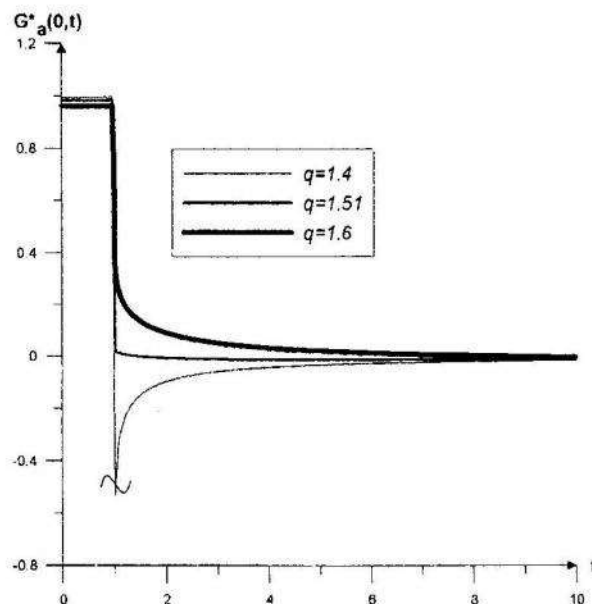


Рис. 2. Напруження в центрі циліндра за різних значень параметра q

4. Висновки. Запропоновано формулювання і метод розв'язування динамічної задачі теорії пружності для циліндра за ненульових початкових умов і припущення про існування на його поверхні межового шару (наноплівки). Доведено, що характер руху суттєво залежить від параметра q , для якого виявлені межі зміни, який можна трактувати як певну

механічну характеристику межового шару. З'ясовано, що за лінійного розподілу переміщень у початковий момент часу нормальні напруження на осі циліндра є сталими в інтервалі часу $0 \leq \tau \leq 1$, неперервними при $\tau = 1$ і зникають при $\tau \rightarrow \infty$, якщо $\frac{3}{2} \leq q < 2$. Якщо $\frac{1}{2} < q < \frac{3}{2}$, що рівнозначне можливості переміщення межі циліндра в область $\alpha < 1$, то нормальні напруження на осі циліндра при $\tau = 1$ необмежено зростають, що підтверджує існування ефекту фокусування напружень.

Список використаної літератури

1. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964.
2. Наумовец А.Г. Использование поверхностных фазовых переходов для управления свойствами поверхностей / А.Г. Наумовец // Прогресивні матеріали і технології: У 2-х т. – К.: Академперіодика, 2003. – Т. 2. – С. 319–351.
3. Галазюк В.А. Ограниченное решение краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с абсолютно жестким дискообразным включением нулевой толщины / В.А. Галазюк // ДАН УССР. – Сер. А. – №12. – 1987.
4. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. – М.: Наука, 1979.

ЭФФЕКТ ГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРА ПРИ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Виталий ГАЛАЗІЮК, Георгий СУЛИМ, Андрей ПРОКОПИВ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Решена плоская динамическая задача теории упругости для цилиндра при ненулевых начальных условиях и существовании граничного слоя (нанопленки) на его поверхности. Установлено, что при некоторых механических свойствах граничного слоя наблюдается эффект фокусирования нормальных напряжений на оси цилиндра.

Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, начальные условия, эффект фокусирования напряжений.

BOUNDARY LAYER EFFECT IN TIME-DEPENDENT PLANE DEFORMATION OF A CYLINDER IN THE CASE OF NONZERO INITIAL CONDITIONS

Vitaliy GALAZYUK, Heorhiy SULYM, Andriy PROKOPIV

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

Flat time-dependent problem of the elasticity theory for a deformation of a cylinder in the case of nonzero initial conditions and existence of the boundary layer (nanolayer) on the cylinder surface has been solved. Normal stress-focusing on the axis of a cylinder effect in the case of certain mechanical qualities of the boundary layer has been revealed.

Key words: time-dependent problem of the elasticity theory, initial conditions, stress-focusing effect.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ МЕЖЕЮ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ І НЕНАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ В НІЙ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇЇ ВЕРШИН

Мирон НИКОЛИШИН¹, Віктор ОПАНАСОВИЧ²,

Леся КУРОТЧИН¹, Микола СЛОБОДЯН²

*¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36 79060 Львів, Україна*

*²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з ненаскрізною тріщиною в прямолінійній межі поділу матеріалів. Припускають, що береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження, а біля її вершин на продовженні тріщини утворюються пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого пластичного шару. Позаяк тріщина не наскрізна, то розв'язок задачі розбиваємо на задачу розтягу та згину пластини, використовуючи класичну теорію згину. На підставі комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та задачі згину, їхній обмежений розв'язок зведено до задач лінійного спряження. Знайдено напружений стан пластини на межі поділу матеріалів. Проведено числовий аналіз задачі та визначено довжини пластичних зон і розкриття тріщини на її фронті.

Ключові слова: розтяг, пластина, тріщина, пластичні зони, комплексні потенціали, умова пластичності Треска, розкриття тріщини.

Вступ. У багатьох галузях техніки використовують пластинчасті елементи конструкцій, які досить легкі, проте достатньо надійні. Під час встановлення та експлуатації таких елементів у них виникають тріщиноподібні дефекти. Ці дефекти різко знижують допустиме навантаження і можуть привести до руйнування конструкції, тому важливо вивчати їхній вплив на напружено-деформований стан пластинчастих елементів.

Вперше задачу про напружено-деформований стан кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною досліджено в [31]. Схожі дослідження для однорідної ізотропної пластини подано в працях [27, 30]. В [29] розглянуто задачу розтягу однорідної пластини з півеліптичною поверхневою тріщиною, на продовженні якої утворюється пластична зона, у тривимірному формулюванні з використанням методу скінчених елементів. Задачу розтягу однорідної пластини з системою паралельних тріщин у пружному та пластичному формулюванні з використанням комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі та методу граничних елементів наведено в [26].

В [3] зробили огляд досліджень для задач розтягу тіл з тріщиною, у вершині якої утворюються пластичні зони, та подано критерії руйнування. У [7] досліджено одновісний розтяг пластини з наскрізною тріщиною у пластичному формулюванні. Визначення зон пластичності в околі вершин двох близько розміщених паралельних тріщин за повздовжнього зсуву виконано у праці [8]. Задачу про вплив міжфазних тріщин на напружено-деформований стан кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів досліджено в [17, 18, 23]. В [1] розв'язано схожу задачу для випадку анізотропних півплощин, у цьому разі розв'язок побудовано в класі функцій необмежених у вершинах тріщини. Вплив наскрізних тріщин, на продовженні яких утворюються пластичні зони, на напружено-деформований стан циліндричної оболонки досліджено в [9, 11, 13]. Зміцнення матеріалу на напружений стан пружно-пластичних оболонок описано в [4, 5].

У [24] розглянуто дві нерівні колінеарні тріщини у пластині з урахуванням пластичних зон за моделлю Дагдейля. Задачу про взаємодію поверхневих тріщин у пружно-пластичному формулюванні досліджено в [28]. У [25] з використанням умови пластичності Мізеса визначено пластичну область на продовженні тріщини у пластині.

Довжину пластичної зони та розкриття ненаскрізної тріщини при прикладенні до її берегів нормальних зусиль і згинних моментів в однорідній пластині розглянуто в [16]. Дослідженням напружено-деформованого стану кусково-однорідної пластини з наскрізною тріщиною та однорідної пластини з двома рівними тріщинами у пластичному формулюванні проведено у працях [14, 15].

Наша мета – дослідити задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з ненаскрізною тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів. Вважають, що береги тріщини вільні від навантаження, а в процесі деформування біля неї утворилися вузькі пластичні зони по всій товщині пластини. Аналогічно як у δ_c -моделі замінимо пластичні зони поверхнями розриву пружних переміщень, а реакцію пластичної зони на пружний об'єм – невідомими нормальними та дотичними напруженнями, які задовольняють умову пластичності Треска. З допомогою методів теорії функції комплексної змінної задачу розбиваємо на задачу розтягу та згину, зводимо до задач лінійного спряження, розв'язок яких шукаємо в класі функцій обмежених у вершинах тріщини. Числовий аналіз задачі виконано з використанням квадратурних формул Гаусса [19, 22].

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотропну пластину завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів. Нехай пластина перебуває під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Вважаємо, що на межі поділу матеріалів перебуває ненаскрізна тріщина заввишки $h + h_1$ і завдовжки $2l$. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо в серединній площині пластини декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком в центрі тріщини, вісь Ox спрямуємо по межі поділу матеріалів. Вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження на продовженні тріщини виникають пластичні

зони завдовжки a , крім того, матеріал у перемичці $h_1 \leq \tilde{z} \leq h$, $-l \leq x \leq l$ (рис. 1) також перейшов у пластичний стан. На межі поділу матеріалів поза тріщиною виконуються умови ідеального механічного контакту. В серединній площині пластини лінію спаю матеріалів позначимо через L' , лінію, де розміщено тріщину, – через L , а пластичні зони через L'_1 і L''_1 , у цьому разі $L_1 = L'_1 \cup L''_1$, $\tilde{L} = L \cup L_1$, $\tilde{L} = \tilde{L} \cup L'$ (див. рис. 1). Граничне значення відповідних величин при $y \rightarrow \pm 0$ будемо позначати знаками “+” і “–”, а для пружних сталей матеріалу S_j півплощини приписуватимемо індекс j , який надалі приймає два значення 1 чи 2, а півплощину для якої $y < 0$ ($y > 0$) – через S_1 (S_2). Завдяки наявності пластичної зони в перемичці розв'язок задачі подано у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини, з використанням класичної теорії.

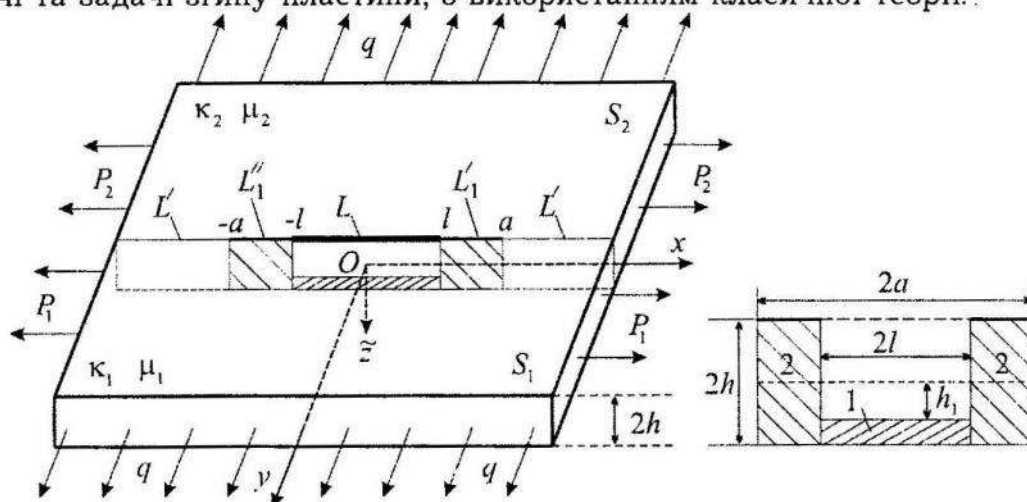


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини і пластичних зон

Для плоскої задачі згідно з формулюванням отримаємо такі крайові умови:

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-, (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L'; \quad (1)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_T b_1, \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L, \sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^\pm = \tau_0 \text{ на } L'_1, \sigma_y^\pm = \sigma_0, \tau_{xy}^\pm = -\tau_0 \text{ на } L''_1; \quad (2)$$

для задачі згину:

$$M_y^+ = M_y^-, H_{xy}^+ = H_{xy}^-, N_y^+ = N_y^-, w^+ = w^-, \partial_y w^+ = \partial_y w^- \text{ на } L'; \quad (3)$$

$$M_y^\pm = \sigma_T b_2, H_{xy}^\pm = 0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L, M_y^\pm = M_0, H_{xy}^\pm = H_0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L'_1, \\ M_y^\pm = M_0, H_{xy}^\pm = -H_0, N_y^\pm = 0 \text{ на } L''_1; \quad (4)$$

де u, v – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі Ox і Oy , відповідно; σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; σ_0, τ_0 – невідоме нормальне та дотичне напруження у пластичній зоні; w – прогин точки серединної поверхні пластини; M_y, H_{xy}, N_y – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила; M_0, H_0 – невідомі згинальний і крутний моменти у пластичній зоні; $b_1 = (h - h_1)/(2h)$, $b_2 = (h^2 - h_1^2)/2$; $\sigma_T = \min(\sigma_T^{(1)}, \sigma_T^{(2)})$, $\sigma_T^{(j)}$ – границя текучості матеріалу S_j півплощини, де індекс j тут і надалі набуває двох значень 1 і 2, ∂_s – позначення часткової похідної по s .

Побудова розв'язку плоскої задачі. Введемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$ для кожної з півплощин S_j . Тоді згідно з [12] можемо записати

$$\begin{aligned}\sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + z\overline{\Phi_j'(z)} + \overline{\Psi_j(z)}, \\ 2\mu_j \partial_x(u + iv) &= \kappa_j \Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)},\end{aligned}\quad (5)$$

де $z = x + iy$, $i^2 = -1$, $\kappa_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j}$; μ_j – модуль зсуву; ν_j – коефіцієнт Пуассона.

Для великих $|z|$ мають місце розвинення [12]

$$\Phi_j(z) = \Gamma_j + o(1/z^2), \quad \Psi_j(z) = \Gamma_j' + o(1/z^2). \quad (6)$$

Тут

$$\Gamma_j = 0,25(P_j + q), \quad \Gamma_j' = 0,5(q - P_j). \quad (7)$$

Аналітично продовжимо функцію $\Phi_j(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою [12]

$$\Phi_j(z) = -\overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}. \quad (8)$$

Тоді залежності (5) можемо записати так:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}, \quad (9)$$

$$2\mu_j \partial_x(u + iv) = \kappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}. \quad (10)$$

На підставі (6) і (8) аналітичне продовження функції $\Phi_j(z)$ (8) при великих $|z|$ подамо у вигляді

$$\Phi_j(z) = -\Gamma_j - \Gamma'_j + o(1/z^2). \quad (11)$$

Враховуючи (9), з крайових умов (1)–(2) отримуємо таку задачу лінійного спряження:

$$(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^+ - (\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^- = 0, \quad x \in \tilde{L}. \quad (12)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (12), одержимо

$$\theta(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = (P_1 + P_2 - 2q) / 4. \quad (13)$$

Введемо функцію

$$\Phi(z) = \mu_{3-j}\kappa_j\Phi_j(z) - \mu_j\Phi_{3-j}(z), \quad (14)$$

то, як видно з другої крайової умови (1) та залежності (10), вона задовольняє умову

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 0, \quad x \in L'. \quad (15)$$

Звідси, враховуючи (6), (11) і (14), при великих $|x|$, отримаємо

$$\mu_1(1 + \kappa_2)P_2 - \mu_2(1 + \kappa_1)P_1 = [3(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2\kappa_1 - \mu_1\kappa_2]q. \quad (16)$$

На підставі (13) і (14) знайдемо вирази для функцій $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ через введені функції $\theta(z)$ і $\Phi(z)$

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} A_j^{-1}(\mu_j\theta(z) + \Phi(z)), & z \in S_j, \\ A_{3-j}^{-1}(\mu_j\kappa_{3-j}\theta(z) - \Phi(z)), & z \in S_{3-j}, \end{cases} \quad (17)$$

де $A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j$.

Крайову умову (2) подамо так: $(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = f(x)$, $x \in \tilde{L}$, з якої на підставі (9) і (17) отримаємо

$$\Phi^+(x) - g\Phi^-(x) = -A\theta(x) + A_1f(x), \quad x \in \tilde{L}, \quad (18)$$

де

$$f(x) = \sigma_T b_1, \quad x \in L, \quad f(x) = \sigma_0 - i\tau_0, \quad x \in L'_1, \quad f(x) = \sigma_0 + i\tau_0, \quad x \in L''_1,$$

$$A = \mu_1\mu_2(1 - \kappa_1\kappa_2)A_2^{-1}, \quad g = -A_1A_2^{-1}.$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + A\theta(z) / (1 - g), \quad (19)$$

то вона, як випливає з (18), є розв'язком такої крайової задачі:

$$\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = A_1 f(x), \quad x \in \tilde{L}. \quad (20)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (20), одержимо

$$\Phi_0(z) = A_1 X_0(z) [\sigma_T b_1 g(L, z) + \sigma_0 g(L_1, z) - \tau_0 i g(L_1', z) + \tau_0 i g(L_1'', z)], \quad (21)$$

$$g(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)}, \quad X_0(z) = \frac{(z-a)^{0.5+i\beta}}{(z+a)^{-0.5+i\beta}}, \quad \beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi}. \quad (22)$$

Враховуючи (6), (11), (13), (14), (19), для функції $\Phi_0(z)$ правильне розвинення

$$\Phi_0(z) = A_1 q / (1-g) + O(1/z^2). \quad (23)$$

З іншого боку, на підставі (21) при великих $|z|$ отримаємо

$$\Phi_0(z) = A_1 (a_1 + (a_2 - 2ia\beta a_1)/z + \dots), \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\beta\pi} [\sigma_T b_1 I_c^0 + \sigma_0 I_c - \tau_0 I_s] / \pi, \quad a_2 = -ie^{\beta\pi} [\sigma_T b_1 I_{st}^0 + \sigma_0 I_{st} + \tau_0 I_{ct}] / \pi, \\ I_\rho &= \int_l^a g_\rho(t) dt, \quad I_c^0 = \int_0^l g_c(t) dt, \quad I_{\rho t} = \int_l^a g_\rho(t) t dt, \quad I_{st}^0 = \int_0^l g_s(t) t dt; \\ g_c(t) &= \frac{\cos b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad g_s(t) = \frac{\sin b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad b(t) = \beta \ln \left| \frac{a-t}{a+t} \right|. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут індекс ρ набуває двох значень c чи s .

Враховуючи (23) і (24), отримаємо

$$a_1 = q / (1-g), \quad a_2 = 2i\beta a_1 a. \quad (26)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (26) стосовно σ_0 і τ_0 , можемо записати

$$\sigma_0 = [-\sigma_T b_1 (I_c^0 I_{ct} + I_s I_{st}^0) + b_4 (I_{ct} - 2a\beta I_s)] / b_5, \quad (27)$$

$$\tau_0 = [\sigma_T b_1 (I_c^0 I_{st} + I_c I_{st}^0) - b_4 (I_{st} + 2a\beta I_c)] / b_5, \quad (28)$$

де

$$b_4 = q\pi e^{-\beta\pi} / (1-g), \quad b_5 = I_c I_{ct} + I_s I_{st}. \quad (29)$$

Компоненти тензора напружень вздовж осі Ox знайдемо за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_y^\pm - i\tau_{xy}^\pm &= A_1^{-1} [\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)], \\ \sigma_x^+ &= A_1^{-1} \operatorname{Re} [3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x)] + P_1 - q(3+g)/(1-g), \\ \sigma_x^+ + \sigma_x^- - 2\sigma_y^\pm &= P_1 + P_2 - 2q, -\infty < x < \infty.\end{aligned}\quad (30)$$

Якщо ввести позначення

$$I_s^\pm(x) = \int_l^a \frac{g_s(t)}{(t \pm x)} dt, \quad I_c^\pm(x) = \int_l^a \frac{g_c(t)}{(t \pm x)} dt, \quad I_\rho(x) = \int_{-l}^l \frac{g_\rho(t)}{(t-x)} dt, \quad (31)$$

то на підставі залежностей (30) отримуємо такі вирази для компонент тензора напружень на дійсній осі:

$$\begin{aligned}\sigma_x^+(x) &= b_6(\sigma_0 - q) + P_1 + g_3(x)[(\sigma_T b_1 - \sigma_0)g_5(x) + \tau_0\{g_6(x) + g_7^+(x)\}], x \in (l, a); \\ \sigma_x^+(x) &= b_6(\sigma_0 - q) + P_1 + g_3(x)[(\sigma_T b_1 - \sigma_0)g_5(x) - \tau_0\{g_6(x) - g_7^-(x)\}], x \in (-a, -l); \\ \sigma_x^+(x) &= b_6(\sigma_T b_1 - q) + P_1 + g_3(x)[(\sigma_0 - \sigma_T b_1)g_8^+(x) - \tau_0 g_9^-(x)], x \in (-l, l); \\ \sigma_y^\pm(x) &= (1-g)g_4(x)[- \sigma_T b_1 g_6(x) - \sigma_0 g_9^-(x) - \tau_0 g_8^-(x)], \\ \tau_{xy}^\pm(x) &= -(1-g)g_4(x)[- \sigma_T b_1 g_5(x) - \sigma_0 g_8^+(x) + \tau_0 g_9^+(x)], \\ \sigma_x^+(x) &= P_1 - qb_6 + (3+g)g_4(x)[- \sigma_T b_1 g_6(x) - \sigma_0 g_9^-(x) - \tau_0 g_8^-(x)], x \in (a, \infty);\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}g_3(x) &= 2\sqrt{a^2 - x^2}/\pi, \quad g_4(x) = e^{\beta\pi}\sqrt{x^2 - a^2}/2\pi, \quad g_\rho^\pm(x) = I_\rho^-(x) \pm I_\rho^+(x), \\ g_5(x) &= \sin b(x)I_c(x) - \cos b(x)I_s(x), \quad g_6(x) = \sin b(x)I_s(x) + \cos b(x)I_c(x), \\ g_7^\pm(x) &= \pm 2\{\sin b(x)I_s^\pm(x) \mp \cos b(x)I_c^\pm(x)\}, \quad g_8^\pm(x) = \sin b(x)g_c^\mp(x) - \cos b(x)g_s^\pm(x), \\ g_9^\pm(x) &= \cos b(x)g_c^\pm(x) + \sin b(x)g_s^\mp(x), \quad b_6 = (3+g)/(1-g).\end{aligned}$$

Задача згину пластини. Введемо комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ і $\Psi_{3j}(z)$ для кожної з півплощин S_j та аналітичне продовження функції $\Phi_{3j}(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою

$$\Phi_{3j}(z) = -\bar{\Phi}_{3j}(z) - z\bar{\Phi}'_{3j}(z) - \bar{\Psi}_{3j}(z),$$

тоді згідно з [20] можемо записати

$$\partial_x(\partial_x w + i\partial_y w) = \Phi_{3j}(z) - \Phi_{3j}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)}, \quad z \in S_j, \quad (32)$$

$$2\tilde{\mu}_j \tilde{f} = \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) + \Phi_{3j}(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3j}(z)}, \quad z \in S_j, \quad (33)$$

де

$$\tilde{f} = M_y + i(H_{xy} + \int_{-a}^x N_y dx),$$

$$\tilde{\mu}_j = -0,75(1 + \nu_j) / E_j h^3, \quad \tilde{\kappa}_j = (3 + \nu_j) / (1 - \nu_j), \quad E_j - \text{модуль Юнга.}$$

Для комплексного потенціалу $\Phi_{3j}(z)$ правильне розвинення

$$\Phi_{3j}(z) = O(1/z^2), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Введемо функції

$$\theta_3(z) = \tilde{\Phi}_{31}(z) + \tilde{\Phi}_{32}(z), \quad z \in S_j, \quad (35)$$

$$\Phi_3(z) = \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) - \tilde{\mu}_j \Phi_{33-j}(z), \quad z \in S_j. \quad (36)$$

З частини крайових умов (3) і (4) можемо записати

$$\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-, \quad x \in \tilde{L}. \quad (37)$$

Якщо врахувати (33) і (36), то з крайової умови (37) одержимо, що функція $\Phi_3(z)$ задовольняє задачу лінійного спряження

$$\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x) = 0, \quad x \in \tilde{L},$$

розв'язок якої набув вигляду

$$\Phi_3(z) = 0. \quad (38)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (35) і (36) стосовно $\Phi_{3j}(z)$ та врахувавши (38), отримаємо

$$\Phi_{3j}(z) = \begin{cases} \tilde{A}_j^{-1} \tilde{\mu}_j \theta_3(z), & z \in S_j, \\ \tilde{A}_{3-j}^{-1} \tilde{\mu}_j \tilde{\kappa}_{3-j} \theta_3(z), & z \in S_{3-j}. \end{cases} \quad (39)$$

Тут $\tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j$.

Якщо врахувати крайові умови (3) і (4), а також залежності (32), (33) і (39), то одержимо, що функція $\theta_3(z)$ задовольняє такі крайові умови:

$$\begin{aligned} \theta_3^+(x) - \theta_3^-(x) &= 0, \quad x \in L', \\ \theta_3^+(x) - \tilde{g} \theta_3^-(x) &= \tilde{A}^{-1} \tilde{f}_1(x), \quad x \in \tilde{L}, \end{aligned} \quad (40)$$

де

$$\tilde{A} = \tilde{\kappa}_1 / (2\tilde{A}_1), \quad \tilde{g} = -\tilde{\kappa}_2 \tilde{A}_1 / (\tilde{A}_2 \tilde{\kappa}_1),$$

$$\tilde{f}_1(x) = \sigma_T b_2, \quad x \in L, \quad \tilde{f}_1(x) = M_0 + iH_0, \quad x \in L'_1, \quad \tilde{f}_1(x) = M_0 - iH_0, \quad x \in L''_1.$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (40) можна зобразити так:

$$\theta_3(z) = \tilde{A}^{-1} \tilde{X}_0(z) [\sigma_T b_2 \tilde{g}(L, z) + M_0 \tilde{g}(L_1, z) + i H_0 \tilde{g}(L'_1, z) - i H_0 \tilde{g}(L''_1, z)], \quad (41)$$

де

$$\tilde{X}_0(z) = \frac{(z-a)^{0,5+i\tilde{\beta}}}{(z+a)^{-0,5+i\tilde{\beta}}}, \quad \tilde{g}(L, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}, \quad \tilde{\beta} = -\frac{\ln|\tilde{g}|}{2\pi}. \quad (42)$$

Знайдемо розвинення функції $\theta_3(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ двояко, враховуючи формули (35) і (34)

$$\theta_3(z) = O(1/z^2), \quad (43)$$

та залежність (41)

$$\theta_3(z) = \tilde{A}^{-1} (\tilde{a}_1 + (\tilde{a}_2 - 2ia\tilde{\beta}\tilde{a}_1)/z + \dots). \quad (44)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= e^{i\tilde{\beta}\pi} [\sigma_T b_2 \tilde{I}_c^0 + M_0 \tilde{I}_c + H_0 \tilde{I}_s] / \pi, \\ \tilde{a}_2 &= -ie^{i\tilde{\beta}\pi} [\sigma_T b_2 \tilde{I}_{st}^0 + M_0 \tilde{I}_{st} - H_0 \tilde{I}_{ct}] / \pi, \end{aligned} \quad (45)$$

вирази для $\tilde{I}_m^0$, $\tilde{I}_m$ отримають із виразів для I_m^0 і I_m заміною $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$.

На підставі (43) і (44) запишемо

$$\tilde{a}_1 = 0, \quad \tilde{a}_2 = 0. \quad (46)$$

Підставляючи (45) у (46) та розв'язуючи отриману систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно M_0 і H_0 , одержимо

$$M_0 = \tilde{b}_5 (\tilde{I}_c^0 \tilde{I}_{ct} + \tilde{I}_s \tilde{I}_{st}^0), \quad H_0 = \tilde{b}_5 (\tilde{I}_c^0 \tilde{I}_{st} - \tilde{I}_c \tilde{I}_{st}^0), \quad (47)$$

де $\tilde{b}_5 = -\sigma_T b_2 / (\tilde{I}_c \tilde{I}_{ct} + \tilde{I}_s \tilde{I}_{st})$.

Згинальні та крутні моменти на дійсній осі визначимо за формулами

$$\begin{aligned} M_y^\pm + iH_{xy}^\pm &= \tilde{A} [\theta_3^+(x) - \tilde{g}\theta_3^-(x)], \quad d_j = (\tilde{\kappa}_j - 2) / \tilde{\kappa}_j, \\ M_x^+ &= \tilde{A} \operatorname{Re} [d_1 \theta_3^+(x) + \tilde{g}\theta_3^-(x)], \quad M_x^- = -\tilde{A} \operatorname{Re} [\theta_3^+(x) + \tilde{g}d_2 \theta_3^-(x)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Якщо врахувати вирази для функцій $\theta_3(z)$ (41), то на підставі (48) отримаємо

$$\begin{aligned} M_x^+(x) &= b_3 M_0 + \tilde{g}_{10}(x) [(\sigma_T b_2 - M_0) \tilde{g}_5(x) - H_0 (\tilde{g}_6(x) - \tilde{g}_7^+(x))], \quad x \in (l, a); \\ M_x^+(x) &= b_3 M_0 + \tilde{g}_{10}(x) [(\sigma_T b_2 - M_0) \tilde{g}_5(x) + H_0 (\tilde{g}_6(x) - \tilde{g}_7^-(x))], \quad x \in (-a, -l); \\ M_x^+(x) &= b_3 \sigma_T b_2 + \tilde{g}_{10}(x) [(M_0 - \sigma_T b_2) \tilde{g}_8^+(x) + H_0 \tilde{g}_9^+(x)], \quad x \in (-l, l); \end{aligned}$$

$$M_y^\pm(x) = (1 - \tilde{g})\tilde{g}_4(x)[- \sigma_T b_2 \tilde{g}_6(x) - M_0 \tilde{g}_9^-(x) + H_0 \tilde{g}_8^-(x)], \quad (49)$$

$$H_{xy}^\pm(x) = (1 - \tilde{g})\tilde{g}_4(x)[- \sigma_T b_2 \tilde{g}_5(x) - M_0 \tilde{g}_8^+(x) - H_0 \tilde{g}_9^+(x)],$$

$$M_x^+(x) = b_3 \tilde{g}_4(x)[- \sigma_T b_2 \tilde{g}_6(x) - M_0 \tilde{g}_9^-(x) + H_0 \tilde{g}_8^-(x)],$$

$$M_x^-(x) = -\{1 + \tilde{g}d_2\}\tilde{g}_4(x)[- \sigma_T b_2 \tilde{g}_6(x) - M_0 \tilde{g}_9^-(x) + H_0 \tilde{g}_8^-(x)], x \in (a, \infty);$$

де $\tilde{g}_8(x) = \sqrt{|a^2 - x^2|} / (2\pi)$, $b_3 = (d_1 + \tilde{g}) / (1 - \tilde{g})$, $\tilde{g}_{10}(x) = 2\tilde{g}_8(x)(\tilde{\kappa}_1 - 1) / \tilde{\kappa}_1$, вирази для $\tilde{I}_m^k(x)$, $\tilde{g}_m^k(x)$ отримуємо зі співвідношень для $I_m^k(x)$, $g_m^k(x)$ заміною $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$.

Зауважимо таке: якщо прийняти $h_1 / h = 1$, то отримаємо результати про розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з наскрізною тріщиною, які подано в [15], а в випадку однорідної пластини отримаємо відомі результати з монографії [21].

Числовий аналіз задачі. Для знаходження довжини a пластичної зони на продовженні тріщини використаємо умову пластичності Треска [2] у вигляді умови пластичності поверхневого шару [6, 10]

$$\max \{ |\sigma_1^p|, |\sigma_2^p|, |\sigma_1^p - \sigma_2^p| \} = \sigma_T, \quad (50)$$

де

$$\sigma_{1,2}^p = \left(\sigma_x^p + \sigma_y^p \pm \sqrt{(\sigma_x^p - \sigma_y^p)^2 + 4(\tau_{xy}^p)^2} \right) / 2.$$

Напруження на поверхні пластини σ_j^p є комбінацією напружень плоскої задачі та задачі згину, які знаходимо за відомими формулами через відповідні моменти (49).

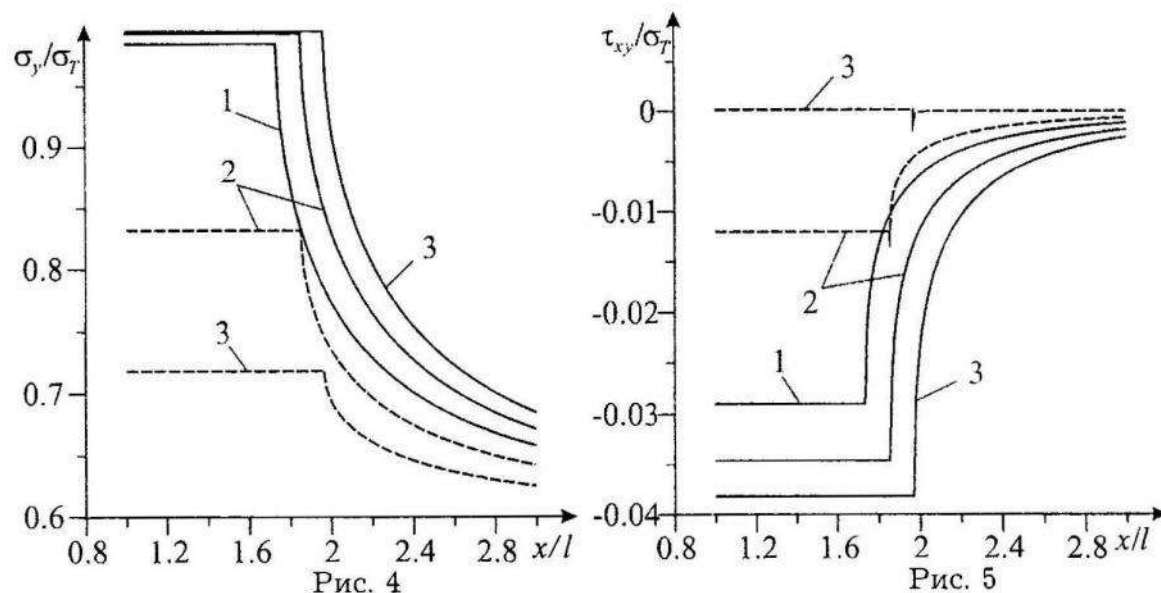
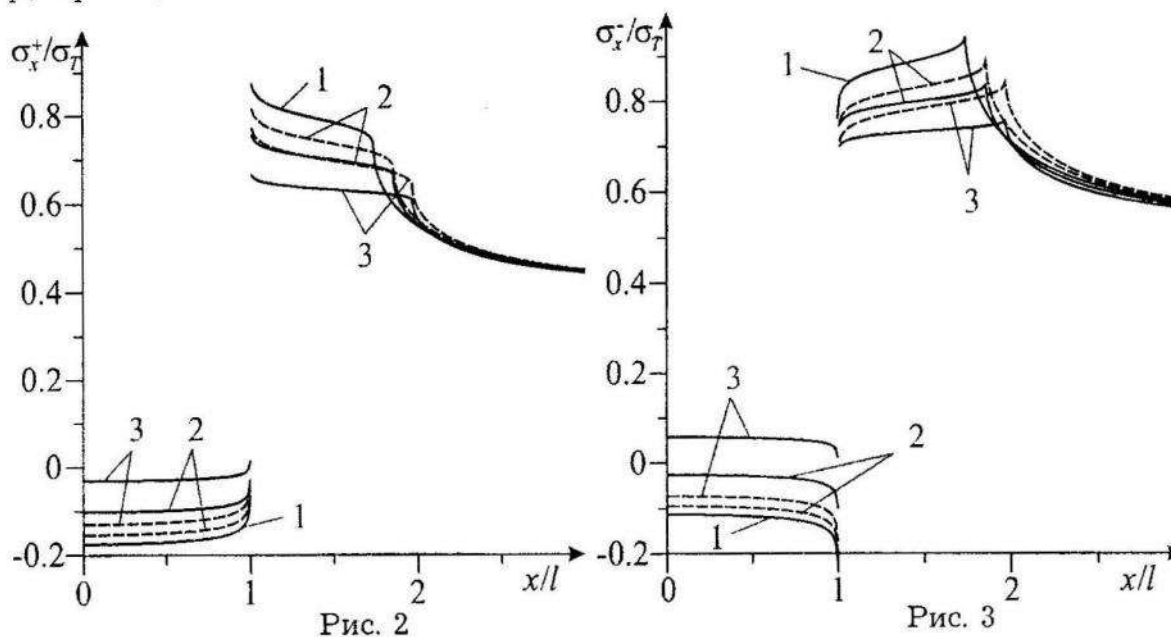
Розкриття тріщини δ у вершині $x = l$ на нижній основі пластини знайдемо за формулою

$$\begin{aligned} \delta(x) = & A_1(g-1)/(4\pi g\mu_1\mu_2) \int_a^l \sqrt{a^2 - x^2} [(\sigma_0 - \sigma_T b_1)g_6(x) + \tau_0 g_5(x) - \\ & - 2\tau_0 \{ \cos b(x)I_s^+(x) + \sin b(x)I_c^+(x) \}] dx + h\tilde{A}(\tilde{g}-1)/(2\pi\tilde{g}) \int_a^l \sqrt{a^2 - x^2} [(M_0 - \\ & - \sigma_T b_2)\tilde{g}_6(x) - H_0 \tilde{g}_5(x) + 2H_0 \{ \cos \tilde{b}(x)\tilde{I}_s^+(x) + \sin \tilde{b}(x)\tilde{I}_c^+(x) \}] dx. \end{aligned} \quad (57)$$

Числовий аналіз задачі проведено з використанням квадратурних формул Гаусса для нитесилу $\sigma^{(1)} = 278$ МПа, $E_1 = 1,38 \cdot 10^5$ МПа та

технічно чистого заліза $\sigma_r^{(2)} = 130$ МПа, $E_2 = 2,08 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

На рис. 2-9 суцільні лінії зображені для верхньої основи пластини ($z = -h$), а штрихові – для нижньої основи пластини ($z = h$), у цьому разі $P_1 / \sigma_T = 0,4$.



На рис. 2-5 зображено зміну компонент тензора напружень вздовж дійсної осі від відносної координати x/l при $q / \sigma_T = 0,6$. Числовий аналіз виявив, що напружений стан симетричний стосовно початку координат, тому наведено результати для $x > 0$. Криві 1 побудовані при $h_1 / h = 1$

(випадок наскрізної тріщини), криві 2 – при $h_1/h = 0,9$, криві 3 – при $h_1/h = 0,8$; у цьому разі відносна довжина пластичної зони була такою: при $h_1/h = 1$ – $a/l = 1,7363$, при $h_1/h = 0,9$ – $a/l = 1,8552$, при $h_1/h = 0,8$ – $a/l = 1,9685$. Як виявив числовий аналіз, у разі використання умови пластичності (50) розподілене навантаження P_1 і P_2 майже не впливає на числове значення довжини пластичної зони при фіксованому q/σ_T .

На рис. 2, 3 зображено розподіл напружень σ_x^+/σ_T на дійсній осі у пластині. На підставі цих рисунків можна зробити висновок, що у зонах пластичності на продовженні тріщини найбільші напруження будуть у випадку наскрізної тріщини, а найменші – при $h_1/h = 0,8$; а от у зоні пластичності, під тріщиною, навпаки – найменші напруження у випадку наскрізної тріщини, а найбільші – коли $h_1/h = 0,8$. Для великих $|x|$ σ_x^+/σ_T і σ_x^-/σ_T прямують до P_1/σ_T і P_2/σ_T , відповідно.

На рис. 4 показано графічну залежність розподілу напружень σ_y/σ_T на дійсній осі у пластині. Напруження σ_y на нижній основі пластини менші, ніж на верхній основі при $h_1/h < 1$; при великих $|x|$ σ_y/σ_T прямують до q/σ_T .

На рис. 5 зображено розподіл дотичних напружень τ_{xy}/σ_T на дійсній осі у пластині. З цього рисунка видно, що в зонах пластичності дотичні напруження по абсолютній величині на верхній основі пластини більші, ніж

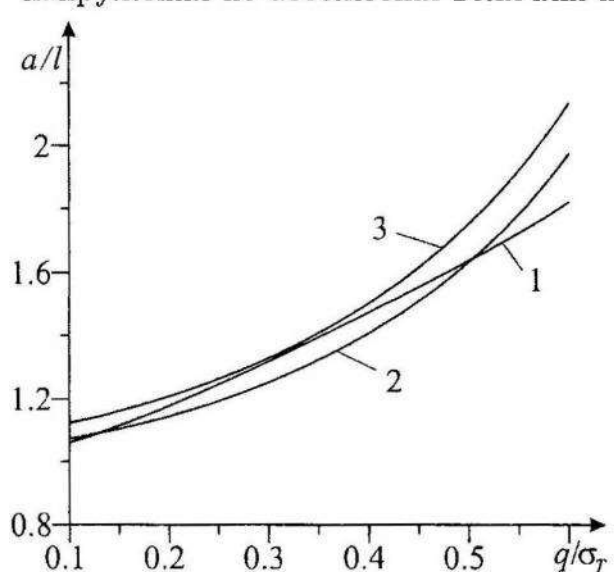


Рис. 6

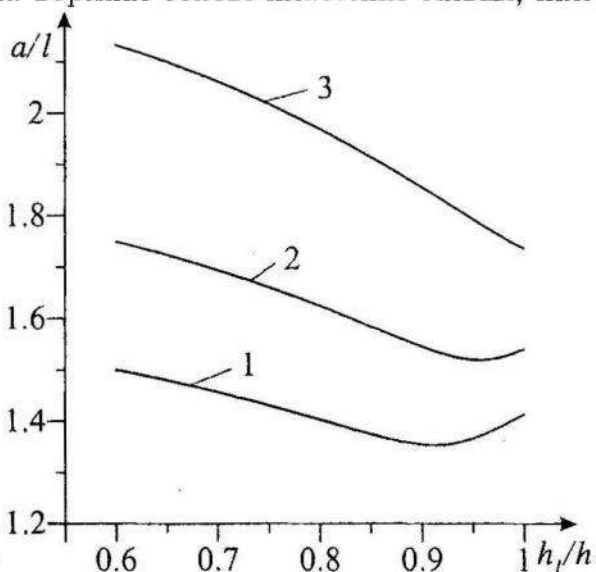


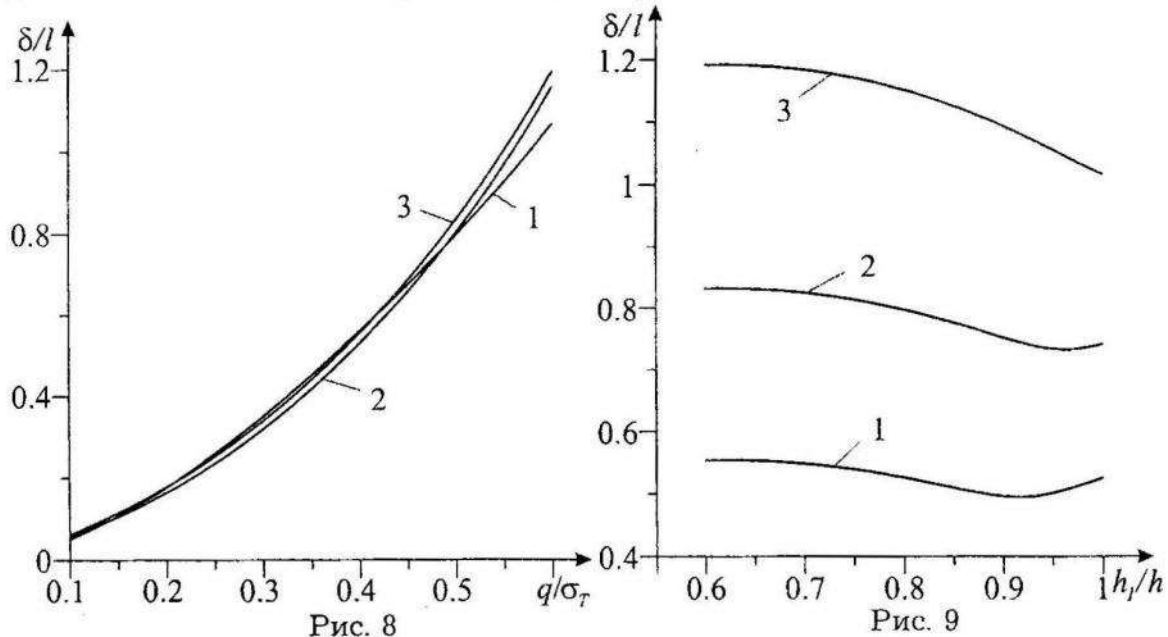
Рис. 7

на нижній основі, крім того, вони по модулю зростають на верхній основі та зменшуються на нижній основі, коли h_1 зменшується; зі зростанням $|x|$ вони прямують до нуля.

На рис. 6 і 8 крива 1 побудована при $h_1 / h = 1$ (випадок наскрізної тріщини), крива 2 – при $h_1 / h = 0,8$, крива 3 – при $h_1 / h = 0,6$.

На рис. 7 і 9 крива 1 відповідає $q / \sigma_T = 0,4$, крива 2 – при $q / \sigma_T = 0,5$ і крива 3 – $q / \sigma_T = 0,6$.

На рис. 6 зображено графічну залежність відносної довжини пластичної зони a / l від безрозмірного розподіленого навантаження q / σ_T , а на рис. 7 – та сама залежність тільки від відносної глибини ненаскрізної тріщини h_1 / h . На підставі рис. 6 можна зробити висновок, що незалежно від глибини ненаскрізної тріщини зростання розподіленого навантаження q приводить до зростання довжини пластичної зони. Зростання глибини ненаскрізної тріщини за сталого q приводить спочатку до спадання довжини пластичної зони, а потім до її зростання.



На рис. 8 показано графічну залежність відносного розкриття δ / l у вершині тріщини на нижній основі пластини від безрозмірного розподіленого навантаження q / σ_T , на рис. 9 – та сама залежність від відносної глибини ненаскрізної тріщини h_1 / h . Як видно з рис. 8, зі збільшенням q / σ_T величина розкриття δ / l збільшується, а при заданому навантаженні q глибина ненаскрізної тріщини не значно впливає на розкриття тріщини.

Список використаної літератури

1. Бакиров В.Ф. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейля для трещины на границе соединения материалов / В.Ф. Бакиров, Р.В. Гольдштейн // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 69, в. 1. – С. 170–179.
2. Божидарник В.В. Елементи теорії пластичності та міцності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим – Львів: Світ. – 1999. – Т. 1. – 531 с.
3. Витвицький П.М. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. (Обзор) / П.М. Витвицький, В.В. Панасюк, С.Я. Ярема // Пробл. прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
4. Довбня К.М. Вплив зміцнення матеріалу на напружений стан пружно-пластичної оболонки з внутрішньою тріщиною / К.М. Довбня, І.В. Дмитрієва // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 2. – С. 123–128.
5. Довбня К.М. Напружений стан пружно-пластичної ізотропної оболонки з наскрізною тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу / К.М. Довбня, В.В. Яртемик, І.В. Гур'єва // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 127–131.
6. Кир'ян В.І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / В.І. Кир'ян, В.А. Осадчук, М.М. Николишин – Львів: СПОЛОМ. – 2007.
7. Костюшко І.А. Пружнопластична пластина з тріщиною нормального відриву / І.А. Костюшко, В.А. Куземко // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2001. – 44, № 2. – С. 123–126.
8. Кривень В.А. Зони пластичності в околі вершин двох близьких паралельних тріщин за поздовжнього зсуву / В.А. Кривень // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2001. – 44, № 2. – С. 127–134.
9. Кушнір Р.М. Взаимодействие систем произвольно ориентированных трещин в упругопластической цилиндрической оболочке / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, Н.И. Ростун, Ю.П. Фещук // Теор. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 134–140.
10. Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук – Львів: СПОЛОМ. – 2003.
11. Кушнір Р.М. Пружно-пластична сферична оболонка з системою довільно орієнтованих тріщин / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, М.Й. Ростун // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 155–163.
12. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили – М.: Наука. – 1966.

13. *Николишин М.* Гранична рівновага трансверсально-ізотропної пружно-пластичної сферичної оболонки з двома колінеарними тріщинами / М. Николишин, Є. Федюк, Ю. Фещук // *Машинознавство*. – 2005. – № 7. – С. 17–21.
14. *Николишин М.М.* Двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М.М. Николишин, В.В. Опанасович, Л.Р. Куротчин, М.С. Слободян // *Мат. методи та фіз. мех. поля*. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 115–121.
15. *Николишин М.М.* Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М.М. Николишин, В.В. Опанасович, Л.Р. Куротчин // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2006. – Вип. 4 – С. 101–108.
16. *Николишин М.М.* Раскрытие несквозных трещин в пластине / М.М. Николишин // *Мат. методи та фіз. мех. поля*. – 1987. – № 26. – С. 29–31.
17. *Острик В.І.* Контакт з третям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву / В.І. Острик // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 58–65.
18. *Острик В.І.* Тріщина на межі розподілу півплощин з різних матеріалів / В.І. Острик, А.Ф. Улітко // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 119–126.
19. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин // *К.: Наук. думка*. – 1976.
20. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов // *Минск: Изд-во Белорус. ун-та*. – 1975.
21. *Саврук М.П.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук – *К.: Наук. думка*. – 1989.
22. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим – *Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ*. – 2007.
23. *Харун І.В.* Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів / І.В. Харун, В.В. Лобода // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2002. – Т. 45, №2. – С. 103–113.
24. *Bhargava R.R.* The Dugdale Solution for two unequal straight cracks weakening in an infinite / R.R. Bhargava, Hasan Shehzad // *Indian Academy of Sciences*. – 2010. – Vol. 35, Part. 1. – P. 19–29.
25. *Castro et alii J.T.P.* Characterization of crack tip stress fields / Castro et alii J.T.P. // *Forni di Sopra (UD)*. – 2011. – P. 58–65.

26. *Dong Y.F.* Computational modeling of elastic and plastic multiple cracks by the fundamental solutions / Y.F. Dong, M. Denda // Finite elements in analysis and design. – 1996. – 23, – P. 115–132.
27. *James R. Rice.* The elastic-plastic mechanics of crack extension. / R. Rice James // International Journal of Fracture Mechanics. – 1968. – 4 – P. 41–49.
28. *Jong-Min Kim.* Crack interaction effects of in-plane surface cracks using elastic and elastic-plastic finite element analyses / Kim Jong-Min, Huhon Nam-Su // Nuclear engineering and technology. – 2010. – Vol. 42, No. 6. – P. 680–689.
29. *Nikishkovi G.P.* Three-dimensional elastic-plastic J-integral calculations for semielliptical surface cracks in a tensile plate / G.P. Nikishkovi, S.N. Atluris // Engineering fracture mechanics. – 1988. – Vol. 29, No. 1. – P. 81–87.
30. *Swedlow J. L.* Elasto-plastic cracked plates in plane strain / J.L. Swedlow // Int. Journ. of Fracture Mech. – 1969. – 5 – P. 33–44.
31. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various foundary conditious in angular corners or plates in extension / M.L. Williams // Trans. ASME. J.Appl. Mech. – 1952. – 19, № 4. – P. 526–535.

ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ И НЕСКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ В НЕЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН У ЕЕ ВЕРШИН

**Мирон НИКОЛИШИН¹, Виктор ОПАНАСОВИЧ²,
Леся КУРОТЧИН¹, Николай СЛОБОДЯН²**

¹ *Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Пидстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина*

² *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Рассмотрена задача о двухосном растяжении кусочно-однородной изотропной пластины с прямолинейной границей раздела материалов и с несквозной трещиной. Предполагают, что берега трещины свободны от внешней нагрузки, а у ее вершин на продолжении трещины образуются пластические зоны, где выполняются условия пластичности Треска в виде поверхностного пластического слоя. Поскольку трещина несквозная, то решение задачи разбиваем на задачу растяжения и изгиба пластины,

используя классическую теорию изгиба. Найдено напряженное состояние пластины на границе раздела материалов. Проведено численный анализ задачи и определены длины пластических зон и раскрытие трещины на ее фронте.

Ключевые слова: растяжение, пластина, трещина, пластические зоны, комплексные потенциалы, условие пластичности Треска, раскрытие трещины.

BIAXIAL TENSION OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH A STRAIGHT BOUNDARY BETWEEN MATERIAL AND NON-THROUGH CRACK IN IT, TAKING INTO ACCOUNT THE PLASTIC ZONE AT ITS EDGES

**Miron NIKOLISHIN¹, Victor OPANASOVYCH²,
Lesya KUROTCHYN¹, Mykola SLOBODYAN²**

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine*

²*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The problem of the biaxial tension piecewise-homogeneous isotropic plate with a straight boundary between material and non-through crack. It is believed that the edges of the crack are free from external loading, and at its vertices on the continuation of the crack plastic zones are formed, where the conditions of Tresca plasticity in the form of the surface of the plastic layer. Because crack is not through, then divide the solution to the problem of stretching and bending of the plate, using the classical theory of bending. We found the state of stress at the interface of the plate material. A numerical analysis of the problem and determined the length of the plastic zone and crack opening at its front.

Key words: tension, plate, crack, plastic zone, the complex potentials, the condition of Tresca plasticity.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.2011
Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 517.95

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Галина ЛОПУШАНСЬКА¹, Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

²Інститут математики Ряшівського університету,
Алея Тадеуша Рейтана, 16 35-959 Ряшів, Польща

Одержано оцінки фундаментального розв'язку рівняння

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = \delta(x, t), \quad (x, t) \in R^{n+1}$$

з частинними дробовими похідними Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$, $u_{x_j}^{(\alpha)}$ та сталими

коефіцієнтами b_j , $j = \overline{1, n}$ за умови $\sum_{j=1}^n b_j p_j^\alpha \geq C_0$ для всіх $p \in R^n, |p| = 1$.

Ключові слова: похідна дробового порядку, узагальнена функція, фундаментальний розв'язок, Н-функція Фокса.

Побудові фундаментальних функцій операторів з частинними дробовими похідними присвячено праці [1–7] та ін. Ми узагальнюємо результат [7] на випадок однорідного еліптичного оператора з дробовими похідними та

сталими коефіцієнтами (замість оператора $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ у [7]). Одержані результати мають застосування для розв'язності задачі Коші для таких рівнянь (зокрема і у просторі узагальнених функцій, наприклад, у [8]) та при дослідженні дифузійних процесів [5].

Нехай $D(R^n) = C_0^\infty(R^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в R^n , $D'(R^n)$ – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $D(R^n)$, (f, φ) – значення $f \in D'(R^n)$ на основній функції $\varphi \in D(R^n)$.

Розглянемо оператор з дробовими похідними

$$Au(x) = A(x, \partial)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} a(x, \xi) (Fu)(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [a(x, \xi) (F_{x \rightarrow \xi} u)(\xi)],$$

$u \in D(R^n)$, де Fu – перетворення Фур'є функції u ,

$$a(x, \xi) = \sum_{j=0}^N \sum_{|\gamma|=s_j \leq s} a_\gamma(x) (-i\xi)^\gamma \quad (\text{скорочений запис } a(x, \xi) = \sum_{|\gamma| \leq s} a_\gamma(x) (-i\xi)^\gamma),$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, γ_j , $j = 1, \dots, n$ – невід'ємні числа, які можуть бути дробовими, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, $i^2 = -1$, $(-i\xi)^\gamma = (-i\xi_1)^{\gamma_1} \cdot (-i\xi_n)^{\gamma_n}$, $a_\gamma \in C^\infty(R^n)$.

Позначаємо через $\hat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ ([9], с. 111): $(g \hat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi))$, через $*$ позначаємо операцію згортки узагальнених функцій f і g ([9], с. 111) – узагальнену функцію $f * g$: $(f * g, \varphi) = (f, g \hat{*} \varphi)$ для кожної основної функції φ .

Нехай $f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$ і $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \leq 0$, де $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда, $f_\gamma(x) = f_{\gamma_1}(x_1) \times \dots \times f_{\gamma_n}(x_n)$ – прямий добуток ([10], с. 126) узагальнених функцій f_{γ_j} , $j = 1, \dots, n$. Правильні співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Визначаємо ([10], с. 143) похідну Рімана-Ліувілля дробового порядку β функції $v \in D'(R)$

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t) = f'_{1-\beta}(t) * v(t) = f_{1-\beta}(t) * v'(t).$$

Зауважимо, що

$$f_{-\beta}(t) \hat{*} v(t) = f'_{1-\beta}(t) \hat{*} v(t) = -f_{1-\beta}(t) \hat{*} v'(t), \quad v \in D(R).$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} (-i\xi)^\gamma (Fu)(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \int_{R^n} (-i\xi)^\gamma e^{i(x-y, \xi)} u(y) dy d\xi = \frac{1}{(-2\pi)^n} \int_{R^n} \int_{R^n} (-i\xi)^\gamma e^{i(t, \xi)} u(x-t) dt d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(-2\pi)^n} \int_{R^n} (-i\xi)^\gamma (e^{i(x,\xi)} * u(x)) d\xi = \frac{1}{(-2\pi)^n} \int_{R^n} (-i\xi)^\alpha e^{i(x,\xi)} d\xi * u(x) = \\
&= (-1)^n F^{-1}[(-i\xi)^\gamma] * u(x) = f_{-\gamma}(x) * u(x).
\end{aligned}$$

Отже, $Au(x) = \sum_{|\gamma| \leq s} a_\gamma(x) (f_{-\gamma}(x) * u(x))$, $u \in D(R^n)$.

Зауважимо, що для довільних $u, v \in D(R^n)$

$$\int A u \bar{v} dx = \int \sum_{|\gamma| \leq s} a_\gamma(x) (f_{-\gamma}(x) * u(x)) \overline{v(x)} dx = \int \sum_{|\gamma| \leq s} u(x) (f_{-\gamma}(x) \hat{*} a_\gamma(x) \overline{v(x)}) dx,$$

тому формально спряжений оператор до оператора A набуває вигляду

$$A^* v(x) = \sum_{|\gamma| \leq s} \overline{f_{-\gamma} \hat{*} (a_\gamma \bar{v})}, \quad A^* v(x) = \sum_{|\gamma| \leq s} f_{-\gamma} \hat{*} (a_\gamma \bar{v}),$$

якщо a_γ — дійснозначні.

Псевдодиференціальний оператор A називається *еліптичним* в області $\Omega \in R^n$, якщо існують такі додатні сталі C_1, C_2 , що

$$|a(x, \xi)| \geq C_1(1 + |\xi|)^s \quad \forall x \in \Omega, |\xi| \geq C_2.$$

В [4] методом Радона ([9], с. 206) побудована фундаментальна функція $\omega_0(x) = \omega(x, 0)$ однорідного еліптичного оператора з дробовими похідними $A = A(x, \partial) = \sum_{|\gamma|=s} a_\gamma f_{-\gamma}(x)$ зі сталими коефіцієнтами a_γ , $|\gamma| = s$.

Використаємо перетворення Радона за просторовими змінними $x_1, \dots, x_n$ для знаходження розв'язку $\omega(x, t) = \omega_n(x, t)$ рівняння

$$f_{-\beta}(t) * \omega(x, t) - \sum_{j=1}^n b_j f_{-\alpha}(x_j) * \omega(x, t) = \delta(x, t), \quad (x, t) \in R^{n+1} \quad (1)$$

зі сталими коефіцієнтами b_j , $j = 1, \dots, n$ за умови

$$\sum_{j=1}^n b_j p_j^\alpha \geq C_0 \quad \forall p \in R^n, |p| = 1. \quad (2)$$

Тут $\delta(x, t)$ — дельта-функція Дірака.

Теорема. При $\alpha > \beta$ або $\alpha < \beta < 2$ та за умови (2) існує фундаментальний розв'язок $\omega_n(x, t)$ рівняння (1), для якого правильні оцінки

$$|\omega_n(x, t)| \leq \frac{C_n^*}{t |x|^{n-\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \quad |x|^\alpha < t^\beta, \quad (3)$$

$$|\omega_n(x, t)| \leq \frac{C_n}{t^{1-\beta} |x|^\mu}, \quad |x|^\alpha > t^\beta, \quad x \in R^n, t > 0. \quad (4)$$

При $\alpha \neq \frac{n+2m}{\sigma}$, $m = 0, 1, \dots, \sigma = 1, 2, \dots$ в оцінці (3) логарифм можна опустити.

Доведення. Нехай Σ_n – одинична сфера в R^n , $p \in \Sigma_n, \xi = (p, x) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$, $b^2 = b^2(p) = \sum_{j=1}^n b_j p_j^\alpha$. Зауважимо, що за умови (2) $b^2(p) \geq C_0 > 0$ для всіх $p \in \Sigma_n$.

Шукаємо функцію $\omega_n(x, t)$ у вигляді

$$\omega_n(x, t) = \int_{\Sigma_n} \omega_{p,n}(\xi, t) dS_p. \quad (5)$$

За властивістю згортки

$$\sum_{j=1}^n b_j f_{-\alpha}(x_j) * \omega_{p,n}((p, x), t) = \sum_{j=1}^n b_j p_j^\alpha (f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,n}(\xi, t)).$$

Враховуючи, що $\delta(x, t) = \delta(x) \times \delta(t)$, для $\delta(x)$ правильні зображення ([9], с. 103)

$$\delta(x) = a_n^0 \int_{\Sigma_n} \delta^{(n-1)}(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n) dS_p, \quad a_n^0 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}, \quad (6)$$

при непарному n , а при парному n

$$\delta(x) = b_n^0 \int_{\Sigma_n} (p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)^{-n} dS_p, \quad b_n^0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}, \quad (7)$$

для знаходження $\omega_{p,n}$ одержуємо рівняння

$$f_{-\beta}(t) * \omega_{p,2k+1}(\xi, t) - b^2(p)f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,2k+1}(\xi, t) = a_{2k+1}^0 \delta^{(2k)}(\xi) \times \delta(t), \quad (8)$$

$$f_{-\beta}(t) * \omega_{p,2k}(\xi, t) - b^2(p)f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,2k}(\xi, t) = b_{2k}^0 \xi^{-2k} \times \delta(t). \quad (9)$$

Використовуючи результати [7], знаходимо фундаментальний розв'язок $G_p(\xi, t)$ рівняння

$$f_{-\beta}(t) * G_p(\xi, t) - b^2(p)f_{-\alpha}(\xi) * G_p(\xi, t) = \delta(\xi, t). \quad (10)$$

За теоремою з ([10], с. 142) розв'язки рівнянь (8) та (9) набувають вигляду

$$\omega_{p,2k+1}(\xi, t) = a_{2k+1}^0 G_p(\xi, t) * \delta^{(2k)}(\xi) = a_{2k+1}^0 \frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}} G_p(\xi, t) = a_{2k+1}^0 \frac{d^{2k}}{d|\xi|^{2k}} G_p(|\xi|, t), \quad (11)$$

$$\omega_{p,2k}(\xi, t) = b_{2k}^0 G_p(\xi, t) * \xi^{-2k}. \quad (12)$$

Згідно з [7]

$$G_p(\xi, t) = \frac{\pi^{1/2} t^{\beta-1}}{|\xi|} H_{2,3}^{2,1} \left(\frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha b^2(p) t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\beta, \beta) \\ (1,1) & (1/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{matrix} \right),$$

де $H_{p,q}^{m,n} \left(z \middle| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right)$ – H-функція Фокса [11].

Використовуємо позначення з [11] для $H_{p,q}^{m,n}$

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{i=m+1}^q \beta_i, \Delta^* = \sum_{i=1}^q \beta_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i.$$

Для функції G_p отримаємо $a^* = 2 - \beta$, $\Delta^* = \alpha - \beta$. Тому за умов теореми функція G_p існує для всіх $\xi \neq 0$, $t > 0$.

Використовуючи формулу диференціювання для H-функцій Фокса ([11], с. 33), одержимо

$$\omega_{p,2k+1}(\xi, t) = \frac{a_{2k+1}^0 \pi^{1/2} t^{\beta-1}}{|\xi|^{2k+1}} H_{3,4}^{3,1} \left(\frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha b^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\beta, \beta) & (1, \alpha) \\ (2k+1, \alpha) & (1,1) & (1/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{matrix} \right).$$

У [11] побудовано асимптотику для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.6) та (1.3.2) із [11], за теоремою 1.7 із [11] одержуємо оцінки

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi, t)| \leq \frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta} |\xi|^{2k+1}} \text{ при } |\xi|^\alpha > t^\beta,$$

а за наслідком 1.12.1 із теореми 1.12 [11]

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi, t)| \leq \frac{q_{2k+1}^* t^{\beta-1}}{|\xi|^{2k+1}} \left(\frac{|\xi|^\alpha}{t^\beta} \right)^{\min\{1, \frac{1}{\alpha}\}} \ln \frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha} \text{ при } |\xi|^\alpha < t^\beta,$$

звідки

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi, t)| \leq \frac{q_{2k+1}^*}{t |\xi|^{2k+1-\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha}, \text{ якщо } \alpha < 1,$$

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi, t)| \leq \frac{q_{2k+1}^*}{t^{1-\beta(1-\frac{1}{\alpha})} |\xi|^{2k}} \ln \frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha} \text{ у випадку } \alpha \geq 1.$$

Тут і далі $q_i, q_i^*, q_{i,j}, q_{i,j}^*$ – певні додатні сталі. У випадку $\alpha \neq \frac{n+2m}{\sigma}$, $m = 0, 1, \dots, \sigma = 1, 2, \dots$ правильні такі ж оцінки без логарифмів.

Тепер за формулою (11) та з одержаних вище оцінок функції $\omega_{p,2k+1}(\xi, t)$ отримуємо оцінки шуканого фундаментального розв'язку. У випадку $\alpha < 1$ матимемо

$$|\omega_{2k+1}(x, t)| \leq \frac{q_{2k+1}^*}{t} \int_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\xi|^\alpha < t^\beta\}} |\xi|^{-(2k+1-\alpha)} \ln \frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha} d_p S +$$

$$+ \frac{q_{2k+1}^*}{t^{1-\beta}} \int_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\xi|^\alpha > t^\beta\}} |\xi|^{-2k-1} d_p S = I_1(x, t) + I_2(x, t).$$

Зауважимо, що другого доданка немає у випадку $|x|^\alpha < t^\beta$, оскільки $|\xi| = |x| |\cos(x, p)| \leq |x|$ при $p \in \Sigma_{2k+1}$. При $|x|^\alpha > t^\beta$ одержуємо

$$0 \leq I_2(x, t) = \frac{q_{2k+1}^*}{t^{1-\beta}} \int_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\xi|^\alpha > t^\beta\}} |\xi|^{-2k-1} d_p S \leq \frac{q_{2k+1}^*}{t^{1-\beta+\frac{\beta}{\alpha}}} \int_{\Sigma_{2k+1}} |\xi|^{-2k} d_p S = 0.$$

Останню рівність одержали на підставі формули вправи 10 із ([9], с. 105–106), за якою $\int_{\Sigma_{2k+1}} \xi^{-2k} d_p S = 0$. Отже, $I_2(x, t) = 0$.

Використовуючи формули цієї ж вправи, обчислюємо $I_1(x, t)$. Виконуючи заміну $\eta = \frac{\xi}{t^\alpha} = p_1 \frac{x_1}{t^\alpha} + \dots + p_n \frac{x_n}{t^\alpha}$, знаходимо

$$\begin{aligned} I_1(x, t) &= q_{2k+1}^* \alpha t^{-1-(2k+1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha}} \left(\int_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\eta| < 1\}} |\eta|^{-(2k+1-\alpha)} \ln \frac{1}{|\eta|} d_p S \right) \left(\frac{x}{t^\alpha} \right) \leq \\ &\leq q_{2k+1}^* \alpha t^{-1-(2k+1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha}} \left(\int_{\Sigma_{2k+1}} |\eta|^{-(2k+1-\alpha)} \ln \frac{1}{|\eta|} d_p S \right) \left(\frac{x}{t^\alpha} \right) \leq \frac{q_{2k+1,1}^*}{t |x|^{2k+1-\alpha}} \left| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \right|. \end{aligned}$$

При $|x|^\alpha < t^\beta$ одержуємо оцінку (3). Враховуючи, що при $|x|^\alpha > t^\beta$ отримаємо $\left| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \right| = \ln \frac{|x|^\alpha}{t^\beta} \leq C \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$, з попередньої оцінки одержуємо

$$|\omega_{2k+1}(x, t)| \leq \frac{q_{2k+1,1}^*}{t |x|^{2k+1-\alpha}} \ln \frac{|x|^\alpha}{t^\beta} \leq \frac{C_{2k+1}}{t^{1-\beta} |x|^{2k+1}}, \text{ а отже, оцінку (4).}$$

При $\alpha \geq 1$ згідно з формулою (11) та оцінками функції $\omega_{p,2k+1}(\xi, t)$ знаходимо

$$\begin{aligned} |\omega_{2k+1}(x, t)| &\leq q_{2k+1}^* \int_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\xi|^\alpha < t^\beta\}} \frac{|\xi|^{-2k}}{t^{1-\beta(1-\frac{1}{\alpha})} |\xi|^\alpha} \ln \frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha} d_p S + \\ &+ \frac{q_{2k+1}^*}{t^{1-\beta}} \int_{\Sigma_{2k+1} \cap \{p: |\xi|^\alpha > t^\beta\}} |\xi|^{-2k-1} d_p S \leq \\ &\leq \frac{q_{2k+1,1}^*}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha})} |x|^{2k}} \left| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \right| + \frac{q_{2k+1,1}^*}{t^{1-\beta+\frac{\beta}{\alpha}} \Sigma_{2k+1}} \int \xi^{-2k} d_p S = \frac{q_{2k+1,1}^*}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha})} |x|^{2k}} \left| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \right|. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що $t^{-\frac{\beta}{\alpha}} < |x|^{-1}$ при $|x|^\alpha > t^\beta$, одержуємо оцінку (3), тому що $\left| \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \right| = \ln \frac{|x|^\alpha}{t^\beta} \leq C \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$ при $|x|^\alpha > t^\beta$, а при $\alpha \geq 1$ ще й $t^{\beta(1-\frac{1}{\alpha})} < |x|^{\alpha-1}$, одержуємо оцінку (4).

Тепер розглянемо випадок $n = 2k$. Існування згортки у формулі (12) не очевидне. Тому простіше знайти функцію $\omega_{2k}(x, t)$ методом спуску ([10], с. 195–198) за змінною x_{2k+1}

$$\omega_{2k}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{2k+1}(x, z, t) dz = 2 \int_0^{+\infty} \omega_{2k+1}(x, z, t) dz, \text{ де } x = (x_1, \dots, x_{2k}).$$

Використовуючи оцінки (3), (4) при $n = 2k + 1$, обчислюємо одержані інтеграли з використанням формул 2.2.3.5 та 2.6.5.4 із [12]. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei. – Birkhauser Verlag. – Basel-Boston-Berlin, 2004.
2. *Engler H.* Similarity solutions for a class of hyperbolic integrodifferential equations / H. Engler // Differential Integral Eqns. – 10 (5). – 1997. – P. 815–840.
3. *Ворошилов А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, №4. – С. 451–454.
4. *Лопушанська Г.П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних / Г.П. Лопушанська // Укр. мат. журн. – Т. 51, №1. – 1999. – С. 48–59.
5. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data / V.V. Anh, N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics. – 2001. – 104 (5/6). – P. 1349–1387.
6. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. – М.: Наука, 2005.
7. *Jun Sheng Duan.* Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phys. – Vol. 46, No. 1. – 2005. – P. 13504–13511.
8. *Лопушанская Г.П.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, О.В. Пасичник // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, №6. – С. 1288–1299.
9. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.

10. Владимир В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимир. – М.: Наука, 1981.
11. Kilbas A.A. H-Transforms / A.A. Kilbas, M. Saigo. – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC. – 2004.
12. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1981.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Галина ЛОПУШАНСКАЯ¹, Андрей ЛОПУШАНСКИЙ²

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

²Институт математики Жешувского университета,
Алея Тадеуша Рейтана, 16 35-959 Жешув, Польша

Получено оценки фундаментального решения уравнения

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = \delta(x, t), \quad (x, t) \in R^{n+1}$$

с частными дробными производными Римана-Лиувилля $u_t^{(\beta)}$, $u_{x_j}^{(\alpha)}$ и

постоянными коэффициентами b_j , $j = \overline{1, n}$ при условии $\sum_{j=1}^n b_j p_j^\alpha \geq C_0$ для

всех $p \in R^n, |p| = 1$.

Ключевые слова: производная дробного порядка, обобщенная функция, фундаментальное решение, H-функция Фокса.

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE EQUATIONS WITH PARTIAL FRACTIONAL DERIVATIVES

Halina LOPUSHANSKA¹, Andriy LOPUSHANSKYJ²

*¹Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

*²Institute of Mathematics Rzeszyw University,
Aleja Tadeusza Rejtana, 16 35-959 Rzeszyw, Poland*

We obtain the estimates of the fundamental solution of the equation

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = \delta(x, t), \quad (x, t) \in R^{n+1}$$

with partial fractional derivatives of Riemann-Liouville $u_t^{(\beta)}$, $u_{x_j}^{(\alpha)}$ and

constant coefficients b_j , $j = \overline{1, n}$ under the condition $\sum_{j=1}^n b_j p_j^\alpha \geq C_0$ for all

$p \in R^n, |p| = 1$.

Key words: fractional derivative, generalized function, fundamental solution, H-function of Fox.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК: 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПІВСМУЗІ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ТОРЦЬОВОМУ НАГРІВАННІ

Ольга ТУРЧИН

*Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103 79057 Львів, Україна*

З використанням інтегрального перетворення Лагерра та $\cos$ -перетворення Фур'є одержано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для композитної півсмуги, що нагрівається по бічній поверхні. Подано числовий аналіз температурного поля в симетричній півсмугі з покриттям при різних відношеннях теплофізичних характеристик покриття та основи.

Ключові слова: нестационарна теплопровідність, композитна півсмуга, перетворення Лагерра.

Практично всі елементи сучасної техніки, які залежно від призначення можуть зазнавати теплових чи силових навантажень різного типу, є неоднорідними за своїми властивостями. З одного боку, використання неоднорідності пов'язане з неможливістю задовольнити високі експлуатаційні вимоги, які тепер ставлять до матеріалів і конструкцій, лише за допомогою однорідних структур, а з іншого – з хімічними та фізичними процесами, що відбуваються під час їхнього виготовлення та експлуатації [4].

Основи теорії та методи розв'язування задач теплопровідності для тіл з різними тонкими неоднорідностями викладені у працях багатьох авторів, детальний огляд яких можна знайти, зокрема в [3]. Якщо опис неоднорідності з використанням математичних спрощень призводить до значних похибок, то використовують просторові формулювання. Цей підхід, як відомо [3, 7], ґрунтується на розгляді відповідних вихідних рівнянь для кожного елемента композитного тіла з подальшим узгодженням розв'язків через умови спряження елементів.

Мета нашої праці – розробити ефективну методику дослідження перехідних температурних полів у півбезмежних шаруватих середовищах при значній відмінності теплофізичних властивостей складових.

У зв'язку з цим розглянемо півсмугу $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq H$, яка складається з основи ($h_1 \leq y \leq h_1 + h_2$) та двох зовнішніх покриттів товщиною h_1 і h_3 , ($h_1 + h_2 + h_3 = H$) з відмінними від основи коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_T^{(i)}$ та температуропровідності $a_T^{(i)}$. Починаючи з моменту часу $t = 0$, композитна півсмуга нагрівається по торцю $x = 0$ потоком тепла інтенсивності $q(t)$, а на граничних поверхнях $y = 0$, $y = H$ відбувається теплообмін за законом Ньютона з зовнішнім середовищем нульової температури.

Уведемо в розгляд безрозмірні змінні та величини $\alpha = x / H$, $\gamma = y / H$, $\tau = a_T^{(2)} t / H^2$, $\gamma_1 = h_1 / H$, $\gamma_2 = (h_1 + h_2) / H$, $\tilde{q}(\tau) = q(H^2 \tau / a_T^{(2)}) H / \lambda_T^{(2)}$, $Bi_i = \kappa_i H / \lambda_T^{(i)}$, $\tilde{a}_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$, де κ_i – коефіцієнти тепловіддачі з поверхні $y = 0$ ($i = 1$) та з поверхні $y = H$ ($i = 3$), $a_T^{(2)}$ і $\lambda_T^{(2)}$ – теплофізичні характеристики основи.

Вважаючи, що між основою та покриттями виконуються умови ідеального теплового контакту, температурне поле $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ в основі ($i = 2$), верхньому ($i = 1$) та нижньому ($i = 3$) покритті визначимо з рівнянь нестационарної теплопровідності

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_T^{(i)} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (1)$$

за нульових початкових умов

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

крайових умов

$$\tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_{\alpha} T^{(i)} = -\tilde{q}(\tau), \quad \alpha = 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (3)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(1)} - Bi_1 T^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0; \quad \partial_{\gamma} T^{(3)} + Bi_3 T^{(3)} = 0, \quad \gamma = 1 \quad (4)$$

та умов спряження основи та покриттів

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_{\gamma} T^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \partial_{\gamma} T^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (5)$$

До рівнянь (1), крайових умов (4) та умов спряження (5) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра [2] за часовою змінною τ та косинус-перетворення Фур'є за змінною α [5]. У підсумку, врахувавши початкові умови (2) та умови на торці півсмуги (3), прийдемо до послідовності крайових задач

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}) \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_T^{(i)} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)} - \tilde{q}_n^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, 2, 3}, \quad (6)$$

де $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \cos(\xi\alpha) d\alpha$ – трансформанти

за Лагерром і Фур'є, $\tilde{q}_n^{(i)} = \tilde{q}_n / \tilde{\lambda}_T^{(i)}$, $\tilde{q}_n = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda\tau) \tilde{q}(\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau$ –

трансформанта за Лагерром, $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра, λ – масштабний множник [6].

Загальний розв'язок послідовності (6) подамо у вигляді

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right] + Q_n^{(i)}, \quad (7)$$

де $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки однорідних послідовностей

$$\begin{aligned} d_{\gamma}^2 G_j^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) G_j^{(i)} &= \lambda \tilde{a}_T^{(i)} \sum_{m=0}^{j-1} G_m^{(i)}, \\ d_{\gamma}^2 W_j^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) W_j^{(i)} &= \lambda \tilde{a}_T^{(i)} \sum_{m=0}^{j-1} W_m^{(i)}, \end{aligned} \quad (8)$$

а $Q_n^{(i)}$ – частковий розв'язок неоднорідної послідовності, яка, враховуючи, що $\tilde{q}_n^{(i)}$ не залежить від змінної γ , набуває вигляду рекурентного рівняння

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \left[\tilde{q}_n^{(i)} - \lambda \tilde{a}_T^{(i)} \sum_{m=0}^{n-1} Q_m^{(i)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

розв'язок якого з використанням методу математичної індукції одержано у вигляді

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \left\{ \tilde{q}_n^{(i)} - \frac{\lambda \tilde{a}_T^{(i)}}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \right)^{n-1-k} \tilde{q}_k^{(i)} \right\}. \quad (10)$$

Загальні розв'язки однорідних послідовностей (6) згідно з методом невизначених коефіцієнтів можна подати як

$$G_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad W_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad (11)$$

де введено позначення $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}}$.

Безпосередня підстановка розв'язків (11) у послідовності (12) призводить до рекурентних співвідношень на $a_{j,k}^{(i)}$ [6]

$$a_{j,k+1}^{(i)} = 0.5 \left(a_{j,k+2}^{(i)} - \frac{\lambda \tilde{a}_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)} \right) \quad (12)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$.

Для знаходження невідомих $A_k^{(i)}(\xi)$ та $B_k^{(i)}(\xi)$, які входять до розв'язку (7), використаємо крайові умови (4) та умови спряження (5), які після застосування до них інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є набудуть вигляду

$$d_\gamma \bar{T}_n^{(1)} - B_{i_1} \bar{T}_n^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0; \quad d_\gamma \bar{T}_n^{(3)} + B_{i_3} \bar{T}_n^{(3)} = 0, \quad \gamma = 1 \quad (13)$$

$$\bar{T}_n^{(i)} = \bar{T}_n^{(i+1)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\gamma \bar{T}_n^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\gamma \bar{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Прийmemo в рекурентних співвідношеннях (12) $a_{0,0}^{(i)} = 1, a_{j,0}^{(i)} = 0, j = 1, 2, \dots$, тоді

$$G_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(-\omega_i \gamma), \quad d_\gamma G_0^{(i)}(\xi, \gamma) = -\omega_i \exp(-\omega_i \gamma), \\ W_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(\omega_i \gamma), \quad d_\gamma W_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \omega_i \exp(\omega_i \gamma) \quad (15)$$

та розглянемо, враховуючи (7), першу умову (13)

$$\sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(d_\gamma G_j^{(1)}(\xi, 0) - B_{i_1} G_j^{(1)}(\xi, 0) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(d_\gamma W_j^{(1)}(\xi, 0) - B_{i_1} W_j^{(1)}(\xi, 0) \right) \right] + Q_n^{(1)} = 0.$$

Залишимо в лівій частині цих співвідношень невідомі з індексом n , а решту перенесемо в праву частину. Враховуючи подання (15), одержимо рівняння, яке пов'язує коефіцієнти $A_n^{(1)}(\xi)$ та $B_n^{(1)}(\xi)$ з коефіцієнтами, що мають індекси $k = 1, 2, \dots, n-1$ та відомими $Q_n^{(1)}$.

$$A_n^{(1)}(\xi) (-\omega_1 - B_{i_1}) + B_n^{(1)}(\xi) (\omega_1 - B_{i_1}) = - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(d_\gamma G_j^{(1)}(\xi, 0) - B_{i_1} G_j^{(1)}(\xi, 0) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(d_\gamma W_j^{(1)}(\xi, 0) - B_{i_1} W_j^{(1)}(\xi, 0) \right) \right] - Q_n^{(1)}.$$

Провівши аналогічні викладення з другою крайовою умовою (13) та умовами спряження (14), отримаємо послідовність систем рівнянь, яку можна записати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{4,3} & b_{4,4} & b_{4,5} & b_{4,6} \\ 0 & 0 & b_{5,3} & b_{5,4} & b_{5,5} & b_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{6,5} & b_{6,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \\ A_n^{(3)} \\ B_n^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,1} \\ c_{n,2} \\ c_{n,3} \\ c_{n,4} \\ c_{n,5} \\ c_{n,6} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= -\omega_1 - Bi_1; \quad b_{1,2} = \omega_1 - Bi_1; \quad b_{6,5} = -\omega_3 + Bi_3; \quad b_{6,6} = \omega_3 + Bi_3; \\ b_{2i,2i-1} &= \exp(-\omega_i \gamma_i); \quad b_{2i,2i} = \exp(\omega_i \gamma_i); \quad b_{2i,2i+1} = -\exp(-\omega_{i+1} \gamma_i); \\ b_{2i,2i+2} &= -\exp(\omega_{i+1} \gamma_i); \quad b_{2i+1,2i-1} = -\tilde{\lambda}_T^{(i)} \omega_i \exp(-\omega_i \gamma_i); \quad b_{2i+1,2i} = \tilde{\lambda}_T^{(i)} \omega_i \exp(\omega_i \gamma_i), \\ b_{2i+1,2i+1} &= \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} \exp(-\omega_{i+1} \gamma_i); \quad b_{2i+1,2i+2} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} \exp(\omega_{i+1} \gamma_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n,1} &= -\sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(d_\gamma G_j^{(1)}(\xi, 0) - Bi_1 G_j^{(1)}(\xi, 0) \right) + \right. \\ &\quad \left. + B_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(d_\gamma W_j^{(1)}(\xi, 0) - Bi_1 W_j^{(1)}(\xi, 0) \right) \right] - Q_n^{(1)}, \\ c_{n,6} &= -\sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(3)}(\xi) \left(d_\gamma G_j^{(3)}(\xi, 1) + Bi_3 G_j^{(3)}(\xi, 1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + B_{n-j}^{(3)}(\xi) \left(d_\gamma W_j^{(3)}(\xi, 1) + Bi_3 W_j^{(3)}(\xi, 1) \right) \right]; \\ c_{2i,n} &= -\sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right]; \\ c_{2i+1,n} &= -\tilde{\lambda}_T^{(i)} \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \\ &\quad + \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1}. \end{aligned}$$

Визначивши всі $A_n^{(i)}(\xi)$ та $B_n^{(i)}(\xi)$ з систем (16), остаточний розв'язок задачі подамо у вигляді

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi \alpha) d\xi. \quad (17)$$

За формулою (17) проводили розрахунок температурного поля в півсмузі у випадку, коли інтенсивність потоку тепла на торці задається виразом $\bar{q}(\tau) = q^* (1 - \exp(-\tau_0 \tau))$, де q^* – величина, що має розмірність температури, а τ_0 визначає час виходу теплового навантаження на стаціонарне значення. Тоді $\bar{q}_n = \bar{q}^* \left[\delta_{0n} / \lambda - (\tau_0)^n / (\lambda + \tau_0)^{n+1} \right]$, де δ_{0n} – символ Кронекера.

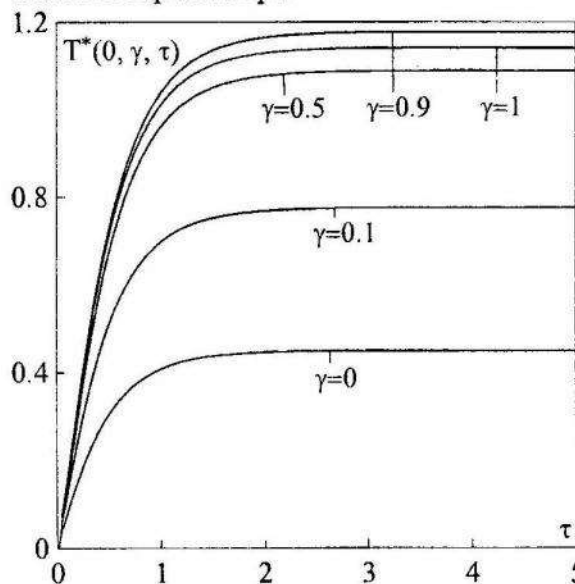


Рис. 1. Температура точок бокової поверхні при $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.5$

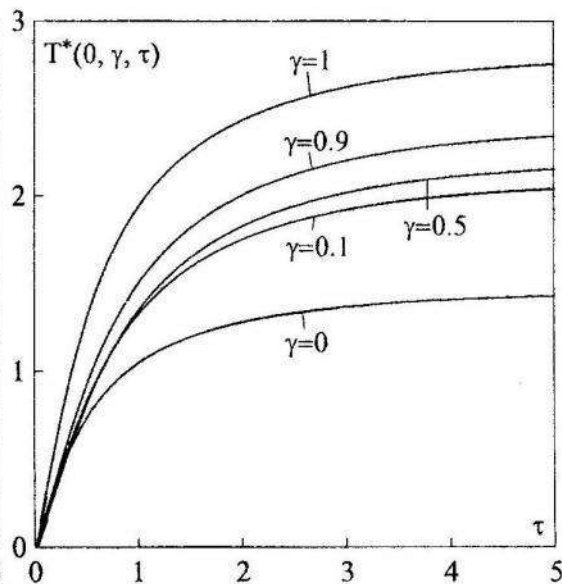


Рис. 2. Температура точок бокової поверхні при $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.1$

Теплофізичні властивості матеріалів, які використовують на практиці як покриття та основи, на які їх наносять, можуть значно відрізнятися [7, 8]. Ми при числових розрахунках розглядали фізично та геометрично симетричну композитну півсмугу: $\lambda_T^{(1)} = \lambda_T^{(3)}, a_T^{(1)} = a_T^{(3)}, h_1 = h_3$ та два варіанта відношення теплофізичних властивостей покриття та основи: $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.5$ і $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.1$, які дають змогу визначити характерні особливості трансформації температурного поля в градієнтних композитних плитах і визначити вплив зміни градієнтності їхніх властивостей на розподіл температур та теплових потоків [8].

На рис. 1 та 2 подані результати розрахунку залежності від часу τ безрозмірної температури $T^*(\alpha, \gamma, \tau) = T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / \bar{q}^*$ точок на боковій

поверхні півсмуги при $Bi_1 = 10$, $Bi_3 = 1$, $\tau_0 = 4$ для першого (рис. 1) і другого (рис. 2) варіантів відношення теплофізичних властивостей.

Як бачимо, зниження відносних теплопровідних властивостей покриття призводить до підвищення температури усіх точок поверхні нагрівання і до збільшення тривалості перехідного періоду. Крім того, якщо для другого варіанта співвідношення теплофізичних властивостей температура рівномірно зростає по товщині півсмуги (від поверхні з більш інтенсивним теплообміном до поверхні з менш інтенсивним теплообміном), то для першого варіанта температура граничної поверхні $\gamma = 1$ нижча від температури поверхні поділу матеріалів покриття та основи $\gamma = 0.9$.

На рис. 3 і 4 показано результати розрахунку безрозмірної температури торця півсмуги та поверхні $\alpha = 0.5$ в різні моменти часу при $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.1$.

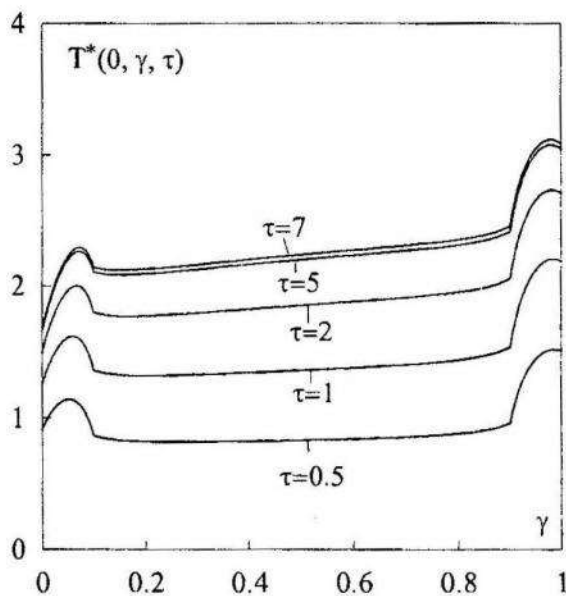


Рис. 3. Температура поверхні $\alpha = 0$ в різні моменти часу

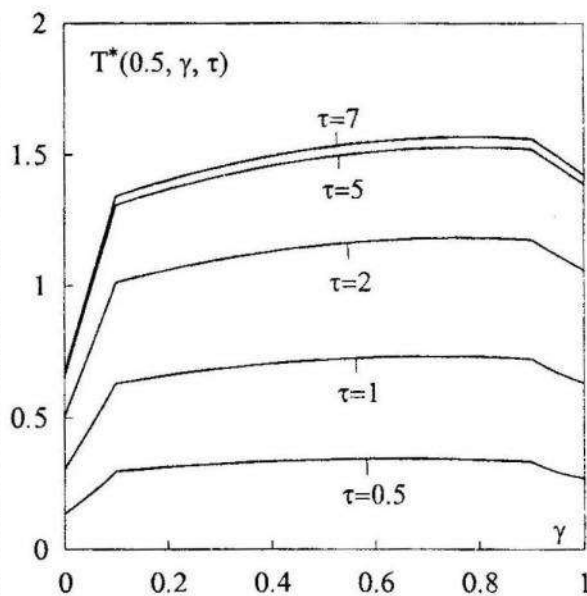


Рис. 4. Температура поверхні $\alpha = 0.5$ в різні моменти часу

Як видно, процеси нагрівання поверхонь, розташованих безпосередньо під джерелами тепла і на деякій відстані від них, якісно і кількісно різні. Безпосередня близькість джерел тепла зумовлює найінтенсивніше підвищення температури в покриттях, з віддаленням від поверхні нагрівання температура в них різко знижується, а сам процес нагріву покриттів в глибині півсмуги відбувається за рахунок теплопередачі від основи плити.

Список використаної літератури

1. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган – М., 1979.
2. *Галазюк В.* Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В. Галазюк // Доп. АН УРСР. – 1981. – №1. – С. 3-7.
3. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1992.
4. *Лилиус К.Р.* Функциональные градиентные материалы: развитие новых материаловедческих решений. / К.Р. Лилиус, М.М. Гасик // В кн.: Прогрессивные материалы и технологии. Т.2. –К., 2003. – С. 70-86.
5. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М., 1955.
6. *Турчин О.* Нестационарное осесимметричное температурное поле в шароватому півпросторі, зумовлене імпульсним нагрівом / О. Турчин, І. Турчин // Вісн. Львів. у-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 256-261.
7. *Nomura N.* Thermo-mechanical modeling of functionally graded thermal barrier coatings / N. Nomura, M. Gasik, A. Kawasaki, R. Watanabe // Ceram. Trans. – Amer. Ceram. Soc. – USA. – 2001. – **114**. – P. 223-229.
8. *Tamarin Y.* Protective coatings for turbine blades. / Y. Tamarin – ASM International, USA. – 2002.
9. *Yang X.-S.* Modelling Heat Transfer of Carbon Nanotubes / X.-S. Yang // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. – 2005. – Vol. 13. – P. 893 – 902.
10. *Yangjian X.* Convective Heat Transfer Steady Heat Conduction and Thermal Stress in a Ceramic/FGM/Metal Composite EFBF Plate / X. Yangjian, T. Daihui, D. Haiyang // Journal of Software. – 2011. – Vol. 6., No 2. – P. 201-208
11. *Tanigawa Y.* Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate with Temperature-Dependent Material Properties / Y. Tanigawa, T. Akai, R. Kawamura, and N. Oka // J. Thermal Stresses. – 1996. – Vol. 19., No.1. – P. 77-102.

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПОЛУПОЛОСЕ
С ПОКРЫТИЕМ ПРИ ТОРЦЕВОМ НАГРЕВЕ****Ольга ТУРЧИН***Національний лесотехнічний університет України,
ул. Генерала Чупринки, 103 79057 Львов, Украина*

С использованием интегрального преобразования Лагерра и преобразования Фурье получено решение нестационарной задачи теплопроводности для композитной полуполосы, нагреваемой по боковой поверхности. Приводится численный анализ температурного поля в симметричной полуполосе с покрытием при различных отношениях теплофизических характеристик покрытия и основания.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, композитная полуполоса, преобразование Лагерра.

**UNSTEADY TEMPERATURE FIELD IN HALF-STRIP
WITH COATING****Olha TURCHYN***National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103 79057 Lviv, Ukraine*

With using of Laguerre-Fourier integral transform we obtain a solution of the non-stationary problem of heat conduction for the composite half-strip. Half-strip is heated to a side surface. A numerical analysis of temperature field in a symmetric composite half-strip with different ratios of thermo-physical properties of the coating and the base.

Key words: non-stationary problem of heat conduction, Laguerre-Fourier integral transformation, composite half-strip.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2011
Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 620.179

ВИЗНАЧЕННЯ В'ЯЗКОСТІ РУЙНУВАННЯ НА ПІДСТАВІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ В КВАЗІСТАТИЧНОМУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ

Владислав БОГДАНОВ¹, Георгій СУЛИМ²

¹Національний транспортний університет,
вул. Суворова, 1 01010 Київ, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

На підставі розробленої аналітико-числової методики розв'язування просторових задач у пружно-пластичному квазістатичному математичному формулюванні з використанням методу скінченних різниць визначається ймовірнісний характер температурної залежності в'язкості руйнування сталі 15Х2НМФА. Числовий розв'язок отримано для тіла у вигляді прямокутного паралелепіпеда з крайовим пропилом-тріщиною у площині симетрії (компактний зразок) при триточковому згині. Порівняння результатів розрахунку з використанням квазістатичного та динамічного пружно-пластичного формулювання свідчить, що перше дає якісно добрий опис явища руйнування, хоча кількісні відхилення доволі значні.

Ключові слова: компактний зразок, пружно-пластична деформація, в'язкість руйнування, температурна залежність, ймовірність, різницевий метод.

Вступ. У працях [1–6] було запропоновано для аналізу процесів руйнування застосовувати поряд з експериментальними також і розрахункові методи з використанням динамічної пружно-пластичної моделі матеріалу. В [4] розв'язано задачу плоского деформованого стану триточкового згину компактного зразка з центральною крайовою тріщиною. В [2] розв'язано аналогічну задачу плоского напруженого стану за критеріальної умови про початок збільшення тріщини у момент переміщення максимуму розривних напружень від місця безпосереднього продовження вістря тріщини на певну відстань від нього. У працях [3] і [5] досліджено плоскі задачі напруженого та деформованого станів з тріщиною, підростання якої контролюється узагальненим локальним $\sigma_{\theta\theta}$ -критерієм крихкого руйнування. В [1] і [6] в'язкість руйнування матеріалу визначали, відповідно, на підставі дослідження розв'язків задач плоского напруженого та плоского деформованого станів у припущенні, що тріщина нерухома. Запропоновані моделі дали змогу значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів.

Для практичних інженерних розрахунків в'язкості руйнування часто використовують квазістатичну модель, яка значно простіша у застосуванні. У цьому дослідженні на відміну від [1, 6] в'язкість руйнування визначали на підставі числового розв'язку задачі про триточковий згин компактного зразка у квазістатичному пружно-пластичному формулюванні і результати

порівнювали з висновками застосування динамічної моделі.

1. Математичне формулювання задачі. Розглянемо деформування ізотропного бруса $\{|x| \leq L/2; 0 \leq y \leq B; 0 \leq z \leq H\}$, що має в площині поперечного перерізу форму прямокутника $\Sigma = L \times B \times H$ (рис. 1 – довжина L , ширина B , товщина H) з пропилом-тріщиною завдовжки l уздовж прямокутної області $\{x = 0; 0 \leq y \leq l; 0 \leq z \leq H\}$ посередині (профіль компактного зразка). Брус контактує з двома нерухомими опорами в області $\{L_* \leq x \leq L_* + a; y = 0; 0 \leq z \leq H\}$. Зверху на тіло падає абсолютно твердий ударник, який контактує з брусом в області $\{|x| \leq A; y = B; 0 \leq z \leq H\}$ упродовж короткого інтервалу часу. Його дію заміняємо рівномірно розподіленим у зоні контакту нормальним напруженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція ($P = p_{01} + p_{02}t$). Унаслідок симетрії процесу деформування стосовно площини $x = 0$ далі розглядаємо тільки праву частину бруса (рис. 1). Вважається, що упродовж всього проміжку часу взаємодії область контакту залишається незмінною.

Механічна модель заснована на статичній теорії напружено-деформованого стану. Нехай $u = (u_x, u_y, u_z)$ – вектор зміщень, компоненти якого пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння рівноваги набули вигляду

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0.$$

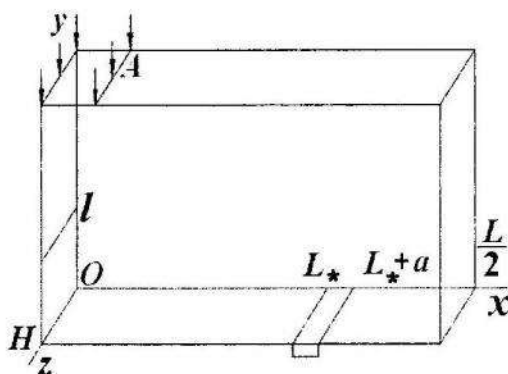


Рис. 1. Геометрична схема задачі

Вважатимемо, що під час ударного навантаження матеріал пружно-пластично зміцнюється, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних $d\varepsilon_i^p$, а також параметра Одквіста $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ виконуватимемо на підставі числового розв'язування відповідної квазістатичної пружно-пластичної задачі.

Крайові умови запишемо так:

$$\begin{aligned}
x = 0, \quad 0 < y < l, \quad 0 < z < H: \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0; \\
x = 0; \quad l < y < B, \quad 0 < z < H: \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0; \\
x = L/2, \quad 0 < y < B, \quad 0 < z < H: \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0; \\
y = 0, \quad 0 < x < L_*, \quad 0 < z < H: \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0; \\
y = 0, \quad L_* < x < L_* + a, \quad 0 < z < H: \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0; \\
y = 0, \quad L_* + a < x < L/2, \quad 0 < z < H: \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0; \\
y = B, \quad 0 < x < A, \quad 0 < z < H: \quad \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0; \\
y = B, \quad A < x < L/2, \quad 0 < z < H: \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0; \\
z = 0, \quad 0 < x < L/2, \quad 0 < y < B: \quad u_z = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0; \\
z = H, \quad 0 < x < L/2, \quad 0 < y < B: \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

За фізичну модель прийняли модель, яка заснована на теорії неізотермічної пластичного течіння для середовища з зміцненням та умовою текучості Мізеса разом із гіпотезою короткочасної повзучості [7]. Отож, рівняння зв'язку між напруженнями та деформаціями набудуть вигляду [8]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda, \tag{2}$$

де $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девіатор тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль зсуву; $K = 3K_1$, $K_1 = (1 - 2\nu) / (3E)$ – модуль об'ємного стиску, що зв'язує об'ємне розширення 3ε , середнє напруження $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ і температурне видовження φ у співвідношенні $\varepsilon = K\sigma + \varphi$ (у цьому випадку $\varphi \equiv 0$); ν – коефіцієнт Пуассона; E – модуль пружності (Юнга); $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається формою поверхні навантаження. Припускаємо, що ця скалярна функція є квадратичною функцією девіатора напружень s_{ij} [7]

$$\begin{aligned}
d\lambda = \begin{cases} 0 & (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_s^2(T) < 0); \\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} & (f = 0, \quad df = 0) \end{cases}, \\
d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + \right. \\
\left. + 6 \left((d\varepsilon_{xy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yz}^p)^2 \right) \right]^{1/2}, \\
\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)},
\end{aligned} \tag{3}$$

де σ_i – інтенсивність напружень; ε_i^p – інтенсивність пластичних деформацій.

Припускаємо, що внаслідок пластичної деформації відбувається зміцнення матеріалу за таким температурним співвідношенням [9]:

$$\sigma_s(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0} \right)^{\eta_*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \quad (4)$$

де T – температура; $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ – параметр Одквіста; $T_0 = 20^\circ C$; η_* – коефіцієнт зміцнення; $\sigma_s(T)$ – межа текучості після зміцнення матеріалу при температурі T .

2. Схема розв'язування задачі. Використовуємо, як і в [9], метод послідовного (покрокового) відстежування розвитку пружно-пластичних деформацій, коли на кожному кроці приросту (збільшення) навантаження напружено-деформований стан знаходимо з урахуванням отриманого на попередньому кроці розв'язку. Для цього весь період підростання навантаження розбиваємо на окремі малі проміжки. Розглянемо деякий проміжок зміни навантаження, що визначається відрізком часу $\Delta t = t_1 - t_0$, де t_1 – поточний момент часу; t_0 – момент часу, що передуює поточному. Інтегруємо (2) за змінною t , застосовуємо теорему про середнє, $(\sigma_{xx} - \sigma)$, $(\sigma_{yy} - \sigma)$, $(\sigma_{zz} - \sigma)$, і середні величини $\bar{\sigma}_{xy}$, $\bar{\sigma}_{xz}$, $\bar{\sigma}_{yz}$ заміняємо з точністю до $O(\Delta t)$ відповідними величинами в момент часу t_1 . Прирости деформацій запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{xx} &= \psi(\sigma_{xx}(t_1) - \sigma(t_1)) + K\sigma(t_1) - b_{xx}(t_0), & \Delta \varepsilon_{xy} &= \psi\sigma_{xy}(t_1) - b_{xy}(t_0), \\ \Delta \varepsilon_{yy} &= \psi(\sigma_{yy}(t_1) - \sigma(t_1)) + K\sigma(t_1) - b_{yy}(t_0), & \Delta \varepsilon_{xz} &= \psi\sigma_{xz}(t_1) - b_{xz}(t_0), \\ \Delta \varepsilon_{zz} &= \psi(\sigma_{zz}(t_1) - \sigma(t_1)) + K\sigma(t_1) - b_{zz}(t_0), & \Delta \varepsilon_{yz} &= \psi\sigma_{yz}(t_1) - b_{yz}(t_0), \\ \psi &= 1/(2G) + \Delta\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\sigma(t_0) = (\sigma_{xx}(t_0) + \sigma_{yy}(t_0) + \sigma_{zz}(t_0)) / 3$ ($i, j = x, y, z$); $b_{ij}(t_0) = \frac{\sigma_{ij}(t_0)}{2G} - \delta_{ij} \left(\frac{1}{2G} - K \right) \sigma(t_0)$; $\Delta\lambda$ – різницевий відповідник диференціала $d\lambda$.

Напружений стан у момент часу t_1 визначатимемо з урахуванням умов текучості, які на підставі (3) і (5) запишемо так:

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \frac{1}{2G} \quad (f < 0); \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (f = 0, df = 0) \right\}, \quad \Delta\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\left(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p \right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p \right)^2 + 6 \left(\left(\Delta\varepsilon_{xy}^p \right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{xz}^p \right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{yz}^p \right)^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (6) \\ \Delta\varepsilon_{ij}^p &= \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^e, \quad \Delta\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} + \delta_{ij} \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned}$$

Для врахування фізичної нелінійності застосовують метод послідовних наближень, який дає змогу нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [1-6]

$$\psi^{(n+1)} = \left\{ \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} (Q_i < -Q); \psi^{(n)} \quad (|Q_i| < Q); \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(T)} (Q_i > Q) \right\}, \quad (7)$$

$$Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(T), \quad 0 \leq p \leq 1,$$

де Q – найбільше відхилення інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ на кроці n від зміцненої межі текучості; n – номер наближення.

З системи (5) знайдемо вирази для обчислення напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= A_1 \Delta \varepsilon_{xx} + A_2 \Delta \varepsilon_{yy} + A_2 \Delta \varepsilon_{zz} + Y_{xx}, & \sigma_{xy} &= A_3 \Delta \varepsilon_{xy} + Y_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= A_2 \Delta \varepsilon_{xx} + A_1 \Delta \varepsilon_{yy} + A_2 \Delta \varepsilon_{zz} + Y_{yy}, & \sigma_{xz} &= A_3 \Delta \varepsilon_{xz} + Y_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= A_2 \Delta \varepsilon_{xx} + A_2 \Delta \varepsilon_{yy} + A_1 \Delta \varepsilon_{zz} + Y_{zz}, & \sigma_{yz} &= A_3 \Delta \varepsilon_{yz} + Y_{yz}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут

$$\begin{aligned} Y_{xx} &= A_1 b_{xx} + A_2 b_{yy} + A_2 b_{zz}, & Y_{xy} &= A_3 b_{xy}, & A_1 &= (\psi + 2K)/(3\psi K), \\ Y_{yy} &= A_2 b_{xx} + A_1 b_{yy} + A_2 b_{zz}, & Y_{xz} &= A_3 b_{xz}, & A_2 &= (\psi - K)/(3\psi K), \\ Y_{zz} &= A_2 b_{xx} + A_2 b_{yy} + A_1 b_{zz}, & Y_{yz} &= A_3 b_{yz}, & A_3 &= 1/\psi. \end{aligned}$$

Як основний незалежний параметр для дослідження зміни досліджуваних величин обрано розрахункове значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I (КІН) біля тріщини у статичній задачі для пружного деформованого компактного зразка. КІН у кожний поточний момент часу визначали відповідно до наближеного співвідношення [10] для статичного розв'язку

$$K_I = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left[1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right], \quad (9)$$

де $F = 2AP$ – контактна сила; $4B$ – відстань між опорами.

Використовуючи розраховані пластичні деформації і напруження, локальний критерій крихкого руйнування полікристалічного матеріалу та функцією розподілу Вейбула для опису розподілу за міцністю, знайдемо температурні залежності в'язкості руйнування K_{Ic} . Для елементарної комірки прийнято локальний критерій крихкого руйнування у вигляді [1, 6, 11]

$$\sigma_1 + m_{T\epsilon}(T, \kappa) \sigma_{eff} \geq \sigma_d; \quad (10)$$

$$\sigma_1 \geq S_C(\kappa), \quad (11)$$

де σ_1 – максимальні головні напруження; $\sigma_{eff} = \sigma_i - \sigma_{02}$ – ефективне напруження; σ_d – ефективна міцність карбідів або інших частинок, на яких зароджуються мікротріщини відколювання; $\sigma_{02}(T) = a - c(T + 273) + b \exp(-h(T + 273))$ – межа текучості; $S_C(\kappa) = [C_1 + C_2 \exp(-A_d \kappa)]^{-1/2}$ – критичне напруження крихкого руйнування; a, c, b, h, C_1, C_2 , і A_d [1, 6, 11] – параметри (характеристики) матеріалу, які визначають на підставі результатів руйнування маломасштабних зразків при їхньому випробуванні на триточковий згин; $m_{T\epsilon}$ – залежний від температури T і пластичної деформації параметр, який можемо записати у вигляді [1, 6, 11]

$$m_{T\epsilon}(T, \kappa) = m_T(T) m_\epsilon(\kappa), \quad (12)$$

де $m_\epsilon(\kappa) = S_0 / S_C(\kappa)$, $m_T(T) = m_0 \sigma_{Ys}(T)$, $S_0 \equiv S_C(0)$; m_0 – стала, що визначається експериментально; σ_{Ys} – температурно-залежна складова межі текучості. Критерій (10) формулюватимемо у ймовірнісному формулюванні внаслідок чого параметр σ_d вважатимемо стохастичним з функцією розподілу Вейбула [12]

$$p(\sigma_d) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_d - \sigma_{d0}}{\bar{\sigma}_d} \right)^\eta \right], \quad (13)$$

де $\eta, \sigma_{d0}, \bar{\sigma}_d$ – параметри розподілу.

3. Числові результати та їхній аналіз. Для розрахунків компактних зразків зі сталі 15X2НМФА застосовано метод скінченних різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей Ox (N елементів), Oy (M елементів) і Oz (K елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Розбиття за часом рівномірне. Характерний розмір комірки в околі вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05 мм). На рис. 2 – 4 зображено результати розрахунків для брусків завдовжки 60 мм, завширшки 10 мм, завтовшки 50 мм і з глибиною пропилу посередині 3 мм і коефіцієнтом зміцнення матеріалу $\eta_s = 0,05$. Відстань між опорами – 40 мм; коефіцієнти – $p_{01} = 8$ МПа, $p_{02} = 10$ МПа; температура $T = 50$ °С.

Якщо задані температура T_0 і коефіцієнт інтенсивності напружень K_I , то ймовірність крихкого руйнування розраховують у припущенні, що руйнування в кожній комірці, на які сітка розбиває тіло, є незалежною подією, за формулою

$$P_f(K_I)|_{T=T_0} = 1 - \exp \left[- \frac{1}{(\tilde{\sigma}_d)^\eta} \sum_{l=1} \varpi_l \sum_{m=1} \sum_{n=1} (\sigma_{nuc}^{l,n,m} - \sigma_{d0})^\eta \right]. \quad (14)$$

Тут $\sigma_{nuc}^{l,n,m} = \sigma_1^{l,n,m} + m_T^{l,n,m} m_\varepsilon^{l,n,m} \sigma_{eff}^{l,n,m}$, $\varpi_l = 2h_l/\rho_{uc}$; h_l – крок сітки розбиття розрахункової області за віссю Z (індекс „ nuc ” від англ. – necessary utilized cell [11]); H – товщина маломасштабного зразка; l, m, n – індекси елементарних комірок, утворених сітками розбиття відповідно вздовж осей Ox, Oy і Oz . В сумах залежності (14) враховують тільки ті комірки, які руйнуються за умовами

$$\sigma_{eff}^{l,n,m} \geq 0, \quad \sigma_1 \geq S_C, \quad \sigma_{nuc}^{l,n,m} \geq \sigma_{d0}^{l,n,m}. \quad (15)$$

На рис. 2, 3 зображено (суцільні лінії) залежності середнього напруження σ і параметра Одквіста κ від температури T в області вершини тріщини у площині $z = 41,3$ мм, коли значення КІН дорівнювало $K_I = 72,3$ МПа $\sqrt{м}$; штрихова та штрихова з трикутником лінії відповідають випадкам динамічного пружно-пластичного ставлення плоского напруженого та деформованого станів [1, 4].

Відмінність значень середніх напружень σ і параметра Одквіста κ в просторовому квазістатичному формулюванні і плоскій динамічній задачі напруженого стану перевищує 200 відсотків. Попри таку кількісно велику різницю, якісний аспект проблеми процесу руйнування матеріалу квазістатичне ставлення охоплює досить добре. Зі збільшенням температури спостерігаємо очевидне збільшення пластичних деформацій.

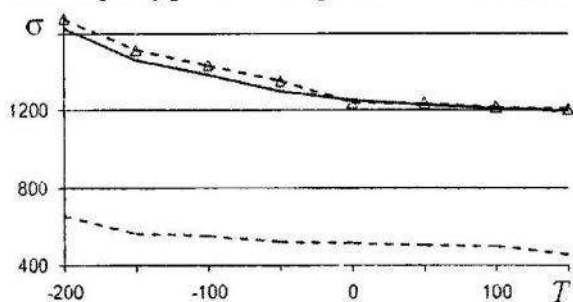


Рис. 2. Температурна залежність середніх напружень σ

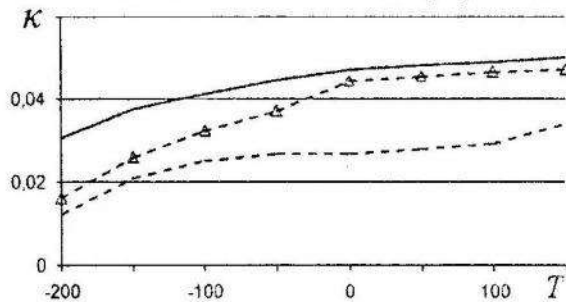
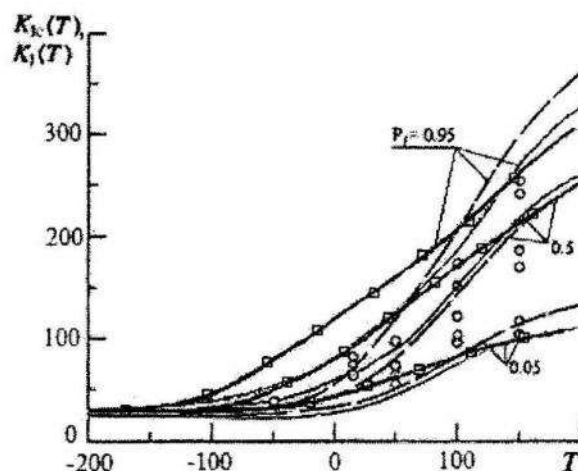


Рис. 3. Залежність параметра Одквіста κ від температури

При розрахунках імовірнісних кривих параметр m_T брали в такому вигляді [1, 6, 11] $m_T = m_0(\sigma_{02}(T_0) - \sigma_{02}(350^\circ C))$, $m_0 = 0,1$. Застосовуючи динамічне пружно-пластичне формулювання, використання емпіричного параметра m_0 взагалі не потрібне.

Рис. 4. Температурна залежність коефіцієнта $K_{Ic}(T)$

Ймовірнісні криві будували для опромінених компактних зразків сталі 15Х2НМФА, які перебувають у крихкому стані. Отримані криві температурної залежності коефіцієнта $K_{Ic}(T)$ для крихкої сталі зображені на рис. 4 суцільними лініями. Кружечки та штрихові лінії відповідають експериментальним і розрахунковим результатам публікації [11]. Суцільні лінії з квадратними маркерами відповідають розрахунковим результатам публікації [6].

Щоб визначити необхідні для проведення розрахунків значень параметрів Вейбула, використовували лише три значення критичного коефіцієнта інтенсивності напружень (в'язкості руйнування) [11]

$$K_{Ic}(50^\circ C)|_{P_f=0,05} = 53, \quad K_{Ic}(50^\circ C)|_{P_f=0,5} = 88 \quad \text{і} \quad K_{Ic}(50^\circ C)|_{P_f=0,95} = 123, \quad \text{які є}$$

ординатами точок штрихових ліній рис. 4 з абсцисою (температурою) $50^\circ C$. Мінімізація функції середньоквадратичного відхилення

$$\min \left[\sqrt{(P_f(53)|_{T=50^\circ C} - 0,05)^2 + (P_f(88)|_{T=50^\circ C} - 0,5)^2 + (P_f(123)|_{T=50^\circ C} - 0,95)^2} \right]$$

допомогла розрахувати значення параметрів Вейбула: $\tilde{\sigma}_d = 17120$ МПа, $\eta = 9$, $\sigma_{d0} = 1603$ МПа. Для порівняння в табл. подано параметри розподілу Вейбула з публікацій [6, 11].

Для розрахунку значень функцій $P_f(K_I)$ в (14) розв'язували задачі за різних значень температур T_0 в діапазоні від $-200^\circ C$ до $200^\circ C$ з кроком 50 градусів. Обчислювали значення КІН K_I при значеннях імовірності крихкого руйнування $0,05$, $0,5$ і $0,95$ і за отриманими даними на площині $ТОK_I$ будували шукані залежності в'язкості руйнування $K_{Ic}(T)$.

Результати з публікації	Параметри розподілу Вейбула		
	$\tilde{\sigma}_d$	η	σ_{d0}
даної	17120 МПа	9	1603 МПа
[6]	17960 МПа	6	1590 МПа
[11]	4103 МПа	12	1840 МПа

Майже всі експериментальні дані, зображені на рис. 4 круглими маркерами, розташовані в області, обмеженій розрахунковими кривими. Однак наближення цих кривих до експериментальних результатів у разі квазістатичного підходу все ж гірше, ніж у разі використання динамічної моделі. Отримані параметри розподілу Вейбула значно відрізняються від отриманих в [1, 6] (див. табл.). Це свідчить про чутливість значень параметрів розподілу Вейбула до застосованої механічної моделі та методики визначення в'язкості руйнування. Можливо, треба також враховувати залежність цих параметрів від температури, незважаючи на загальноприйняту думку, що така залежність надзвичайно слабка.

Висновки. Розв'язок тривимірної задачі в квазістатичному пружно-пластичному формулюванні для визначення в'язкості руйнування при триточковому згині дає змогу точніше визначати поля пластичних деформацій і напружень, аніж в [11], і можна використати в інженерних розрахунках так само, як і отриманий при застосуванні складнішого динамічного формулювання. Попри кількісно велику кількісну відмінність між результатами застосування динамічного та квазістатичного підходів якісний аспект проблеми процесу руйнування матеріалу він охоплює досить добре.

Список використаної літератури

1. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану / В.Р. Богданов // Вісник Київського національного університету. Сер. "Фізико-математичні науки". – 2008. – Вип. 3. – С. 51–56.
2. Богданов В.Р. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Вісник Київського нац. університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
3. Богданов В.Р. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.
4. Богданов В.Р. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Теоретическая и прикладная механика. – Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66.

5. Богданов В.Р. Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Збірник наукових праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дніпропетровськ. – 2011. – № 15. – С. 33–44.
6. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі числового моделювання плоского деформованого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24.
7. Сборник: Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948.
8. Аркулис Г.Э. Теория пластичности / Г.Э. Аркулис, В.Г. Дорогобид. – М.: Металлургия, 1987.
9. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций / В.И. Махненко. – К.: Наук. думка, 1976.
10. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов / М.П. Саврук. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988.
11. Margolin B.Z. Fracture toughness predictions for a reactor pressure vessel steel in the initial and highly embrittled states with the Master Curve approach and a probabilistic model / B.Z. Margolin, V.A. Shvetsova, A.G. Gulenko, A.V. Ilyin, V.A. Nikolaev, V.I. Smirnov // Pressure Vessels and Piping. – Jan. – 2002. – P. 219–231.
12. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials / W.A. Weibull // Roy. Swed. Inst. Eng. Res. – 1939. – 151. – P. 5–45.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Владислав БОГДАНОВ¹, Георгий СУЛИМ²

¹Національний Транспортний Університет,
ул. Суворова, 1 01010 Киев, Украина

²Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

На основании разработанной аналитико-числовой методики решения пространственных задач в упруго-пластической квазистатической математической постановке с использованием метода конечных разностей определяется вероятностный характер температурной зависимости вязкости разрушения стали 15Х2НМФА. Численное решение получено для

тела в виде прямоугольного параллелепипеда с краевым пропилом-трещиной в плоскости симметрии (компактный образец) при трехточечном изгибе. Сравнение результатов расчетов с использованием квазистатической и динамической упруго-пластической формулировки свидетельствуют, что первая дает качественно хорошее описание явления разрушения, хотя количественные отклонения достаточно большие.

Ключевые слова: компактный профиль, упруго-пластическая деформация, вершина трещины, вязкость разрушения, температурная зависимость, вероятность, разностный метод.

THE DESTRUCTION TOUGHNESS DETERMINATION ON THE BASE OF SOLUTION OF THREE DIMENSION PROBLEM IN QUASISTATIC PLASTIC-ELASTIC FORMULATION

Vladislav BOGDANOV¹, Georgij SULYM²

¹*National Transport University,
Suvorova Str., 1 01010 Kyiv, Ukraine*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

On the base of solution of three-dimensional problem and developed methodology of solution in quasi-static elastic-plastic mathematical model the destruction toughness of the embrittled steel 15X2HMΦА has been determined. The numerical solution has calculated for three point band of material with transversal profile of shape of rectangle with middle notch-crack (compact profile) by method of finite differences. The quasi-static elastic-plastic model has compared to dynamic model. The results developed by the quasi-static elastic-plastic model are good enough in a qualitative sense, however in a quantitative sense these results have big difference with the results developed by second model.

Key words: compact specimen, elastic-plastic deformation, destruction toughness, temperature dependence, probability, finite differences method.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.2011
Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ З РОЗМІЩЕНИМИ УЗДОВЖ КОЛА ТЕПЛОПРОНИКНИМИ ТРІЩИНАМИ, БЕРЕГИ ЯКИХ ГЛАДКО КОНТАКТУЮТЬ УЗДОВЖ УСІЄЇ ДОВЖИНИ

Віктор ОПАНАСОВИЧ¹, Наталія БАССА²

¹*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

²*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36 79060 Львів, Україна*

Досліджено термопружний стан ізотропної пластини з теплопроникними тріщинами вздовж дуг кола, береги яких гладко контактують уздовж усієї своєї довжини під дією рівномірно розподілених напружень і сталого теплового потоку на нескінченності. Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язування задач теплопровідності та термопружності зведено до задач лінійного спряження, причому стрибок температури між берегами тріщин визначено з системи інтегро-диференціальних рівнянь з використанням методу ортогональних поліномів, а комплексний потенціал плоскої задачі термопружності знайдено в аналітичному вигляді.

Ключові слова: ізотропна пластина, термонапружений стан, теплопроникні тріщини, гладкий контакт, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вивчення термонапруженого стану тіл з криволінійними тріщинами, береги яких контактують під дією теплового та силового навантаження є однією з основних проблем механіки руйнування. Наявність в тілі концентраторів типу тріщин, на яких задано неідеальний тепловий контакт між їхніми берегами (теплопроникні тріщини) призводить до збурення заданого температурного поля та виникнення напружень. Вплив температурних факторів вносить додаткові ускладнення у математичні моделі тіл з тріщинами, але дає змогу набагато точніше досліджувати напружено-деформований стан таких тіл. Це потребує розробки нових методик дослідження термопружного стану тіл з криволінійними тріщинами та вивчення термо-механічних процесів, пов'язаних із урахуванням взаємодії берегів тріщин [3, 5, 8, 9].

Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів в [5] досліджено термопружний стан ізотропної пластини з розміщеними уздовж дуг кола теплоізольованими тріщинами, береги яких гладко контактують по всій довжині під дією рівномірно розподілених напружень і сталого теплового потоку на нескінченності. Розв'язування задач теплопровідності та термопружності зведено до задач лінійного спряження, з розв'язку яких знайдено похідну від стрибка температури між берегами тріщин та комплексні потенціали в аналітичному вигляді.

Наша мета – дослідити термопружний стан ізотропної пластини з теплопроникними тріщинами, що розміщені уздовж дуг кола, за умови, що береги тріщин гладко контактують уздовж усієї своєї довжини під дією рівномірно розподілених напружень і сталого теплового потоку на нескінченності. Розв'язування задачі теплопровідності зведено до системи інтегродиференціальних рівнянь стосовно стрибка температури між берегами тріщин, розв'язок якої знайдено чисельно за допомогою методу ортогональних поліномів, а розв'язок задачі термопружності знайдено аналітично.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину з теплоізолюваними поверхнями, що містить n теплопроникних тріщин уздовж дуг кола радіуса R (рис. 1). Вважаємо, що береги тріщин зазнають повного гладкого контакту під дією на нескінченності рівномірно розподілених напружень N_1 і N_2 (для стиску $N_1 > 0$), причому напруження N_1 утворює кут γ з віссю Ox , і сталого теплового потоку інтенсивності q_∞ , який утворює кут α з віссю Ox . Виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі кола, вздовж якого розміщені тріщини. Поряд з декартовою системою координат Oxy розглянемо полярну систему координат з полюсом у точці O та полярною віссю Ox . Сукупність дуг

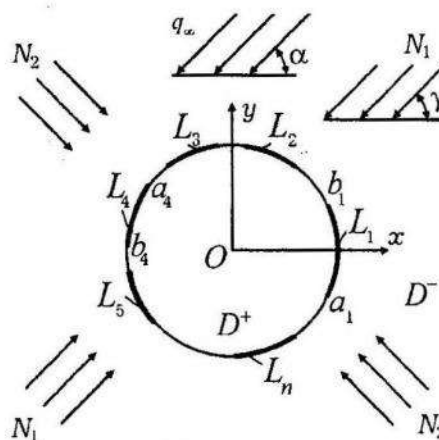


Рис. 1

$L_j = (a_j, b_j)$, уздовж яких розміщені тріщини, позначимо через $L = \bigcup_{j=1}^n L_j$,

$a_j = R e^{i\phi_{1j}}$, $b_j = R e^{i\phi_{2j}}$, область у середині кола – через D^+ , зовні – через D^- .

Згідно з формулюванням задачі отримаємо такі крайові умови:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^- + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ \right] - 2\lambda_j (T^- - T^+) = 0 \text{ на } L_j, \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^- = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{r\theta}^+ = \sigma_{r\theta}^- = 0, \quad u_r^+ - u_r^- = 0 \text{ на } L, \quad (3)$$

де T – температура пластини; λ_j – коефіцієнт теплопроникності j -ї тріщини; λ – коефіцієнт теплопровідності; σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ і u_r , u_θ – компоненти тензора напружень та проекції вектора переміщення в полярній системі

координат; значками «+», «-» позначено граничні значення відповідних величин за прямування точки до лінії L_j із області D^+ і D^- , відповідно.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Температуру тіла $T(x, y)$ у безмежній області з тріщинами, коли задано сталий тепловий потік на нескінченності, можемо описати так:

$$T(x, y) = 2\operatorname{Re}(F(z)), \quad F(z) = \bar{a}_0 z + C + \Psi_0(z), \quad z = x + iy = re^{i\vartheta}, \quad (4)$$

де $F(z)$ – комплексний потенціал температурного поля; $a_0 = (2\lambda)^{-1} q_\infty e^{i\vartheta}$; C – невідома комплексна стала; r і ϑ – полярні координати точки z .

Згідно з [7] для функції $\Psi_0(z)$ існують розвинення

$$\Psi_0(z) = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ b_*/z + \dots, & |z| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5)$$

де b_* , α_k ($k = \overline{0, \infty}$) – невідомі комплексні сталі.

Введемо функцію

$$V(z) = z\Psi'_0(z)/R. \quad (6)$$

Тоді з (4) і (6) отримаємо

$$r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{i} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 2(\bar{a}_0 z + RV(z)). \quad (7)$$

На підставі залежності (7) крайові умови (1)–(2) подамо так:

$$V^+(t) - V^-(t) = \frac{t}{R} \gamma'(t), \quad t \in L, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \left(2\bar{a}_0 \frac{t}{R} + V^+(t) + V^-(t) \right) + \frac{2\lambda_j}{\lambda} \gamma(t) = 0, \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Тут $\gamma(t) = (T^+ - T^-)/2$ – невідома шукана функція.

Розв'язавши задачу лінійного спряження (8), отримаємо

$$V(z) = -\frac{iz}{2\pi R} \int_L \frac{\gamma'(t_0) dt_0}{t_0 - z}, \quad t_0 = Re^{iu}. \quad (10)$$

Підставимо (10) у (9), після відповідних перетворень приходимо до інтегро-диференціального рівняння для визначення невідомого стрибка температури на берегах j -ї тріщини

$$\frac{2R\lambda_j}{\lambda} \gamma_j(t_j) - \frac{it_j}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{L_k} \frac{\gamma'(t_{0k}) dt_{0k}}{t_{0k} - t_j} = f(t_j), \quad t_{0j} = Re^{i\vartheta_j}, \quad t_j \in L_j, \quad (11)$$

де $f(t_j) = -2\operatorname{Re}(\bar{a}_0 t_j)$.

У рівнянні (11) врахуємо заміну змінних

$$t_j = -Re^{i\tilde{\vartheta}_j} \frac{s_j - i\beta_j}{s_j + i\beta_j}, \quad \beta_j = ctg \frac{\tilde{a}_j}{2}, \quad s_j = \beta_j tg \frac{\tilde{\vartheta}_j - \tilde{b}_j}{2}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

тоді воно набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\beta_j \delta_j \tilde{\gamma}_j(s_j)}{s_j^2 + \beta_j^2} - \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}'_j(s_{0j}) ds_{0j}}{s_{0j} - s_j} - \frac{\beta_j}{s_j^2 + \beta_j^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{-1}^1 \tilde{\gamma}'_k(s_{0k}) H_{jk}(s_{0k}, s_j) ds_{0k} = \\ = -\pi f(s_j), \quad |s_j| < 1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{де } \tilde{a}_j = \frac{\phi_{2j} - \phi_{1j}}{2}, \quad \tilde{b}_j = \frac{\phi_{2j} + \phi_{1j}}{2}, \quad \delta_j = \frac{4\pi R\lambda_j}{\lambda}, \quad \tilde{\gamma}_j(s_j) = \gamma_j \left(-Re^{i\tilde{\vartheta}_j} \frac{s_j - i\beta_j}{s_j + i\beta_j} \right),$$

$$H_{jk}(s_{0k}, s_j) = \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{\tilde{b}_k - \tilde{b}_j}{2}} (s_j + i\beta_j)(s_{0k} - i\beta_k) \right) / \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{\tilde{b}_k - \tilde{b}_j}{2}} (s_j + i\beta_j)(s_{0k} - i\beta_k) \right),$$

$$f(s_j) = -\frac{2\beta_j R q_\infty}{\lambda(s_j^2 + \beta_j^2)^2} \left((s_j^2 - \beta_j^2) \cos(\tilde{b}_j - \alpha) + 2\beta_j s_j \sin(\tilde{b}_j - \alpha) \right).$$

Розв'язок рівняння (13) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'_j(s_j) = \frac{1}{\sqrt{1-s_j^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{jm} T_m(s_j), \quad \text{тоді} \\ \tilde{\gamma}_j(s_j) = -\sqrt{1-s_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{jm} U_{m-1}(s_j), \end{aligned} \quad (14)$$

де $T_k(s)$, $U_{k-1}(s)$ – поліноми Чебишова відповідно першого і другого роду [1], $\tilde{X}_{jm}$ – невідомі коефіцієнти.

Підставимо (14) у (13) та врахувавши відомі інтеграли [1], отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\beta_j \delta_j}{s_j^2 + \beta_j^2} \sqrt{1-s_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{jm} U_{m-1}(s_j) + \pi \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{jm} U_{m-1}(s_j) + \\ + \frac{\beta_j}{s_j^2 + \beta_j^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{km} \int_{-1}^1 \frac{T_m(s_{0k})}{\sqrt{1-s_{0k}^2}} H_{jk}(s_{0k}, s_j) ds_{0k} = \pi f(s_j). \end{aligned} \quad (15)$$

Помножимо обидві частини (15) на $U_{p-1}(s_j)\sqrt{1-s_j^2}$ та проінтегруємо на проміжку $[-1,1]$, прийдемо до системи лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $\tilde{X}_{km}$

$$\tilde{X}_{jp} + \delta_j \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{jm} W_{jmp} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_{km} Q_{kmp} = F_p, \quad j = \overline{1, n}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

де

$$W_{jmp} = \frac{2\beta_j}{\pi^2} \frac{1}{m} \int_{-1}^1 \frac{(1-s_j^2)U_{m-1}(s_j)U_{p-1}(s_j)ds_j}{s_j^2 + \beta_j^2},$$

$$F_p = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(s_j)\sqrt{1-s_j^2}U_{p-1}(s_j)ds_j,$$

$$Q_{kmp} = \frac{2\beta_j}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s_j^2}}{s_j^2 + \beta_j^2} U_{p-1}(s_j) \left(\int_{-1}^1 \frac{T_m(s_{0k})}{\sqrt{1-s_{0k}^2}} H_{jk}(s_{0k}, s_j) ds_{0k} \right) ds_j.$$

Врахувавши залежність (10), на підставі позначення (6) знайдемо вираз для комплексного потенціалу $\Psi_0(z)$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(t_0)dt_0}{t_0 - z}. \quad (17)$$

Якщо врахувати розвинення для функції $1/(t-z)$ при $z \rightarrow \infty$, то з (17) знайдемо сталі розвинення (5)

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{km} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s_{0k}^2} U_{m-1}(s_{0k})}{s_{0k}^2 + \beta_k^2} ds_{0k},$$

$$b_* = -\frac{R}{\pi} \sum_{k=1}^n e^{i\bar{b}_k} \beta_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \tilde{X}_{km} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s_{0k}^2} U_{m-1}(s_{0k}) \left(\frac{1}{s_{0k}^2 + \beta_k^2} - \frac{2\beta_k^2 + 2i\beta_k s_{0k}}{(s_{0k}^2 + \beta_k^2)^2} \right) ds_{0k}. \quad (18)$$

Комплексний потенціал температурного поля $F(z)$ (4) запишемо у вигляді

$$F(z) = \bar{a}_0 z + C + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(t_0)dt_0}{t_0 - z}. \quad (19)$$

Побудова розв'язку задачі термопружності. Введемо до розгляду комплексні потенціали Колосова - Мусхелішвілі $\Phi(z)$ та $\Psi(z)$ [4]. Тоді для визначення термопружного стану пластини скористаємось співвідношеннями [7]

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad z = re^{i\vartheta},$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta} = \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}\right), \quad (20)$$

$$2\mu \left(u_r + iu_{\vartheta} + \frac{\partial^2 (u_r + iu_{\vartheta})}{\partial \vartheta^2} \right) = r \left(\kappa \Phi(z) + \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left[\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}\right] \right) -$$

$$- rz \left(\kappa \Phi'(z) + \frac{R^4}{r^4} \Omega'\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \frac{\bar{z}^2}{z} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \overline{\Phi''(z)} \right) + r\beta (F(z) - zF'(z)), \quad (21)$$

де $\Omega(z) = -\bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right)$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль зсуву;

E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$;

$\beta = 2\alpha_t E/(1+\nu)$, α_t - коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ в околі безмежно віддаленої точки та нуля існують розвинення [7]

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Gamma + \frac{\bar{b}_{\infty}}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), & |z| \rightarrow \infty, \\ A_1 + \dots, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad \Omega(z) = \begin{cases} -\bar{A}_1 + o\left(\frac{1}{z^2}\right), & |z| \rightarrow \infty, \\ \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + \frac{\bar{b}_{\infty}}{z} + o(1), & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad (22)$$

де $\bar{b}_{\infty} = -2\beta_0 b_*$, $\beta_0 = \frac{\beta}{2(1+\kappa)}$; $\Gamma = -\frac{1}{4}(N_1 + N_2)$; $\Gamma' = \frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\gamma}$.

Першу та другу контактні крайові умови (2) подамо у вигляді

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^+ - (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^- = 0 \quad \text{на } L, \quad (23)$$

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^+ + (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta})^- = 2\sigma_{rr} \quad \text{на } L. \quad (24)$$

Враховуючи (20) з крайової умови (23), отримаємо

$$(\Phi(t) + \Omega(t))^+ - (\Phi(t) + \Omega(t))^- = 0, \quad t \in L. \quad (25)$$

На підставі розв'язку задачі лінійного спряження (25) знайдемо

$$\Omega(z) = -\Phi(z) + \Gamma - \bar{A}_1 + \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} - \frac{2\beta_0 b_*}{z}. \quad (26)$$

Врахуємо (26), (20) і (21), тоді на підставі (24) і останньої крайової умови (2) отримаємо

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \sigma_{rr} + \Gamma - \bar{A}_1 + R^2 \bar{\Gamma}' t^{-2} - 2\beta_0 b_* t^{-1}, \quad t \in L, \quad (27)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \Phi^+(t) - \Phi^-(t) + 2\beta_0 (F^+(t) - F^-(t)) - t(\Phi'^+(t) - \Phi'^-(t)) \right\} = 0, \quad t \in L. \quad (28)$$

Введемо функцію

$$D(z) = \Phi(z) - \bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + 2\beta_0 \left(F(z) - \bar{F}\left(\frac{R^2}{z}\right) \right) - z\Phi'(z) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right). \quad (29)$$

Як видно з (28), функція (29) задовольняє задачу лінійного спряження $D^+(t) - D^-(t) = 0$, $t \in L$, розв'язавши яку, знайдемо

$$D(z) = \Gamma - \bar{A}_1 + 2\beta_0 (\bar{a}_0 z + C - a_0 R^2 z^{-1} - \bar{C} - \bar{a}_0). \quad (30)$$

На підставі (29) і (30) можемо записати

$$\begin{aligned} i \operatorname{Im} \left[\Phi^+(t) + \Phi^-(t) + 2\beta_0 (F^+(t) + F^-(t)) - t(\Phi'^+(t) + \Phi'^-(t)) \right] = \\ = \Gamma - \bar{A}_1 + 2\beta_0 (\bar{a}_0 t + C - a_0 R^2 t^{-1} - \bar{C} - \bar{a}_0), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (31)$$

Врахувавши (27) та (19), із залежності (31) отримаємо диференціальне рівняння для визначення контактних напружень σ_{rr} між берегами тріщин

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \vartheta} = \frac{3}{2} i \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{t^2} - \frac{\Gamma' t^2}{R^2} \right) - 2\beta_0 i \left(\frac{b_*}{t} - \frac{\bar{b}_* t}{R^2} \right) - 4\beta_0 \operatorname{Im}(\Psi_0(t)), \quad t \in L, \quad (32)$$

$$\operatorname{Re} A_1 = \Gamma - 2\beta_0 \alpha_0. \quad (33)$$

Зінтегрувавши (32) за ϑ , знайдемо

$$\sigma_{rr} = -\frac{3}{4} \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{t^2} + \frac{\Gamma' t^2}{R^2} \right) + 2\beta_0 \left(\frac{b_*}{t} + \frac{\bar{b}_* t}{R^2} \right) - B_2(\vartheta) + C_1, \quad (34)$$

де $B_2(\vartheta) = 4\beta_0 \operatorname{Im} \left(\int \Psi_0(R e^{i\vartheta}) d\vartheta \right)$, C_1 – невідома дійсна стала.

Підставивши (34) у (27) та розв'язавши отриману задачу лінійного спряження, одержимо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i X_n(z)} \int_L \frac{(\tilde{f}(t_0) - B_2(u)) X_n^+(t_0) dt_0}{t_0 - z} + \frac{\tilde{P}_n(z)}{X_n(z)}, \quad t_0 = R e^{iu}, \quad (35)$$

$$\text{де } \tilde{f}(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} - \frac{3\Gamma' z^2}{R^2} \right) + 2\beta_0 \frac{\bar{b}_* t}{R^2} + C_2, \quad C_2 = C_1 + \Gamma - \bar{A}_1; \quad \tilde{P}_n(z) = \sum_{j=0}^n \tilde{d}_j z^j,$$

$$\tilde{d}_j - \text{невідомі коефіцієнти}; \quad X_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{1/2} (z - b_j)^{1/2}.$$

Для функцій $X_n(z)$ та $X_n^{-1}(z)$ існують розвинення

$$X_n(z) = \begin{cases} \eta_0 + \eta_1 z + \eta_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \gamma_2 z^{n-2} + \dots + \gamma_n + \frac{\gamma_{-1}}{z} + \frac{\gamma_{-2}}{z^2} + \dots, & |z| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

$$\frac{1}{X_n(z)} = \begin{cases} \eta'_0 + \eta'_1 z + \eta'_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \\ \frac{1}{z^n} + \frac{\gamma'_1}{z^{n+1}} + \frac{\gamma'_2}{z^{n+2}} + \dots, & |z| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{де } \eta_0 = -\prod_{j=1}^n (a_j b_j)^{1/2}; \quad \eta'_0 = \frac{1}{\eta_0}; \quad \eta_1 = -\frac{\eta_0}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j + b_j}{a_j b_j}; \quad \eta'_1 = \frac{\eta'_0}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j + b_j}{a_j b_j};$$

$$\gamma'_1 = -\gamma_1; \quad \gamma_1 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (a_j + b_j); \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) + \frac{1}{2} \gamma_1'^2;$$

$$\gamma'_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) + \frac{1}{2} \gamma_1'^2.$$

Обчисливши інтеграл типу Коші [4] та врахувавши розвинення (22) і (36), функцію $\Phi(z)$ (35) запишемо у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \tilde{f}(z) + \frac{\Phi_0(z)}{X_n(z)}, \quad (37)$$

$$\text{де } \Phi_0(z) = \sum_{j=-2}^{n+2} \tilde{G}_j z^j - q_n(z), \quad q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B_2(u) X_n^+(t_0) dt_0}{t_0 - z}, \quad \tilde{G}_{n+2} = \frac{3\Gamma'}{8R^2},$$

$$\tilde{G}_{n+1} = \tilde{G}_{n+2} \gamma_1 - \beta_0 \bar{b}_* / R^2, \quad \tilde{G}_n = \tilde{d}_n + \tilde{G}_{n+2} \gamma_2 + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2} \gamma_1) \gamma_1 - 1/2 C_2,$$

$$\tilde{G}_{n-1} = \tilde{d}_{n-1} + \tilde{G}_{n+2} \gamma_3 + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2} \gamma_1) \gamma_2 - 1/2 C_2 \gamma_1, \quad \tilde{d}_n = \Gamma,$$

$$\tilde{d}_{n-1} = -2\beta_0 b_* - \Gamma \gamma'_1,$$

$$\tilde{G}_j = \tilde{d}_j + \tilde{G}_{n+2} \gamma_{n+2-j} + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2} \gamma_1) \gamma_{n+1-j} - 1/2 C_2 \gamma_{n-j} - 1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \gamma_{n-2-j},$$

$$j = \overline{2, n-2},$$

$$\tilde{G}_1 = \tilde{d}_1 + \tilde{G}_{n+2}\gamma_{-1} + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2}\gamma_1)\gamma_n - 1/2 C_2 \gamma_{n-1} - 1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \gamma_{n-3},$$

$$\tilde{G}_{-1} = -1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \eta_1,$$

$$\tilde{G}_0 = \tilde{d}_0 + \tilde{G}_{n+2}\gamma_{-2} + (\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_{n+2}\gamma_1)\gamma_{-1} - 1/2 C_2 \gamma_n - 1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \gamma_{n-2},$$

$$\tilde{G}_{-2} = -1/8 R^2 \bar{\Gamma}' \eta_0.$$

З умов однозначності переміщень за обходу контурів тріщин отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{n-2}$

$$\sum_{k=-2}^{n+2} \tilde{G}_k a_{kj} = F_j, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$\text{де } a_{kj} = \int_{L_j} \frac{t^k dt}{X_n^+(t)}, \quad F_j = \int_{L_j} \left(\frac{q_n(t_0)}{X_n^+(t_0)} - \beta_0 \gamma(t_0) \right) dt_0.$$

Врахувавши вираз для функції $\Phi(z)$ (37) з умови $\Phi(0) = A_1$, отримаємо систему двох рівнянь для визначення сталої C_1 та $\text{Im } A_1$

$$\begin{aligned} C_1 &= -2\beta_0 \alpha_0 + \text{Re} \left[\frac{2(\text{Re } A_1 - Q_0) + i \text{Im } A_1 (1 + \gamma_n \eta'_0)}{1 - \gamma_n \eta'_0} \right], \\ \text{Im } A_1 &= \text{Im} \left[\frac{(C_1 + 2\beta_0 \alpha_0)(1 - \gamma_n \eta'_0) - 2(\text{Re } A_1 - Q_0)}{1 + \gamma_n \eta'_0} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

де

$$Q_0 = [\tilde{d}_0 - \beta_0 \bar{b}_*/R^2 \gamma_{-1} + 3\Gamma' \gamma_{-2}/(8R^2) - q_n(0)]\eta'_0 - R^2 \bar{\Gamma}' (\eta'_0 \gamma_{n-2} + \eta_1 \eta'_1 + \eta_0 \eta'_2)/8.$$

Підставимо (38) у (34), внаслідок чого отримаємо вираз для визначення контактних напружень σ_{rr} між берегами тріщин, який не наводимо.

Коефіцієнти інтенсивності напружень визначимо за формулою, яка подана в [5].

У часткових випадках задачі отримаємо результати праць [2, 3, 5, 6].

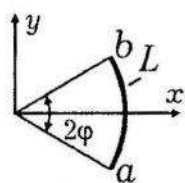


Рис. 2

Числовий аналіз задачі та висновки. Розглянемо частковий випадок задачі, коли пластина ослаблена однією теплопроникною тріщиною, яка характеризується центральним кутом 2ϕ (рис. 2).

Інтегро-диференціальне рівняння для визначення невідомого стрибка температури для однієї теплопроникної тріщини запишемо у вигляді

$$\frac{2R\lambda_1}{\lambda} \gamma(t) - \frac{it}{\pi} \int_L \frac{\gamma'(t_0) dt_0}{t_0 - t} = -2 \operatorname{Re}(\bar{a}_0 t), \quad t \in L. \quad (39)$$

Заміна змінних (11) для однієї тріщини (рис. 2) набуде вигляду

$$t = -R \frac{s - i\beta_1}{s + i\beta_1}, \quad \beta_1 = \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}, \quad s = \beta_1 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},$$

причому рівняння (39) набуде вигляду [3]

$$\frac{\beta_1 \delta_1}{s^2 + \beta_1^2} \tilde{\gamma}(s) - \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}'(s_0) ds_0}{s_0 - s} = -\pi f(s), \quad s \in [-1; 1]. \quad (40)$$

Тут $\tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(-R \frac{s - i\beta_1}{s + i\beta_1}\right)$, $f(s) = -\frac{2\beta_1 R q_\infty}{\lambda(s^2 + \beta_1^2)^2} \left((s^2 - \beta_1^2) \cos \alpha - 2\beta_1 s \sin \alpha \right)$.

Розв'язок рівняння (40) будемо шукати у вигляді

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{X}_k T_k(s), \quad \tilde{\gamma}(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tilde{X}_k \sqrt{1-s^2} U_{k-1}(s), \quad (41)$$

де $\tilde{X}_k$ – невідомі коефіцієнти.

Підставивши (41) у (40), після перетворень отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $\tilde{X}_j$

$$\tilde{X}_{2j} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{X}_{2k} b_{2j2k} = f_{2j}, \quad \tilde{X}_{2j-1} + \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{X}_{2k-1} b_{(2j-1)(2k-1)} = f_{2j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

де $a = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\phi}{4}$, $s_1 = \operatorname{tg} \frac{\phi}{4}$,

$$b_{pk} = -\frac{16}{\pi^2} p s_1 \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m} \frac{2m+1}{\left((2m+1)^2 - p^2 - k^2 \right)^2 - 4p^2 k^2},$$

$$f_p = -\frac{4Rq_\infty}{\lambda} p \cos \frac{\phi}{2} \begin{cases} a^{-j} \sin \alpha, & p = 2j, \\ a^{-j} s_1^{-1} \cos \alpha, & p = 2j-1. \end{cases}$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень $K_j^\pm$ та контактні напруження (34) знайдемо за формулами

$$K_2^\pm = \frac{4\beta_0 R^2 q_\infty}{\lambda \sqrt{\sin \phi}} \cos \frac{\phi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(X_{2k} \sin \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} \mp s_1^{-1} X_{2k-1} \left(\sin^2 \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2k-1} \right) \right) a^{-k} +$$

$$+ \frac{(N_1 - N_2)}{4} \left[\sin 2\gamma \left(\cos \phi \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{3\phi}{2} \right) \mp \cos 2\gamma \left(\sin \frac{3\phi}{2} + \cos \phi \sin \frac{\phi}{2} \right) \right], \quad K_1^\pm = 0,$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\beta_0 R q_\infty}{\lambda} \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k} a^{-k} \left(\frac{1}{2k} \vartheta + 2 \sin \vartheta \cos \frac{\phi}{2} \right) + 2s_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} X_k P_k \left(\beta_1 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - s_1^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k-1} a^{-k} \left(2 \cos \frac{\phi}{2} \cos \vartheta + \sin^{-2} \frac{\phi}{2} \left[\frac{1}{2k-1} \left(1 + \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) - \cos \frac{\phi}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \phi}{4} \right) \right] \right) \right\} -$$

$$- \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{8} \left(6 \cos 2(\vartheta - \gamma) + (1 - 3 \cos \phi) \cos^2 \frac{\phi}{2} \cos 2\gamma \right),$$

де знак "+" відповідає вершині b , а знак "-" - вершині a ,

$$P_k(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m} \left[\frac{T_{2m+k+1}(s)}{2m+k+1} + \rho_k \frac{T_{2m-k+1}(s)}{2m-k+1} + \sin^{-2} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \left(a^{-(m+k)} + a^{-(m-k+1)} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a^{-(m+k)}}{m+k} + \frac{\tilde{\rho}_k a^{-(m-k+1)}}{m-k+1} \right) \right], \quad \rho_k = \begin{cases} 1, & k \neq 2m+1, \\ 0, & k = 2m+1, \end{cases} \quad \tilde{\rho}_k = \begin{cases} 1, & k \neq m+1, \\ 0, & k = m+1. \end{cases}$$

Дослідимо вплив теплового потоку, а також сумісну дію теплового та силового навантажень на умови повного гладкого контакту берегів теплопроникної тріщини.

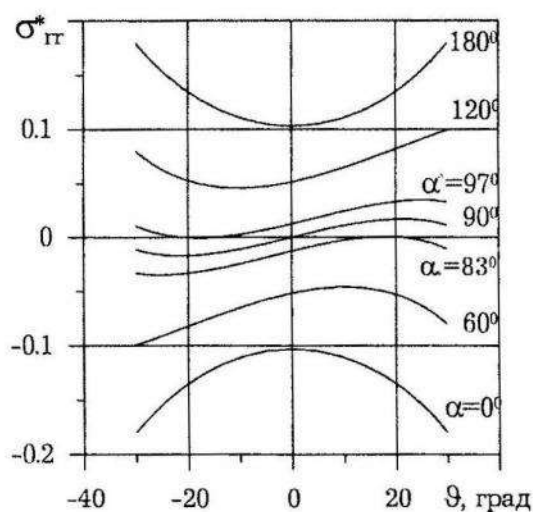


Рис. 3

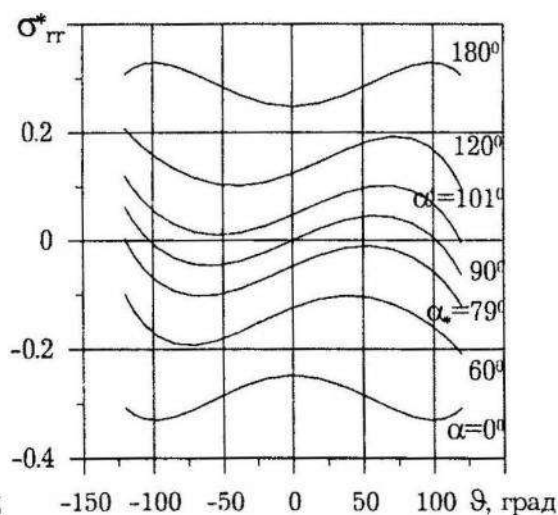


Рис. 4

За відсутності силового навантаження на рис. 3 для кута розхилу тріщини $\phi = 30^\circ$, а на рис. 4 - для $\phi = 120^\circ$ наведено розподіл зведених

контактних напружень $\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr} \lambda / (\beta_0 R q_\infty)$ між берегами теплопроникної тріщини ($\lambda_1/\lambda = 2$) за різних значень кута нахилу теплового потоку α .

Як засвідчив числовий аналіз для кожного кута розхилу тріщини ϕ існують граничні кути нахилу теплового потоку $\alpha_* < \pi/2$ ($\alpha^* > \pi/2$), за яких береги тріщини змикаються уздовж усієї довжини при $\alpha < \alpha_*$ ($\alpha > \alpha^*$), частково контактуватимуть при $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$ та повністю відставатимуть, якщо $\alpha > \alpha^*$ ($\alpha < \alpha_*$), коли $q_\infty > 0$ ($q_\infty < 0$). Якщо кут α_* (α^*) та $q_\infty > 0$ ($q_\infty < 0$), якщо кут розхилу тріщини $\phi > 113^\circ$, то можна сподіватися відставання берегів тріщини в околі нижнього (верхнього) її кінця (рис. 4), а якщо $\phi < 113^\circ$ – ближче до центра тріщини (рис. 3). Отже, при $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$ контактні напруження між берегами тріщини змінюють знак незалежно від напрямку теплового потоку q_∞ , тобто треба розглянути задачу в іншому формулюванні, враховуючи відставання берегів тріщин. Як бачимо, зведені контактні напруження зі збільшенням кута розхилу тріщини зростають за абсолютним значенням. Варто зазначити, що при $\alpha = 0$ і при $\alpha = 180^\circ$ зведені контактні напруження симетричні стосовно осі симетрії тріщини, а для кутів $\alpha < \alpha_*$ та при $\pi - \alpha > \alpha^*$ антисиметричні.

Для $\alpha = 0$ і $q_\infty > 0$ на рис. 5 наведено розподіл зведених контактних напружень між берегами теплопроникної тріщини для кута розхилу тріщини $\phi = 30^\circ$, а на рис. 6 – зведених коефіцієнтів інтенсивності напружень $K_2^{*+} = K_2^+ \lambda / (\beta_0 R^{3/2} q_\infty)$ від кута розхилу тріщини ϕ за різних значень коефіцієнта теплопроникності. Крива 1 побудована для $\lambda_1/\lambda = 0$ – тріщина теплоізована, 2 – $\lambda_1/\lambda = 0,5$, 3 – $\lambda_1/\lambda = 1$, 4 – $\lambda_1/\lambda = 2$, 5 – $\lambda_1/\lambda = 4$, 6 – $\lambda_1/\lambda = 10$ відповідно. Зауважимо, що при $\alpha = 0$ $K_2^{*+} = -K_2^{*-}$.

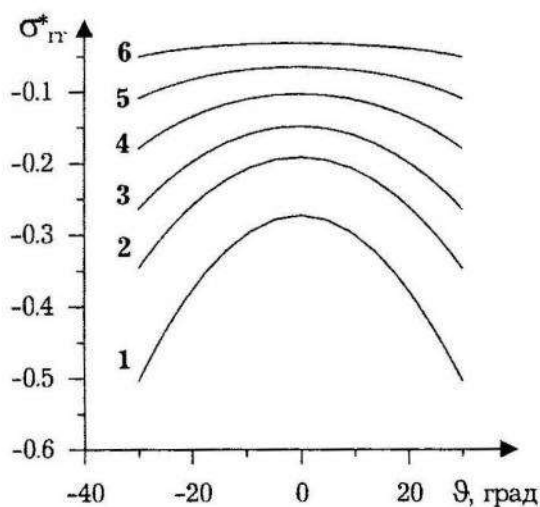


Рис. 5

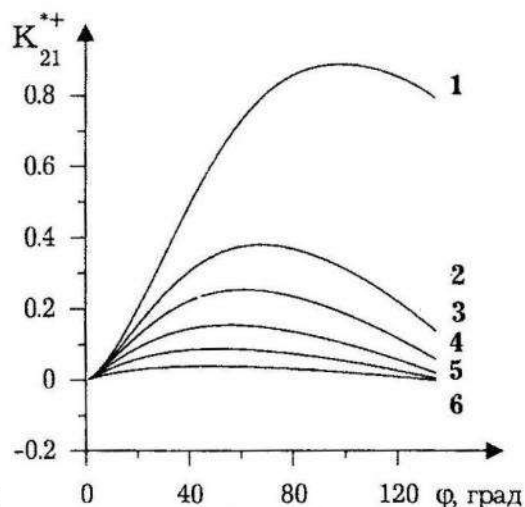


Рис. 6

З рис. 5 і 6 можна зробити висновок, що за збільшення коефіцієнта теплопровидності тріщини λ_1 , зведені контактні напруження та коефіцієнти інтенсивності напружень прямують до нуля, тобто отримаємо абсолютно провідну тріщину, яка не впливає на температурне поле пластини та її напружено-деформований стан.

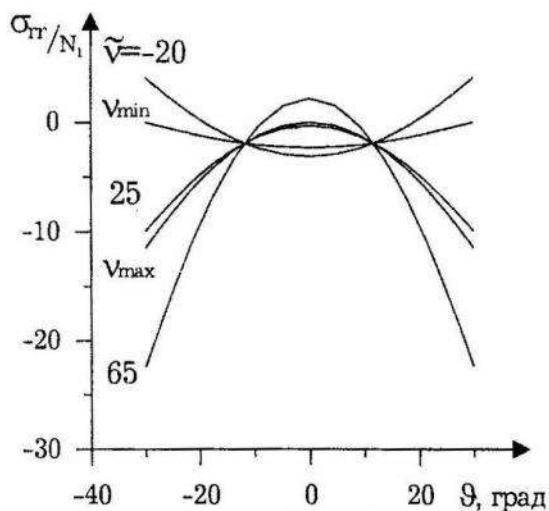


Рис. 7

На рис. 7 зображено розподіл контактних напружень уздовж берегів теплопровидної тріщини ($\lambda_1/\lambda = 2$) за сумісної дії теплового потоку та рівномірно розподілених напружень для сплаву АМг-6 з такими характеристиками:

$$E = 6.867 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$\alpha_t = 25 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^{\circ}\text{C},$$

$$\lambda = 26,38 \text{ кВт/(м}^{\circ}\text{C)}, \quad \text{коли}$$

$$\tilde{N} = \beta_0 R q_{\infty} / (\lambda N_1) = 8,135, \quad \phi = 30^{\circ},$$

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0 \quad \text{за різних значень}$$

відношення заданих напружень на

нескінченності $\tilde{\nu} = N_2/N_1$.

Визначено граничні значення $\tilde{\nu}$ відношення напружень на нескінченності — $\nu_{\min} = -6,91$ і $\nu_{\max} = 29,89$, за яких контактні напруження між берегами тріщини перетворюються в нуль на кінцях тріщини при $\tilde{\nu} = \nu_{\min}$ і у центрі, якщо $\tilde{\nu} = \nu_{\max}$ (див. рис. 7).

На підставі рис. 7 можна зробити такий висновок: коли відношення головних напружень на нескінченності $\tilde{\nu} > \nu_{\max}$, то береги тріщини відстають у її центральній частині, коли $\tilde{\nu} < \nu_{\min}$ – в околі кінців тріщини, а якщо для відношення напружень на нескінченності виконується нерівність $\nu_{\min} \leq \tilde{\nu} \leq \nu_{\max}$, то береги тріщини завжди контактуватимуть для заданого кута розхилу тріщини ϕ .

Якщо порівняти відповідні результати для теплоізольованої [5] та теплопроникної тріщини (рис. 3–7), то наявність у тілі теплопроникної тріщини призводить до зменшення величини контактних напружень уздовж берегів тріщини та граничних кутів нахилу теплового потоку α_* , α^* , і до зменшення діапазону значень відношення напружень на нескінченності, за яких береги тріщин зазнаватимуть повного контакту.

Список використаної літератури

1. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1975.
2. Гриліцький Д.В. Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов / Д.В. Гриліцький, Р.М. Луцишин. – Львів : Вища шк., 1975.
3. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К. : Наук. думка, 1983.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966.
5. Опанасович В.К. Термопружний стан пластини з теплоізольованими дуговими тріщинами уздовж кола з урахуванням повного гладкого контакту їх берегів / В.К. Опанасович, Н.М. Басса // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 164–174.
6. Опанасович В. Контактна задача для пластини з теплопроникливою тріщиною по дузі кола / В. Опанасович, Н. Копоть // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур : V міжнародна наукова конференція, 20–23 вересня 2000 р. : матер. конф. – Луцьк, 2000. – Т. 2. – С. 47–50.
7. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости / И.А. Прусов. – Минск : Изд-во БГУ, 1972.
8. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981.
9. Ritz E. Closure of circular arc cracks under general loading: effects on stress intensity factors / E. Ritz, D.D. Pollard // Int. J. Fract. – 2011. – 167. – P. 3–14.

**ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С РАЗМЕЩЕННЫМИ
ВДОЛЬ ОКРУЖНОСТИ ТЕПЛОПРОВОДЯЩИМИ ТРЕЩИНАМИ,
БЕРЕГА КОТОРЫХ ГЛАДКО КОНТАКТИРУЮТ ВДОЛЬ ВСЕЙ ДЛИНЫ****Виктор ОПАНАСОВИЧ¹, Наталия БАССА²**¹*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*²*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина*

Исследовано термоупругое состояние изотропной пластины с теплопроводящими трещинами вдоль дуг окружности, берега которых гладко контактируют по всей своей длине под действием равномерно распределенных напряжений и постоянного теплового потока на бесконечности. С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов построение решений задач теплопроводности и термоупругости сведено к задачам линейного сопряжения, причем скачок температуры между берегами трещин определен из системы интегро-дифференциальных уравнений с использованием метода ортогональных полиномов, а комплексный потенциал плоской задачи термоупругости найден в замкнутом виде.

Ключевые слова: изотропная пластина, трещины, гладкий контакт, комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений.

**THERMOELASTIC STATE OF PLATE WITH HEAT-CONDUCTING
CRACKS ON CIRCLE ARCS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE
COMPLETE SMOOTH CONTACT OF THE CRACK FACES****Viktor OPANASOVYCH¹, Nataliya BASSA²**¹*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*²*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine*

The thermoelastic state of isotropic plate with heat-conducting cracks on the arcs of circle is investigated. It is assumed that the crack faces have smooth contact on all length of the crack under the influence of a uniformly distributed stresses and thermal flow at infinity. Using the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the unknown jumps of temperature have been determined from a system of the integro-differential equations, which is solved by the orthogonal polynomial method. An explicit form of complex potential for the thermoelasticity problem has been obtained.

Key words: isotropic plate, thermoelastic state, heat-conducting cracks, smooth contact, complex potentials, stress intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛАСТИН З ДВОМА СПІВВІСНИМИ АБО КОМПЛАНАРНИМИ РОЗРІЗАМИ (АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ)

Ігор КУЗЬ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

За допомогою варіаційно-різницевого методу розв'язують плоскі задачі деформаційної теорії пластичності за активного навантаження про деформування пластини з двома співвісними або компланарними розрізами та з такими самими абсолютно жорсткими включеннями. З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги в переміщеннях у пластині з мішаними крайовими умовами на її поверхні. Для числового розв'язування цих задач у незв'язних областях використовують їхні варіаційні формулювання, які полягають у мінімізації лагранжіана. Отримані після дискретизації сформульованих задач системи нелінійних алгебричних рівнянь розв'язують методом Ньютона-Канторовича.

За допомогою числової реалізації наведеного вище методу отримано поля напружень і діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень у пластинах з двома співвісними або компланарними розрізами та з такими самими абсолютно жорсткими включеннями за одновісного розтягу, а також визначено області виникнення та розвитку пластичних деформацій.

Ключові слова: варіаційно-різницевий метод, незв'язна область, деформаційна теорія пластичності, пластина, співвісні розрізи, компланарні розрізи, абсолютно жорсткі включення.

Дослідження напружено-деформованого стану пластин з розрізами або з тонкими включеннями [1, 2] – це необхідний етап розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій займають незв'язну область [3] і містять концентратори напружень, то можливість застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач значно обмежена. У [4] за допомогою числового методу розв'язують плоскі задачі деформаційної теорії пластичності про деформування пластин з розрізом або з таким самим абсолютно жорстким включенням. Ми продовжуємо [4] для випадку двох співвісних або компланарних розрізів (абсолютно жорстких включень).

Формулювання задачі. Розглядають плоскі задачі деформаційної теорії пластичності (теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина) за активного навантаження в областях V з межею Σ (рис. 1, 2), які моделюють напружено-деформований стан у пластині. З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + X_i = 0 \quad (1)$$

при використанні мішаних крайових умов на її межі $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl} u_{k,l} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = S_i^0. \quad (2)$$

Тут C_{ijkl} – компоненти тензора модулів пружності; u_i, X_i, S_i^0, n_j – компоненти векторів переміщень, об'ємних і поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ , відповідно; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації отримаємо

$$u_1 = u_x(x, y), \quad u_2 = u_y(x, y), \quad u_3 = u_z \equiv 0. \quad (3)$$

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу, потрібно в (1), (2) прийняти

$$C_{ijkl}(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)), \quad \lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3} \mu(\varepsilon_u), \quad (4)$$

де ε_u – інтенсивність тензора деформацій $\left(\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij} e_{ij}}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$;

K – модуль об'ємного стиску; $\omega(\varepsilon_u)$ – функція пластичності Ільющина [5].

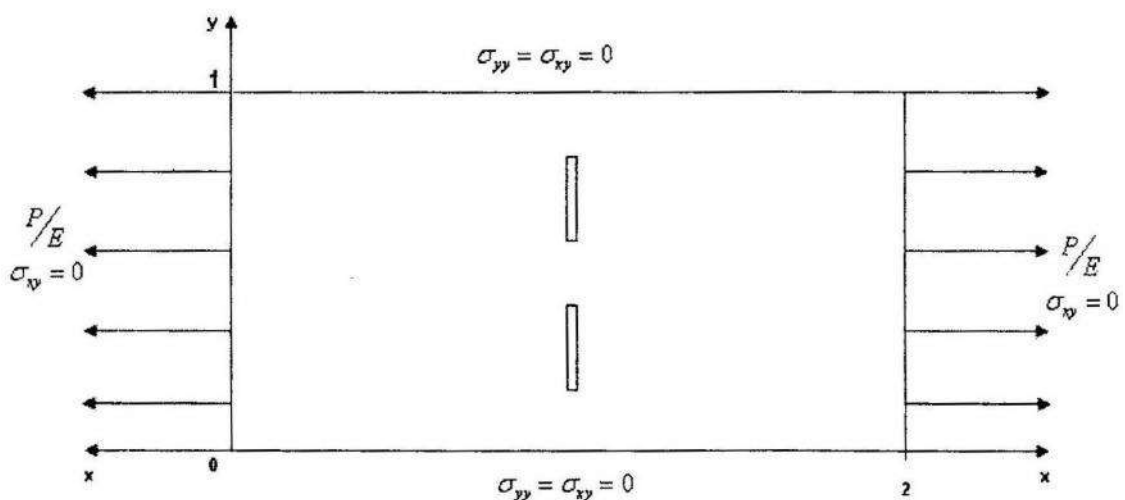


Рис. 1. Пластина з двома співвісними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями) та крайовими умовами на зовнішній межі

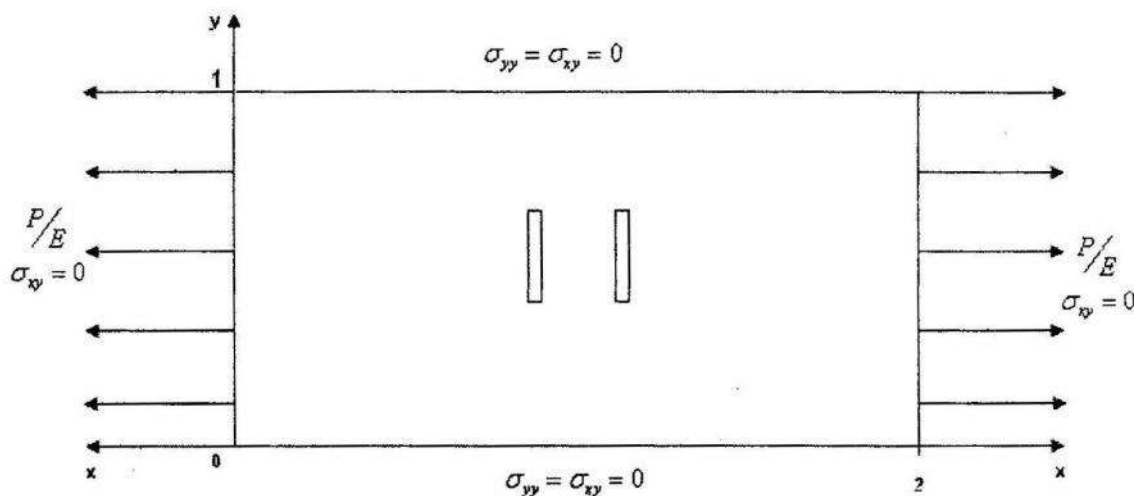


Рис. 2. Пластина з двома компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями) та крайовими умовами на зовнішній межі

Для матеріалу з лінійним зміцненням $\omega(\varepsilon_u)$ набуває вигляду

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} (1 - \gamma) \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_s}{\varepsilon_u}, & \varepsilon_u > \varepsilon_s, \\ 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_s, \end{cases} \quad (5)$$

де ε_s – межа текучості; $\gamma = \mu'/\mu$ (μ' – модуль зміцнення).

Метод розв'язування задачі та результати числових досліджень. Для числового розв'язування задачі (1)–(5) зручно використовувати її варіаційне формулювання [6], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$L = \int_V W dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\Sigma_\sigma} S_i^0 u_i d\Sigma. \quad (6)$$

Тут $W = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\varepsilon_u) u_{i,j} u_{k,l}$ – питома потенціальна енергія пружно-пластичної деформації.

Замінивши в (6) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L [6].

Для визначення стаціонарної точки L у випадку деформаційної теорії пластичності одержимо системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{u}) + \vec{F} = 0,$$

які розв'язують ітераційними методами [7].

Описаний варіаційно-різницевий метод у незв'язних областях реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сіток на DELPHI.

На рис. 1, 2 зображено геометрію пластин з двома співвісними та компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями), відповідно, та крайові умови. Межі розрізів або вільні від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{nt} = 0$), або закріплені ($u_t = 0, u_n = 0$), що моделює наявність тонких абсолютно жорстких включень. До правого та лівого краю пластини прикладене рівномірне горизонтальне розтягувальне навантаження $P/E = 0,45$.

Усі розрахунки проводили у безрозмірних величинах. Модуль пружності $E = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа текучості $\sigma_s = 0,5$, параметр зміцнення $\gamma = 0,2$. Довжина розрізів удесятеро більша за їхню ширину. Відстані між розрізами дорівнюють їхній довжині. Отримані діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з двома співвісними розрізами або з такими ж абсолютно жорсткими включеннями зображені на рис. 3 і 4, відповідно.

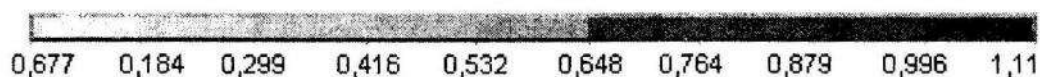
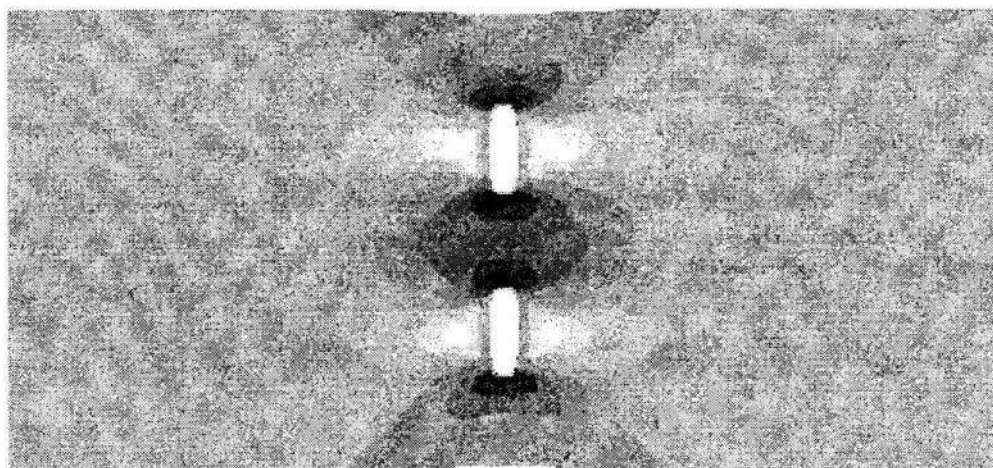
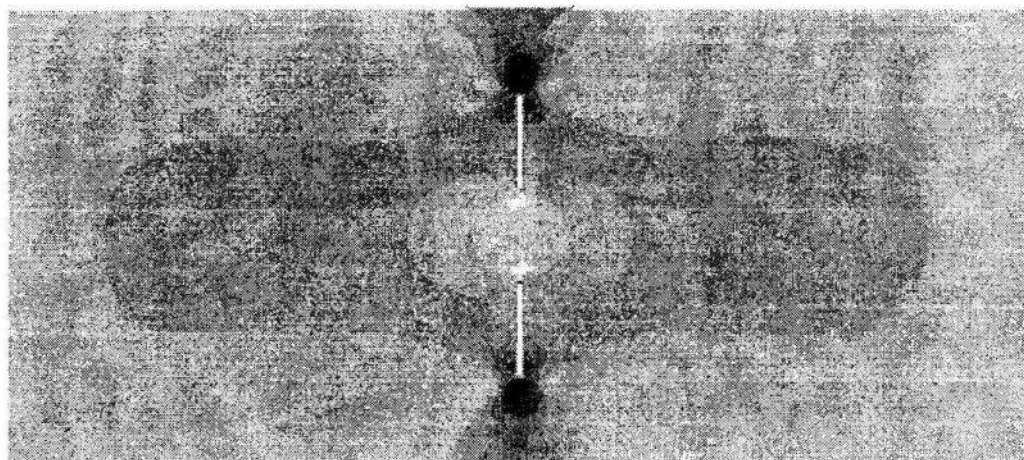


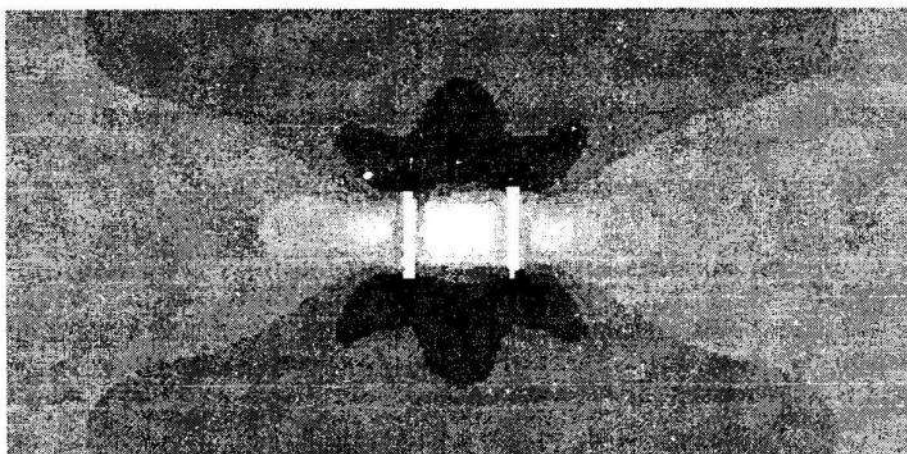
Рис. 3. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з двома співвісними розрізами



0,357 0,382 0,407 0,432 0,457 0,482 0,506 0,531 0,556 0,581

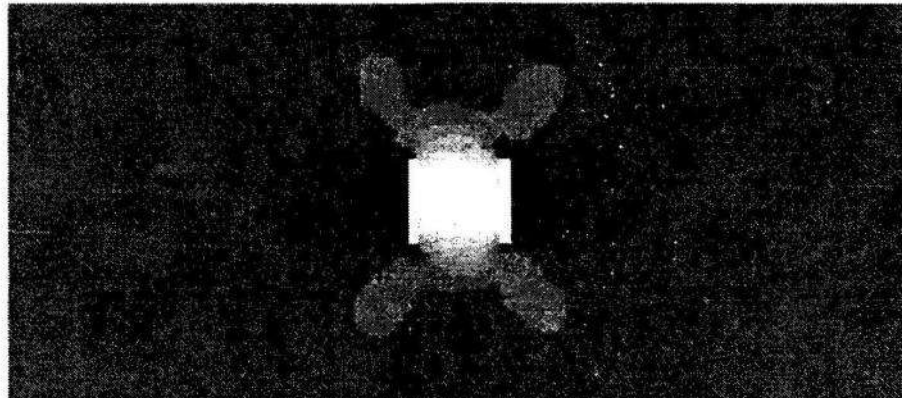
Рис. 4. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з двома співвісними абсолютно жорсткими включеннями

На рис. 5, 6 зображені діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з двома компланарними розрізами або з такими самими абсолютно жорсткими включеннями, відповідно.



0,021 0,108 0,195 0,283 0,370 0,458 0,545 0,633 0,720 0,807

Рис. 5. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з двома компланарними розрізами



0,011 0,079 0,148 0,215 0,283 0,352 0,420 0,488 0,556 0,624

Рис. 6. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E у пластині з двома компланарними абсолютно жорсткими включеннями

На рис. 3 і 5 показано, як деформуватимуться межі розрізів.

За допомогою діаграм розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E можна визначити області виникнення та розвитку пластичних деформацій. Згідно з умовою текучості Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли інтенсивність тензора напружень σ_u досягає межі текучості σ_s (у нас $\sigma_s=0,5$).

Висновки. Як видно з рис. 3, області пластичних деформацій у пластині з двома співвісними розрізами вперше з'являються на торцях розрізів і розповсюджуються у формі еліпсів з більшими півсями в напрямі розтягу. Натомість, пластичні деформації у пластині з двома співвісними жорсткими включеннями (рис. 4) вперше виникають лише на зовнішніх торцях включень і розвиваються передовсім до найближчих країв пластини. Як видно з рис. 5, пластичні деформації у пластині з двома компланарними розрізами також вперше з'являються біля торців розрізів, проте розповсюджуються назустріч одні одним не вздовж осі розтягу, а з відхиленням до найближчих країв пластини. У пластині з двома компланарними включеннями (рис. 6) пластичні деформації вперше з'являються вздовж зовнішніх (ближчих до країв пластини), неторцевих поверхонь включень. Форма областей з однаковою величиною інтенсивності напружень у пластинах з розрізами (включеннями) є, очевидно, симетричною стосовно вертикальної та горизонтальної осей симетрії розрізів (включень). Пластичні деформації у пластинах з розрізами виникають за значно меншого навантаження (на 45% для співвісних розрізів і на 25% для компланарних), ніж у відповідних пластинах з такими самими включеннями.

Отож, отримані поля напружень дають змогу виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм руйнування оцінити міцність пластин з розрізами або з тонкими абсолютно жорсткими включеннями.

Список використаної літератури

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія / Г.Т. Сулим – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007.
2. Николишин М. М. Двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 115–121.
3. Кузь І. С. Дослідження пружно-пластичного з'єднувального елемента конструкцій під дією нерівномірних навантажень / І. С. Кузь // В зб. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій". Вип. 8. – Л.: Каменярь, 2009. – С. 35–41.
4. Кузь І. Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням / І. Кузь, І. Тімар // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 148–154.
5. Ильющин А. А. Пластичность / А. А. Ильющин. – М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
6. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
7. Шешенин С. В. О прикладных итерационных методах / С. В. Шешенин, И. С. Кузь // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Вып. 1. – С. 63–75.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН С ДВУМЯ СООСНЫМИ ИЛИ КОМПЛАНАРНЫМИ РАЗРЕЗАМИ (АБСОЛЮТНЫМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ)

Игорь КУЗЬ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

С помощью вариационно-разностного метода получены решения плоских задач деформационной теории пластичности о деформировании пластин с двумя соосными или компланарными разрезами (абсолютно жесткими включениями).

Ключевые слова: вариационно-разностный метод, деформационная теория пластичности, пластина, соосные разрезы, компланарные разрезы, абсолютно жесткое включение.

PLASTICAL STRAIN OF PLATES WITH TWO CUTS (THE SAME THIN RIGID BODY)

Ihor KUZ'

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Variation difference method of building finite difference schemes is used in unconnected domains. Using this method for solving 2D plasticity problems, stress states in plates with two cuts (the same thin rigid body) are investigated.

Key words: variation difference method, plasticity, plate, cut, thin rigid body.

Стаття надійшла до редколегії 02.11.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ДО ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Зоя БОЙКО¹, Тарас НАГІРНИЙ^{1,2}

¹Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Дж. Дудаєва, 15 79005 Львів, Україна

²Зеленогурський університет,
вул. проф. Шафрана, 4 65-516 Зелена Гура, Польща

Сформульовано та досліджено розв'язок задачі, що описує рівноважний стан структурно неоднорідного твердого шару. Оцінку коефіцієнтів моделі проведено на підставі відомих експериментальних даних для поверхневого натягу. Вивчено розмірні ефекти поверхневих напружень і міцності шару. З'ясовано, що поверхневі напруження, які виникають у вільному від силового навантаження шарі, є більшими від експериментально вимірювальної межі міцності.

Ключові слова: структурно неоднорідні тверді тіла, тонкі плівки, розмірні ефекти, параметри моделі.

1. Вступ. У зв'язку з інтенсивним розвитком нанотехнологій і широким використанням тонкоплівкових та тонковолокнистих систем важливого значення набуває побудова та дослідження математичних моделей, які достатньо ґрунтовно враховують властивості приповерхневих областей тіла та структуру матеріалу. До таких моделей належать, зокрема, моделі, побудовані за локально градієнтного підходу у термомеханіці [1-6]. У рамках цього підходу простір параметрів локального стану розширено хімічним потенціалом та його градієнтом, спряженими до яких, відповідно, є густина та вектор зміщення маси. При формулюванні та дослідженні розв'язків крайових задач на підставі цих моделей, на поверхні тіла задавалося постійне значення хімічного потенціалу. Однак способів вимірювання чи визначення такого значення не зазначили. У [3] показано, що збурення хімічного потенціалу можна ототожнити зі збуренням енергії зв'язку, тому вимірювання її неможливе. У [7] граничною умовою є фізично обґрунтована умова на густину. У цій же праці розглянуто узгодженість з відомими в літературі підходами [8, 9], в яких враховують неідеальну форму поверхні при контактній взаємодії твердих тіл, розрізняючи фізичну неоднорідність приповерхневих шарів і геометричну неоднорідність поверхонь тіл. Зазначимо також, що в літературі немає праць, у яких би проводилась оцінка модельних коефіцієнтів за локально градієнтного підходу.

У рамках моделі структурно неоднорідного твердого тіла, на підставі розв'язку задачі для пружного шару та відомих у літературі експериментальних даних ми провели оцінку модельних коефіцієнтів. Це дало змогу також оцінити поверхневі напруження та вивчити розмірний ефект міцності шару (тонкої плівки).

2. Формулювання задачі. Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження структурно неоднорідний ізотропний пружний шар, що займає область $-l \leq x \leq l$ у прямокутній декартовій системі координат (x, y, z) . Вважаємо, що на поверхнях шару $x = -l$, $x = l$ задано постійне значення густини ρ_a . За відліковий стан тіла приймаємо стан, який відповідає стану необмеженого середовища вільного від зовнішнього навантаження. Ключова система рівнянь моделі пружного тіла за локально градієнтного підходу, записана стосовно тензора напружень $\hat{\sigma}$ та вектора зміщення маси Π_M , набула вигляду [10]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\sigma} &= 0, \\ \nabla \times \left\{ \hat{\sigma} - \frac{1}{3K} \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) \sigma + 2G\beta (\nabla \cdot \Pi_M) \hat{I} \right] \right\} \times \nabla &= 0, \\ \nabla (\nabla \cdot \Pi_M) + \frac{K\gamma}{\beta^2 - \alpha K} \Pi_M - \frac{\beta}{3(\beta^2 - \alpha K)} \nabla \sigma &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\sigma = \hat{\sigma} \cdot \hat{I}$; $\hat{I}$ – одиничний тензор; K , G – модулі об'ємного стиску та зсуву; α , β , γ – характеристики матеріалу; ∇ – диференціальний оператор Гамільтона; « $\times$ » – знак векторного добутку.

Систему рівнянь (1) доповнюємо такими граничними умовами:

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}|_{\partial V} = 0, \quad \nabla \cdot \Pi_M|_{\partial V} = \rho_a \quad (2)$$

на зовнішніх поверхнях тіла та умовами рівності нулю головного вектора та головного моменту зусиль у довільному поперечному перерізі. Тут $\rho_a = (\rho - \rho_*)|_{\partial V}$ – задане поверхнєве значення збурення густини; ρ_* – густина безмежного середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла; $\mathbf{n}$ – вектор одиничної зовнішньої до поверхні тіла. Якщо прийняти, що поверхня тіла проходить через найбільшу висоту профілю реальної поверхні, то $\rho = 0$ і $\rho_a = -\rho_*$ [11, 12].

Розв'язок сформульованої задачі, записаний стосовно головних компонент σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} тензора напружень $\hat{\sigma}$ та ненульової складової Π_M вектора Π_M ($\Pi_M = \Pi_M(P_M, 0, 0)$) набув вигляду

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{zz}(x) = \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right], \quad (3)$$

$$\sigma_{xx}(x) = 0, \quad (4)$$

$$P_M(x) = \frac{\rho_a}{\xi} \frac{\text{sh}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)}. \quad (5)$$

$$\text{Тут } \xi = \sqrt{\frac{(K + 4 / 3G)\gamma}{\alpha(K + 4 / 3G) - \beta^2}}.$$

Використовуючи визначальні співвідношення моделі [10], на підставі (3)-(5) для густини та хімічного потенціалу одержуємо

$$\rho - \rho_* = \rho_a \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)},$$

$$\eta(x) - \eta_* = -\frac{\rho_a}{3K(K + 4 / 3G)} \left\{ 3K \left[\alpha(K + 4 / 3G) - \beta^2 \right] \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 4G\beta^2 \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right\}. \quad (6)$$

Аналіз розв'язку (3) засвідчує, що у вільному від силового навантаження шарі існують ненульові напруження, зумовлені структурною неоднорідністю тіла. Найбільшими напруженнями в шарі є поверхневі напруження $\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_{zz}(\pm l)$

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_{zz}(\pm l) = \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4 / 3G} \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right], \quad (7)$$

які є розтягуючими. Тому на підставі (7) одержуємо $-\beta\rho_a > 0$. Оскільки $\rho_a < 0$, то для коефіцієнта β отримуємо оцінку

$$\beta < 0.$$

З формули (7) видно, що поверхневим напруженням властивий розмірний ефект, оскільки вони залежать від товщини шару. Зі збільшенням товщини шару поверхневі напруження збільшуються, прямуючи до усталеного значення

$$\sigma_0 = \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4 / 3G},$$

яке відповідає поверхневим напруженням у півпросторі.

Зазначимо також, що характерним розміром приповерхневої неоднорідності є величина $1/\xi$. Якщо товщина шару сумірна з характерним розміром приповерхневої неоднорідності, то неоднорідність у розподілі σ_{yy} , σ_{zz} властива усій області тіла. Такі шари звичайно називають тонкими плівками. Якщо ж товщина шару значно більша від $1/\xi$ (товсті шари), то неоднорідність у розподілі напружень зосереджена біля зовнішніх повер-

хонь тіла, тоді як напруження у внутрішній області шару практично дорівнюють нулеві.

3. Поверхневий натяг. Оцінка параметрів моделі. У ненавантаженому шарі поверхневий натяг визначається як інтегральна характеристика приповерхневих напружень по товщині області, де вони є розтягуючими, тобто

$$f_p = \int_{x_a}^l \sigma_{yy}(x) dx. \quad (8)$$

Тут $x_a > 0$ – точка переходу розтягуючих приповерхневих напружень σ_{yy} у стискаючі

$$\sigma_{yy}(x_a) = 0. \quad (9)$$

На підставі співвідношень (3) та (8) для поверхневого натягу отримаємо

$$f_p = -\frac{2G\beta\rho_a}{K+4/3G} \frac{l \operatorname{sh}(\xi x_a) - x_a \operatorname{sh}(\xi l)}{\xi l \operatorname{ch}(\xi l)}. \quad (10)$$

З використанням співвідношень (3), (9) для знаходження точки переходу x_a розтягуючих приповерхневих напружень у стискаючі отримуємо трансцендентне рівняння

$$\frac{\operatorname{ch}(\xi x_a)}{\operatorname{ch}(\xi l)} - \frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l} = 0,$$

розв'язком якого є

$$x_a = \frac{1}{\xi} \operatorname{arcch}\left(\frac{\operatorname{sh}(\xi l)}{\xi l}\right).$$

Якщо прийняти наближення $\exp(\xi l) \gg \xi l$, то для x_a отримуємо

$$x_a = l \left[1 - \frac{\ln(\xi l)}{\xi l} \right].$$

Підставивши це співвідношення в (10), для поверхневого натягу одержимо формулу

$$f_p = \frac{2G\beta\rho_a}{\xi(K+4/3G)} \left[1 - \frac{\ln(\xi l)}{\xi l} - \frac{1}{\xi l} \right], \quad (11)$$

яка описує вплив товщини шару на поверхневий натяг. Зі збільшенням товщини шару величина f_p прямує до свого усталеного значення, яке має сенс поверхневого натягу у півпросторі

$$f_p^\infty = \frac{2G\beta\rho_a}{\xi(K + 4/3G)}.$$

У літературі відомі експериментальні дані, що стосуються поверхневого натягу. Використаємо їх для визначення величини коефіцієнта β . У [13] для поверхневого натягу алюмінію на межі з повітрям приведено значення 1.9 Н/м. Прийmemo його за значення поверхневого натягу для масивного зразка, тобто $f_p^\infty = 1.9$ Н/м. На підставі [14] для характерного розміру області приповерхневої неоднорідності для алюмінію можна прийняти – $\xi \approx 5 \cdot 10^7$ м⁻¹. Модулі пружності та густина алюмінію такі:

$$K = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, G = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \rho_* = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Тоді, використовуючи вираз поверхневого натягу f_p^∞ у півпросторі, для $\beta\rho_a$ одержуємо

$$\beta\rho_a = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

Якщо прийняти, що маса шару в початковий та актуальний моменти часу однакова, то для ρ_a отримаємо – $\rho_a = -\rho_*/2$. Тому для коефіцієнта β одержуємо

$$\beta = -1.5 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м/кг}.$$

Тоді для поверхневого значення напружень у півпросторі з відпаленого алюмінію записуємо

$$\sigma_0 = 9.5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

Зазначимо, що межа міцності при розтягу відпаленого алюмінію дорівнює $8 \cdot 10^7$ Н/м².

Якщо ж для характерного розміру приповерхневої неоднорідності прийняти оцінку $\xi \approx 10^8$ м⁻¹, то одержимо

$$\beta\rho_a = 3.9 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2, \beta = -7 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м/кг}, \sigma_0 = 1.9 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

До ключової системи рівнянь моделі (1) входять три коефіцієнти. Оцінку двох із них провели раніше. Єдиним невизначеним коефіцієнтом моделі

варто вважати коефіцієнт α . Хоча його знак можна оцінити ($\alpha < 0$), однак зазначити навіть числових експериментів визначення його величини неможливо. Тому й неможливо обчислити значення хімічного потенціалу, що усталюється на поверхні тіла на підставі формули (6). Коефіцієнти ξ , β дають змогу однозначно описувати напружено-деформований стан тіла.

4. Міцність шару. Розмірний ефект. Для розтягнутого вздовж осі Oy шару зусиллями σ_a ($\sigma_a > 0$) найбільшими розтягуючими напруженнями у шарі є поверхневі напруження σ_{yy} , які є суперпозицією σ_a і напружень, що описуються формулою (3), тобто

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right]. \quad (12)$$

Зі збільшенням товщини шару поверхневі напруження (12) зростають, прямуючи до значення

$$\sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G},$$

яке має сенс поверхневого напруження у розтягнутому зусиллями σ_a пів-просторі.

Співвідношення (12) треба враховувати під час розрахунку міцності шару. Якщо за основу вибрати критерій першої класичної теорії міцності [15] та використати методику, наведену у праці [16], то для інтенсивності силового навантаження σ_a^{kr} , що приводить до руйнування шару, одержуємо

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right), \quad (13)$$

де σ_p – теоретична межа міцності.

При $l \rightarrow \infty$ значення σ_a^{kr} прямує до сталої величини σ_+

$$\sigma_+ = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G}, \quad (14)$$

яка відповідає інтенсивності силового навантаження, що призводить до руйнування товстих шарів. Цю величину визначають на підставі експериментальних даних.

Використовуючи (14), співвідношення (13) перетворюємо до вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_+ + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l}. \quad (15)$$

Праву частину співвідношення (15) можна трактувати як таку, що описує вплив розмірів шару на межу міцності (розмірний ефект межі міцності). Бачимо, що зі збільшенням товщини шару, величина прикладеного до шару силового навантаження, що призводить до його руйнування σ_a^{kr} , зменшується, прямуючи до σ_+ . Це й ілюструють графіки на рисунку, де показано залежність σ_a^{kr} / σ_+ від товщини шару (параметра ξl) для $b = 1.1, 3, 6$ (криві 1–3 відповідно); ($b = 4G\beta\rho_a / (K + 4/3G)\sigma_+$).

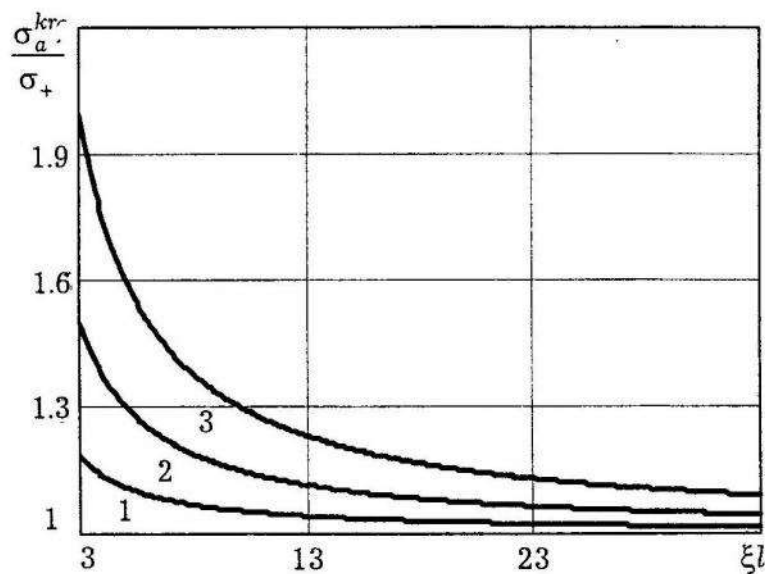


Рис. 1. Залежність σ_a^{kr} / σ_+ від товщини шару

Використовуючи числові дані для міцності шару, виготовленого з відпаленого алюмінію, на підставі (15) записуємо

$$\sigma_a^{kr} / 10^7 = 8 + 9.5 \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \text{ [Н/м}^2\text{]}. \quad (16)$$

Варто пам'ятати, що $\xi \approx 5 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$. Якщо ж для характерного розміру приповерхневої неоднорідності прийняти – $\xi \approx 10^8 \text{ м}^{-1}$, то

$$\sigma_a^{kr} / 10^7 = 8 + 19 \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \text{ [Н/м}^2\text{]}. \quad (17)$$

Для наближення $\exp(\xi l) \gg \xi l$ формули (16), (17) спрощуються до вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_+ + \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3Gkl} \frac{1}{l},$$
$$\sigma_a^{kr} / 10^7 = 8 + \frac{19}{\xi l} \text{ [Н/м}^2\text{]},$$

тобто значення σ_a^{kr} зменшується обернено пропорційно до зростання товщини шару. Про таку залежність свідчать експериментальні дослідження.

5. Висновки. В рамках моделі структурно неоднорідного твердого тіла на підставі розв'язку задачі для пружного шару та відомих у літературі експериментальних даних, що стосуються поверхневого натягу алюмінію, проведено оцінку модельних коефіцієнтів. До ключової системи рівнянь згаданої моделі входять три коефіцієнти. Ми провели оцінку двох із них, тоді як третій коефіцієнт залишається невизначеним. Хоча його знак оцінено, однак зазначити числових експериментів визначення його величини неможливо. Тому й неможливо обчислити значення хімічного потенціалу, що усталюється на поверхні тіла. Оцінені параметри моделі дають змогу однозначно описувати напружено-деформований стан тіла.

Отримані результати допомогли оцінити поверхневі напруження та вивчити розмірний ефект міцності шару (тонкої плівки). З'ясовано, що поверхневі напруження, які усталюються у вільному від силового навантаження шарі, більші від експериментально вимірюваної межі міцності.

Список використаної літератури

1. Бурак Я. И. Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах / Я. И. Бурак, Т. С. Нагирный // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, №12. – С. 3–23.
2. Нагирний Т. С. Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням приповерхневих явищ: автореферат дисертації д. ф.-м. н.: 01.02.04 / Нагирний Т. С. – Львів, 1998. – 32 с. – Рукопис.
3. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагирний та ін.; під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004.
4. Нагирний Т. Моделювання та дослідження квазістатичних механодифузійних процесів із врахуванням приповерхневої неоднорідності / Т. Нагирний, О. Грицина // 4-а Українсько-Польська конференція: матеріали конференції (Львів, 24-26 червня 2004 р.). – Львів, 2004. – Т. 1. – С. 159–174.

5. Грицина О. Р. Локально-градієнтний підхід у термомеханіці / О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний, К. А. Червінка // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2006. – № 3. – С. 59–64.
6. Nahirnyj T. Interface Phenomena and Interaction Energy at the Surface of Electroconductive Solids / T. Nahirnyj, K. Tchervinka // Computational Methods in Science and Technology. – 2008. – 14(2). – P. 105–110.
7. Нагірний Т. С. До вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу в термомеханіці / Т. С. Нагірний, К. А. Червінка, З. В. Бойко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 3. – С. 199–206.
8. Shvets R.M. Discontinuous Contact of an Anisotropic Half-plane and a Rigid Base with Disturbed Surface / R. M. Shvets, R. M. Martynyak, A. A. Kryshchak // Int. J. Engng. Sci. – 1996. – 34, № 2. – P. 183–200.
9. Adams G. G. Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies / G. G. Adams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – 71. – P. 851–856.
10. Нагірний Т. Про один підхід до формулювання крайових задач нелокальної теорії пружності / Т. Нагірний, З. Бойко // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 14. – С. 95–104.
11. ГОСТ 2789-73 – Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики.
12. Degarmo E. P. Materials and Processes in Manufacturing (9th ed.) / E. P. Degarmo, J. T. Black, R. A. Kohser. – Wiley, 2003. – P. 223.
13. Фролов Ю. А. Курс коллоидной химии: Поверхностные явления и дисперсные системы / Ю. А. Фролов. – М.: Химия. – 1982.
14. Непийко С. А. Физические свойства малых металлических частиц / С. А. Непийко. – К.: Наук. думка, – 1985.
15. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие; под ред. В. В. Панасюка; в 4-х т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов / В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, В. С. Партон. – К.: Наук. думка, – 1988.
16. Нагірний Т. С. Поверхневі напруження в шарі. Поверхневий натяг та міцність шару / Т. С. Нагірний // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №4. – С. 111–115.

К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Зоя БОЙКО¹, Тарас НАГІРНИЙ^{1,2}

¹*Центр математического моделирования Института прикладных
проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Дж. Дудаева, 15 79005 Львов, Украина*

²*Зеленогурский университет,
ул. проф. Шафрана, 4 65-516 Зелёна-Гура, Польша*

Сформулировано и исследовано решение задачи, которое описывает равновесное состояние структурно неоднородного твердого слоя. Оценку коэффициентов модели проведено на основании известных экспериментальных данных для поверхностного натяжения. Изучено размерные эффекты поверхностных напряжений и прочности слоя. Показано, что поверхностные напряжения, что устанавливаются в свободном от силовых нагрузок слое, большие от экспериментально измеряемой границы прочности.

Ключевые слова: структурно неоднородные твердые тела, тонкие пленки, размерные эффекты, параметры модели.

TO ESTIMATION OF MODEL PARAMETERS STRUCTURALLY HETEROGENEOUS SOLID

Zoya BOIKO¹, Taras NAHIRNYJ^{1,2}

¹*Center of Mathematical Modelling of Pidstryhach
Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
of Ukrainian National Academy of Sciences
Dudaieva Str., 15 79005 Lviv, Ukraine*

²*University of Zielona Gora,
Prof. Shafran Str., 4 65-516 Zielona Gora, Poland*

The solution of the problem which describes equilibrium state of structurally heterogeneous solid layer is investigated. The estimation of model coefficients is conducted using known data for a surface tension. The size effects of surface stress and strength layer are studied. It is shown that the surface stress that are established in the layer, which is free of a force loading, are more than experimentally measuring strength limit.

Key words: structurally heterogeneous solid, thin films, size effects, model parameters.

Стаття надійшла до редколегії 08.11.2011
Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 517.956

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГОРИЗОНТАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ольга ПЕЛЮШКЕВИЧ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто розв'язність мішаної задачі для навантаженої напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з горизонтальними характеристиками. Методом характеристик задача зведена до системи інтегро-операторних рівнянь Вольтерра другого роду, для якої за допомогою теореми Банаха про стискуjące відображення визначено достатні умови існування глобального неперервного розв'язку задачі.

Ключові слова: гіперболічна система, метод характеристик, напівлінійні рівняння, теорема Банаха.

Вступ. Незважаючи на свій півторастолітній розвиток, у теорії гіперболічних рівнянь і систем виникають нові задачі. До таких задач варто зачислити і мішані задачі для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними, в яких можуть бути вироджені (горизонтальні або вертикальні) характеристики.

Ці задачі є цікавими, оскільки вони з'являються в проблемах з малим параметром у вироджених випадках [1, 2]. Крім того, задачі з горизонтальними характеристиками (вертикальними) є математичними моделями багатьох процесів фізики, механіки, гідро- та газодинаміки, біології тощо [3, 4]. Проблема вироджених характеристик виникає також при зведенні гіперболічних систем квазілінійних рівнянь до канонічної форми Шаудера (характеристична канонічна форма) [5].

Використовуючи підхід, запропонований в [6], ми побудуємо єдиний розв'язок мішаної задачі для гіперболічної системи напівлінійних навантажених рівнянь з горизонтальними характеристиками у всій розглядуваній області. Запропоновано метод, який допоможе уникнути відомої проблеми про те, що в мішаних задачах для гіперболічних систем виникають особливості (лінії розриву) навіть для гладких вихідних даних, у випадку побудови неперервних розв'язків для всіх $t > 0$ [5].

Формулювання задачі. В області $G = \{(x, t) : 0 < t < T, -kt < x < kt + l\}$, T, k, l – додатні сталі, розглядаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \\ & = f(x, t, u(x, t), v(x, t), u(-kt, t), v(-kt, t), u(kt + l, t), v(kt + l, t)), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g(x, t, u(x, t), v(x, t), u(-kt, t), v(-kt, t), u(kt + l, t)), \quad (1)$$

де $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $g = (g_1, \dots, g_n)^T$, $\Lambda(x, t) = \text{diag}(\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_m(x, t))$.

Для системи (1) задамо початкові умови

$$u(x, 0) = q(x), \quad (q = (q_1, \dots, q_m)), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2)$$

Визначимо множини індексів

$$I_0 = \{i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i(0, t) > -k\}, \quad I_l = \{i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i(l, t) < k\}$$

та запишемо крайові умови у вигляді

$$\begin{aligned} u_i(-kt, t) &= \gamma_i^0(t, (u(-kt, t))_{s \notin I_0}), \quad i \in I_0, \\ u_i(l + kt, t) &= \gamma_i^l(t, (u(l + kt, t))_{s \notin I_l}), \quad i \in I_l, \end{aligned} \quad (3)$$

$$v(-kt, t) = \psi(t, (u(-kt, t))_{s \notin I_0}), \quad (\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)). \quad (4)$$

Нехай множини I_0, I_l містять відповідно r_0 та r_l елементів. Вважатимемо, що всі задані функції

$$f : \bar{G} \times R^{3m+3n} \rightarrow R^m, \quad g : \bar{G} \times R^{3m+2n} \rightarrow R^n, \quad \lambda_i : \bar{G} \rightarrow R^m, \quad q : [0, l] \rightarrow R^m,$$

$$\gamma^0 : [0, T] \times R^{r_l} \rightarrow R^{r_0}, \quad \gamma^l : [0, T] \times R^{r_0} \rightarrow R^{r_l}, \quad \psi : [0, T] \times R^{r_l} \rightarrow R^n$$

є неперервними, а функції λ_i , крім того, задовольняють умову Лівшиця за змінною x . Також виконується співвідношення

$$(\lambda_i(-kt, t) + k)(\lambda_i(l + kt, t) - k) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Глобальна розв'язність задачі. Позначимо через $\phi_i(t; x_0, t_0)$, $i \in \{1, \dots, m\}$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

і назвемо їх характеристиками системи (1). Для зручності введемо позначення $\phi_i(t) := \phi_i(t; x_0, t_0)$. Через $\chi_i(x_0, t_0)$ позначимо найменше t , для якого в $\bar{G}$ визначений розв'язок $x = \phi_i(t; x_0, t_0)$. Крім того, зазначимо, що

другий блок системи (1) має також сім'ю горизонтальних характеристик вигляду $t = t_0$.

Введемо області

$$\begin{aligned} G_q^i &= \{(x, t) \in G : \chi_i(x, t) = 0\}, i \in \{1, \dots, m\}, \\ G_0^i &= \{(x, t) \in G : \chi_i(x, t) > 0, \phi_i(\chi_i(x, t); x, t) = -k\chi_i(x, t)\}, i \in I_0, \\ G_l^i &= \{(x, t) \in G : \chi_i(x, t) > 0, \phi_i(\chi_i(x, t); x, t) = l + k\chi_i(x, t)\}, i \in I_l. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши рівняння системи (1) вздовж відповідних характеристик, зведемо задачу (1)–(4) до системи інтегро-операторних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= F_i[w](x, t) + \\ &+ \int_{\chi_i(x, t)}^t f_i(\phi_i(\tau), \tau, u(\phi_i(\tau), \tau), v(\phi_i(\tau), \tau), u(-k\tau, \tau), \\ &v(-k\tau, \tau), u(k\tau + l, \tau), v(k\tau + l, \tau))d\tau, i \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v_j(x, t) &= \psi_j(t, u(-kt, t)) + \\ &+ \int_{-kt}^x g_j(y, t, u(y, t), v(y, t), u(-kt, t), v(-kt, t), u(kt + l, t))dy, j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$F_i[w](x, t) = \begin{cases} q_i(\phi_i(0; x, t)), & (x, t) \in G_q^i, \\ \gamma_i^0(\chi_i(x, t), u(-k\chi_i(x, t), \chi_i(x, t))), & (x, t) \in G_0^i, \\ \gamma_i^l(\chi_i(x, t), u(l + k\chi_i(x, t), \chi_i(x, t))), & (x, t) \in G_l^i. \end{cases} \quad (7)$$

Означення. Узагальненим неперервним розв'язком задачі (1)–(4), будемо називати пару вектор-функцій (u, v) , компоненти яких належать простору $C(\overline{G})$ і задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь (5)–(6).

Теорема. Нехай виконуються такі умови:

- $\lambda, f, g, q, \psi, \gamma^1, \gamma^2$ – неперервні вектор-функції на відповідних множинах;
- компоненти вектор-функції λ є ліпшицевими на множині $\overline{G}$ за змінною x ;
- компоненти вектор-функцій $f, g, q, \psi, \gamma^1, \gamma^2$ є ліпшицевими за змінними u, v на відповідних множинах;
- правильне співвідношення

$$(\lambda_i(-kt, t) + k)(\lambda_i(l + kt, t) - k) \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad i \in \{1, \dots, m\};$$

– справджується умова погодження

$$\begin{aligned} q_i(0) &= \gamma_i^0(0, q(0)), \quad i \in I_0, \\ q_i(l) &= \gamma_i^l(0, q(l)), \quad i \in I_l. \end{aligned}$$

Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі (1)–(4) у $\overline{G}$.

Доведення. Розглянемо простір Q , пар неперервних функцій $w = (u, v)$ ($u : G \rightarrow R^m, v : G \rightarrow R^n$), позаяк виконуються умови

$$\begin{aligned} u_i(0, 0) &= q_i(0), \quad i \in I_0, \\ u_i(l, 0) &= q_i(l), \quad i \in I_l. \end{aligned}$$

Нехай $\{w^1, w^2\} \in Q$, тоді метрику на елементах простору Q визначимо як

$$\begin{aligned} \rho(w^1, w^2) &= \max \left\{ \max_{i,x,t} |u_i^1(x, t) - u_i^2(x, t)| \alpha_i(x, t) e^{-at}; \right. \\ &\quad \left. \max_{i,x,t} |v_i^1(x, t) - v_i^2(x, t)| \beta_i(x, t) e^{-at} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

де стали $a > 0$ і неперервні додатні функції α_i, β_i підберемо пізніше.

На елементах простору Q введемо оператор $A = (A^1, A^2)$, який діє за формулою $A[w] = (A^1[u, v], A^2[u, v])$, де оператори A^1 і A^2 визначені, відповідно, правими частинами рівностей (5), (6) (те, що ці оператори переводять неперервні функції в неперервні, випливає з відомих теорем математичного аналізу, а також із неперервності функцій $\phi_i(\tau; x, t)$ та $\chi_i(x, t)$ за всіма аргументами). Отже, пара функцій (u, v) є неперервним узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) тоді і тільки тоді, коли $w = (u, v)$ є нерухомою точкою оператора A .

Нехай $w^1 \in Q, w^2 \in Q$. Тоді з формули (8) при всіх допустимих i, x, t одержимо

$$|u_i^1(x, t) - u_i^2(x, t)| \leq \frac{\rho(w^1, w^2)}{\alpha_i(x, t)} e^{at}, \quad |v_i^1(x, t) - v_i^2(x, t)| \leq \frac{\rho(w^1, w^2)}{\beta_j(x, t)} e^{at}.$$

Через L позначимо спільну сталу в умові Ліпшиця для функцій $f, g, \psi, \gamma^0, \gamma^l$, яку запишемо, наприклад, так:

$$|f_i(x, t, u^1, v^1) - f_i(x, t, u^2, v^2)| \leq L \max\{\max_{j,x,t} |u_j^1 - u_j^2|, \max_{j,x,t} |v_j^1 - v_j^2|\}$$

і аналогічно для інших функцій.

Знайдемо коефіцієнт стиску оператора A , для цього виконаємо такі оцінки. Нехай $w^1, w^2 \in Q$. Тоді з (7) отримаємо нерівність

$$|F_i[w^1](x, t) - F_i[w^2](x, t)| \leq \begin{cases} L \max_{j \notin I_0} \frac{\rho(w^1, w^2)}{\alpha_j(-k\chi_i(x, t), \chi_i(x, t))} e^{a\chi_i(x, t)}, & (x, t) \in G_0^i, \\ L \max_{j \notin I_l} \frac{\rho(w^1, w^2)}{\alpha_j(l + k\chi_i(x, t), \chi_i(x, t))} e^{a\chi_i(x, t)}, & (x, t) \in G_l^i. \end{cases} \quad (9)$$

Нехай $\Lambda = \max_{i,x,t} |\lambda_i(x, t)|$, тоді для кожного $(x, t) \in \bar{G}$ одержимо оцінки [6]

$$\chi_i(x, t) \leq \frac{-x + \Lambda t}{\Lambda + k}, \quad i \in I_0, \text{ аналогічно, для } i \in I_l \text{ маємо } \chi_i(x, t) \leq \frac{x + \Lambda t - l}{\Lambda + k}.$$

На підставі отриманих оцінок для оператора A^1 одержимо

$$\begin{aligned} & \left| (A_i^1[w^1](x, t)) - (A_i^1[w^2](x, t)) \right| \alpha_i(x, t) e^{-at} \leq \\ & \leq L \max \left\{ \max_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0, \sigma}} \frac{\alpha_i(x, t) e^{a\left(\frac{-x + \Lambda t}{\Lambda + k} - t\right)}}{\alpha_j(-k\sigma, \sigma)}, \max_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_l, \sigma}} \frac{\alpha_i(x, t) e^{a\left(\frac{x + \Lambda t - l}{\Lambda + k} - t\right)}}{\alpha_j(l + k\sigma, \sigma)} \right\} \rho(w^1, w^2) + \\ & + \int_0^t e^{a(\tau-t)} d\tau L \max \left\{ \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\alpha_j(y, \sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\beta_j(y, \sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\alpha_j(-k\sigma, \sigma)}, \right. \\ & \left. \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\beta_j(-k\sigma, \sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\alpha_j(k\sigma + l, \sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\beta_j(-k\sigma, \sigma)} \right\} \rho(w^1, w^2) \leq \\ & \leq L \max \left\{ \max_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0, \sigma}} \frac{\alpha_i(x, t) e^{a\frac{-x - kt}{\Lambda + k}}}{\alpha_j(-k\sigma, \sigma)}, \max_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_l, \sigma}} \frac{\alpha_i(x, t) e^{a\frac{x - kt - l}{\Lambda + k}}}{\alpha_j(l + k\sigma, \sigma)} \right\} \rho(w^1, w^2) + \\ & + \frac{L}{a} \max \left\{ \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\alpha_j(y, \sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\beta_j(y, \sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x, t)}{\alpha_j(-k\sigma, \sigma)}, \right. \end{aligned}$$

$$\max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(k\sigma+l,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)} \left\} \rho(w^1, w^2). \quad (10)$$

Для оператора A^2 отримаємо

$$\begin{aligned} |A_i^2[w^1](x,t) - A_i^2[w^2](x,t)| \beta_i(x,t) e^{-at} \leq & \left(L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} + \right. \\ & + \int_{-kt}^x L \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, \right. \\ & \left. \left. L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)} \right\} dy \right) \rho(w^1, w^2). \quad (11) \end{aligned}$$

Із (8) та оцінок (10) і (11) одержуємо

$$\begin{aligned} \rho(A[w^1], A[w^2]) \leq & \max_{(x,t) \in G} \left\{ L \max \left\{ \max_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0, \sigma}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0, \sigma}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{\frac{x-kt-l}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(l+k\sigma,\sigma)} \right\} + \right. \\ & + \frac{L}{a} \max \left\{ \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)}, \right. \\ & \left. \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(k\sigma+l,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)} \right\} + \\ & + L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} + \int_{-kt}^x L \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, \right. \\ & \left. \left. L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)} \right\} dy \right\} \rho(w^1, w^2). \end{aligned}$$

Вибравши функції α_i, β_i так, щоб

$$\alpha_i(x,t) = \begin{cases} e^{p(kt+x)(kt-x+l)}, & i \in I_0, i \in I_l, \\ e^{p(kt+x)}, & i \in I_0, i \notin I_l, \\ e^{p(kt-x+l)}, & i \notin I_0, i \in I_l, \\ e^{p(2kt+l)}, & i \notin I_0, i \notin I_l, \end{cases}$$

$$\beta_i(x,t) = \varepsilon e^{-p(kt+x)},$$

покажемо, що коефіцієнт стиску оператора A менший від одиниці.

Нехай виконуються припущення $p \leq a\mu$, $pl - a\mu \leq -2pkT$, а $\mu = \frac{1}{\Lambda + k}$.

Тоді, дослідивши цю функцію на екстремум в $\bar{G}$, одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in G} \left\{ \max_{\substack{i \in I_p, \\ j \notin I_{0,\sigma}}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\sigma, \sigma)}, \max_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_{l,\sigma}}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{\frac{x-kt-l}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(l+k\sigma, \sigma)} \right\} &= \max_{(x,t) \in G} \left\{ \max_{\substack{i \in I_p, \\ j \notin I_{0,\sigma}}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{a\mu(-x-kt)}}{\alpha_j(-k\sigma, \sigma)}, \right. \\ \left. \max_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_{l,\sigma}}} \frac{\alpha_i(x,t) e^{a\mu(x-kt-l)}}{\alpha_j(l+k\sigma, \sigma)} \right\} &= \max_{(x,t) \in G} \left\{ \max_{i \in I_0} \frac{\alpha_i(x,t) e^{a\mu(-x-kt)}}{e^{pl}}, \max_{i \in I_l} \frac{\alpha_i(x,t) e^{a\mu(x-kt-l)}}{e^{pl}} \right\} = \\ &= \max_{(x,t) \in G} \left\{ \max \left\{ e^{p(kt+x)(kt-x+l)}, e^{p(kt+x)} \right\} e^{a\mu(-x-kt)-pl}, \right. \\ &\left. \max \left\{ e^{p(kt+x)(kt-x-l)}, e^{p(kt-x-l)} \right\} e^{a\mu(x-kt-l)-pl} \right\} = e^{-pl}. \end{aligned}$$

Також правильна оцінка

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in G} \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt, t)} &= \max_{(x,t) \in G} \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} = \max_{(x,t) \in G} \varepsilon e^{-3pkt - px - pl} = \\ &= \max_t \varepsilon e^{-2pkt + pl} = \varepsilon e^{-pl}. \end{aligned}$$

Зрештою, проведемо оцінку для

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt, t)}, L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt, t)}, \right. \\ \left. \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l, t)} dy \right\} \leq \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)} dy + \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)} dy + \\ + \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt, t)} dy + \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt, t)} dy + \\ + \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l, t)} dy. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)} dy &= \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \varepsilon e^{-p(kt+x)} dy \leq \\ &\leq \max_{(x,t) \in G} \{ \varepsilon e^{-p(kt+x)}(x+kt) \} = \varepsilon(l+2kT), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)} dy &= \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{\varepsilon e^{-p(kt+y)}} dy = \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x e^{p(y-x)} dy = \\
&= \max_{(x,t) \in G} \frac{1}{p} (1 - e^{-p(kt+x)}) \leq \frac{1}{p}, \\
\max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} dy &= \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max \left\{ \varepsilon e^{-p(kt+x)}, \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} \right\} dy \leq \\
&\leq \max_{(x,t) \in G} \{ \varepsilon e^{-p(kt+x)} (x + kt) \} = \varepsilon(l + 2kT), \\
\max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} dy &= \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x L \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} dy = \\
&\leq L \max_{(x,t) \in G} \{ \varepsilon e^{-p(3kt+x+l)} (x + kt) \} = L \varepsilon e^{-pl} (l + 2kT), \\
\max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)} dy &= \max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max \left\{ \varepsilon e^{-p(kt+x)}, \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} \right\} dy \leq \\
&\leq \max_{(x,t) \in G} \{ \varepsilon e^{-p(kt+x)} (x + kt) \} = \varepsilon(l + 2kT).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\max_{(x,t) \in G} \int_{-kt}^x \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, L \max_{i,j \notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, \right. \\
\left. \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)} dy \right\} \leq 3\varepsilon(l + 2kT) + \frac{1}{p} + L\varepsilon e^{-pl} (l + 2kT).
\end{aligned}$$

Отже, визначаємо загальну оцінку

$$\begin{aligned}
\rho(A[w^1], A[w^2]) &\leq \left(L e^{-pl} + \frac{L}{a} \max_{(x,t) \in G} \left\{ \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\sigma)}, \right. \right. \\
&\max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(k\sigma+l,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)} \left. \right\} + \\
&\left. + L\varepsilon e^{-pl} + L \left(3\varepsilon(l + 2kT) + \frac{1}{p} + L\varepsilon e^{-pl} (l + 2kT) \right) \right) \rho(w^1, w^2).
\end{aligned}$$

Зафіксуємо додатні параметри p^*, ε^* так, щоб виконувалась нерівність

$$Le^{-p^*l} + L\varepsilon^* e^{-p^*l} + L \left(3\varepsilon^*(l + 2kT) + \frac{1}{p^*} + L\varepsilon^* e^{-p^*l}(l + 2kT) \right) < \frac{1}{2}.$$

Позначимо

$$M = \max_{(x,t) \in G} \left\{ \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\alpha_j^*(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\beta_j^*(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\alpha_j^*(-k\sigma,\sigma)}, \right. \\ \left. \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\beta_j^*(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\alpha_j^*(k\sigma+l,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i^*(x,t)}{\beta_j^*(-k\sigma,\sigma)} \right\},$$

де функції α_i^*, β_i^* дорівнюють, відповідно, функціям α_i, β_i при $p = p^*, \varepsilon = \varepsilon^*$.

Тепер зафіксуємо значення параметра a^* , щоб задовольнити нерівності

$$p^* \leq a^* \mu, \quad p^* l - a^* \mu \leq -2p^* kT, \quad \frac{LM}{a^*} < \frac{1}{2}.$$

Оскільки параметри p^*, ε^*, a^* завжди можна вибрати так, щоб коефіцієнт стиску оператора був меншим від одиниці, то оператор A є стискуючим на елементах простору $Q = Q^*$ з вибраними функціями $\alpha_i = \alpha_i^*, \beta_i = \beta_i^*$ та параметром $a = a^*$. Отже, згідно з теоремою Банаха узагальнений неперервний розв'язок задачі (1)–(4) існує і єдиний. Теорему доведено.

Список використаної літератури

1. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высш. шк., 1990.
2. Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / М.И. Громяк, Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома. – К.: Наук. думка, 1991.
3. Кирилич В.М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В.М. Кирилич, А.М. Филимонов // Матем. студії. – 2008 – Т. 30. – №1. – С. 42–60.
4. Florescu D. Asupra existentei solutiilor unor sisteme hiperbolice de tip special / D. Florescu // Studii si cerc. Mat. – 1978. – Т.30, No.3. – Р. 279–285.
5. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М.: Наука, 1978.

6. Мауленов О. О. разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке. / О. Мауленов, А. Д. Мышкис // Изв. АН КазССР. Сер. Физ.-мат. – 1981. – №5. – С. 25–29.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ольга ПЕЛЮШКЕВИЧ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Рассмотрено разрешимость смешанной задачи с горизонтальными характеристиками для полулинейной нагруженной гиперболической системы уравнений первого порядка. Методом характеристик задача сведена к системе интегро-операторных уравнений Вольтерра второго рода, для которой с помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении установлено достаточные условия существования глобального непрерывного решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод характеристик, полулинейные уравнения, теорема Банаха.

ABOUT ONE PROBLEM FOR LOADED HYPERBOLIC SYSTEM OF SEMILINEAR EQUATIONS WITH HORIZONTAL CHARACTERISTICS

Olga PELIUSHKEVYCH

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The solvability of the mixed problem with horizontal characteristics for the loaded semilinear hyperbolic system of the first order equations is considered. Applying the method of characteristics a problem was reduced to the system of Volterra the second order integro-operation equations, for which the sufficient conditions of existence of global continuous solution by Banach's theorem about a contractive mapping are established.

Key words: Banach theorem, hyperbolic system, quasi-linear equations, method of characteristic, semilinear equations.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМУВАННЯ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ

Ярослав ПАСТЕРНАК¹, Георгій СУЛИМ², Назар ОЛІАРНИК²

¹Луцький національний технічний університет,
вул. Львівська, 75 43018 Луцьк, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Застосовуючи принцип спряження континуумів різної вимірності, задачу антиплаского деформування анізотропного тіла з тонкою неоднорідністю зведено до системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь, числове розв'язування яких виконано за схемою методу граничних елементів. Розглянуто тіло з прямолінійною неоднорідністю та неоднорідністю вздовж дуги кола. Проведено обчислення КІН для різних значень кута розхилу дугоподібного включення в ізотропній та анізотропній матрицях. Порівняно отримані запропонованим методом результати з даними аналітичного розв'язку. Досліджено вплив міри анізотропії матеріалу тіла та жорсткості включення на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Ключові слова: антипласка деформація, метод граничних елементів, тонке включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. Вступ. Усі сучасні конструкційні матеріали зазвичай містять різні неоднорідності, що породжені недосконалістю процесів виготовлення та обробки або навмисне впроваджуються в матеріал для зміни його фізико-механічних властивостей, забезпечення належної міцності чи виконання певних специфічних функцій. До таких неоднорідностей належать волокна, накладки, заповнені газом, рідкою чи твердою субстанціями порожнини, тріщини, тонкі включення тощо. Вони породжують високу концентрацію механічних напружень та істотні градієнти різноманітних фізичних полів (температури, напруженості електричного та магнітного поля) поблизу своїх вершин (торців), що має вплив на зміну деформаційних та інших процесів, а відтак, зумовлює зміну характеристик міцності та експлуатаційних властивостей матеріалу, або й передчасне руйнування. З іншого боку, при проектуванні композиційних матеріалів важливим завданням є оцінювання інтенсивності напружень для запобігання руйнуванню відповідних конструкційних елементів.

Стрімкий розвиток технологій дає змогу комп'ютерно моделювати матеріали з тонкими неоднорідностями, серед яких найбільшу увагу приділяють тонким включенням і тріщинам. У цьому разі за основу беруть теоретичні методи (прямі та спеціальні) дослідження тіл із дефектами. Прямий підхід [1, 2] розглядає включення як об'єкт із певною товщиною, що дає змогу досліджувати різноманітні задачі для обмежених і безмежних тіл із прямолінійними та викривленими неоднорідностями. Проте його

ефективність суттєво залежить від використаних способів опису тонкостінних елементів. У спеціальному підході [3–6] на підставі застосування принципу спряження континуумів різної вимірності включення заступають математичним розрізом уздовж його серединної поверхні з заданими на ньому певними крайовими умовами – умовами взаємодії. Такий підхід (поєднання принципу спряження з використанням умов взаємодії) продуктивний для розв’язування задач для прямолінійних включень у безмежних тілах, смугах тощо, тобто для задач, у яких геометричні параметри, вид і спосіб навантажування дають змогу записати зручну для подальших обчислень систему інтегральних рівнянь. Ефективним видається поєднання ключових елементів цих двох підходів. Тому ми запропонували аналітично-числовий метод розв’язування задачі антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими включеннями, що поєднує метод граничних елементів і принцип спряження континуумів різної вимірності [3].

2. Формулювання задачі. Розглянемо пружне циліндричне анізотропне тіло зі стрічковим пружним включенням, твірні якого паралельні до твірних не обмеженого у цьому напрямі тіла. Тіло навантажене зусиллями, що діють паралельно до його твірних. Вважатимемо, що механічні поля та навантаження, які виникають у тілі та включенні, не змінюються з плином часу та вздовж напрямку, паралельного до твірної тіла. Між тілом і включенням виконуються умови ідеального механічного контакту.

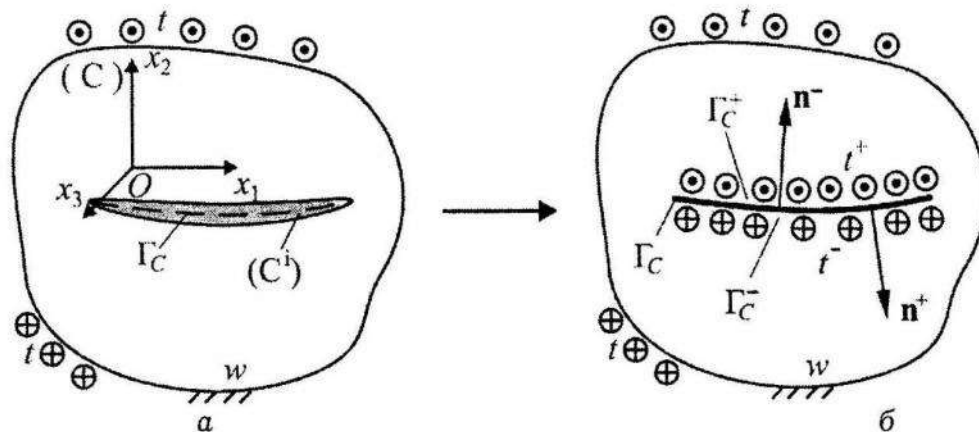


Рис. 1. Схеми задачі та підходу моделювання тонкого включення за принципом спряження

Використовуючи принцип спряження континуумів різної вимірності [3, 7, 8], створимо лінійчасту модель тонкої неоднорідності так: вилучимо з розгляду включення як геометричний об'єкт (рис. 1, а), а контактні напруження та переміщення перенесемо на береги Γ_C^+ і Γ_C^- його серединної поверхні Γ_C (рис. 1, б). Так задача зводиться до визначення напружено-деформованого стану тіла з розрізом (уздовж серединної поверхні Γ_C), на якому вектори напружень і переміщень змінюються стрибкоподібно. Після побудови відповідних умов взаємодії включення і тіла, а також

застосування інтегральних рівнянь для визначення полів напружень і переміщень отримаємо розв'язок сформульованої задачі.

Розмістимо декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ у серединній площині тіла (див. рис. 1). Вісь Ox_3 спрямуємо паралельно до твірної поверхні тіла. Визначальні співвідношення антипласкої задачі для анізотропного тіла [9, 10] запишемо у вигляді

$$\sigma_{3j} = C_{jk}w_{,k} \quad (j, k = 1, 2), \quad (1)$$

де σ_{3j} – ненульові компоненти тензора напружень; $w \equiv u_3$ – компонента вектора переміщень $(0; 0; u_3)$; $C_{11} = c_{55}$, $C_{12} = C_{21} = c_{45}$, $C_{22} = c_{44}$ – модулі пружності матеріалу. У формулах прийнято правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється.

Рівняння рівноваги [9, 10] у випадку антипласкої задачі набудуть вигляду

$$\sigma_{3j,j} + f_3 = 0, \quad (2)$$

де f_3 – поздовжня складова прикладених до тіла об'ємних сил. Підставивши (1) у (2), отримаємо

$$C_{jk}w_{,jk} + f_3 = 0. \quad (3)$$

Однорідний розв'язок рівняння (3) знайдемо, використовуючи формалізм Stroh [10]. Вважаючи, що

$$w = aF(x_1 + px_2), \quad (4)$$

та підставивши (4) в (3), отримаємо таке рівняння щодо невідомих сталих:

$$[Q + 2Rp + Tp^2]a = 0. \quad (5)$$

Тут $Q = C_{11}$, $T = C_{22}$, $R = C_{12} = C_{21}$ – коефіцієнти, що аналогічні відповідним матрицям Stroh у плоскій задачі.

Після диференціювання (4) з урахуванням співвідношень (1) отримаємо подання напружень

$$\sigma_{31} = -\varphi_{,2}, \quad \sigma_{32} = \varphi_{,1},$$

через функцію напружень

$$\varphi = bF(x_1 + px_2),$$

де $b = (R + pT)a = -(Q + pR)a / p$.

Надалі під час розв'язування задачі для зручності використовуватимемо комплексні коефіцієнти a , b та p замість модулів пружності C_{jk} . Відповідно до [10] ці сталі можна визначити з задачі на власні вектори і власні значення формалізму Stroh

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{N}\xi &= p\xi, \\ \mathbf{N}^T\eta &= p\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

де $N_1 = R / T$, $N_2 = 1 / T$, $N_3 = R^2 / T - Q$; $\xi = [a, b]^T$ і $\eta = [b, a]^T$ відповідно правий і лівий власні вектори матриці N , що нормуються умовою $\xi^T \eta = 1$.

На підставі розв'язування задачі (6) отримаємо два комплексні власні значення $p_1 = p$ та $p_2 = \bar{p}$ і відповідні їм комплексно спряжені власні вектори $\xi_1 = \bar{\xi}_2$. Оскільки величини w та φ набувають лише дійсних значень, то загальний розв'язок задачі відповідно до [10] записуємо так:

$$w = 2 \operatorname{Re} [aF(x_1 + px_2)], \quad \varphi = 2 \operatorname{Re} [bF(x_1 + px_2)]. \quad (7)$$

Із використанням формалізму Stroh функції Гріна для зосередженої сили, прикладеної в точці $\xi(\xi_1, \xi_2)$ тіла, набудуть вигляду [10]

$$W(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} [a^2 \ln Z(\mathbf{x}, \xi)], \quad T(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{ab(n_2 - n_1 p)}{Z(\mathbf{x}, \xi)} \right], \quad (8)$$

де $Z(\mathbf{x}, \xi) = x_1 + px_2 - (\xi_1 + p\xi_2)$.

Зумовлені зосередженою силою $f_3 \delta(\xi)$ у точці $\xi(\xi_1, \xi_2)$ тіла переміщення w і дотичне напруження $t = \sigma_{3j} n_j$ у точці $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ на поверхні з нормаллю $\mathbf{n}(n_1, n_2)$ можна визначити з урахуванням (8) за допомогою таких залежностей:

$$w(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}, \xi) f_3, \quad t(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, \xi) f_3, \quad (9)$$

де $\delta(\xi)$ – дельта-функція Дірака.

Переміщення у тілі S з межею $\Gamma \equiv \partial S$ і розрізом Γ_C визначають з такої тотожності Сомільяни [11]:

$$w(\xi) = \int_{\Gamma} [W(\mathbf{x}, \xi) t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \xi) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_C^+} [W(\mathbf{x}, \xi) \Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \xi) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \iint_S W(\mathbf{x}, \xi) f_3(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Надалі вважатимемо, що масових сил немає, тобто $f_3 = 0$. Тоді

$$w(\xi) = \int_{\Gamma} [W(\mathbf{x}, \xi) t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \xi) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_C^+} [W(\mathbf{x}, \xi) \Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \xi) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Спрямовуючи внутрішню точку ξ до точки $\mathbf{y} \in \Gamma$ межі тіла та вважаючи, що у точці $\mathbf{y}$ крива Γ є гладкою, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно крайових функцій w та t на межі тіла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w(y) = & \int_{\Gamma_C^+} [W(x,y)\Sigma t(x) - T(x,y)\Delta w(x)]d\Gamma(x) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma} W(x,y)t(x)d\Gamma(x) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T(x,y)w(x)d\Gamma(x), \end{aligned} \quad (12)$$

де позначення RPV означає величину невластивого інтеграла; CPV – головне значення інтеграла.

Спрямовуючи внутрішню точку ξ до точки $y \in \Gamma_C$ розрізу Γ_C та вважаючи, що в точці y крива Γ_C є гладкою, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно крайових функцій Σt та Δw на розрізі Γ_C

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma w(y) = & \int_{\Gamma} [W(x,y)t(x) - T(x,y)w(x)]d\Gamma(x) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} W(x,y)\Sigma t(x)d\Gamma(x) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(x,y)\Delta w(x)d\Gamma(x). \end{aligned} \quad (13)$$

При числовому моделюванні розрізів чи включень із точками зламу осової лінії інтегральне рівняння (13) можна використовувати, усунувши в обчислювальній схемі потрапляння точки колокації y у точку зламу.

Диференціюючи (13) за y_k , використавши закон Гука (1) та враховуючи, що $n_i^+ = -n_i^-$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta t(y) = n_j^+ & \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(x,y)\Sigma t(x)d\Gamma(x) - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(x,y)\Delta w(x)d\Gamma(x) + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} [D_j(x,y)t(x) - S_j(x,y)w(x)]d\Gamma(x) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

де HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла, а $D_j(x,y)$ та $S_j(x,y)$ – ядра інтегралів (14)

$$\begin{aligned} D_j(x,y) = C_{jk} \frac{\partial W}{\partial y_k} &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j}p) \frac{ab}{Z(x,y)} \right], \\ S_j(x,y) = C_{jk} \frac{\partial T}{\partial y_k} &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j}p) \frac{b^2(n_2 - n_1p)}{[Z(x,y)]^2} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Припустимо, що модель включення $F_k(\Delta t, \Sigma t, \Delta w, \Sigma w) = 0$ ($k = 1, 2$) дає змогу знайти крайові функції Σw та Δt у явній формі, тобто

$$\Sigma w(y) = F^w(y, \Sigma t, \Delta w), \quad \Delta t(y) = F^t(y, \Sigma t, \Delta w). \quad (16)$$

Тоді сформульована задача зводиться до визначення з системи інтегральних рівнянь (12)–(14) та (16) невідомих стрибків переміщень Δw і

напружень $\Delta\sigma_{3n} = (\sigma_{3j}^+ - \sigma_{3j}^-)n_j^+ = \sigma_{3j}^+n_j^+ + \sigma_{3j}^-n_j^- = \Sigma t$ на математичному розрізі Γ_C і не заданих крайовими умовами функцій w чи t на межі Γ тіла.

3. Модель тонкого включення. Розглянемо деякий поперечний переріз у включення. Введемо локальну систему координат $Ox_1'x_2'x_3$, де вісь Ox_1' спрямована вздовж вектора нормалі $\mathbf{n}^+$. З урахуванням залежності $\mathbf{n}^\pm = -\mathbf{n}^{i\pm}$ умови ідеального механічного контакту між дефектом і тілом виглядають як $w^\pm = w^{i\pm}$, $t^\pm = -t^{i\pm}$, де верхній прямий індекс «i» позначає величини, пов'язані з включенням.

Відповідно до (1) напруження у включенні з урахуванням позначень (5) дорівнюють

$$\sigma_{31} = Q^i w_{,1} + R^i w_{,2}, \quad \sigma_{32} = R^i w_{,1} + T^i w_{,2}. \quad (17)$$

Інтегруючи (17) за товщиною включення, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \sigma_{31} dh &= Q^i [w(h) - w(-h)] + R^i \int_{-h}^h w_{,2} dh, \\ \int_{-h}^h \sigma_{32} dh &= R^i [w(h) - w(-h)] + T^i \int_{-h}^h w_{,2} dh. \end{aligned} \quad (18)$$

Враховуючи рівняння рівноваги (2) та умову контакту $t^\pm = -t^{i\pm}$ на підставі принципу спряження одержимо

$$\int_{-h}^h \sigma_{31} dh = P(\mathbf{y}), \quad P(\mathbf{y}) = -P^0 + \int_{y_0}^y \Sigma t(s) ds, \quad (19)$$

де s – дугова координата на математичному розрізі Γ_C ; P^0 – сила прикладена у точці y_0 лівого кінця включення. Відповідно до теореми про середнє значення

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \sigma_{31} dh &= 2h\sigma_{31}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [t^i(h) - t^i(-h)] = h(\mathbf{y}) \Delta t(\mathbf{y}), \\ \int_{-h}^h w_{,2} dh &= 2hw_{,2}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) [w_{,2}(h) + w_{,2}(-h)] = h(\mathbf{y}) \Sigma w_{,2}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (20)$$

З рівнянь (19), (20) і співвідношень (18), нехтуючи взаємодією механічних полів у нормальних та дотичних напрямках стосовно серединної лінії включення, отримаємо таку модель тонкої неоднорідності:

$$\Delta t(\mathbf{y}) = -\frac{Q^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta w(\mathbf{y}) + \Delta w^*(\mathbf{y})], \quad \Sigma w(\mathbf{y}) = 2w^0 + \int_{y_0}^y \frac{P(\mathbf{y}) + P^*(\mathbf{y})}{T^i(\mathbf{y})h(\mathbf{y})} ds, \quad (21)$$

де $\Delta w^*(y)$, $P^*(y)$ – коригувальні функції.

Для обчислення середнього значення w^0 переміщення лівого торця включення до отриманих співвідношень треба долучити рівняння рівноваги включення

$$P^n + P^0 - \int_{\Gamma_C^+} \Sigma t(x) d\Gamma(x) = 0, \quad (22)$$

де P^n – сила, прикладена до правого торця включення.

4. Застосування методу граничних елементів. Систему інтегральних рівнянь (12)–(14) разом із рівняннями (21), (22) розв'язуватимемо методом граничних елементів [11, 12]. Для цього криві Γ та Γ_C апроксимуємо за допомогою, відповідно, n та n_c прямолінійних відрізків – граничних елементів Γ_q . На кожному елементі виберемо по три вузлові точки: одну в центрі, а інші дві на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний граничний елемент). Тоді точка колокації завжди потраплятиме на гладку ділянку утвореного апроксимацією контуру, тобто висунуті до рівнянь (12)–(14) умови будуть забезпечені. Крайові функції t , w , Σt та Δw апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями.

Отож, інтегральні рівняння (12)–(14) разом із моделлю включення (21), (22) зводяться до системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення вузлових значень крайових функцій t , w , Σt та Δw .

Базові функції на граничних елементах, що не прилягають до кінців включення, задаються інтерполяційними поліномами Лагранжа для системи вузлів $\xi_p = \{-2/3; 0; 2/3\}$.

Для підвищення точності запропонованого методу і зручного визначення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень треба застосувати спеціальні методи для моделювання кінців включення. Зокрема, відповідно до [11] для цього доцільно використати такі системи базових функцій:

для розривів переміщень

$$\phi_p^{\Delta w} = \Phi_{p1}^{\Delta w} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta w} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta w} \rho^{3/2}, \quad (p = 1, 2, 3) \quad (23)$$

і для стрибків напружень

$$\phi_p^{\Sigma t} = \Phi_{p1}^{\Sigma t} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma t} + \Phi_{p3}^{\Sigma t} \sqrt{\rho}, \quad (p = 1, 2, 3), \quad (24)$$

де $\rho = 1 \pm \xi$; $|\xi| \leq 1$ – параметр розташування точки на елементі; $\Phi_{pj}^{\Delta w}$ та $\Phi_{pj}^{\Sigma t}$ – матриці сталих, що визначаються з рівнянь $\phi_p(\xi_p) = 1$, $\phi_p(\xi_{j \neq p}) = 0$, де ξ_p – координати вузлових точок на граничному елементі.

Базові функції (23) і (24) дають змогу з високою точністю обчислювати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень K_{31} і K_{32} за формулами [11]

$$K_{31} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} L \Delta w(s), \quad K_{32} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t(s), \quad (25)$$

де $L = -2\sqrt{-1}b^2$ – дійсне число, що відповідає тензору Барнет – Лоте L у випадку плоскої анізотропії.

5. Числові результати. Прямолинійне включення. Для ілюстрації точності й ефективності запропонованого методу розглянемо задачу про тонке прямолинійне пружне включення у безмежному середовищі за його всебічного зсуву сталими напруженнями $\sigma_{xz}^{\infty} = \sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ на нескінченності. Схема задачі зображена на рис. 2. У розрахунках вважали, що товщина $2h$ включення дорівнює 0,001 його довжини $2a$, тобто $h = 0,001a$. Відносна жорсткість неоднорідності характеризується параметром $k = G^i/c_{44}$, де G^i – модуль зсуву матеріалу включення. Коригувальні функції $\Delta w^*(y)$, $P^*(y)$ та торцеві сили P^0 , P^n вважали нульовими.

Обчислені запропонованим підходом значення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) зіставлені з результатами розрахунку тонкого прямокутного включення відповідних розмірів за допомогою регуляризаційного МГЕ [2] із визначенням узагальнених КІН методом апроксимації [13]. Результати обчислення обома методами нормованих узагальнених КІН $K_{3i}^* = K_{3i}/\sqrt{\pi a}$ зображені на рис. 2. Суцільні лінії відповідають застосуванню запропонованого методу, а штрихові – прямого підходу. Розглянуто випадок ізотропного (крива 1) та анізотропного ($c_{45} = 0$, $c_{55}/c_{44} = 10$, крива 2) матеріалу.

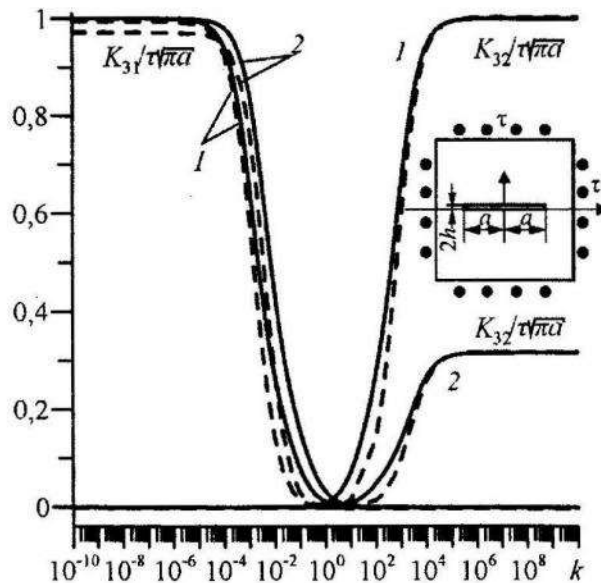


Рис. 2. Узагальнені КІН для тонкого включення за всебічного зсуву ізотропного (1) та анізотропного (2) матеріалу

Коли значення відносної жорсткості включення k наближається до нуля (тріщина) чи безмежності (абсолютно жорстке включення) відхилення отриманих запропонованим методом узагальнених КІН від аналітичного розв'язку для тріщини чи жорсткого включення [3] менше за 0,04% для ізотропного та анізотропного випадків. Відхилення результатів прямого підходу значно більші і становлять 1,5 % для ізотропного та 3,5 % для анізотропного матеріалу (однак прямий метод враховує також реальну, ненульову товщину неоднорідності, а точні аналітичні розв'язки отримано для товщини нульової).

Для проміжних значень відносної жорсткості включення запропонований підхід дає порівняно з прямим підходом трохи більші значення узагальнених КІН. Це пояснюється нехтуванням коригувальних функцій і впливом проміжної асимптотики на метод апроксимації [13].

Перевагою запропонованого підходу є суттєве зменшення загальної кількості граничних елементів (21 проти 311), використаних для моделювання задачі.

Включення вздовж дуги кола в ізотропному середовищі. Розглянемо задачу про тонке пружне включення уздовж дуги кола в ізотропному середовищі. Схема задачі зображена на врізці до рис. 3. Товщина включення дорівнює 0,01 довжини хорди, що поєднує кінці дуги, тобто $h = 0,01a$. Відносна жорсткість неоднорідності характеризується параметром $k = G^i / c_{55}$, де G^i – модуль зсуву матеріалу включення. Коригувальні функції вважають нульовими. Тіло навантажене на безмежності зусиллями $\sigma_{xz}^\infty = \tau$, $\sigma_{yz}^\infty = 0$. Залежність нормованих узагальнених КІН $K_{3i}^* = K_{3i} / \tau \sqrt{\pi a}$ від відносної жорсткості k включення

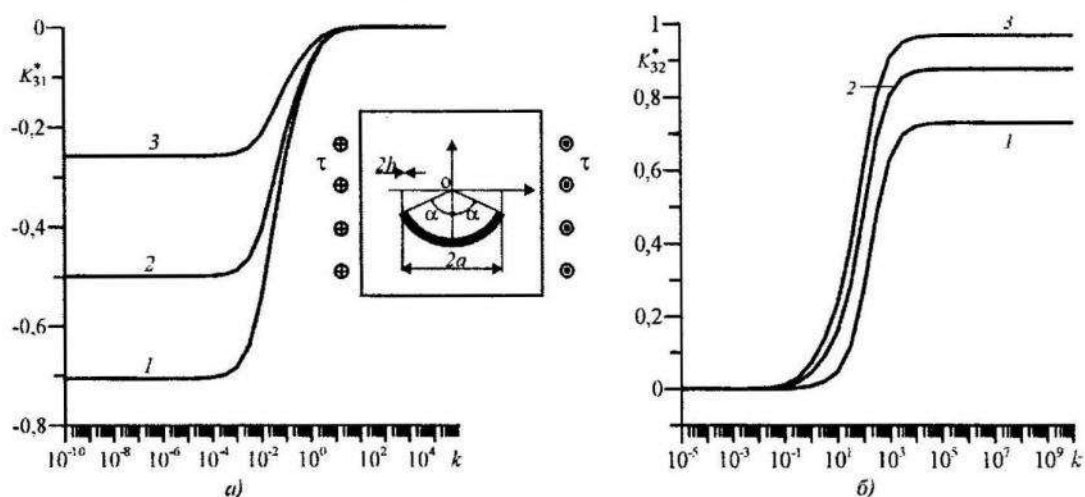


Рис. 3. Нормовані узагальнені КІН K_{31}^* (а) та K_{32}^* (б) для включення уздовж дуги кола в ізотропному середовищі

для певних значень параметра α зображено на рис. 3. Криві 1, 2, 3 відповідають таким значенням α : $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi/3$ та $\alpha = \pi/6$. Для дискретизації серединної лінії (перерізу поверхні) включення використано 41 граничний елемент.

Результати обчислень отримані за допомогою аналітичного розв'язку (АР) [14] та запропонованого варіанту методу граничних елементів для різних значень параметрів α , σ_{ij}^∞ та k подані в табл. 1. Отримані методом граничних елементів значення узагальненого КІН для тріщини відхиляються від аналітичного розв'язку [14] не більше, як на 0,25%. Для абсолютно жорсткого включення ця похибка дещо більша, проте не перевищує 3,3%. Зі збільшенням кількості граничних елементів удвічі це відхилення зменшується до 1,3%, а при збільшенні утричі – до 0,7%.

Таблиця 1

	$K_{31}^*, k = 10^{-10}$						$K_{32}^*, k = 10^{10}$					
	$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$			$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$		
α	АР	МГЕ	$D^*, \%$	АР	МГЕ	$D^*, \%$	АР	МГЕ	$D^*, \%$	АР	МГЕ	$D^*, \%$
$\pi/2$	-0,7071	-0,7063	0,11	0,7071	0,7086	0,21	0,7071	0,7304	3,29	0,7071	0,7043	0,39
$\pi/3$	-0,5	-0,4990	0,20	0,8660	0,8666	0,06	0,8660	0,8775	1,32	0,5	0,4923	1,54
$\pi/6$	-0,2588	-0,2582	0,23	0,9659	0,9659	–	0,9659	0,9692	0,34	0,2588	0,2532	2,16

* D – відхилення результатів отриманих МГЕ від аналітичного розв'язку (АР).

Включення уздовж дуги кола в анізотропному середовищі. Поряд із задачею для ізотропного середовища дослідимо застосування запропонованого методу для розв'язування задачі про тонке пружне включення уздовж дуги кола в анізотропному середовищі. Геометричні та механічні параметри включення такі самі, як і в попередньому прикладі. Схему задачі зображено на врізці до рис. 3. Конкретизуючи формулювання задачі, вважаємо, що тіло ортотропне, тобто $c_{45} = 0$. Міру анізотропії характеризуватимемо параметром $c = c_{44}/c_{55}$. У цьому разі вважатимемо, що тіло навантажене зусиллями $\sigma_{xz}^\infty = \tau$, $\sigma_{yz}^\infty = 0$.

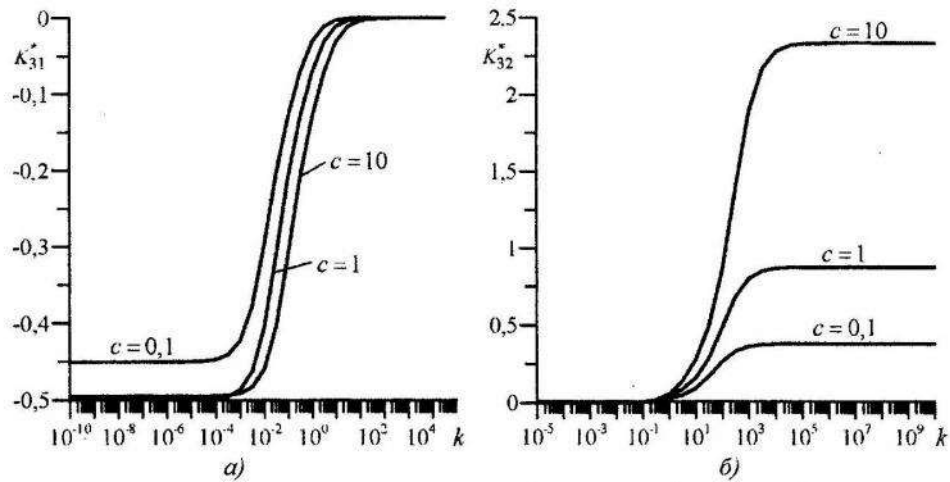


Рис. 4. Нормовані узагальнені КІН K_{31}^* (а) та K_{32}^* (б) у разі ізотропії ($c = 1$) та анізотропії ($c = 0,1$ та $c = 10$) матриці при $\alpha = \pi / 6$

Для виявлення впливу ортотропії на узагальнені КІН розглянуто окремо випадки $c = 0,1$ та $c = 10$ порівняно з випадком ізотропії ($c = 1$). Ці залежності у разі $\alpha = \pi / 6$ для тріщини зображені на рис. 4, а, а для абсолютно жорсткого включення – на рис. 4, б. Отримані методом граничних елементів результати для анізотропної матриці при $c = 0,1$ та $c = 10$, а також результати аналітичного розв'язку у разі ізотропії подані в табл. 2.

Таблиця 2

		$K_{31}^*, k = 10^{-10}$						$K_{32}^*, k = 10^{10}$					
		$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$			$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$		
α		Ізотро- пія	МГЕ,	$D^*, \%$	Ізотро- пія	МГЕ,	$D^*, \%$	Ізотро- пія	МГЕ,	$D^*, \%$	Ізотро- пія	МГЕ,	$D^*, \%$
$\pi/2$	$c = 0,1$	-0,707	-0,601	-15,0	0,707	1,113	+57,4	0,707	0,358	-49,4	0,707	1,902	+169,0
	$c = 10$		-0,730	+3,3		0,455	-35,6		1,560	+120,7		0,230	-67,5
$\pi/3$	$c = 0,1$	-0,5	-0,450	-10,0	0,866	1,192	+37,6	0,866	0,381	-56,0	0,5	1,420	+184,0
	$c = 10$		-0,494	-1,2		0,735	-15,1		2,337	+169,9		0,151	-69,8
$\pi/6$	$c = 0,1$	-0,258	-0,249	-3,5	0,965	1,129	+17,0	0,965	0,360	-62,7	0,258	0,784	+203,9
	$c = 10$		-0,258	-		0,934	-3,2		2,957	+206,4		0,079	-69,4

* D -відхилення результатів отриманих МГЕ від аналітичного розв'язку (АР).

Аналізуючи отримані для анізотропної матриці числові результати, можна простежити певні закономірності. У випадку тріщини максимальне відхилення значення КІН дорівнює 58% і досягається при $\alpha = \pi/2$. У разі

$\alpha \rightarrow 0$ значення K_{31} для анізотропної матриці прямує до значення K_{31} ізотропної матриці, тобто у разі вирівнювання тріщини вплив анізотропії помітно зменшується або його взагалі немає. За наявності в тілі абсолютно жорсткого включення простежується суттєвий вплив анізотропії середовища. При $\alpha = \pi/2$ досягається мінімальне відхилення значення КІН K_{32} , яке дорівнює 50%. За подальшого вирівнювання осі включення (зі збереженням відношення h/a) залежно від прикладеного навантаження та міри анізотропії відбувається збільшення чи зменшення значення КІН K_{32} приблизно втричі порівняно з відповідним K_{32} для ізотропного середовища.

Ще одним параметром, поряд із кутом α , що має вплив на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень є параметр c міри анізотропії. При $c < 1$ значення КІН K_{31} та K_{32} за дії навантаження $\sigma_{xz}^\infty = \tau$; $\sigma_{yz}^\infty = 0$ менші, а за дії навантаження $\sigma_{xz}^\infty = 0$; $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ – більші за відповідні КІН для ізотропної матриці. Коли $c > 1$ ситуація протилежна: значення K_{31} та K_{32} збільшуються при навантаженні $\sigma_{xz}^\infty = \tau$; $\sigma_{yz}^\infty = 0$ та зменшуються для навантаження $\sigma_{xz}^\infty = 0$; $\sigma_{yz}^\infty = \tau$. Отже, зміна параметра c дає змогу значно зменшувати значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, що є важливим для створення нових матеріалів.

6. Висновки. Ми запропонували ефективну схему методу граничних елементів для розв'язування задач антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями, яка допомогла майже у десять разів зменшити кількість граничних елементів, потрібних для застосування прямого регуляризаційного МГЕ. Розглянуто задачі про прямолінійне включення у безмежному середовищі та про включення уздовж дуги кола в ізотропному та анізотропному матеріалах. Для першої задачі похибка методу порівняно з аналітичним розв'язком для тріщини чи абсолютно жорсткого включення навіть для малої кількості використаних граничних елементів не перевищує 0,04%. Тобто, отримані цими обома методами результати майже ідентичні. Для неоднорідності уздовж дуги кола похибка запропонованого методу при ізотропії середовища менша за 3,5% (табл. 1) – збільшуючи кількість граничних елементів цю похибку можна зменшити. Величина кута α розхилу неоднорідності має різний вплив на числові результати, а саме: зменшення кута α зменшує відхилення між значеннями КІН для ізотропної та ортотропної матриць у випадку тріщини, і навпаки, збільшує це відхилення у разі абсолютно жорсткого включення. В ортотропному матеріалі на зміну (збільшення, зменшення) значень узагальнених КІН разом із параметром α впливає також міра ортотропії, що зображено на рис. 4. Врахування взаємозв'язку між коефіцієнтами інтенсивності напружень і властивостями матеріалу, зокрема й орієнтацією головних осей ізотропії, є дуже важливим. Належно

підбираючи механічні характеристики матеріалу, орієнтацію включень (арматури) можна досягти часто й дуже суттєвого зниження значень КІН.

Список використаної літератури

1. Сулим Г. Регуляризована тотожність Сомільяни для задач теорії пружності з тонкостінними структурами / Г. Сулим, Я. Пастернак // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ. – Вип. 13. – 2007. – С. 142–150.
2. Сулим Г. Т. Застосування методу граничних елементів до аналізу антипласкої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами / Г.Т. Сулим, Я.М. Пастернак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51. – № 4. – С. 136–144.
3. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термopужної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007.
4. Винницька Л. Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням / Л. Винницька, Я. Савула // Фіз.-мат. моделювання та інф. технології. – 2008. – № 7. – С. 21–29.
5. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл / Я.С. Підстригач // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
6. Попов В. Г. Концентрация напряжений вблизи отслоившегося тонкого упругого включения при воздействии нестационарной волны продольного сдвига / В.Г. Попов, А.П. Мойсеенок // Теорет. и прикладная механика, 2005. – Вып. 41. – С. 184–192.
7. Подстригач Я. С. Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном включении в сплошной среде / Я.С. Подстригач // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. – № 12. – С. 29–31.
8. Черепанов Г. П. Метод внешних и внутренних разложений в теории упругости / Г.П. Черепанов // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. – С. 502–507.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977.
10. Ting T. C. T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press, 1996.
11. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – 35, №. 4. – P. 678–690.
12. Пастернак Я. М. Дуальний метод граничних елементів для задач теорії тонких включень / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53. – №. 2. – С. 46–57.

13. Сулим Г. Т. Вплив розмірів анізотропних тіл зі стрічковими пружними включеннями на параметри граничного стану за антиплоскої деформації / Г.Т. Сулим, Я.М. Пастернак // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Дніпропетровськ, 2009. – Вип. 10. – С. 263-269.
14. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах – М.: Мир, 1990.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ТОНКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Ярослав ПАСТЕРНАК¹, Георгий СУЛИМ², Назар ОЛИЯРНИК²

¹Луцкий национальный технический университет,
ул. Львовская, 75 43018 Луцк, Украина

²Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

Применяя принцип сопряжения континуумов разных измерений, задачу антиплоского деформирования анизотропного тела с тонкой неоднородностью сведено к системе гиперсингулярных интегральных уравнений, численное решение которых осуществлено по схеме метода граничных элементов. Рассмотрены тело с прямолинейной неоднородностью и неоднородностью вдоль дуги окружности. Вычислены КИН для различных значений центрального угла дугообразного включения в изотропной и анизотропной матрицах. Полученные с помощью предложенного подхода результаты сравнены с данными аналитического решения. Исследовано влияние меры анизотропии материала тела и жесткости включения на значение коэффициентов интенсивности напряжений.

Ключевые слова: антиплоская деформация, метод граничных элементов, тонкое включение, обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений.

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE ANTIPLANE SHEAR OF ANISOTROPIC SOLIDS WITH THIN INHOMOGENEITIES

Iaroslav PASTERNAK¹, Heorhiy SULYM², Nazar OLIYARNYK²

*¹National Technical University of Lutsk,
L'vivska Str., 75 79060 Lutsk, Ukraine*

*²Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Using the coupling principle for continua of different dimension the problem of antiplane shear of a solid containing a thin inhomogeneity is reduced to the system of singular integral equations, which are solved numerically by the boundary element method. Solids containing thin line or curved inhomogeneities are considered. SIF for different values of the central angle of the arc inhomogeneity in isotropic and anisotropic media are calculated. The results obtained by the proposed method are compared with the analytical solutions. The influence of the anisotropy of the solid and the inclusion's rigidity the stress intensity factors is studied.

Key words: antiplane shear, boundary element method, thin inclusion, generalized stress intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.2011
Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРНОГО ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ СТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ЗА МОНОТОННОГО ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Тереза КОЗАКЕВИЧ

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна*

Запропоновано методику дослідження та оптимізації фазового складу і залишкових структурних напружень у тонкостінних виробах з низьколегованих сталей за монотонного теплового навантаження. Як приклад розглянуто сталеву пластину за дії рухомого нормально розподіленого джерела тепла з кількома центрами локалізації. Виконано параметричну оптимізацію розподілу потужності джерела, кількості центрів його локалізації та просторового розміщення.

Ключові слова: фазові перетворення, залишкові напруження, низьколеговані сталі, оптимізація, рухомі розподілені джерела тепла.

Під час виготовлення, термообробки та інших технологічних операціях конструкційні матеріали, зокрема сталі, зазнають твердофазових поліморфних перетворень, які суттєво впливають на кінцеві фізичні та механічні властивості виробів. Фазовий склад сталевих тіл залежить від параметрів технологічного впливу (термомеханічного навантаження), які вибирають на підставі експериментальних досліджень чи методів кількісного аналізу наявних фізико-механічних процесів [1]. Для проведення такого аналізу актуальною і важливою є проблема кількісного опису та оптимізації за певними критеріями фазового складу сталевих тіл і параметрів термомеханічного впливу, а також залишкових структурних напружень.

Останнім часом розроблені методи статистичного аналізу процесів формування фазового складу низьколегованих сталей з вмістом вуглецю до 0,4% залежно від їхнього хімічного складу та умов охолодження [2, 3]. Такі моделі застосовні для широкого класу сталевих тіл, які піддаються впливам з монотонними режимами охолодження від початкових температур, вищих за температури поліморфних перетворень. Кількісні дані про фазовий склад, отримані на цій підставі, можна використати для розрахунку та оптимізації за певними критеріями фазового складу та розподілу залишкових структурних напружень.

На підставі відомої макроскопічної моделі [2, 3] кількісного опису напруженого та структурного станів тіл, виготовлених з низьколегованих сталей, що ґрунтується на даних статистичного аналізу фазового складу таких сталей за однорідних умов охолодження, розроблено методику визначення фазового складу та залишкового структурного напруженого стану пластинчастих тіл за дії рухомих розподілених джерел нагріву.

Сформульовано та розв'язано задачі оптимізації параметрів джерел нагріву за критерієм мінімуму максимального вмісту мартенситу в зоні термічного збурення.

Математичне формулювання. Розглядаємо вільну від силового навантаження тонку прямокутну ізотропну пластину, що виготовлена з низьколегованої сталі, яка займає область Ω ($\Omega = \{-l \leq x_1 \leq l, -b \leq x_2 \leq b, -h \leq x_3 \leq h\}$), товщиною $2h$, шириною $2b$ і довжиною $2l$, де $h \ll b$, $h \ll l$, $b \rightarrow \pm\infty$, $l \rightarrow \pm\infty$. Припускаємо, що в початковий момент часу $\tau=0$ відомий розподіл температури $t_0(x_1, x_2)$ у кожній точці пластини, яка перебуває за умов конвективного теплообміну з довкіллям. Пластина нагрівається рухомим джерелом тепла з густиною Q , яке рухається зі сталою швидкістю v вздовж осі Ox_1 . Краї пластини вільні від силового навантаження.

Задачу про визначення фазового складу та залишкового структурного напруженого стану пластин з низьколегованих сталей за дії рухомого джерела тепла відповідно до відомої моделі кількісного опису структурних і деформаційних змін за теплового навантаження [4] формулюємо за три етапи.

На першому – формулюємо задачу про визначення температурного поля в пластині за її нагрівання рухомим джерелом тепла зі заданим розподілом потужності Q теплових джерел.

Рівняння для знаходження температурного поля в пластині $T(x_1, x_2, \tau)$ (за припущенням, що товщина пластини мала і внаслідок цього можна прийняти, що температура не залежить від товщинної координати) набуло вигляду [5]

$$c\rho\left(\partial T / \partial \tau\right) = \partial / \partial x_j \left(\lambda \partial T / \partial x_j\right) - \alpha^* / h (T - t_c) + \bar{Q}, \quad (j=\overline{1,2}) \quad (1)$$

за крайових

$$\partial T / \partial x_1 = 0 \text{ при } x_1 \rightarrow l, \quad \partial T / \partial x_2 = 0 \text{ при } x_2 \rightarrow b \quad (2)$$

та початкових

$$T(x_1, x_2, \tau) = \bar{t}_0 \text{ при } \tau = 0, \quad (3)$$

умов, де

$$\bar{Q} = 1 / 2h \int_{-h}^h Q dx_3; \quad \bar{t}_0 = 1 / 2h \int_{-h}^h t_0 dx_3; \quad (4)$$

λ – коефіцієнт теплопровідності; c – питома теплоємність; ρ – густина матеріалу; t_c – температура довкілля; α^* – коефіцієнт теплообміну пластини з довкіллям; $\alpha = \alpha^* / h$.

Другий доданок правої частини рівняння (1) виражає кількість тепла, яке віддає одиниця об'єму пластини за одиницю часу в довкілля, третій – виражає потужність рухомого нормально розподіленого джерела тепла у вигляді

$$\bar{Q} = Q_1^* / 2\pi\sigma h \exp\left[-x_2^2 - (x_1 - x_1^0)^2 / 2\sigma\right], \quad (5)$$

де $x_1^0 = vt$, Q_1^* – потужність джерела тепла на одиницю довжини; σ – параметр розсіювання; v – швидкість руху джерела нагріву. Варто зауважити, що формула (5) моделює джерела, які створюють стандартні промислові пристрої, зокрема газові, індуктивні й електричні обігрівачі [6].

На другому етапі формулюють задачу про визначення фазового складу низьколегованого сталевих тіла при монотонному охолодженні.

Приймають, що тривалість перебування точок тіла в характерному діапазоні температур поліморфних перетворень однозначно визначає сформований після охолодження фазовий склад. Для низьколегованих сталей цей діапазон перебуває в межах від температури повної аустенізації A_{c3} ($\approx 850^\circ\text{C}$) до температури мінімальної стійкості аустеніту

T_m ($\approx 500^\circ\text{C}$). У цьому разі напруження, які виникають під час охолодження, не впливають на фазовий склад тіла і процеси, які відбуваються у вибраному фізично малому елементі об'єму, не впливають на процеси у суміжних елементах (аналог відомої гіпотези про локальну рівновагу) [2, 3].

На підставі отриманих на першому етапі розв'язків задачі теплопровідності цей часовий інтервал охолодження знаходять для кожної точки тіла з умов:

$$T(x_1, x_2, \tau_1) = 850^\circ\text{C}, T_m(x_1, x_2, \tau_2) = 500^\circ\text{C}, \tau^* = \tau_2 - \tau_1, \quad (6)$$

якщо до охолодження початкова температура $T > A_{c3}$ і

$$T(x_1, x_2, \tau_1) = T', T_m(x_1, x_2, \tau_2) = 500^\circ\text{C}, \tau^{**} = \tau_2 - \tau_1, \quad (7)$$

якщо температура $T' \in [A_{c1}, A_{c3}]$. Тут τ_1 , τ_2 , τ_1^* моменти часу досягнення відповідних температур, $A_{c1} \approx 723^\circ\text{C}$ температура евтектичного перетворення.

Тоді зведений час охолодження τ^0 , перебування кожної точки тіла у діапазоні поліморфних перетворень під час охолодження [4]

$$\tau^0 = \begin{cases} \tau^*, \text{ при } T' > A_{c3}, \\ \tau^{**} \left((A_{c3} - T_m) / (T' - T_m) \right), \text{ при } A_{c1} \leq T' \leq A_{c3} \end{cases} \quad (8)$$

Якщо визначено τ^0 , то відсотковий вміст мартенситу (M), бейніту (B) і ферито-перліту (FP) обчислюють на підставі співвідношень [2, 3]

$$\begin{aligned} M(\tau^0) &= 100\beta \left(1 - \Phi \left((\ln \tau^0 - \ln \tau_M) / \ln S_M \right) \right), \\ (FP)(\tau^0) &= 100\beta \left(\Phi \left((\ln \tau^0 - \ln \tau_{FP}) / \ln S_{FP} \right) \right) + (1 - \beta)100, \\ B(\tau^0) &= 100 - M(\tau^0) - (FP)(\tau^0), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\Phi(\tau^0)$ – функція нормального розподілу; τ^0 – зведена тривалість охолодження в діапазоні температур $[T_m; T_{\max}]$ (8); β – коефіцієнт, який враховує рівноважний вміст аустеніту під час охолодження температур, які перебувають в інтервалі температур $[A_{c1}, A_{c3}]$; $\ln \tau_M$, $\ln \tau_{FP}$, $\ln S_M$, $\ln S_{FP}$ – коефіцієнти, що залежать від хімічного складу сталі та визначають методами статистичного аналізу [2, 3, 7].

Співвідношення (9), отримані в [2, 3] при $\beta=1$ для умов однорідного охолодження від температур, які є більші від температури повної аустенізації. У вихідній моделі приймають, що під час охолодження від початкового стану, який характеризується вмістом аустеніту, мартенситна і бейнітна складові пропорційні вихідному вмісту аустеніту, а феритно-перлітна складова складається з двох частин: перша – $100(1 - \beta)$ існує на початку охолодження, друга – утворюється під час розпаду аустеніту. Значення коефіцієнта β залежить від початкової температури охолодження T' в діапазоні температур поліморфних перетворень $A_{c1} \leq T' \leq A_{c3}$ і їх приймають такими [4, 8]:

$$\beta = \begin{cases} 1, \text{ при } T' > A_{c3}, \\ (A_{c3} - T') / (A_{c3} - A_{c1}), \text{ при } A_{c1} \leq T' \leq A_{c3}, \\ 0, \text{ при } T' < A_{c1}. \end{cases} \quad (10)$$

Після охолодження в сталевому тілі фіксується просторово-неоднорідний розподіл фаз, який сприяє появі залишкових структурних напружень, зумовлених відмінністю густини фаз, що входять до складу матеріалу. За припущенням, що в процесі охолодження не виникають пластичні

деформації, на третьому етапі визначають структурні напруження з використанням співвідношення типу Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{ij} + \frac{1}{(1-2\nu)} (\nu e - (1+\nu)e_a) \delta_{ij} \right], \quad (11)$$

де σ_{ij} - компоненти тензора напружень, $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, ε_{ij} - компоненти тензора деформацій; $e_a = \beta_m \xi_m + \beta_b \xi_b$ - відносна зміна об'єму, зумовлена тим, що структура матеріалу відрізняється від рівноважної (ферито-перлітної); β_m , β_b - коефіцієнти, які враховують відмінність питомих об'ємів мартенситу і бейніту від питомого об'єму ферито-перліту; $\xi_m = 0.01M$, $\xi_b = 0.01B$ - відносний вміст мартенситу і бейніту в структурі матеріалу; E - модуль пружності; ν - коефіцієнт Пуассона. У співвідношення (11) входить структурна дилатація - e_a [9, 10], позаяк механізм виникнення тимчасових температурних напружень аналогічний до механізму виникнення структурних залишкових напружень.

Замикають систему вихідних співвідношень рівняння рівноваги і геометричні співвідношення між деформаціями та переміщеннями за відповідних крайових умов (ця система формально подібна до відомої системи рівнянь задачі незв'язаної термопружності).

Зазначимо, що розглядувані структурні напруження є залишковими в тому розумінні, що вони існують в тілі без зовнішніх термомеханічних навантажень і в багатьох випадках тривалість існування таких напружень збігається з часом експлуатації сталевого виробу [11, 12].

Методика розв'язування. При побудові числової методики розв'язування вихідної комплексної задачі нескінченну пластину наближаємо скінченною. Її розміри ($2b$, $2l$) надалі вибираємо так, щоб вплив країв пластини на розв'язок задачі був неістотним.

Температурну задачу (1)-(3) розв'язуємо методом скінчених елементів сумісно з однокроковими різницевиими алгоритмами [13] для апроксимації температури за часом. Внаслідок введення стандартних скінчено елементних апроксимацій [15] отримуємо задачу Коші

$$[C](d\{T_h(\tau)\}/d\tau) + [K]\{T_h(\tau)\} = \{F\} \text{ при } \{T_h\} = \{T_h^0\}, \quad (12)$$

де $\{T_h(\tau)\}$ - вектор значень температури у вузлах розбиття стосовно часу τ . Матрично-векторні характеристики $[C]$, $[K]$, $\{F\}$, отримані підсумовуванням відповідних матричних характеристик $[C^{(e)}]$, $[K^{(e)}]$, $\{F^{(e)}\}$ окремих скінчених елементів.

На другому етапі знаходимо зведений час τ^0 перебування кожної точки пластини в діапазоні температур поліморфних перетворень для низьколегованих сталей. Далі визначаємо фазові складові на підставі співвідношень (9) у кожній точці залежно від наявних у пластині хімічних елементів [2, 3, 14].

На підставі отриманих значень фазових складових на третьому етапі з використанням МСЕ визначаємо залишкові структурні напруження в пластині. Ці напруження визначаємо з умови мінімуму функціонала [15]

$$L(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{u\}^T [B]^T [D] [B] \{u\} dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [B]^T [D] \{\varepsilon_v\} dV, \quad (13)$$

де $\{u\} = (u_1, u_2)^T$ – вектор переміщень; $[B]$ – матриця диференціального оператора геометричних співвідношень теорії пружності; $\{\varepsilon_v\}$ – деформації, зумовлені зміною об'єму; $[D]$ – матриця пружних сталей, індекс T означає транспонування.

За методом скінчених елементів задачу (13) зводимо до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$[R] \{u_h\} = \{f\} \quad (14)$$

стосовно значень переміщень $\{u_h\}$ у вузлах скінчено-елементної сітки. Матрицю реакцій $[R]$ і вектор навантаження $\{f\}$ визначають підсумовуванням відповідних матричних характеристик елементів

$$\begin{aligned} [R^{(e)}] &= \int_{\Omega_e} [N]^T [B]^T [D] [B] [N] dV, \\ \{f\} &= \int_{\Omega_e} [N] [B]^T [D] \{\varepsilon_v\} dV, \end{aligned} \quad (15)$$

де $[N]$ – функції форми для елемента Ω_e [13].

Числові дослідження. На підставі запропонованої методики розроблено відповідне програмне забезпечення та розв'язано низку задач про визначення фазового складу та залишкового структурного напруженого стану пластини з трубної низьколегованої сталі 17Г1С після її нагрівання рухомим зосередженим нормально розподіленим джерелом тепла з декількома центрами локалізації [8, 16]. Нагрівання відбувається:

- єдиним рухомим джерелом, що рухається вздовж осі Ox_1 , формула (5);
- джерелом з двома центрами локалізації, розміщеними на відстані L одне за одним (всі центри локалізації джерела рухаються з постійною швидкістю v);

- рухомим джерелом з трьома центрами локалізації. Три центри розміщені у вершинах рівнобедреного трикутника. Система рухається вздовж осі Ox_1 так, що вершина трикутника розміщена на ній, а вершини основи перебувають на лінії, яка перпендикулярна до осі Ox_1 (відстань L). Завдяки потужності джерела першого центру локалізації Q_1^* відбувається нагрівання матеріалу до заданої температури. Два інші центри однакові за потужністю ($Q_2^* = Q_3^*$). Кожен з них віддалений від осі Ox_1 на відстань $L_1 / 2$.

У всіх розглянутих випадках центр локалізації джерела Q_1^* забезпечує нагрівання до заданого рівня температури, інші - коригують розподіл температури (з метою зменшення максимального вмісту мартенситу $M_{\max}$). Потужності коригуючих центрів локалізації джерела нагрівання, їхню кількість та просторову локалізацію вибирали з критерію мінімуму максимального вмісту мартенситу. Вибір критерію оптимізації зумовлений тим, що у багатьох випадках саме мартенсит є головним чинником пониження експлуатаційних властивостей сталевих виробів [4, 12].

Розглянутим схемам нагрівання відповідають такі нормально розподілені зосереджені джерела тепла:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= (Q_1^* / 2\pi h \sigma) \exp\left((-x_2^2 - (x_1 - x_1^0)^2) / 2\sigma\right) + \\ &+ (Q_2^* / 2\pi h \sigma) \exp\left((-x_2^2 - (x_1 - x_1^*)^2) / 2\sigma\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= (Q_1^* / 2\pi h \sigma) \exp\left((-x_2^2 - (x_1 - x_1^0)^2) / 2\sigma\right) + \\ &+ (Q_2^* / 2\pi h \sigma) \exp\left(((x_2 - x_2^*)^2 - (x_1 - x_1^*)^2) / 2\sigma\right) + \\ &+ (Q_3^* / 2\pi h \sigma) \exp\left(((x_2 - x_2^{**})^2 - (x_1 - x_1^*)^2) / 2\sigma\right), \end{aligned} \quad (17)$$

де $x_1^* = v \tau - L$; $x_2^* = x_2 + L_1 / 2$; $x_2^{**} = x_2 - L_1 / 2$; σ - параметр розсіювання.

При обчисленнях параметри та характеристики матеріалу приймали такими: $\sigma = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$; $t_c = 20$; $Q_1^* = 800 \text{ кВт/м}$, $\nu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$, $\lambda = 4,42 \text{ кВт/(м}^0\text{С)}$; $\alpha = 2,34 \cdot 10^2 \text{ Вт/(м}^2\text{.}^0\text{С)}$; $c\rho = 5,52 \text{ кДж/(м}^3\text{.}^0\text{С)}$.

Аналіз отриманих результатів засвідчив, що на початковому етапі нагрівання виникає нестационарне температурне поле. Прилегла до джерела область нагрівання пластини розширюється, а температура у кожній точці підвищується, прямуючи до деякого граничного значення. З часом розміри нагрітої області та температури в ній стабілізуються. Цей початковий період часу поширення тепла в тілі, вздовж якого розміри нагрітої області,

зв'язаної з джерелом, збільшуються, називають періодом теплонасичення [11]. Навколо джерела нагрівання усталюється постійне температурне поле, яке переміщається разом з джерелом. Таке температурне поле називають квазістаціонарним [12]. У задачі знаходимо розподіл усталеного поля, що переміщається разом з рухомих джерелом [11, 12].

На рис. 1 показано фазовий склад і залишкові структурних напруження при використанні джерела з одним центром локалізації Q_1^* , $Q_2^* = Q_3^* = 0$ кВт/м (1 – M , %; 2 – FP , %; 3 – B , %, 4 – $\sigma_{x_2x_2}$, 5 – σ_{int} – інтенсивність напружень).

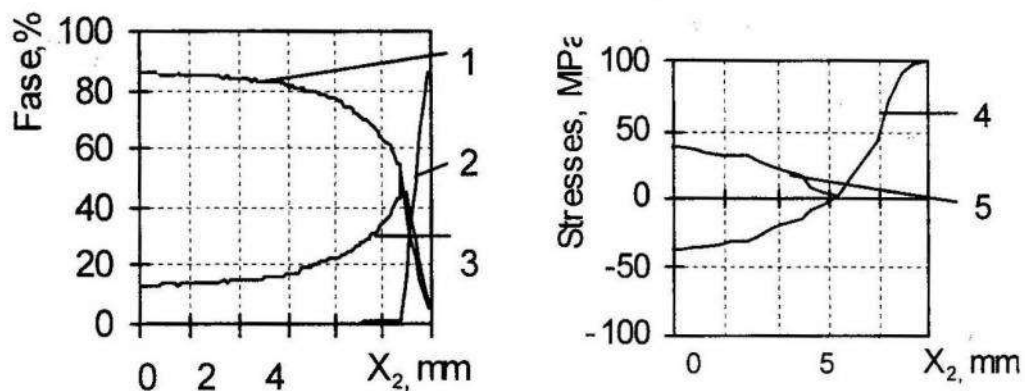


Рис. 1.

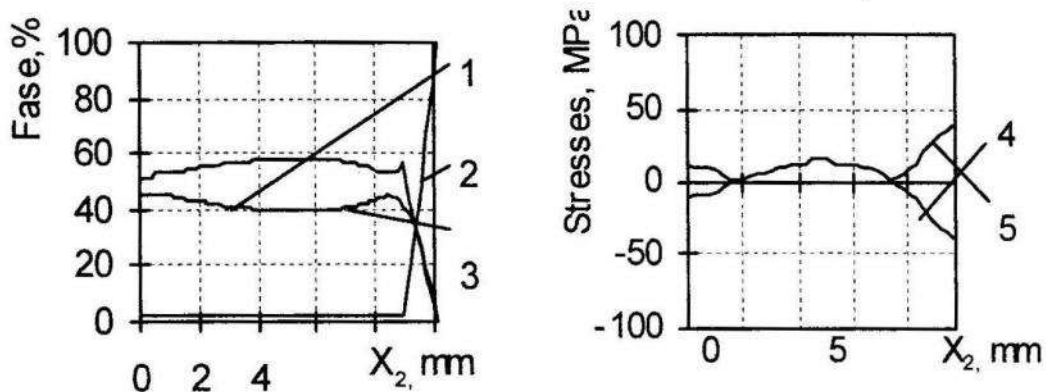


Рис. 2.

На рис. 2 зображено фазовий склад і залишкові напруження при використанні джерела з двома центрами локалізації Q_1^* , $Q_2^* = 160$ кВт/м, $L = 25 \cdot 10^{-3}$ м.

Як бачимо, що вибором параметра потужності і розміщення додаткового центра локалізації джерела можна керувати фазовим складом матеріалу при нагріванні тіла рухомих джерелом. Додатковим центром нагрівання, параметр потужності якого у п'ять разів менший, ніж основний, можна

вдвоє зменшити максимальний вміст мартенситу та залишкові структурні напруження (див. рис. 1).

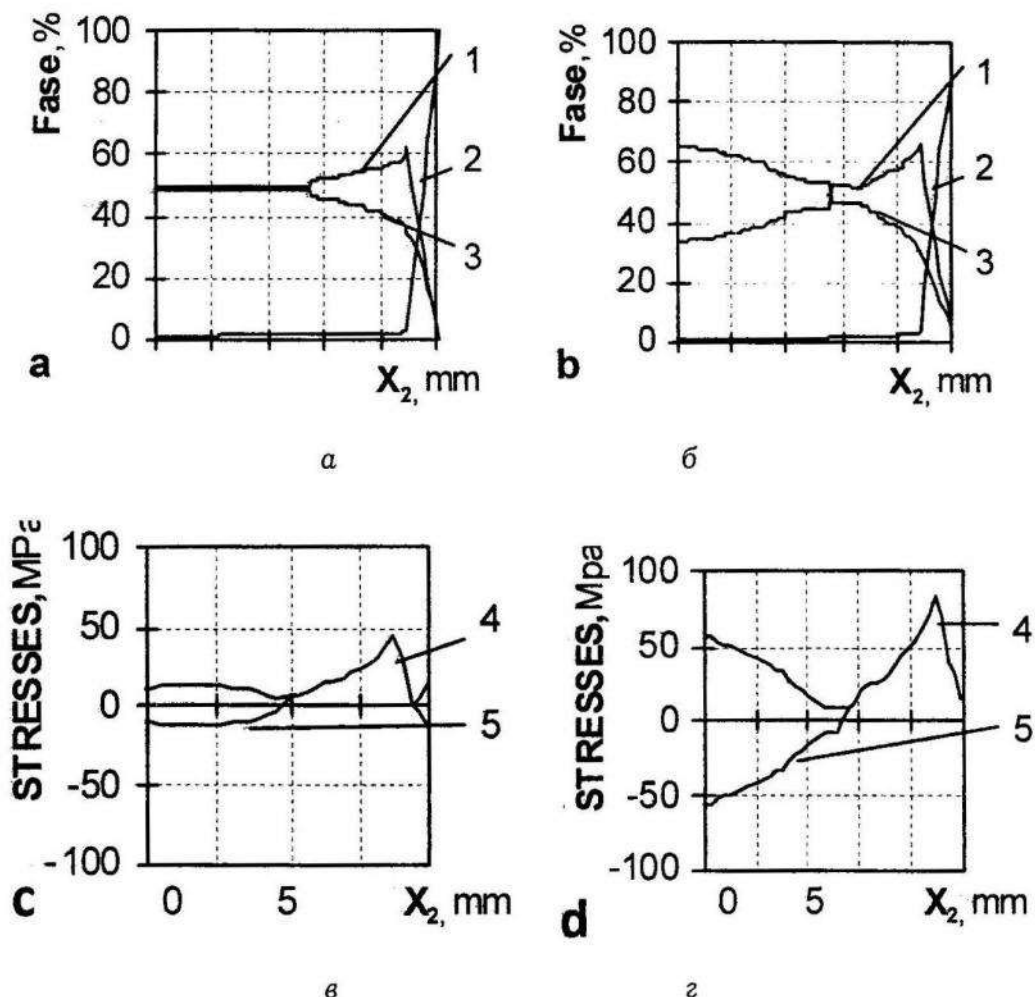


Рис. 3

На рис. 3 подано розподіл фаз (a-b) і залишковий структурний стан (c-d) у пластині при $L = 25 \cdot 10^{-3}$ м і параметрах потужності $Q_2^* = Q_3^* = 80$ кВт/м

та відстані L_1 , відповідно: a, c – $5 \cdot 10^{-3}$ м; b, d – $9 \cdot 10^{-3}$ м.

На підставі обчислень фазового складу та залишкового напруженого стану пластини при нагріванні джерелом з трьома центрами локалізації (див. рис. 3) виявили, що їхня величина і розподіл суттєво залежать від фазового складу сталевих тіл. Рациональна схема розміщення локальних центрів джерел нагрівання дає змогу у розглядуваному випадку зменшити максимальний вміст мартенситу $M_{\max}$ та значно згладити нерівномірність його розподілу.

У разі використання одного додаткового центру локалізації максимальний вміст мартенситу зменшується в 1,8 раза (див. рис. 2)

стосовно джерела з одним центром локалізації (див. рис. 1), а додаткове підігрівання з двома однаковими додатковими центрами локалізації зменшує $M_{\max}$ в 2,4 раза (див. рис. 3 а, в). У цьому разі отримали мінімальну градієнтність розподілу цієї структурної складової.

Висновки. Розроблено методику розв'язання та відповідне програмне забезпечення визначення й оптимізації фазового складу і залишкового напруженого стану тонких низьколегованих сталевих пластин за монотонного нагрівання розподіленими рухомими джерелами тепла, які часто використовують в інженерній практиці в технологіях термообробки, щоб забезпечити потрібні механічні властивості виробу.

Проведений з використанням розробленого програмного забезпечення обчислювальний експеримент для низьколегованої сталевий пластини засвідчив, що за допомогою вибору оптимального розподілу потужності рухомого локального джерела нагрівання, кількості центрів локалізації та просторового його розміщення можна ефективно керувати оптимальною за функціональними властивостями матеріалу структурою в зоні термічного впливу та рівнем залишкових напружень.

Отримані результати можна використати для розробки оптимальних технологічних режимів зварювання і термообробки, щоб зменшити рівень залишкових структурних напружень та вмісту гартувальних складових у матеріалі.

Список використаної літератури

1. Лившиц Л.С. Металловедение и термическая обработка сварных соединений / Л.С. Лившиц, А.Н. Хакимов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1989.
2. Зайфферт П. Расчетные модели для оценки механических свойств металла ЗТВ при сварке низколегированных сталей / П. Зайфферт, О.Г. Касаткин // Микроструктура и свойства. – 2002. – № 2. – С. 103–106.
3. Касаткин О.Г. Интерполяционные модели для оценки фазового состава зоны термического влияния при дуговой сварке низколегированных сталей / О.Г. Касаткин, П. Зайфферт // Автоматическая сварка. – 1984. – № 1. – С. 7–11.
4. Astashkin V. Calculation of the phase content of a steel plate at local heating / V. Astashkin, O. Hachkevych, S. Budz, T. Kozakevych, S. Szymura, Z. Kasperski, J. Szymczak // Károve Mater. 45. – 2007. – P. 319–325.
5. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984.
6. Рыкалин Н.Н. Тепловые процессы при сварке плавлением / Н.Н. Рыкалин, А.И. Пугин. – М.: Профиздат, 1959.
7. Блантер М.Е. Теория термической обработки. Учебник для вузов /

- М.Е. Блантер. – М. : Металлургия, 1984.
8. Асташкін В. Фазовий стан сталевієї пластини, обумовлений дією розподілених джерел нагріву / В. Асташкін, С. Будз, О. Гачкевич, Б. Дробенко, Є. Ірза, Т. Козакевич // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2002. – №2. – С. 48–52.
 9. Беленов Ф.С. Приближенные формулы для временных закалочных напряжений при двустороннем охлаждении полого цилиндра / Ф.С. Беленов // Журнал техн. физики. – Т. 23. – Вып. 11. – 1953. – С. 2045–2047.
 10. Жукевич–Стоша А.В. Процесс закалки и метод численного определения возникающих напряжений / А.В. Жукевич–Стоша // Журнал техн. физики. – Т. 10. – Вып. 6. – 1940. – С. 478–490.
 11. Василик А.В. Теплові розрахунки при зварюванні / А.В. Василик, Я.А. Дрогомирецький, Я.А. Криль. – Івано-Франківськ: Факел, 2004.
 12. Сварка и свариваемые материалы: в 3-х т. Т. I. Свариваемость материалов. Справ. изд. / Под ред. Э.Л. Макарова. – М. : Металлургия, 1991.
 13. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – London: Butterworth Heinemann, 2005.
 14. Гачкевич А. К вопросу о расчете влияния легирующих элементов на фазовое и напряженное состояние стальной пластины при нагреве подвижным источником / А. Гачкевич, В. Асташкин, Б. Дробенко, Т. Козакевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 19–28.
 15. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Под ред. А.С. Сахарова, И. Альтенбаха – К. : Вища шк., 1982.
 16. Асташкін В. Моделювання структурного стану сталевих пластин за умов дії рухомих розподілених джерел тепла / В. Асташкін, С. Будз, О. Гачкевич, Б. Дробенко, Т. Козакевич // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2003. – № 1. – С.41–45.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРНО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАГРЕВЕ

Тереза КОЗАКЕВИЧ

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3б 79053 Львов, Украина*

Предложено методику расчета и оптимизации фазового состава и остаточных структурных напряжений в тонких пластинах из низколегированных сталей при монотонном тепловом нагружении. Как пример исследовано стальную пластину за действия подвижного нормально распределенного источника тепла с несколькими центрами локализации. Осуществлено параметрическую оптимизацию распределения мощности источника, количества центров его локализации и пространственного размещения.

Ключевые слова: фазовые превращения, остаточные напряжения, низколегированные стали, оптимизация, подвижные распределенные источники тепла.

METHODIC OF ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF STRUCTURE STRESS STATE FOR STEEL PLATES SUBJECTED TO MONOTONOUS HEATING

Teresa KOZAKEVYCH

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine*

Methodic of analysis and optimization of phase distribution and residual stresses for thin-walled steel plates subjected to monotonous heating is proposed. As an example, steel plate subjected to moving heating source with several localization centers is analyzed. Parametric optimization of source power distribution, quantity of localization centers and spatial placement is developed.

Key words: phase transitions, residual stresses, low alloyed steels, optimization, moving heating source.

Стаття надійшла до редколегії 29.11.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках проекту ВБ-РФФД/381.

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН У ТІЛІ ЗА РОЗТЯГУ ОБМЕЖЕНИМИ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Віталій ГАЛАЗЮК, Ірина БУБНЯК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розв'язано осесиметричну задачу теорії пружності за одновісного розтягу обмеженими переміщеннями на нескінченності. З'ясовано, що такий стан рівноваги можливий за існування у площині симетрії внутрішнього межового шару зі стрибком дотичних напружень на поверхнях, які його обмежують.

Ключові слова: інтегральні рівняння першого роду, межовий шар, стрибок дотичних напружень, обмежені переміщення на нескінченності.

Для дослідження напружено-деформованого стану в необмежених тілах з локалізованими неоднорідностями зазвичай застосовують метод суперпозицій основного стану, зумовленого у тілі навантаженням на нескінченності і додаткового, який спричинений наявною неоднорідністю, має локалізований характер і зникає на нескінченності. У цьому разі за основний напружений стан в тілі без неоднорідності [1, 2, 3] вибирають стан, який виникає внаслідок задання на нескінченності напружень сталої інтенсивності. За таких обставин переміщення у тілі зростають на нескінченності за лінійним законом, що суперечить лінійній моделі деформованого твердого тіла.

Далі подаємо математичну модель осесиметричного деформування простору одностороннім розтягом сталими переміщеннями на нескінченності. З'ясовано, що такий стан рівноваги можна реалізувати певним законом розподілу пелени об'ємних сил [4] у площині симетрії. Також доведено, що завжди існує закон розподілу об'ємних сил, за якого нормальні напруження у певній області площини симетрії є сталими. Оскільки розподіл об'ємних сил у площині симетрії зумовлює існування стрибка дотичних напружень у разі переходу цієї площини вздовж нормалі до неї, то за означенням [5] ця площина є поверхнею розриву параметрів поля першого порядку – внутрішнім межовим шаром.

1. Розв'язок рівнянь статки з пеленою об'ємних сил і безмоментних диполів. Однорідний пружний простір віднесемо до циліндричної системи координат $(R, \alpha, \beta, \gamma)$ і вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження у просторі реалізується осесиметричний стосовно осі γ напружено-деформований стан. Ненульові компоненти вектора пружного переміщення $Ru_\alpha(\alpha, \gamma)$ і $Ru_\gamma(\alpha, \gamma)$, а також їхні частинні похідні $\varphi_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv \partial_\alpha u_\gamma$ і

$\varphi_\gamma(\alpha, \gamma) \equiv \partial_\gamma u_\alpha$ (пружні кути повороту лінійних елементів, паралельних до осей α та γ , відповідно) означимо у просторі $|\gamma| \geq 0$ і підпорядкуємо умовам симетрії й антисиметрії

$$\begin{aligned} u_\alpha(\alpha, -\gamma) &= u_\alpha(\alpha, \gamma), u_\gamma(\alpha, -\gamma) = -u_\gamma(\alpha, \gamma); \\ \varphi_\alpha(\alpha, -\gamma) &= -\varphi_\alpha(\alpha, \gamma), \varphi_\alpha(\alpha, -\gamma) = -\varphi_\alpha(\alpha, \gamma). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут ∂_α і ∂_γ - оператори диференціювання за α і γ , відповідно.

Тоді можна стверджувати, що безрозмірні компоненти $u_\alpha(\alpha, \gamma)$ і $u_\gamma(\alpha, \gamma)$ вектора пружного переміщення за умов (1) є розв'язками рівнянь статки пружного тіла в циліндричних координатах

$$\begin{aligned} k^2 \partial_\alpha \theta + 2 \partial_\gamma \omega_\beta &= \delta(\gamma) X_\alpha(\alpha), \\ k^2 \partial_\gamma \theta - 2 \alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha \omega_\beta) &= \delta'(\gamma) X_\gamma(\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

де пелена об'ємних сил $X_\alpha(\alpha)$ і безмоментних диполів $X_\gamma(\alpha)$ задана інтегралами Ханкеля

$$\begin{aligned} X_\alpha(\alpha) &= 2k^2 \int_0^\infty [2A(\xi) - \xi B(\xi)] \xi J_1(\alpha \xi) d\xi, \\ X_\gamma(\alpha) &= 2k^2 \int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\alpha \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

стосовно функцій

$$\begin{aligned} \Theta &\equiv \text{div} \vec{u} = \alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma, \\ 2\omega_\beta &\equiv (\text{rot} \vec{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = \varphi_\gamma(\alpha, \gamma) - \varphi_\alpha(\alpha, \gamma), \end{aligned} \quad (4)$$

і визначають напружено-деформований стан у просторі зі стрибками у площині $\gamma=0$ переміщень $u_\gamma(\alpha, \pm 0)$, пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha, \pm 0)$, $\varphi_\gamma(\alpha, \pm 0)$, а також дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)$.

У виразах (2)-(4) позначено $k^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де λ, μ і ν сталі Ляме й коефіцієнт Пуассона; $\delta(\gamma)$ і $\delta'(\gamma)$ - дельта-функція Дірака та її похідна; R -параметр із розмірністю довжини (згодом радіус плоскої неоднорідності); $J_s(x)$ - функції Бесселя першого роду порядку s ; $A(\xi)$ та $B(\xi)$ - твірні функції об'ємних сил і безмоментних диполів, які

визначаються зовнішнім навантаженням у площині $\gamma=0$ і є фізичними умовами задачі.

Якщо скористатися правилами диференціювання узагальнених функцій [6] $\text{sign}'(\gamma) = 2\delta(\gamma)$, $f(\gamma)\delta'(\gamma) = f(0)\delta'(\gamma) - f'(0)\delta(\gamma)$, то безпосередньою підстановкою можна переконатися у тому, що функції

$$\begin{aligned}\theta(\alpha, \gamma) &= 2\delta(\gamma) \int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\alpha\xi) d\xi - 2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi, \\ \omega_\beta(\alpha, \gamma) &= k^2 \text{sign} \gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi,\end{aligned}\quad (5)$$

є розв'язками системи рівнянь (2) із правою частиною (3). За відомими функціями $\theta(\alpha, \gamma)$ і $\omega_\beta(\alpha, \gamma)$ з системи диференціальних рівнянь першого порядку (4) знайдемо компоненти вектора пружного переміщення

$$\begin{aligned}u_\alpha(\alpha, \gamma) &= - \int_0^\infty [(k^2 + 1)A(\xi) - \xi B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi + \\ &+ (k^2 - 1)|\gamma| \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi, \\ u_\gamma(\alpha, \gamma) &= \text{sign} \gamma \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi + (k^2 - 1)\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi,\end{aligned}\quad (6)$$

та вирази пружних кутів повороту

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\alpha, \gamma) &= -\text{sign} \gamma \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi - (k^2 - 1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi, \\ \varphi_\gamma(\alpha, \gamma) &= \text{sign} \gamma \int_0^\infty [2k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)] \xi J_1(\alpha\xi) d\xi - \\ &- (k^2 - 1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi.\end{aligned}\quad (7)$$

Використавши закон Гука та перший вираз (4), отримаємо компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma) = 2\mu \left\{ \int_0^\infty \xi [A(\xi) - \zeta B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\mu(k^2 - 2)\delta(\gamma) \int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\alpha\xi) d\xi - (k^2 - 1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi \}, (8) \\
 \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma) = & \mu \left\{ (k^2 - 2) \left[2\delta(\gamma) \int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\alpha\xi) d\xi - 2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi \right] - \right. \\
 & - \alpha \int_0^\infty [(k^2 + 1)A(\xi) - \xi B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} [J_0(\alpha\xi) - J_2(\alpha\xi)] d\xi + \\
 & + \alpha(k^2 - 1)|\gamma| \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} [J_0(\alpha\xi) - J_2(\alpha\xi)] d\xi \}; \\
 \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma) + \sigma_{\beta\beta}(\alpha, \gamma) + \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma) = & (3\lambda + 2\mu)\Theta, \\
 \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma) \equiv \mu[\varphi_\gamma(\alpha, \gamma) + \varphi_\alpha(\alpha, \gamma)] = & 2\mu \left\{ \text{sign} \gamma \int_0^\infty \xi [k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi \right. \\
 & \left. - (k^2 - 1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi \right\}. (9)
 \end{aligned}$$

Отже, згідно з поданням (5)–(7) і (9) функції $\omega_\beta(\alpha, \gamma)$, $u_\gamma(\alpha, \gamma)$, $\varphi_\alpha(\alpha, \gamma)$, $\varphi_\gamma(\alpha, \gamma)$, $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma)$ містять функцію стрибка $\text{sign} \gamma$, що й доводить слушність сформульованого твердження, причому стрибок дотичних напружень (9) є механічним виявленням внутрішнього межового шару.

2. Формулювання задачі про деформування тіла при розтязі обмеженими переміщеннями на нескінченності вздовж осі γ . Оскільки за симетричного навантаження на нескінченності площин симетрії $\gamma=0$ не зміщується у напрямі осі γ , то відповідно до подання (7) твірна функції $B(\xi)=0$, а твірну функцію $A(\xi)$ задамо так:

$$\xi A(\xi) = u_\gamma^0 e^{-p\xi^2} / (k^2 - 1), \quad (10)$$

де u_γ^0 – постійна величина; $p>0$ – параметр, який є зведеною механічною характеристикою внутрішнього межового шару у площині $\gamma=\pm 0$.

За поданням (3) функція $A(\xi)$ (10) буде визначати такий закон розподілу пелени об'ємних сил $X_\alpha(\alpha)$ у площині $\gamma=0$

$$X_\alpha(\alpha) = \frac{4k^2 u_\gamma^0}{k^2 - 1} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} J_1(\alpha\xi) d\xi = \frac{4k^2 u_\gamma^0}{k^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha^2/4p} \right), \quad (11)$$

причому при $\alpha \rightarrow \infty$ $X_\alpha(\alpha) = \frac{4k^2 u_\gamma^0}{k^2 - 1} \frac{1}{\alpha}$ і зникає на нескінченності.

Отже, подання (11) можна трактувати як математичну модель внутрішнього межового шару – матеріальної поверхні розриву параметрів поля першого порядку.

Тепер за відомою функцією $A(\xi)$ знайдемо усі характеристики напружено-деформованого стану, які їй відповідають

$$\begin{aligned} u_\alpha(\alpha, \gamma) &= -\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} u_\gamma^0 \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) \xi^{-1} d\xi + u_\gamma^0 |\gamma| \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi, \\ u_\gamma(\alpha, \gamma) &= u_\gamma^0 \gamma \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки поле переміщень у просторі визначене, то обчислимо за поданнями (6), (8) і (9) усі характеристики напружено-деформованого стану за густини розподілу (10) об'ємних сил у площині $\gamma=0$

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha, \gamma) &= -\frac{2u_\gamma^0}{k^2 - 1} \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi, \\ \omega_\beta(\alpha, \gamma) &= \frac{k^2 u_\gamma^0}{k^2 - 1} \operatorname{sign} \gamma \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi, \\ \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma) &= -\frac{\mu u_\gamma^0}{k^2 - 1} \left\{ 3(k^2 - 1) \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi - (k^2 - 1) \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_2(\alpha\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - (k^2 - 1) |\gamma| \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} [J_0(\alpha\xi) - J_2(\alpha\xi)] d\xi \right\}, \\ \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma) &= \frac{2\mu u_\gamma^0}{k^2 - 1} \left\{ \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi - (k^2 - 1) |\gamma| \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_0(\alpha\xi) d\xi \right\}, \\ \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma) &= -\frac{2\mu u_\gamma^0}{k^2 - 1} \left\{ k^2 \operatorname{sign} \gamma \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - (k^2 - 1) \gamma \int_0^\infty \xi e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} J_1(\alpha\xi) d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Інтеграли у поданнях (12)–(14) характеристик напружено-деформованого стану у просторі можуть бути обчислені числовими методами, проте за певних значень аргументів вони визначають явні закони розподілу.

3. Закони розподілу характеристик напружено-деформованого стану у площині $\gamma=\pm 0$. Якщо $\gamma=0$, то з подань (12)–(14) характеристик напружено-деформованого стану одержимо, що

$$\begin{aligned} u_\gamma(\alpha, \pm 0) &= 0; \\ u_\alpha(\alpha, \pm 0) &= -\frac{k^2+1}{k^2-1} u_\gamma^0 \int_0^\infty e^{-p\xi^2} \xi^{-1} J_1(\alpha\xi) d\xi = \\ &= -\frac{(k^2+1)u_\gamma^0}{4(k^2-1)} \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^{-\alpha^2/4p} \left[I_1\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) + I_0\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha, \pm 0) &= -\frac{2u_\gamma^0}{k^2-1} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} J_0(\alpha\xi) d\xi = -\frac{u_\gamma^0}{k^2-1} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\alpha^2/8p} I_0\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right); \\ \omega_\beta(\alpha, \pm 0) &= \pm \frac{k^2 u_\gamma^0}{k^2-1} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} J_1(\alpha\xi) d\xi = \pm \frac{k^2 u_\gamma^0}{k^2-1} \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha^2/4p} \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \pm 0) &= \pm \frac{\mu\sqrt{\pi}u_\gamma^0}{2(k^2-1)\sqrt{p}} e^{-\alpha^2/8p} \left[3(k^2-1)I_0\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) - (k^2+1)I_1\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right) \right]; \\ \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) &= \frac{2\mu u_\gamma^0}{(k^2-1)} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} J_0(\alpha\xi) d\xi = \frac{\mu u_\gamma^0}{(k^2-1)} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\alpha^2/8p} I_0\left(\frac{\alpha^2}{8p}\right); \\ \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) &= \pm \frac{2\mu k^2 u_\gamma^0}{(k^2-1)} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} J_1(\alpha\xi) d\xi = \frac{2\mu k^2 u_\gamma^0}{(k^2-1)} \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha^2/4p} \right); \end{aligned} \quad (17)$$

де $I_\nu(x)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду.

Аналіз законів розподілу (15)–(17) характеристик напружено-деформованого стану у площині $\gamma=0$ свідчить про те, що компонента $\omega_\beta(\alpha, \pm 0)$ вектора Ω і відтак дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)$ мають стрибок у площині $\gamma=\pm 0$ під час її переходу вздовж нормалі до неї, що є механічним виявленням існування внутрішнього межового шару. Оскільки об'ємна деформація $\Theta(\alpha, \pm 0)$ і радіальне нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \pm 0)$ від'ємні, то можна стверджувати, що межовий шар є стиснутим в радіальному напрямі і розтягнутим у нормальному напрямі нормальними напруженнями $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) > 0$, $\forall \alpha \in [0, \infty)$.

4. Асимптотика напружено-деформованого стану у площині $\gamma=\pm 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Відповідно до подань (15)–(17) знайдемо поведінку характеристик напружено-деформованого стану у площині $\gamma=\pm 0$, де $\alpha \rightarrow \infty$. Оскільки [7] при

великих значеннях аргументу модифіковані функції Бесселя

$I_\nu(x) \equiv \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$, то при $\alpha \rightarrow \infty$ отримаємо, що

$$u_\alpha(\alpha, \pm 0) = -\frac{(k^2 + 1)u_\gamma^0}{(k^2 - 1)} = \text{const}, u_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0; \quad (18)$$

$$\Theta(\alpha, \pm 0) = -\frac{2u_\gamma^0}{(k^2 - 1)} \frac{1}{\alpha}; \omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \pm \frac{k^2 u_\gamma^0}{(k^2 - 1)} \frac{1}{\alpha}; \quad (19)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \pm 0) = -\frac{\mu u_\gamma^0 (k^2 - 2)}{(k^2 - 1)} \frac{1}{\alpha}; \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\frac{2\mu u_\gamma^0}{(k^2 - 1)} \frac{1}{\alpha};$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\frac{2\mu k^2 u_\gamma^0}{(k^2 - 1)} \frac{1}{\alpha}. \quad (20)$$

Отже, відповідно до асимптотик (18)–(20) напружено-деформованого стану можна стверджувати, що радіальне переміщення $u_\alpha(\alpha, \pm 0)$ у площині $\gamma = \pm 0$ є від'ємним і постійним на безмежності, і не залежить від параметра $p > 0$. Решта характеристик напружено-деформованого стану у площині $\gamma = \pm 0$ (межовому шарі) зникають як α^{-1} , у тім числі і стрибок дотичних напружень.

5. Напружено-деформований стан у просторі на осі симетрії $\alpha = 0$. Якщо $\alpha = 0$, то інтеграли у поданнях (12)–(14) обчислюють точно і можна отримати закон розподілу характеристик напружено-деформованого стану на осі симетрії $\alpha = 0$ простору. Зокрема,

$$u_\alpha(0, \gamma) = 0, u_\gamma(0, \gamma) = u_\gamma^0 \gamma \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} d\xi = u_\gamma^0 \gamma \frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}} D_{-1}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right); \quad (21)$$

$$\omega_\beta(0, \gamma) = 0, \sigma_{\alpha\gamma}(0, \gamma) = 0,$$

$$\Theta(0, \gamma) = -\frac{2u_\gamma^0}{k^2 - 1} \int_0^\infty e^{-p\xi^2 - \xi|\gamma|} d\xi = -\frac{2u_\gamma^0}{k^2 - 1} \frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}} D_{-1}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right), \quad (22)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(0, \gamma) = \frac{2\mu u_\gamma^0}{k^2 - 1} \frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}} \left\{ 2(k^2 - 1) D_{-3}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right) - (k^2 - 2) D_{-1}\left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}}\right) \right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0, \gamma) = -2\mu u_{\gamma}^0 \frac{e^{\gamma^2/8p}}{\sqrt{2p}} \left\{ D_{-1} \left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}} \right) + D_{-3} \left(\frac{|\gamma|}{\sqrt{2p}} \right) \right\}, \quad (23)$$

де D_{-n} – функції параболічного циліндра з асимптотикою [7] при великих x $D_{-n}(x) \cong e^{-x^2/4} x^{-n}$.

Використавши асимптотику функцій параболічного циліндра при великих значеннях аргументу, знайдемо відповідно до подань (21)–(23) поведінку параметрів напружено-деформованого стану на осі симетрії $\alpha=0$ простору при $|\gamma| \rightarrow \infty$. У цьому разі отримаємо, що при великих значеннях γ

$$u_{\alpha}(0, \gamma) = 0, u_{\gamma}(0, \gamma) = u_{\gamma}^0 \operatorname{sign} \gamma, \quad (24)$$

$$\Theta(0, \gamma) = -\frac{2u_{\gamma}^0}{k^2 - 1} \frac{1}{|\gamma|}, \omega_{\beta}(0, \gamma) = 0, \quad (25)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(0, \gamma) = 0, \sigma_{\gamma\gamma}(0, \gamma) = -2\mu u_{\gamma}^0 \frac{(k^2 - 2)}{|\gamma|} \left[1 - \frac{2(k^2 - 1)}{k^2 - 2} \frac{2p}{\gamma^2} \right],$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(0, \gamma) = -2\mu u_{\gamma}^0 \frac{1}{|\gamma|} \left[1 + \frac{2p}{\gamma^2} \right]. \quad (26)$$

Отже, відповідно до отриманих асимптотик (24)–(26) параметрів напружено-деформованого стану при $\gamma \rightarrow \infty$ можна стверджувати, що компонента $u_{\gamma}(0, \gamma)$ вектора пружного переміщення при $|\gamma| \rightarrow \infty$ є постійною, а всі інші параметри напружено-деформованого стану зникають як $|\gamma|^{-1}$. У цьому разі нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(0, \gamma) < 0$ і є стискувальним $\forall |\gamma| \in [0, \infty)$, нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(0, \gamma)$, як розтягувальне (20) у площині $\gamma = \pm 0$, при певних значеннях змінної $|\gamma|$ змінює знак і стає стискувальним. Це цілком узгоджується з функцією явища, оскільки об'ємна деформація $\Theta(\alpha, \gamma)$ відповідно до подання (13) є від'ємною у всіх точках простору.

6. Числовий аналіз і обговорення результатів. За отриманими результатами провели числове дослідження напружено-деформованого стану у тілі за розтягуванням обмеженими переміщеннями на нескінченності.

На рис. 1, 2 зображено розподіл напружень при $\gamma = 0$ для різних значень p .

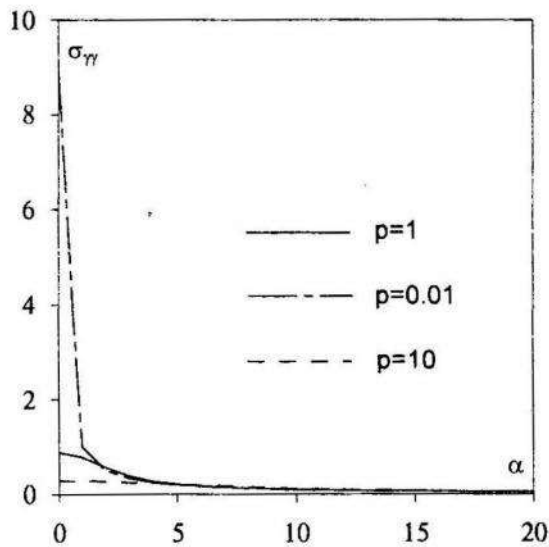


Рис. 1

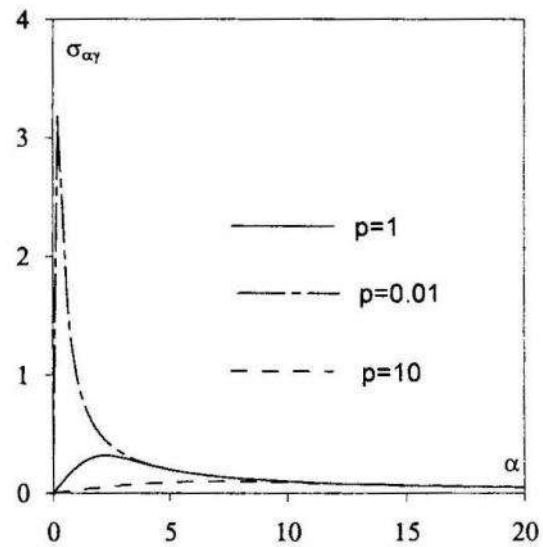


Рис. 2

7. Висновки. Запропоновано математичну модель осесиметричного напружено-деформованого стану у просторі за обмежених переміщень на нескінченності. З'ясовано, що такий стан рівноваги можливий за існування у площині симетрії пелени радіально спрямованих об'ємних сил, які є математичною моделлю внутрішнього межового шару. Механічним виявом внутрішнього межового шару є стрибок дотичних напружень при його переході вздовж нормалі. Доведено, що за певних механічних характеристик внутрішнього межового шару, розподіл нормальних розтягувальних напружень у ньому у певній області є близьким до сталого. Це відповідає класичним уявленням про розтяг простору сталими напруженнями на нескінченності. Запропоновану математичну модель можна застосовувати в узагальненій задачі Сака, коли на нескінченності задано сталі переміщення.

Список використаної літератури

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966.
2. Савин Г.И. Распределение напряжений около отверстий / Г.И. Савин. – Киев: Наук. думка, 1968.
3. Kassir M.K. Some three-dimensional inclusion problems in elasticity / M.K. Kassir, G.C. Sih // International Journal of Solids and Structures – Volume 4, Issue 2 – 1968. – P. 225–241.
4. Галазюк В.А. Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями / В.А. Галазюк, Г.Т. Сулим // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, №4. – С. 17–33.

5. Трудел К. Первоначальный курс механики сплошных сред / К. Трудел // Пер. с англ. – М.: Мир, 1975.
6. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. – М.: Мир, 1965.
7. Градштейн И.С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1965.

ОСЕСИМЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТЕЛЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Виталий ГАЛАЗЮК, Ирина БУБНЯК

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Решена осесимметричная задача теории упругости за одноосного растяжения ограниченными перемещениями на бесконечности. Выяснено, что такое положение равновесия возможно за существования в плоскости симметрии внутреннего пограничного слоя с прыжком касательных напряжений на поверхностях, что его ограничивают.

Ключевые слова: интегральные уравнения первого рода, предельный слой, скачок касательных напряжений, ограниченные перемещения на бесконечности.

AXISYMMETRICAL TENSION-DEFORMED STATE IN BODY STRETCHED BY LIMITED DISPLACEMENTS DEFINED AT INFINITY

Vitaliy GALAZYK, Iryna BUBNYAK

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Elasticity theory problem for the body which is axial symmetrically stretched by the limited, defined at infinity displacements has been solved. It has been revealed that such equilibrium state is feasible in the case of existence of the internal boundary layer which is located in the plane of symmetry and has shear stresses skip on its limiting surfaces.

Key words: integral equations of the first kind, boundary layer, jump tangential stress, displacements defined at infinity.

Стаття надійшла до редколегії 02.12.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ДО МЕТОДОЛОГІЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ І НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В СКЛЯНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Євген ІРЗА

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна*

Запропоновано концепцію побудови методики оптимізації теплових режимів у скляному виробництві. Алгоритм розв'язування сформульованої екстремальної задачі будується за принципом поетапної параметричної оптимізації, а отримання розв'язку прямих задач ґрунтується на методі зважених залишків у поєднанні з методом кінцевих елементів. Запропоновану методику можна використовувати для параметричної оптимізації режимів гартування, відпалювання, зварки скляних тіл і забезпечення їхньої міцності.

Ключові слова: концепція і схема оптимізації, термообробка скляних виробів.

Підвищення ефективності технологічних процесів термообробки в скляному виробництві, якості виробів із скла, поліпшення їхніх експлуатаційних характеристик неможливе без оптимізації теплових режимів у технологічних процесах.

Багатоманітність технологічних процесів у скляному виробництві, різнокритеріальність показників якості готових виробів ускладнюють, а в багатьох випадках виключають можливість застосування експериментальних і ймовірно-статистичних методів оптимізації теплових режимів при термообробці. Згадані особливості теплових процесів у скляному виробництві обумовлюють використання системного підходу до розробки методики оптимізації теплових режимів у ньому за функціональними параметрами, зокрема, напруженнями та деформаціями.

Методика з оптимізації теплових режимів у процесах нагрівання-охолодження скляних тіл передбачає:

- математичне формулювання задачі з цільового оптимального керування;
- розробку числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку;
- програмну реалізацію числового алгоритму.

Математичне формулювання задач з визначення оптимальних за цільовими критеріями теплових режимів у процесах нагрівання-охолодження скляних тіл охоплює такі етапи:

- вибір параметрів стану, формулювання математичних залежностей, які описують поведінку тіл, зокрема термомеханічну, за заданого теплового навантаження (вибір адекватної фізико-математичної моделі опису наявних фізико-механічних процесів);
- вибір математичного критерію оптимальності;
- вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціонала оптимізації;

- формування і математичний запис обмежень на параметри стану і функції керування.

Питання вибору моделі поведінки тіл при тепловому навантаженні є головним для аналізу термонапруженого стану тіл під дією теплового навантаження і для оптимізації теплових режимів термообробки за певними критеріями. Тому оптимізація теплових режимів неможлива без попереднього опрацювання уявлень про суттєві та несуттєві явища в термомеханічній поведінці скляних тіл під дією теплових навантажень у широкому діапазоні температур. Реальний об'єкт, який звільнений від несуттєвих особливостей, називають фізико-математичною моделлю. Вибір фізико-математичної моделі по суті неєдиний.

У деяких випадках декілька різних фізико-математичних моделей може бути запропоновано для опису поведінки вибраного об'єкта. Водночас одній фізико-математичній моделі може ставитися у відповідність багато різних об'єктів.

Розглянемо класичне формулювання задач з оптимального керування тепловими режимами в процесах термообробки. Суттєвий елемент формулювання задачі – вибір термомеханічної моделі поведінки вибраного об'єкта при тепловому навантаженні. Спочатку вибирають параметри стану. Для розглянутих процесів термообробки типовими параметрами, які визначають термонапружений стан конструкції, є такі: t – температура; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій; $\vec{u}$ – вектор переміщень; $\vec{h}$ – вектор-функція теплового навантаження; $\vec{p}$ – вектор-функція силового навантаження і т.п.

Наступним важливим етапом є формулювання системи рівнянь

$$L_i(\vec{r}, \tau, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

які зв'язують ці параметри з фізичними та геометричними параметрами тіла, і зовнішніми діями. Тут $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, x^3)$ – радіус-вектор точки в криволінійній системі координат $Ox^1x^2x^3$; τ – біжучий час. Через L_i в (1) позначено інтегро-диференціальні оператори по просторових координатах x^i і часу τ . Систему рівнянь (1) в загальному випадку можна розглядати як систему нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Припускають, що крайові умови входять до системи (1).

Система рівнянь (1) за заданих теплових навантажень $\vec{h}$, зовнішньої силової дії $\vec{p}$ і параметрах конструкції повинна бути замкненою і визначати параметри стану, які характеризують термонапружений стан тіла. Визначення параметрів стану при заданому силовому навантаженні $\vec{p}$ і заданих функціях $\vec{h}$, які характеризують теплове навантаження, а в оптимізаційних задачах є функціями керування, будемо називати прямою задачею.

Вибір критерію оптимізації і відповідного функціонала, який реалізує цей критерій, відбувається, враховуючи основні цільові призначення процесу термообробки. В задачах оптимізації розглядаються функціонали двох типів: інтегральні функціонали

$$J_k = \int_{\tau} \int_{\Omega} f_k(\vec{r}, \tau, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}) d\Omega d\tau, \quad k = \overline{1, e}, \quad (2)$$

і локальні функціонали

$$J_k = \max_{\Omega, \tau} f_k(\vec{r}, \tau, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}), \quad k = \overline{1, e}. \quad (3)$$

Вибір функції керування $\vec{h}$ відбувається, враховуючи технологічні можливості керування наявними фізико-механічними процесами в конкретній технології термообробки.

Вимоги, які ставлять до якості виробів і параметрів технологічних процесів термообробки, приводять до обмежень, які накладають на змінні стану і технологічні умови процесу термообробки. Ці обмеження складаються з нерівностей, які записують так:

$$\phi_j(\vec{r}, \tau, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}) \leq 0, \quad j = \overline{1, l}. \quad (4)$$

Тут ϕ_j – задані функції. Вибір обмежень на параметри стану і технологічні умови відбувається залежно від цілей термообробки.

Отож, задача оптимізації полягає у знаходженні функції керування $\vec{h}$, яка задовольняє умову мінімуму (максимуму) функціонала інтегрального типу (2) або функціонала локального типу (3), співвідношенням типу (1) (що називаються в'язями) і обмеженням типу (4).

Розробка числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку складається з таких етапів:

- побудова алгоритму розв'язування прямих задач;
- побудова алгоритму розв'язування задачі оптимізації.

Алгоритм розв'язування прямих задач ґрунтується на числових методах. Оскільки система диференціальних рівнянь є нелінійною і геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто досить складна, то виникає потреба використання універсальних обчислювальних методів для розв'язування цього класу задач. Одним з таких методів є метод зважених залишків у поєднанні з кінцево-елементним підходом [1], який дає змогу отримувати наближені розв'язки сформульованих вище задач.

Схематично розглянемо суть цього методу. Якщо враховувати диференціальне рівняння $Lu - f = 0$ (L – диференціальний оператор) і наближений розв'язок шукати у вигляді

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^m N_i u_i, \quad (5)$$

то отримаємо

$$L\bar{u} - f = R_\Omega. \quad (6)$$

Тут $\bar{u}$ – наближений розв'язок; N_i – базові функції (функції форми); u_i – дискретні значення функції u в області Ω ; R_Ω – похибка або залишок, яка залежить від координат точок із Ω .

Мінімальну похибку забезпечує умова [1]

$$\int_{\Omega} (L\bar{u} - f) W_l d\Omega = \int_{\Omega} R_\Omega W_l d\Omega = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad (7)$$

де $\{W_l; l = \overline{1, m}\}$ – множина лінійно-незалежних вагових функцій.

Тоді загальну вимогу збіжності $\bar{u} \rightarrow u$ при $m \rightarrow \infty$ можна записати в формі умови виконання рівності (7) для всіх l при $m \rightarrow \infty$.

Для більшої ефективності методу зважених залишків його поєднують з методом кінцевих елементів.

У розглядуваному підході алгоритм розв'язання прямих задач методом зважених залишків в поєднанні з методом кінцевих елементів враховує:

- дискретизацію області кінцевими елементами;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання на цій підставі системи алгебричних рівнянь стосовно вузлових значень невідомих функцій у вузлах і алгоритм розв'язку цієї системи.

Процес дискретизації можна поділити на два етапи:

- розбиття області на елементи;
- нумерація елементів і вузлів.

Згідно з концепцією методу кінцевих елементів дискретизація області Ω відбувається на скінчене число n_e підобластей $\Omega^{(e)}$, які називаються кінцевими елементами (КЕ), отже, справджуються такі властивості:

$$a) \forall e, m : e = \overline{1, n_e}, \quad m = \overline{1, n_e}, \quad \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(m)} = \emptyset, \quad e \neq m;$$

$$b) \Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^{(e)}.$$

Рівномірне розбиття області, коли всі елементи мають однакову форму та розміри, практично не проводиться. Реальні поля зазвичай мають різні розподіли (градієнти), опис яких потребує різних розмірів КЕ.

Метод кінцевих елементів побудований на ідеї апроксимації неперервної функції (температури, переміщень тощо) на кінцевому числі підобластей,

які називаються елементами.

Довільна скалярна функція t може бути апроксимована на елементі так [1]:

$$t^{(e)} = \sum_{i=1}^m N_i^{(e)} T_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & \dots & N_m^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(e)} \\ \vdots \\ T_m^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

де $N_i^{(e)}$ – базова функція елемента, яка називається функцією форми, причому $N_i^{(e)} = 1$ у i -му вузлі та дорівнює нулю у всіх інших вузлах; $T_i^{(e)}$ – значення функції в i -му вузлі; m – кількість вузлів в елементі.

Векторна величина, наприклад, переміщення $\vec{u}$ визначається величиною і напрямом. Тому для таких величин у кожному вузлі треба визначати більше, ніж одну невідому (ступінь свободи). В цьому випадку векторна величина подається через її компоненти, які розглядають як невідомі скалярні величини. В кожному вузлі буде одна, дві або три невідомі залежно від того, яку задачу розглядають (одновимірну, двовимірну чи тривимірну). Для тривимірного випадку векторну величину $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ подають як [1]

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{3m} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

де U_{3i-k} – значення k -ї компоненти в i -му вузлі.

Аналогічно векторна величина $\vec{u}$ подається для дво- і одновимірного випадків.

Застосування методу зважених залишків у поєднанні з методом кінцевих елементів до (7) приводить до залежності [1]

$$\sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(i)}} [W^{(i)}]^T (L u^{(i)} - f) d\Omega = 0, \quad (10)$$

де $u^{(i)}$ – шукана величина, яка апроксимується на довільному кінцевому елементі співвідношенням

$$u^{(i)} = [N^{(i)}] \{U^{(i)}\} = \begin{bmatrix} N_1^{(i)} & \dots & N_m^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(i)} \\ \vdots \\ U_m^{(i)} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Тут m – кількість вузлів елемента; n_e – загальна кількість елементів, на які поділена вся область Ω , $\left[\sum_{i=1}^{n_e} \Omega^{(i)} = \Omega \right]$; $[N^{(i)}] = [N_1^{(i)} \dots N_m^{(i)}]$ – матрична стрічка функцій форми i -го елемента; $\{U^{(i)}\}$ – вектор-стовпець значень функції u у вузлах елемента; $[W^{(i)}] = [W_1^{(i)} \dots W_m^{(i)}]$ – матрична стрічка лінійно незалежних вагових функцій i -го елемента; T – індекс транспонування.

Підставляючи в (10) вираз (11) для $u^{(i)}$, бачимо, що система рівнянь методу зважених залишків зводиться до системи алгебричних рівнянь для невідомих $\{U\}$ значень функції u у вузлах розбиття. Отриману систему можна записати в загальному вигляді як [1]

$$[K]\{U\} = \{F\}. \quad (12)$$

Тут $\{U\} = [U_1 \dots U_{n_b}]^T$; n_b – кількість вузлів; $[K] = \sum_{e=1}^{n_e} [K^{(e)}]$ – глобальна матриця жорсткості; $[K^{(e)}]$ – матриця жорсткості елемента розбиття; $\{F\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{F^{(e)}\}$ – вектор навантаження; $\{F^{(e)}\}$ – вектор навантаження елемента розбиття.

Матриця $[K]$ і вектор $\{F\}$ мають конкретний вигляд залежно від порядку диференціального оператора L . Система алгебричних рівнянь (12) є нелінійною і може бути розв'язана за допомогою відповідного ітераційного методу [2].

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будемо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації. В рамках запропонованого підходу проводять дискретизацію по часу з кроком $\Delta\tau_n$ тривалості процесу термообробки. Оптимальний розв'язок функції керування на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ шукаємо на множині кусково-лінійних або кусково-постійних функцій. Значення h_{n+1} функції керування h в момент часу τ_{n+1} знаходимо за формулою

$$h_{n+1} = h_n + a_n \Delta\tau_n \text{ або } h_{n+1} = b_n, \quad (13)$$

де a_n , b_n – шукані параметри, які міняються в заданих границях.

Отож, мінімізація функціоналів J_k на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ зводиться до задачі нелінійного програмування пошуку мінімуму відповідної функції однієї змінної $J_k = J_k(a_n)$ або $J_k = J_k(b_n)$ (аргументом якої є параметр a_n або b_n). Параметр a_n або b_n шукають шляхом перебору з множини значень його зміни на основі інформації про величину критерію оптимізації (яку отримують з розв'язку прямої задачі на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$) у разі виконання заданих обмежень. Траєкторія функції керування є ламаною (рис. 1) і добре апроксимує неперервну траєкторію, знаходження якої пов'язано зі значними математичними труднощами методичного характеру. Такий метод пошуку оптимальної зміни функції керування називають "київський віник" [2].

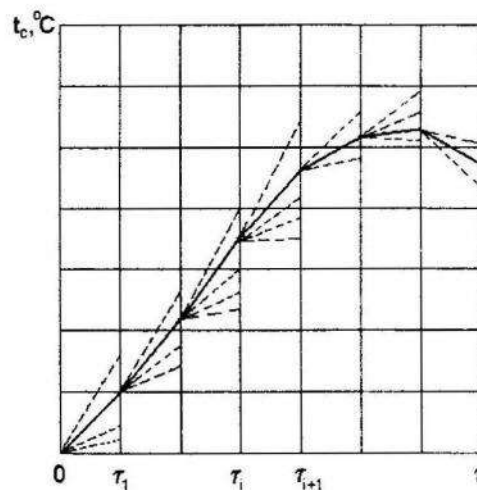


Рис. 1. Числова реалізація алгоритму пошуку оптимальної зміни функції керування методом "київський віник"

Запропоновану методику з оптимального керування тепловими режимами в процесах термообробки можна використовувати при параметричній оптимізації режимів гартування, відпалювання, зварки скляних тіл і забезпечення їхньої міцності.

Список використаної літератури

1. Zienkiewicz O.C. Finite Element Method / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Vol 1. The Basis. – London: Butterwoth Heinemann, 2000.
2. Химмельбау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельбау. – М.: Мир, 1975.

К МЕТОДОЛОГИИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СТЕКОЛЬНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Евгений ИРЗА

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина*

Предложено концепцию построения методики оптимизации тепловых режимов в стекольном производстве. Алгоритм решения сформулированной экстремальной задачи строится по принципу поэтапной параметрической оптимизации, а получение решения прямых задач основывается на методе взвешенных остатков в сочетании с методом конечных элементов. Предложенную методику можно использовать при параметрической оптимизации режимов закалки, отжига, сварки стеклянных тел и обеспечения их прочности.

Ключевые слова: концепция и схема оптимизации, термообработка стеклянных изделий.

TO METHODOLOGY OF OPTIMIZATION THERMAL CONDITIONS AND STRESS STATE IN GLASS INDUSTRY

Yevgen IRZA

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine*

The work proposes a concept of construction the technique of thermal conclusions optimization in glass industry. In addition an algorithm of solution the formulated extreme problem is constructed on the basis of the principle of step-by-step parametric optimization and obtaining the solution of direct problems is based on the method of the finite elements method. The technique proposed can be used for parameter optimization of hardening modes, annealing welding of glass bodies for ensuing their strength.

Key words: the concept and the circuit of optimization, heat treatment of glass products.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках проекту Ф41.2/001

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРУЖНОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ У ШАЙБІ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Іван ЗВІЗЛО, Микола СЛОБОДЯН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розв'язано задачу про двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з коловою межею поділу матеріалів і наскрізною радіальною прямолінійною тріщиною, береги якої гладко контактують по всій її довжині на одній із основ пластини. Через контакт берегів тріщини розв'язок задачі шукали у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини (класична теорія). Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту та горизонтальних переміщень на тріщині, яку розв'язували за допомогою числового методу механічних квадратур. Побудовано графічні залежності контактної зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль при різних геометричних і механічних параметрах задачі.

Ключові слова: згин, кусково-однорідна пластинка, колова межа, плоска задача, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Вступ. Конструктивні пластинчасті елементи широко застосовують у машинобудуванні та інших галузях техніки. З технологічних міркувань вони можуть містити кругові включення, де під час виготовлення чи в процесі експлуатації у них можуть виникнути тріщиноподібні дефекти. Під дією зовнішнього згинального навантаження поблизу тріщиноподібних дефектів виникає висока концентрація напружень, що зменшує їхню міцність.

Задачі згину пластин, які містять тріщини, досліджувало багато науковців з використанням класичної та уточнених теорій згину пластин. Узагальнення цих результатів і методи їхнього розв'язування подано в монографіях Л.Т. Бережницького, М.В. Делявського, В.В. Панасюка [1], С.А. Калосєрова [2], А.С. Космодаміанського, Г.М. Іванова [3], Л.П. Мазурака, Л.Т. Бережницького [4], І.А. Прусова [5, 6], М.П. Саврука [7], Ю. Мураками [8], В.К. Хижняка, В.П. Шевченка [9] та ін.

При згині пластини зрозуміло, що береги наскрізної тріщини будуть контактувати на одній із основ пластини. Контакт берегів тріщини за згину пластини у тривимірному формулюванні досліджували R.S. Alwar, K.N. Ramachander Nambissan [10], І.П. Шацький [11], а дещо пізніше M.J. Young, C.T. Sun [12], аналітично розв'язали задачу про згин нескінченної ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною з

урахуванням контакту її берегів. В.К. Опанасович, Р.Г. Селіверстов [13], F.S. Heming [14], P.F. Joseph, F. Erdogan [15], Y.W. Kwon [16], Murthy M., Raju K., Viswanath S. [17] досліджували контакт берегів тріщини по лінії на одній із основ пластини з врахуванням уточнених теорій згину пластин. І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій, Н. Маковійчук [18-22] розглядали задачі про згин безмежної пластини, півплощини, які містять одну, дві або систему тріщин, береги яких контактують, і контакт берегів тріщин в оболонках. У працях В.К. Опанасовича, М.С. Слободяна [23-25] досліджено згин безмежної пластини з круговим отвором або жорсткою круговою шайбою з однією або двома наскрізними прямолінійними тріщинами, береги яких контактують. В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук [26] опрацьовували задачу про згин пластини з тріщиною, розміщеною вздовж дуги кола, враховуючи контакт берегів тріщини на одній із основ пластини. J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.I. Sleplyan [27, 28], В.К. Опанасович [29] досліджували задачу про згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною, вважаючи, що її береги можуть контактувати по висоті пластини. У працях В. Опанасовича, І. Яцика [30] розв'язано задачу про згин безмежної пластини з тріщинами, береги яких контактують по висоті пластини, з використанням теорії Рейсснера для згину пластин. В.К. Опанасович, І.С. Звізло [31-33] досліджували задачі про двосторонній згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною або коловою межею поділу матеріалів та однією або двома тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії на одній із основ пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка складається з пластини з круговим отвором радіуса R , в який впає шайба того самого радіуса. Вважаємо, що пластина перебуває під дією розподілених згинальних моментів на нескінченності. Крім того, в шайбі наявна одна радіальна наскрізна прямолінійна тріщина, береги якої під дією зовнішнього навантаження приходять у гладкий контакт по лінії на одній з основ пластини, причому береги тріщин були вільні від зовнішнього навантаження. Потрібно визначити напружено-деформований стан пластини.

У середній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\bar{y}\bar{z}$ з початком координат у центрі кругової шайби, спрямувавши вісь $O\bar{z}$ перпендикулярно до серединної площини. З тріщиною завдовжки $2l$ зв'яжемо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат у центрі тріщини, спрямувавши вісь O_1x_1 по ній. Область у середині шайби позначимо через $S_1(S^+)$, зовні – $S_2(S^-)$. Будемо користуватись полярною системою координат r, θ з полюсом у точці O і полярною віссю Ox . Відрізок дійсної осі $O_1x_1y_1$, для якого $|x_1| < l$, позначимо L_1 , x_{01} – координата центру тріщини у глобальній системі координат Oxy . Граничним значенням відповідних величин при $y_1 \rightarrow \pm 0$ або $r \rightarrow R \pm 0$ будемо приписувати значки “+” і “–”, відповідно. Параметрам, пов'язаним

із шайбою, будемо приписувати індекс "1", а для матриці – індекс "2". Надалі індекс j набуває значень 1 і 2.

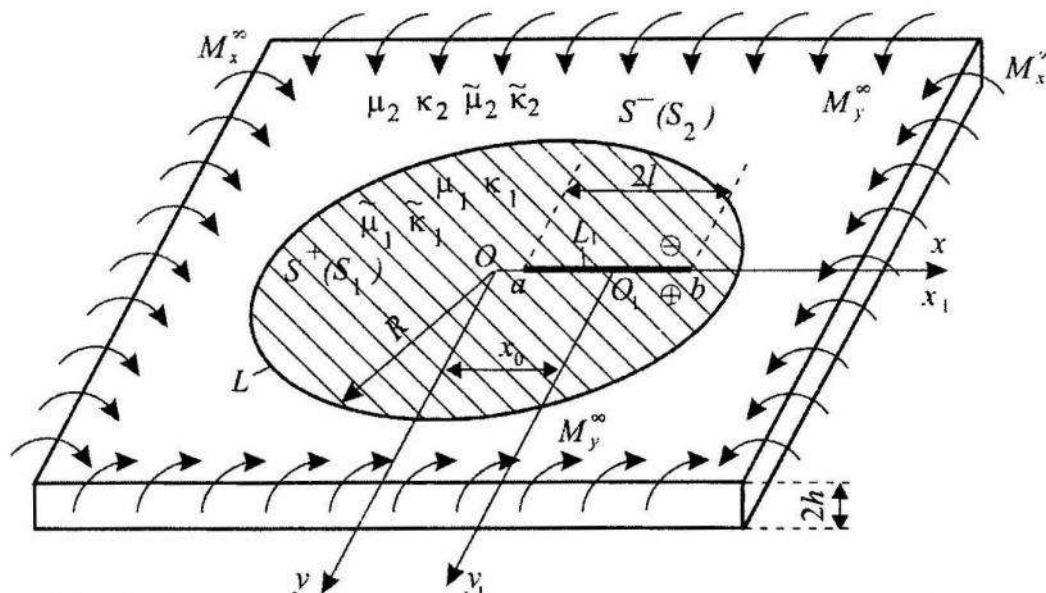


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Під дією згинальних моментів M_x^∞ і M_y^∞ береги тріщин контактуватимуть, тоді розв'язок задачі розбиваємо на дві задачі: плоску задачу та задачу згину, де користуємось класичною теорією згину пластин.

Згідно з формулюванням задачі отримали такі крайові умови:

$$\sigma_{y_1 y_1}^{(1)\pm} = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1 y_1}^{(1)\pm} = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (1)$$

$$P_{y_1}^{(1)\pm} = 0, \quad M_{y_1}^{(1)\pm} = hN, \quad \left[\partial_{x_1} v_P^{(1)} \right] + h \left[\partial_{x_1 y_1}^2 w^{(1)} \right] = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (2)$$

$$P_r^{(1)} = P_r^{(2)}, \quad M_r^{(1)} = M_r^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \partial_r w^{(1)} = \partial_r w^{(2)}, \quad \text{на } L, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)}, \quad u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)}, \quad \text{на } L, \quad (4)$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{y_1 y_1}^{(j)}, \sigma_{x_1 y_1}^{(j)}$ і $\sigma_{rr}^{(j)}, \sigma_{r\theta}^{(j)}$ – компоненти тензора напружень; $u_P^{(j)}, v_P^{(j)}$ і $u_{rP}^{(j)}, u_{\theta P}^{(j)}$ – компоненти вектора переміщення точки у плоскій задачі; $P_{y_1}^{(j)}$ і $P_r^{(j)}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; $M_{y_1}^{(j)}$ і $M_r^{(j)}$ – згинальний момент; $w^{(j)}$ – прогин пластини. Квадратні дужки у формулі (2) означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

Розв'язок задачі. Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [34] і класичної теорії згину пластин [6], аналогічно зроблено у [33],

розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано системи сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної площини у задачі згину $Y(\eta)$ та стрибків переміщень на берегах тріщин у плоскій задачі $G(\eta)$

$$\int_{-1}^1 \{K(\eta, \varepsilon) + L(\eta, \varepsilon)\} Y_1(\eta) d\eta = c', \quad \int_{-1}^1 \{R(\eta, \varepsilon) + S(\eta, \varepsilon)\} G_2(\eta) d\eta = 0, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \{(L(\eta, \varepsilon) - K(\eta, \varepsilon)) Y_2(\eta) + 2(R(\eta, \varepsilon) + S(\eta, \varepsilon)) G_1(\eta)\} d\eta = P(\varepsilon), \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} K(\eta, \varepsilon) = & -\frac{1}{2\pi\tilde{\mu}_1} \left\{ \frac{\eta}{2\lambda^2} \left(\tilde{D}_{21}(1 - \tilde{\kappa}_1) + \tilde{D}_{61} \frac{\lambda^2}{X^2} \right) - \tilde{\kappa}_1 \left(\frac{1}{T - X} + \frac{\tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 T}{T_1} \right) - \right. \\ & - \tilde{A}_4 \left(\frac{\lambda^2}{T_1^2} \left(\frac{\lambda^2}{T} - T \right) - \frac{1}{T} \right) + \frac{2\lambda^2 \tilde{A}_4 T X}{T_1^3} \left(\frac{\lambda^2}{T} - T \right) + \\ & + \left. \left(\frac{\lambda^2}{X^2} \left(\frac{\tilde{A}_3 X}{T_1} - \tilde{A}_4 \left(-\frac{1}{T} + \frac{\lambda^2 (3TX - \lambda^2)}{T_1^3} \left(\frac{\lambda^2}{T} - T \right) \right) \right) - \frac{\tilde{\kappa}_1}{T - X} \right) \right\}, \\ L(\eta, \varepsilon) = & \frac{1}{2\pi\tilde{\mu}_1} \left\{ \frac{\lambda^2 \tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1}{T_1^2} \left(\frac{\lambda^2}{T} - T \right) - \frac{\tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1}{T} + (T - X) + \right. \\ & + \frac{\tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 T}{T_1} + X \left(\frac{1}{(T - X)^2} - \frac{\tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 T^2}{T_1^2} \right) - \frac{T}{(T - X)^2} + \\ & + \frac{\tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 \lambda^2 T}{X^2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{TX}{T_1^2} \right) + 0.5\eta\lambda^2 \left(\tilde{D}_{21}(1 - \tilde{\kappa}_1) + \frac{\tilde{D}_{61}\lambda^2}{X^2} \right) \Bigg\}, \\ R(\eta, \varepsilon) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{A_4 \eta}{\lambda^2 (1 - A_4)} \left(2A_4 + (A_4 - 1) \frac{\lambda^2}{X^2} \right) + \frac{A_4}{T} \left(1 + \frac{\lambda^2}{X^2} \right) + \right. \\ & + \frac{2}{T - X} + \frac{A_2 \lambda^2}{X T_1} - A_1 \left(\frac{T}{T_1} + \right. \\ & + \left. \frac{\lambda^2}{T_1^2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{X^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{T} - T \right) - 2\lambda^2 T \left(X - \frac{\lambda^2}{X} \right) \left(\frac{\lambda^2}{T} - T \right) \frac{1}{T_1^3} \right) \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\eta, \varepsilon) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{A_4}{T} + \frac{1}{T-X} - 1 - A_4 \left(\frac{\lambda^2}{T_1^2} (\lambda^2 T^{-1} - T) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(1 + \frac{\lambda^2}{X^2} \right) \frac{T}{T_1} - \frac{T^2}{T_1^2} \left(X - \frac{\lambda^2}{X} \right) \right) \right\} + A_4 \eta \lambda^2 (1 - A_4)^{-1} \left(2A_4 + \frac{\lambda^2}{X^2} (A_4 - 1) \right) \Bigg\}, \\
P(\varepsilon) &= -\frac{\Gamma_2}{\tilde{\mu}_1} \left\{ \frac{1 - \tilde{g}^{-1} \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_4} (1 - \tilde{\kappa}_1) + (1 + \tilde{g} \tilde{A}_4) \right\}, \\
T &= X_0 + \eta, \quad X = X_0 + \eta, \quad X_0 = x_0/l, \quad \eta = x_1/l, \quad \varepsilon = x_1/l, \\
\rho &= \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty}, \quad \tilde{n} = \frac{E_2}{E_1}, \quad \lambda = \frac{R}{l}, \quad T_1 = \bar{X}T - \lambda^2, \quad \mu_1 = \frac{1}{2(1+v_1)}, \quad \mu_2 = \frac{\tilde{n}}{2(1+v_2)}, \\
\kappa_j &= \frac{3-v_j}{1+v_j}, \quad \tilde{\kappa}_1 = \frac{3+v_j}{1-v_j}, \quad \tilde{\mu}_j = \frac{1}{2D_j(1-v_j)}, \quad D_1 = \frac{2}{3(1-v_1^2)}, \quad D_2 = \frac{2\tilde{n}}{3(1-v_2^2)}, \\
A_1 &= \mu_1 + \mu_2 \kappa_1, \quad A_2 = \mu_2 + \mu_1 \kappa_2, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2, \\
g &= -A_1/A_2, \quad \tilde{g} = -\tilde{A}_1/\tilde{A}_2, \quad A_4 = (\mu_2 - \mu_1) A_1^{-1}, \quad \tilde{A}_4 = (\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1) \tilde{A}_1^{-1}, \\
A_3 &= A_2^{-1} (\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1), \quad \tilde{A}_3 = \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1), \quad A_5 = \mu_2 A_1^{-1} (1 + \kappa_1), \\
\Gamma_2 &= -\frac{1+\rho}{4D_2(1+v_2)}, \quad D_3 = \frac{1-A_3 g^{-1}}{1-A_4^2}, \quad \tilde{D}_{31} = \frac{\tilde{A}_4^2(1-\tilde{\kappa}_1)}{1-\tilde{A}_4}, \quad \tilde{D}_{61} = \tilde{A}_4(\tilde{\kappa}_1 - 1), \\
y(x) E_1 h^3 / M_y^\infty &= Y(x) = Y_1(x) + iY_2(x), \\
y(x) &= (1 + \tilde{\kappa}_1)^{-1} \left[\partial_x w^{(1)} + i \partial_y w^{(1)} \right], \\
\frac{h^2 g'(x)}{M_y^\infty} &= G(x) = G_1(x) + iG_2(x), \quad g'(x_1) = \frac{2\mu_1}{i(1+\kappa_1)} \left[\partial_{x_1} (u_P + i v_P) \right].
\end{aligned}$$

З крайової умови (2) отримаємо

$$G_1(\eta) + \frac{1 + \tilde{\kappa}_1}{(1 + \tilde{\kappa}_1)(1 + v_1)} Y_2(\eta) = 0. \quad (7)$$

Систему рівнянь (5)-(7) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_1^1 Y(\eta) d\eta = 0, \quad \int_1^1 G(\eta) d\eta = 0, \quad \int_1^1 \eta Y_2(\eta) d\eta = 0, \quad (8)$$

де перші дві умови виражають однозначність кутів повороту у задачі згину та однозначність переміщень у плоскій задачі, а остання - однозначність

прогину при обході контура тріщини. Умови ідеального механічного контакту на коловій межі поділу матеріалів (3)-(4) вдалося задовольнити аналітично.

Зведене контактне зусилля між берегами тріщини обчислимо за формулою

$$N^* = \frac{hN}{M_y^\infty} = 2 \int_{-1}^1 \{R(\eta, \varepsilon) + S(\eta, \varepsilon)\} G_1(\eta) d\eta.$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КИМ) $K = K_1 - iK_2$ та зусиль (КІЗ) $k = k_1 - ik_2$ можна обчислити за формулами [7]

$$k = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)g'(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)}/l,$$

$$K = \mp 4E_1 h^3 (3 + \nu_1) (3(1 - \nu_1^2))^{-1} \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)y(x)).$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Система сингулярних інтегральних рівнянь (5)-(8) розв'язана чисельно з використанням методу механічних квадратур [35, 36] при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

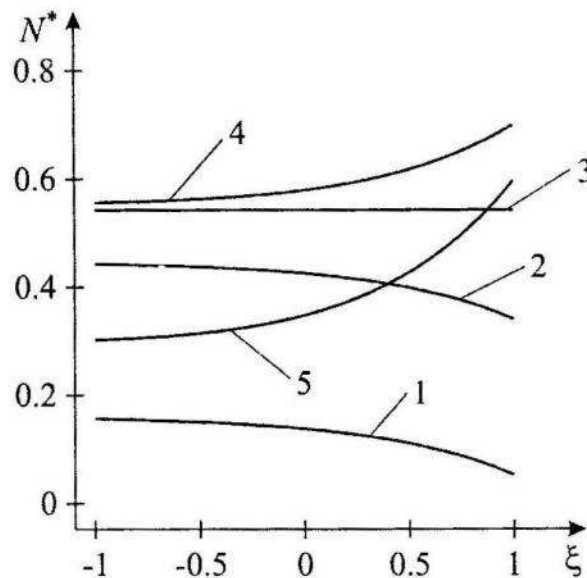


Рис. 2. Графічна залежність контактної зусилля N^* між берегами тріщини при різних $\beta = \lg(E_1/E_2)$

На рис. 2 зображено графічну залежність приведенного контактної зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати

$\xi = x_1/l$ при $\rho = 1$, $\lambda = 5$, $X_0 = 3$. Крива 1 побудована при $\beta = -1$, крива 2 – при $\beta = -0.3$, крива 3 – при $\beta = 0$, крива 4 – при $\beta = 0.3$, крива 5 – при $\beta = 1$. При $\beta < 0$ величина контактної зусилля є максимальною у вершині a ($\xi = -1$), а при $\beta > 0$ – максимальна у вершині b ($\xi = 1$), поблизу колової межі поділу матеріалів. При $\beta = 0$ отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини у пластині.

На рис. 3 побудовано графічну залежність КІМ $K_1^* = K_1 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ від $\beta = \lg \frac{E_1}{E_2}$ при $\lambda = 4$, $\rho = 1$. Криві 1 побудовані при $X_0 = 0$, криві 2 – при $X_0 = 0.3$, криві 3 – при $X_0 = 1.3$, криві 4 – при $X_0 = 2$. При $\beta < 0$ КІМ у вершинах тріщини a та b зростають із збільшенням β . При $\beta > 0$ величина КІМ у вершині тріщини b є більшою, ніж у вершині a . Крім того, при наближенні вершини тріщини b до колової межі поділу матеріалів при $\beta > 0$ КІМ у ній збільшуються.

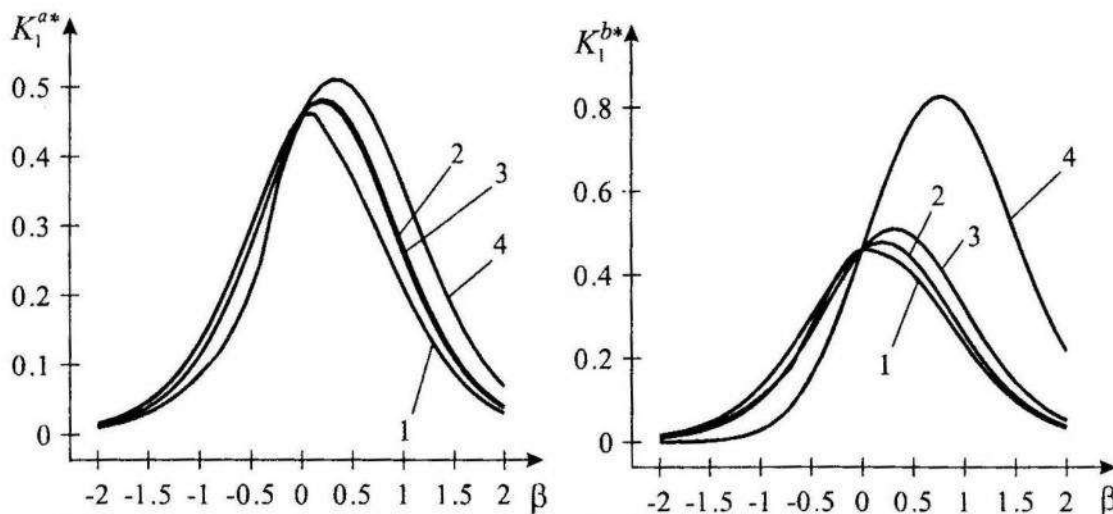


Рис. 3. Графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів від β при різних значеннях $X_0 = x_0/l$

Зауважимо, що зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $k_1^* = h k_1 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ і моментів K_1^* пов'язані між собою залежністю $k_1^* / K_1^* = 3(1 + \nu_1) / (3 + \nu_1)$, тому графічні залежності для k_1^* не подаємо, а $k_2^* = 0$ і $K_2^* = 0$.

Список використаної літератури

1. *Бережницький Л.Т.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка. – 1979.
2. *Калоеров С.А.* Изгиб многосвязных анизотропных плит с трещинами / С.А. Калоеров // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – № 15. – С. 22-29.
3. *Космодамианский А.С.* Изгиб тонких многосвязных плит. / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк: ДонГУ, 1973.
4. *Мазурак Л. П.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. / Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницький. – К.: Наук. думка, 1990.
5. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. / И.А. Прусов – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1962.
6. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит. / И.А. Прусов – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.
7. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. / М.П. Саврук – К.: Наук. думка, 1988.
8. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений* / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир. – 1990, Т. 1, 2.
9. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко – Донецк: Изд-во Донец. ун-та. – 1980.
10. *Alwar R.S.* Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R.S. Alwar, K.N. Ramachandran Nambissan // Engineering Fracture Mechanics. – 1983. – Vol. 17. – No. 4. – P. 323-333.
11. *Шацький І.П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
12. *Young M.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.
13. *Опанасович В.* Вплив контакту берегів двох співвісних тріщин на напружений стан трансверсально-ізотропної пластини в умовах чистого згину / В. Опанасович, Р. Селіверсов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 152-157.
14. *Heming F. S. Jr.* Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate / F.S. Jr. Heming // International Journal of Fracture. – 1980. – Vol. 16. – No. 4. – P. 289-304.

15. Joseph P.F. Bending of thin Reissner plate with a through crack / P.F. Joseph, F. Erdogan // Journal of Applied Mechanics. – 1991. – Vol. 58. – P. 842-846.
16. Kwon Y.W. Finite element analysis of crack closure in plate bending / Y.W. Kwon // Computers and Structures. – 1989. – Vol. 32. – No. 6. – P. 1439-1445.
17. Murthy M. On the bending stress distribution at the tip of a stationary crack from Reissner's theory / M. Murthy, K. Raju, S. Viswanath // International Journal of Fracture. – 1981. – Vol. 17. – P. 537-552.
18. Шацкий И.П. Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2000. – № 31. – С. 91-97.
19. Шацкий І. Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин / І. Шацький, Т. Даляк // Машинознавство. – 2000. – № 1. – С. 27-30.
20. Шацкий І. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. Львів: Каменяр, 2000. – Т. 2. – С. 51-54.
21. Шацкий І.П. Граничний стан напівнескінченної пластини з крайовою тріщиною за згину з розтягом / І.П. Шацький, В.В. Перепічка // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40. – № 2. – С. 73-77.
22. Шацкий И.П. Равновесие пологой сферической оболочки с учетом контакта берегов трещины при изгибе / И.П. Шацкий, Н.В. Маковийчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 146-150.
23. Опанасович В. К. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2005. – Вип. 1. – С. 85-89.
24. Опанасович В.К. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.
25. Опанасович В. Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують / В. Опанасович, М. Слободян // Вісник Львівського державного аграрного університету. – 2007. – № 8. – с. 75-87.
26. Божидарнік В.В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з врахуванням контакту її берегів: Проблеми прочності / В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук. – 2006, № 5 (383). – С. 135-141.

27. *Dempsey J.P.* Closure of a through crack in a plate under bending. / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.L. Slepyan // *International Journal of Solids and Structures*. – 1998. – Vol.35. – P. 4077-4089.
28. *Slepyan L.I.* Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.I. Slepyan, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727-1749.
29. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // *Наукові нотатки Луцького технічного університету*. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
30. *Опанасович В.* Визначення критичного навантаження за згину пластини Рейснера з наскрізними тріщинами та з урахуванням контакту їхніх берегів / В. Опанасович, І. Яцик // *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: наук. зб.; за заг. ред. В.В. Панасюка*. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 155–160.
31. *Опанасович В.* Изгиб кусочно-однородной изотропной пластины с прямолинейной трещиной, параллельной линии спая, с учетом контакта ее берегов / В.К. Опанасович, И.С. Звизло // *Теоретическая и прикладная механика. Научно-техн. сборник*. – 2001. – С. 88-94.
32. *Опанасович В.* Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звизло, І.М. Яцик // *Вісн. Дніпропетровського ун-ту*, 2007. *Механіка*. Вип. 11, том 2. № 2/2. С.141-148.
33. *Опанасович В.* Двосторонній згин ізотропної кусково-однорідної пластини з коловою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з урахуванням контакту берегів / Віктор Опанасович, Іван Звизло // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць*. Львів: Каменяр. – 2009. – Вип. 8. – С. 63-78.
34. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1966.
35. *Панасюк В. В.* Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976.
36. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів, 2007.

**ДВУОСНЫЙ ИЗГИБ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ
ПЛАСТИНЫ С УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ШАЙБОЙ И
РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ВНУТРИ ЭТОЙ ШАЙБЫ С
УЧЕТОМ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ****Виктор ОПАНАСОВИЧ, Иван ЗВІЗЛО, Николай СЛОБОДЯН***Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Исследовано задачу об изгибе кусочно-однородной изотропной пластины с круговой шайбой и радиальной трещиной внутри шайбы с учетом гладкого контакта берегов трещины. Используя метод теории функций комплексного переменного, решение задачи приведено к системе сингулярных интегральных уравнений на трещине, которая решена численно. Проведен численный анализ задачи.

Ключевые слова: трещина, изгиб, плоская задача, шайба, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

**BILATERAL BENDING OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS
ISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR PLATE AND RADIAL
CRACK INSIDE THE WASHER WITH TAKING INTO ACCOUNT
CONTACT ITS SHORES****Viktor OPANASOVYCH, Ivan ZVIZLO, Mykola SLOBODYAN***Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The problem of bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and radial crack inside the washer with a taking into account the contact crack is investigated. Using the method of complex variable theory, the solution was reduced to the construction of solutions of singular integral equations on the crack, which is solved numerically. The conditions of ideal mechanical contact on a circular boundary materials could satisfy analytically.

Keywords: crack, bending, plane problem, washer, complex potentials, the contact force intensity factors of forces and moments.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНА МЕХАНОЕЛЕКТРОМАГНІТНА ХВИЛЯ В ПОРИСТОМУ НАСИЧЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ В ЗОВНІШНЬОМУ ПОСТІЙНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

Софія ТВАРДОВСЬКА

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем
механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Дж. Дудаєва, 15 79005 Львів, Україна*

На основі системи лінеаризованих рівнянь електромагнітної механіки пористого насиченого розчином електроліту середовища у зовнішньому постійному електричному полі проведено дослідження параметрів стаціонарної плоскої поперечної механоелектромагнітної хвилі залежно від характеристик поля та середовища. Отримано та проаналізовано відповідне дисперсійне рівняння. Зокрема з'ясовано, що для практики геофізичних досліджень вплив електричного поля на поперечні хвилі несуттєвий. Електрокінетична активність середовища (концентрація порового розчину) може вагомо впливати на коефіцієнти загасання поперечної механічної та параметри електромагнітної хвиль. Подано результати відповідних кількісних досліджень.

Ключові слова: попереча хвиля, механоелектромагнітна хвиля, пористе насичене середовище.

Вступ. Останнім часом у науковій літературі приділяють значну увагу вивченню ефектів механоелектромагнітної взаємодії в пористих насичених тілах [1, 2, 3]. Ефекти такої взаємодії пов'язують здебільшого з приконтактними явищами в околі границі розділу скелет-порова рідина, а саме з наявністю там подвійного електричного шару. Важливий напрям таких досліджень – вивчення впливу зовнішнього електричного поля на механічні хвилі в пористих тілах. Про можливе практичне використання ефектів такого впливу зазначено в [4, 5]. Зокрема, там згадується про те, що зовнішнє електричне поле сприяє підвищенню інформативності сейсмічних досліджень. У праці [6] з'ясовано, що зовнішнє постійне електричне поле суттєво впливає на параметри поздовжніх хвиль першого і другого роду. Становлять інтерес проведення аналогічних досліджень для поперечної хвилі. Варто зауважити, що як і у працях [5–9], вплив зовнішнього електричного поля на параметри хвильових рухів будемо пов'язувати з силовою взаємодією поля та зарядової системи пористого тіла, яке вважаємо консолідованим. Інші механізми впливу електричного поля на механічні властивості пористих тіл, важливі для слабкоконсолідованих матеріалів [1, 10], не будемо враховувати. В такому наближенні проведемо дослідження ефектів впливу зовнішнього постійного електричного поля та електрокінетичної активності середовища на параметри плоскої поперечної механоелектромагнітної хвилі в пористому безмежному середовищі.

Формулювання задачі. Розглянемо статистично однорідне та ізотропне, віднесене до декартової системи координат (x, y, z) пористе насичене середовище. Матеріал скелета – неферомагнітний діелектрик. Порова рідина – розчин електроліту. Пористість відкрита. В середовищі зовнішніми джерелами створене постійне електричне поле напруженості $\vec{E}_0$ і протікає постійний струм густини $\vec{j}_0 = \sigma_{e0} \vec{E}_0$ та електроосмотичний потік порової рідини зі швидкістю [7] $\vec{v}_0^{(1)} = A^{-1} \alpha_{10} \rho_{e0}^{(1)} f_{E0}^{(1)} \vec{E}_0$. Тут $\sigma_{e0} = P_e \sigma_{e0}^{(1)}$ – коефіцієнт

питомої електропровідності середовища; $P_e = \frac{T_e^2}{\alpha_{10}}$ – параметр пористості [3];

$\sigma_{e0}^{(1)} = zeN_A u C$ – коефіцієнт питомої електропровідності порової рідини; z – валентність іонів електроліту; e – заряд одновалентного іона; N_A – число Авогадро; $u = u_+ + u_-$, u_+ , u_- – рухливості позитивних і негативних іонів; C – молярна концентрація; T_e – електрична звивистість; α_{10} – коефіцієнт пористості у вихідному стані; $A = \alpha_{10} \eta / k_p$, η – коефіцієнт в'язкості порової рідини; k_p – коефіцієнт проникності середовища;

$\rho_{e0}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\alpha_{10}\epsilon^{(1)}C}{fRTk_p}} \frac{zF_f\zeta}{T_g}$ – густина електричного заряду порової рідини у

природному стані: F_f – стала Фарадея; ζ – дзета-потенціал; T_g – звивистість; T – абсолютна температура; $\epsilon^{(1)}$ – діелектрична проникність порової рідини; $\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(2)} \frac{2\alpha_{20}\epsilon^{(2)}}{(2 + \alpha_{10})\epsilon^{(2)} + \alpha_{20}\epsilon^{(1)}}$ – діелектрична проникність

середовища у природному стані [11], $\alpha_{20} = 1 - \alpha_{10}$, $\epsilon^{(2)}$ – діелектрична проникність скелета; $f_{E0}^{(1)} = \frac{\epsilon^{(0)} - \epsilon^{(2)}}{\alpha_{10}(\epsilon^{(1)} - \epsilon^{(2)})}$.

Нехай у середовищі зовнішніми джерелами збуджується поперечна хвиля. За довільного напрямку зовнішнього постійного електричного поля середовище набуває ефективної анізотропії. У цьому випадку поширення поперечної хвилі приводить до збудження поздовжньої, яка впливає на параметри поперечної хвилі. Як видно з кількісної оцінки, такий зворотний вплив для напруженості електричного поля, що використовується на практиці ($E_0 \leq 10^3 \text{ В / м}$), на параметри (амплітуду, фазову швидкість і коефіцієнт загасання) поперечної хвилі малий (значно менший 1%). Це дає підставу розглядати задачі про поширення в середовищі поперечної хвилі

за довільного напрямку зовнішнього електричного поля без урахування ефектів наведеної анізотропії.

Нехай гармонічна поперечна хвиля поширюється вздовж осі Ox і характеризується векторами переміщень порової рідини і скелета $\vec{u}^{(1)}(x, t) = (0, \vec{u}_{(x,t)}^{(1)}, 0)$, $\vec{u}^{(2)}(x, t) = (0, \vec{u}_{(x,t)}^{(2)}, 0)$ та вектором збурення напруженості електричного поля $\vec{E}(x, t) = (0, \vec{E}_{(x,t)}, 0)$.

Ключова лінеаризована стосовно природного стану макроскопічна система рівнянь електромагнітної механіки [7] за нехтуванням впливу електроосмосу, як несуттєвого, у цьому випадку може бути записана в вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_{10}\rho_0^{(1)}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} &= A\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t^2}\right) + \rho_{12}\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}\right) + \alpha_{10}f_{E0}^{(1)}\rho_{e0}^{(1)}E - \\ &\quad - \alpha_{10}\frac{i}{\omega}f_{E0}^{(1)}\sigma_{e0}^{(1)}E_{0x}\frac{\partial E}{\partial x}, \\ \alpha_{20}\rho_0^{(2)}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} &= \alpha_{20}G_f\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - A\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}\right) - \rho_{12}\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}\right) - \\ &\quad - \alpha_{10}f_{e0}^{(1)}\rho_{e0}^{(1)}\left(2\frac{f_{E0}^{(2)}}{f_{E0}^{(1)}} - 1\right)E - \alpha_{20}\frac{i}{\omega}f_{E0}^{(2)}\sigma_{e0}^{(2)}E_{0x}\frac{\partial E}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \sigma_{e0}\mu\frac{\partial E}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \alpha_{10}\mu\gamma_1\rho_{e0}^{(1)}\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\rho_0^{(j)}$ – густина маси порової рідини ($j=1$) та скелета ($j=2$) у природному стані; ρ_{12} – параметр приєднаної маси; ω – циклічна частота; $\sigma_{e0}^{(2)}$ – коефіцієнт питомої електропровідності скелета; $E_{0x} = E_0 \cos \theta$, θ – кут між вектором напруженості електричного поля $\vec{E}_0$ та віссю Ox ; G_f – ефективний модуль зсуву середовища; $f_{E0}^{(2)} = \frac{\varepsilon^{(0)} - \varepsilon^{(1)}}{\alpha_{10}(\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)})}$; μ – магнітна

проникність середовища (приймаємо $\mu = \mu_0$, μ_0 – магнітна стала); γ_1 – коефіцієнт, який відображає відмінність середньої швидкості руху електричного заряду порової рідини від її середньої швидкості руху. Для плоскої хвилі можна записати, що будь-яку шукану функцію $f = (u^{(1)}, u^{(2)}, E)$ системи рівнянь (1) можна подати

$$f(x, t) \sim e^{-ikx + i\omega t}, \quad (2)$$

де $k = \frac{\omega}{v}$, x – компонента хвильового вектора; v – фазова швидкість поширення хвилі.

Система рівнянь (1) тоді набуде вигляду

$$\begin{aligned}\alpha_{10}\rho_0^{(1)}\omega^2 u^{(1)} &= A i \omega (u^{(1)} - u^{(2)}) - \rho_{12}\omega^2 (u^{(1)} - u^{(2)}) - \alpha_{10}f_{E0}^{(1)} \left(\rho_{e0}^{(1)} + \frac{1}{\omega} \sigma_{e0}^{(1)} k E_{0x} \right) E, \\ \alpha_{20}\rho_0^{(2)}\omega^2 u^{(2)} &= \alpha_{20}G_f k^2 u^{(2)} - A i \omega (u^{(1)} - u^{(2)}) + \rho_{12}\omega^2 (u^{(1)} - u^{(2)}) + \\ &+ \alpha_{10}\rho_{e0}^{(1)}f_{e0}^{(1)} \left(2 \frac{f_{E0}^{(2)}}{f_{E0}^{(1)}} - 1 \right) E - \alpha_{20} \frac{1}{\omega} f_{E0}^{(2)} \sigma_{e0}^{(2)} k E_{0x} E, \\ E &= \frac{\alpha_{10}\mu\gamma_1\rho_{e0}^{(1)}\omega^2}{k^2 + i\sigma_{e0}\mu\omega - \varepsilon\mu\omega^2} (u^{(1)} - u^{(2)}).\end{aligned}\quad (2)$$

Виключаємо у цій системі рівнянь за допомогою третього рівняння напруженість електричного поля та переходимо до безрозмірних параметрів

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{kv}{\omega}, \quad r_{j0} = \frac{\alpha_{j0}\rho_0^{(j)}}{\rho_0}, \quad \rho_0 = \alpha_{10}\rho_0^{(1)} + \alpha_{20}\rho_0^{(2)}, \quad \omega_V = \frac{A}{\rho_0}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho_0}, \\ g_e &= \frac{(\alpha_{10}\rho_{e0}^{(1)})^2 \gamma_1 f_{e0}^{(1)}}{\sigma_{e0}A}, \quad R_m = \frac{\sigma_{e0}\mu v^2}{\omega}, \quad G_e = 2 \frac{f_{E0}^{(2)}}{f_{E0}^{(1)}} - 1, \\ \varepsilon_\sigma^{(j)} &= \frac{\sigma_{e0}^{(j)}}{\sigma_{e0}} (j = 1, 2), \quad \varepsilon_\alpha = \frac{\alpha_{20}f_{E0}^{(2)}}{\alpha_{10}f_{E0}^{(1)}}, \quad \varepsilon_E = \frac{\sigma_{e0}E_{0x}}{\rho_{e0}^{(1)}v}.\end{aligned}\quad (4)$$

Отримуємо, враховуючи, що $\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2 \neq 0$

$$\begin{aligned}&\left[\left(r_{10} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} \right) (\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2) + g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m (1 + \varepsilon_\sigma^{(1)} \varepsilon_E \xi) \right] u^{(1)} + \\ &+ \left[\left(i \frac{\omega_V}{\omega} - \varepsilon_{12} \right) (\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2) - g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m (1 + \varepsilon_\sigma^{(1)} \varepsilon_E \xi) \right] u^{(2)} = 0, \\ &\left[\left(i \frac{\omega_V}{\omega} - \varepsilon_{12} \right) (\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2) - g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m (G_e - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\sigma^{(2)} \varepsilon_E \xi) \right] u^{(1)} + \\ &\left[\left(r_{20} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} - \Lambda_G \xi^2 \right) (\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2) + \right.\end{aligned}$$

$$+ g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m \left(G_e - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\sigma^{(2)} \varepsilon_E \xi \right) \Big| u^{(2)} = 0. \quad (5)$$

Зауважимо, що параметр ε_E характеризує вплив зовнішнього постійного електричного поля, а g_e – зарядової системи тіла (електрокінетичної активності) на параметри хвиль.

Дисперсійне рівняння та його аналіз. Дисперсійне рівняння, яке відповідає системі рівнянь (5), набуло вигляду

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(r_{10} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} \right) \left(\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2 \right) + g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m \left(1 - \varepsilon_\sigma^{(1)} \varepsilon_E \xi \right), \\ a_{12} &= \left(i \frac{\omega_V}{\omega} - \varepsilon_{12} \right) \left(\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2 \right) - g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m \left(1 - \varepsilon_\sigma^{(1)} \varepsilon_E \xi \right), \\ a_{21} &= \left(i \frac{\omega_V}{\omega} - \varepsilon_{12} \right) \left(\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2 \right) - g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m \left(G_e + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\sigma^{(2)} \varepsilon_E \xi \right), \\ a_{22} &= \left(r_{20} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} - \Lambda_G \xi^2 \right) \left(\xi^2 + iR_m - \varepsilon\mu v^2 \right) + \\ &\quad + g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m \left(G_e + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\sigma^{(2)} \varepsilon_E \xi \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Рівняння (6) є рівнянням четвертого порядку стосовно безрозмірного хвильового числа ξ за наявності всіх степенів у рівнянні. Відсутність зовнішнього електричного поля ($\varepsilon_E = 0$) приводить до редукції цього рівняння до біквadratного

$$a\xi^4 + b\xi^2 + c = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } a = \Lambda_G \left(r_{10} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} \right),$$

$$\begin{aligned} b &= \left(r_{10} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} \right) \left(iR_m - \varepsilon\mu v^2 \right) \Lambda_G - \left(r_{10}r_{20} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} \right) + g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m \Lambda_G, \\ c &= - \left[\left(r_{10}r_{20} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} \right) \left(iR_m - \varepsilon\mu v^2 \right) + g_e \frac{\omega_V}{\omega} R_m \left(r_{20} + G_e r_{10} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо прийняти $g_e = 0$, то з (6) випливає дисперсійне рівняння для поперечної механічної хвилі у пористому насиченому середовищі

$$\left(r_{10} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega}\right) \Lambda_G \xi^2 + r_{10} r_{20} + \varepsilon_{12} - i \frac{\omega_V}{\omega} = 0. \quad (10)$$

У випадку гірських порід для електричних полів $E_0 \leq 10^3 \text{ В / м}$, характерних для практики геофізичних досліджень, можна прийняти, що параметр ε_E малий. Наприклад, для $\sigma_{e0} = 1 \cdot \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $E_0 = 10^3 \text{ В / м}$, $\rho_{e0}^{(1)} = 10^3 \text{ кг / м}^3$, $v = 3 \cdot 10^3 \text{ м / с}$, отримуємо, що $\varepsilon_E = 3 \cdot 10^{-4} \ll 1$. В такому разі рівняння (6) можна розв'язувати шляхом розкладу безрозмірного хвильового числа ξ за цим параметром

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon_E \xi_1 + \varepsilon_E^2 \xi_2 + \dots \quad (11)$$

Якщо обмежитися першим наближенням, то для визначення ξ_0 отримаємо рівняння (8), а поправку ξ_1 визначаємо за формулою

$$\xi_1 = \frac{\left(\xi_0^2 \Lambda_G - r_{20}\right) \Lambda_G g_e R_m \frac{\omega_V}{\omega} \varepsilon_\sigma^{(1)} \cos \theta}{4a \Lambda_G \xi_0^2 - 2b}. \quad (12)$$

Чотири корені рівняння (8) $\xi_{0m} (m = \overline{1,4})$ описують два типи хвиль, що поширюються вздовж осі Ох і у протилежному напрямі. Цими хвилями є модифіковані механоелектромагнітна взаємодією механічна поперечна та електромагнітна. У нульовому наближенні хвильові числа хвиль одного типу, які поширюються у протилежних напрямках, відрізняються лише знаками. Тому у першому наближенні можна записати, що $\xi_m = \xi_{0m} + \varepsilon_E \xi_{1m}$, ($m = \overline{1,4}$)

$$\xi_{01} = -\xi_{02}, \xi_{03} = -\xi_{04}, \xi_{11} = \xi_{12}, \xi_{13} = \xi_{14}. \quad (13)$$

З цих формул видно, що за фіксованого напрямку зовнішнього електричного поля його вплив на фазову швидкість і коефіцієнт загасання (на дійсну та уявну частину хвильового числа) хвиль, що поширюються у протилежних напрямках, буде протилежним. Якщо поле приводить до зростання фазової швидкості чи коефіцієнта загасання хвилі, яка поширюється у додатному напрямі осі Ох, то для хвилі, що рухається у протилежному напрямі, фазова швидкість чи коефіцієнт загасання будуть зменшуватися. У випадку сильних полів це може призводити до зміни

знака коефіцієнта загасання і хвиля з загасаючої може стати наростаючою. Енергію для цього вона бере від електричного поля.

Як засвідчують кількісні дослідження, для взятих параметрів середовища та зовнішнього електричного поля спричинені ним відносні зміни фазової швидкості та коефіцієнта загасання поперечної хвилі є незначними (становлять менше відсотка).

Аналіз виявив, що більшого кількісного ефекту впливу постійного електричного поля на параметри поперечної механічної хвилі можна досягнути в середовищі, скелет якого – електронний провідник. Для великих концентрацій електроліту (до 1000 моль / м³) та значних полів ($E \approx 10^4 \div 10^5 \text{ В / м}$) зміна напрямку поля на протилежний приводить до зміни фазової швидкості до одиниць відсотків, а коефіцієнта загасання – до десятків відсотків. Такі ефекти можуть вагомо відображатися в резонансних явищах. Однак сказане потребує детальнішого дослідження.

Проведено кількісні дослідження залежності хвильових параметрів від концентрації порового розчину (електрокінетичної активності середовища), пористості та проникності середовища. Під час дослідження залежності хвильових параметрів від пористості та проникності враховували зв'язок цих параметрів між собою та їхній зв'язок з іншими характеристиками середовища. Досліджуючи залежності хвильових параметрів від пористості, приймали [12]

$$k_p = 7.68 \cdot 10^{-8} \alpha_{10}^{\frac{2(3+\gamma)}{2+\gamma}} / \alpha_{20}^{\frac{2}{2+\gamma}}, \gamma = -1.5. \quad (14)$$

Для кількісного дослідження хвильових параметрів від проникності приймали, що [12]

$$k_p^2 T_\Gamma^7 = 10^{-20}, \text{ або } k_p = 10^{-10} / T_\Gamma^{7/2}, T_\Gamma = 1,389 \cdot 10^{-3} / k_p^{2/7}. \quad (15)$$

Характеристики матеріалу середовища для обчислень приймали такими:

$$\begin{aligned} \rho_0^{(1)} &= 1000 \text{ кг / м}^3, & \rho_0^{(2)} &= 2600 \text{ кг / м}^3, & v_0 &= 3670 \text{ м / с}^2, \\ \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}, & G_f &= 10^9 \text{ Па}, & \mu &= 1.56 \cdot 10^{-6}, & F &= 96520, & f &= 2.5, \\ T &= 300 \text{ К}, & \eta &= 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, & z &= 1, & \zeta &= 0.1 \text{ В}, & T_e &= 3, & \rho_{12} &= 100, & R &= 8.314, \\ \sigma_{e0}^{(2)} &= 5 \cdot 10^{-7} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}. \end{aligned}$$

На рис. 1 показано залежність модулів коефіцієнтів загасання поперечної механічної та електромагнітної хвиль від концентрації порового розчину для $\omega = 250 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_{10} = 0.29, 0.30, 0.31$ (криві 1, 2, 3). Спостерігаємо, що модуль коефіцієнта загасання поперечної механічної хвилі дещо зменшується зі збільшенням концентрації. Більш вагомо зі збільшенням концентрації росте модуль коефіцієнта загасання електромагнітної хвилі. Фазова швидкість механічної хвилі практично не залежить від

концентрації, тоді як фазова швидкість електромагнітної хвилі швидко зростає.

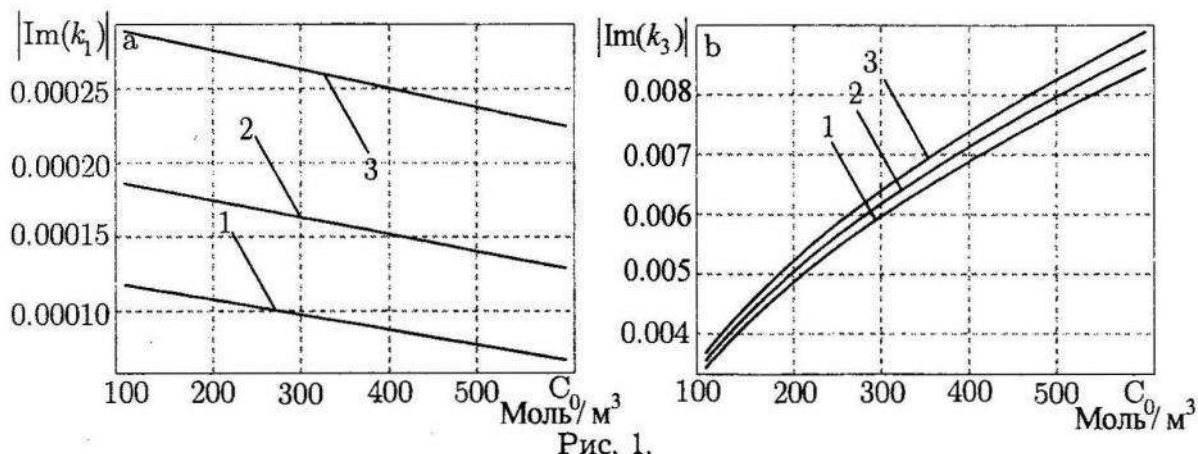


Рис. 1.

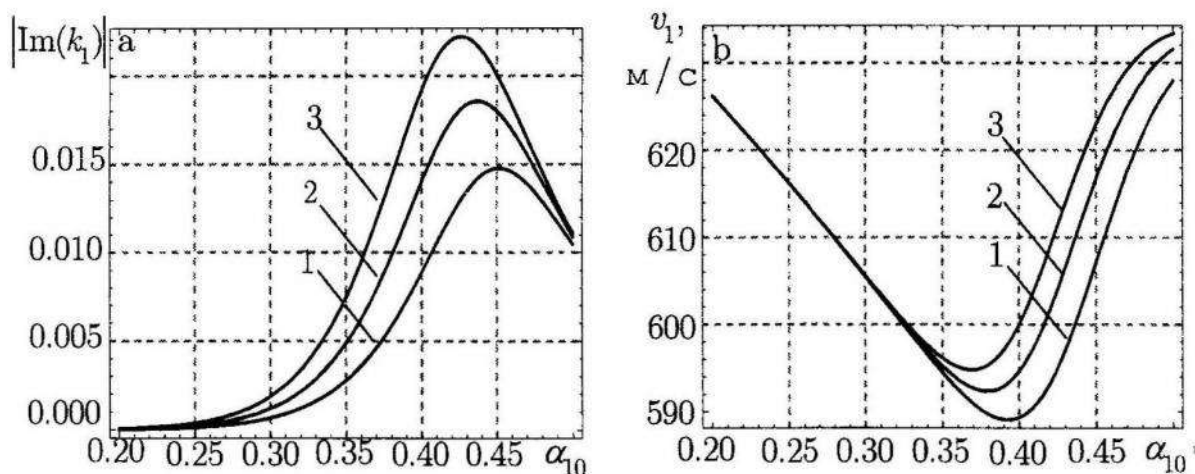


Рис. 2.

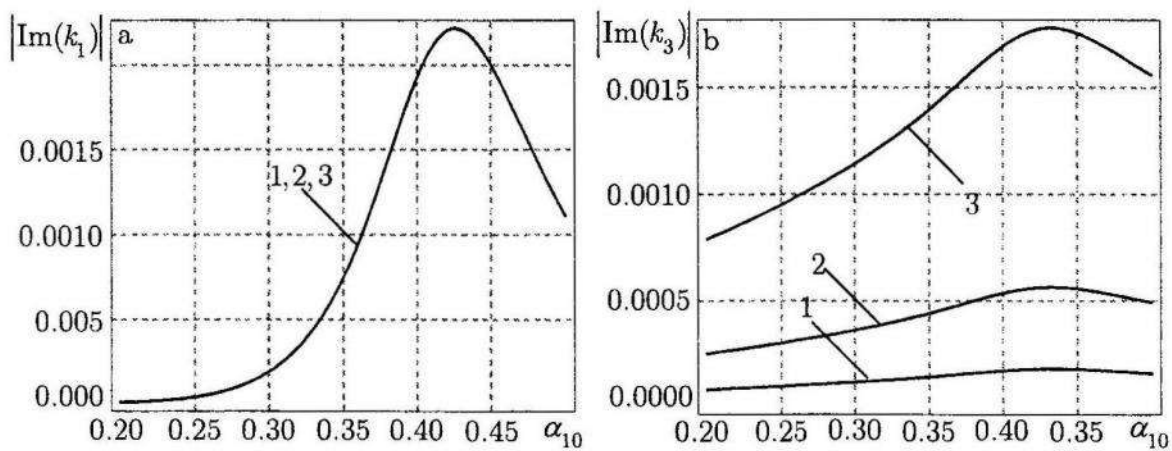


Рис. 3

На рис. 2 зображено залежності модулів коефіцієнтів загасання $|\text{Im}(k_1)|$ та фазової швидкості v_1 від коефіцієнта пористості середовища для $C_0 = 50$ моль / м³ та $\omega = 150, 200, 250$ с⁻¹. Бачимо, що графік цієї залежності має мінімум, положення якого змінюється з частотою.

На рис. 3 показано залежності модулів коефіцієнтів загасання $|\text{Im}(k_1)|$ та $|\text{Im}(k_3)|$ від коефіцієнта пористості середовища для $\omega = 250$ с⁻¹ та $C_0 = 0.1; 1; 10$ моль / м³ (криві 1, 2, 3). Бачимо, що ці залежності мають максимум в області $\alpha_{10} \in [0.1, 0.45]$. Коефіцієнт загасання електромагнітної

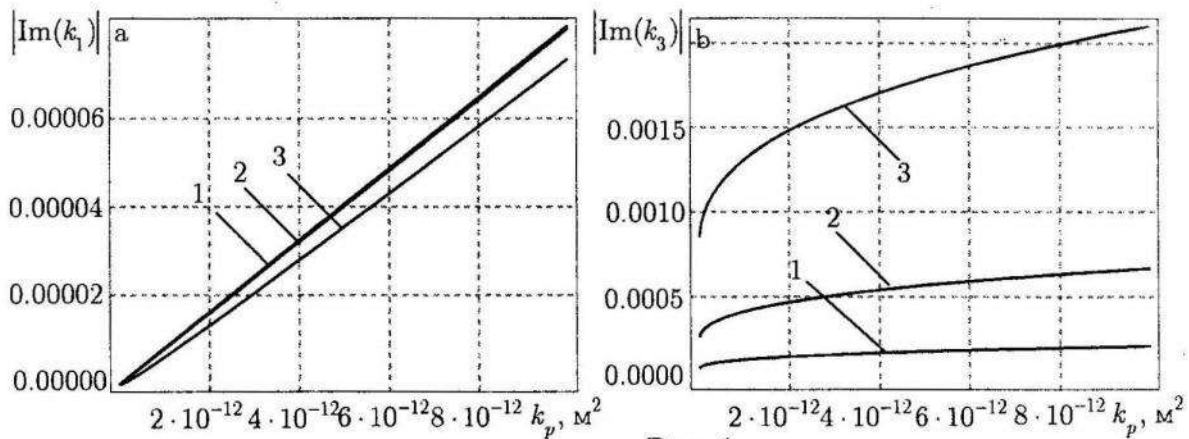


Рис. 4

хвилі залежить від концентрації розчину в усій розглянутій області зміни параметра пористості електроліту. Для механічної хвилі залежність суттєва для пористості в області $\alpha_{10} \in [0.2, 0.35]$, що зображена на рис. 1. Масштаб рис. 3 нівелює цю залежність.

На рис. 4 зображено залежності модулів коефіцієнтів загасання хвиль від коефіцієнта проникності середовища для $\omega = 250$ с⁻¹, $C_0 = 0.1; 1; 10$ моль / м³ (криві 1, 2, 3). Спостерігаємо, що коефіцієнти загасання обох хвиль збільшуються зі збільшенням k_p . Залежність коефіцієнтів загасання від концентрацій протилежна.

Висновки. На підставі рівнянь електромагнітної механіки пористого насиченого середовища у зовнішньому постійному електричному полі довільного напрямку проведено дослідження параметрів поперечних механоелектромагнітних хвиль від напруженості зовнішнього електричного поля, електрокінетичної активності середовища (концентрації порового розчину), пористості та проникності пористого середовища. З'ясовано, що для прийнятих у практиці геофізичних досліджень електричних полів їхнім впливом на поперечну механічну хвилю можна знехтувати.

Коефіцієнти загасання механічної та електромагнітної хвиль суттєво залежать від електрокінетичної активності середовища (концентрації розчину), коефіцієнтів пористості та проникності. Їхня залежність від коефіцієнта пористості має екстремальний характер. Коефіцієнт загасання механічної хвилі чутливий до концентрації порового розчину при низьких пористостях ($\alpha_{10} \in [0.2, 0.35]$). Для пористостей $\alpha_{10} \in [0.4, 0.5]$ його залежність від концентрації несуттєва. Фазова швидкість механічної хвилі практично не залежить від електрокінетичної активності середовища.

Досліджені залежності можуть становити інтерес, зокрема, для практики геофізичних досліджень.

Список використаної літератури

1. Подбережний М. Ю. Особенности взаимодействия многофазных микроструктурированных сред с акустическими и электрическими полями. – Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук./ Подбережний М. Ю. – Новосибирск, 2009.
2. Светов Б. С. К теоретическому обоснованию сейсмoeлектрического метода геофизической разведки / Б. С. Светов // Геофизика. – 2000. – № 1. – С. 28-39.
3. Кобранова В. Н. Петрофизика. / В. Н. Кобранова – М. : Недра, 1986.
4. Основы сейсмoeлектроразведки / О. А. Потапов, С. А. Лизун, В. Ф. Кондрат и др. – М. : Недра, 1995.
5. Способ геофизической разведки. А. с. 1045190 СССР МКИ G 01 V 3/08 / Д. Н. Лящук, А. И. Бойко, В. Н. Бойко, Н. Н. Фрейк (СССР). – № 3371404/18-85; Заяв. 23.12.81; Оpubл. 25.06.1983. Бюл. № 36.
6. Кондрат В. Ф. Вплив зовнішнього електричного поля на параметри механічних хвиль сейсмічних частот у пористих насичених тілах / В. Ф. Кондрат, С. Р. Твардовська // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 10. – С. 56-65.
7. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, Т. С. Нагірний та ін.; під ред. Я. Й. Бурака, Є. Я. Чаплі. – Львів : СПОЛОМ, 2004.
8. Garambois S. Seismoelectric Wave Conversion in Porous Media: Field Measurements and Transfer Function Analysis / S. Garambois, M. Dietrich // Geophysics. – 2001. – Vol. 66, No 5. – P. 1417-1430.
9. Pride S. Electrostatic Wave Properties / S. Pride, M. Haartsen // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1996. – Vol. 100, No 3. – P. 1301-1315.

10. Электросейсмическая активность рыхлых пористых горных пород. / В.А. Куликов, А.К. Манштейн, Б.С. Нефедкин и др. // Труды школы – семинара "Физика нефтяного пласта" 20-24 мая 2002. – С. 95-101.
11. Гачкевич О. Р. Розрахунок ефективних електрофізичних характеристик зволожених пористих матеріалів/ О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Т. В. Голубець // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, №1. – С. 159-171.
12. Добрынин В. М. Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. / В. М. Добрынин – М. : Недра, 1970.

ПОПЕРЕЧНАЯ МЕХАНОЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА В ПОРИСТОЙ НАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ ВО ВНЕШНЕМ ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

София ТВАРДОВСКАЯ

*Центр математического моделирования Института прикладных
проблем механики и математики им. Я. С. Пидстригача НАН Украины,
ул. Дж. Дудаева, 15 79005 Львов, Украина*

На основании системы линеаризованных уравнений электромагнитной механики пористой насыщенной раствором электролита среды во внешнем постоянном электрическом поле проведено исследование параметров плоской поперечной механоэлектромагнитной волны. Получено и проанализировано соответствующее дисперсионное уравнение. Установлено в частности, что для практики геофизических исследований влияние электрического поля на поперечные волны является несущественным. Электрокинетическая активность среды (концентрация порового раствора) может существенно влиять на коэффициенты затухания поперечной механической и параметры электромагнитной волны. Представлены результаты количественных исследований.

Ключевые слова: поперечная волна, механоэлектромагнитная волна, пористая насыщенная среда.

**THE TRANSVERSAL MECHANOELECTROMAGNETIC WAVES IN
POROUS ENVIRONMENT SATURATED BY ELECTROLYTE
SOLUTION IN THE EXTERNAL CONSTANT ELECTRIC FIELD****Sofiya TVARDOVSKA***Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied
Problems of Mechanics and Mathematics ,
D. Dudayeva Str., 15 79005 L'viv, Ukraine*

The investigation of a transverse mechanoelectromagnetic waves, depending on the characteristics of fields and environments are made on the basis of linearized equations of electromagnetic mechanics of saturated porous electrolyte solution in the external environment of constant electric field depending on characteristics of electric field and medium. The corresponding dispersion equation is obtained and analyzed. It was established that for the practice of geophysics research an electric field in transverse waves is negligible. The electrokinetic activity of environment can substantially influence the damping coefficients of transverse mechanical waves and parameters of electromagnetic waves. The results of quantitative research are presented.

Key words: transversal waves, mechanoelectromagnetic waves, porous saturated medium.

Стаття надійшла до редколегії 21.12.2011

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ

Володимир ГУЦАЙЛЮК¹, Георгій СУЛИМ², Ігор ТУРЧИН²

¹Військова технічна академія імені Ярослава Домбровського,
вул. Генерала С. Каліського, 2 00908 Варшава, Польща

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З використанням інтегрального перетворення Лапласа одержано розв'язок задачі теорії пружності про двовимірні коливання пластинки прямокутної форми. Розв'язок одержано у припущенні, що поверхня, де діє навантаження, частково защемлена.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, поздовжні коливання, інтегральне перетворення Лапласа.

Вивчення процесу швидкісного деформування матеріалів є важливим з огляду на широкі можливості його використання в інженерній практиці. Його треба враховувати при оцінюванні динамічної міцності конструкцій під дією імпульсних та ударних навантажень у технологічних умовах експлуатації та під час аварійних чи критичних ситуацій. Детальний аналіз процесу високошвидкісного деформування потрібний також для розробки параметрів технологічних процесів формоутворення та зміцнення елементів конструкцій з використанням високоінтенсивних джерел енергії. Визначальна особливість цих процесів – виявлення динамічних властивостей матеріалів [1], що стосується насамперед теоретичних основ матеріалознавства і, зокрема, дослідження явища утворення дисипативних структур при імпульсному підведенні енергії деформування [2].

Хоча означена проблема стосується складних, геометрично та фізично нелінійних моделей механіки [3], багато важливих закономірностей та ефектів, які передують процесу незворотного деформування, можна виявити та дослідити з використанням лінійної моделі теорії пружності [4].

Розглянемо прямокутну пластинку розміром $2h \times 2l$ по x_1 та y_1 , відповідно, де x_1 та y_1 – декартові координати. З моменту часу $t = 0$ пластинку навантажено нормальними зусиллями $p(t)$, прикладеними до її торців $x_1 = \pm l$, які нерухомо закріплені в напрямі осі y_1 . Граничні поверхні $y_1 = \pm h$ залишаються вільними від навантаження. Введемо у розгляд безрозмірні змінні та величини $x = x_1 / l$, $y = y_1 / l$, $\tau = c_1 t / l$, $x_0 = h / l$, $\kappa^2 = c_1 / c_2 = (\lambda + 2\mu) / \mu$, де c_1 , c_2 – швидкості поширення поздовжніх і

поперечних хвиль у матеріалі пластинки, λ , μ – пружні сталі.

У термінах цих змінних, вважаючи, що до моменту часу $t = 0$ пластинка перебувала в стані спокою, задачу сформулюємо так:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} - (\kappa^2 - 1) \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad (2)$$

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0, \quad u_y = \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = 0; \quad (3)$$

$$u_y(\pm 1, y, \tau) = 0; \quad \sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \pm p(\tau); \quad (4)$$

$$\sigma_{xx}(x, \pm y_0, \tau) = 0; \quad \sigma_{xy}(x, \pm y_0, \tau) = 0, \quad (5)$$

де $\theta(x, y, \tau) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$ – об'ємне розширення; $u_x(x, y, \tau)$, $u_y(x, y, \tau)$ – компоненти вектора пружного переміщення; $\sigma_{ij}(x, y, \tau)$, $\varepsilon_{ij}(x, y, \tau)$ – відмінні від нуля компоненти тензора напруження та тензора деформацій.

З умов (4), враховуючи, що $\theta(\pm 1, y, \tau) = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1}$, одержимо

$$\mu^{-1} \sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \kappa^2 \theta(\pm 1, y, \tau). \quad (6)$$

Застосуємо до рівняння (1) інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною τ та скінчене перетворення Фур'є за змінною x . Враховуючи симетрію задачі, нульові початкові умови (3), співвідношення (6) та умови (4), замість рівняння (1), одержимо

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + s^2) \bar{\theta}_n = (-1)^{n+1} \frac{2\xi_n}{\kappa\mu} \bar{p}(s), \quad (7)$$

де $\bar{\theta}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty \theta(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx$ – зображення за Лапласом і Фур'є, $\xi_n = \pi(2n+1)/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Трансформоване рівняння (2), відповідно, набуде вигляду

$$\frac{d^2 \bar{v}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + \kappa^2 s^2) \bar{v}_n = (1 - \kappa^2) \frac{d\bar{\theta}_n}{dy}, \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{v}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty u_y(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx.$$

Розв'язок рівняння (7), враховуючи, що $\bar{\theta}_n(y, s)$ є парною функцією змінної y , подамо у вигляді

$$\bar{\theta}_n(y, s) = A_n(s) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2\xi_n \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2} \quad (9)$$

$$\text{при } \gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 + s^2}.$$

З урахуванням (9) розв'язок рівняння (8) одержимо у вигляді

$$\bar{v}_n(y, s) = B_n(s) \operatorname{sh}(\gamma_2 y) + \frac{\gamma_1}{s^2} A_n(s) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) \quad (10)$$

$$\text{при } \gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 + \kappa^2 s^2}.$$

Іншу компоненту вектора пружного переміщення

$$\bar{u}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \sin(\xi_n x) \int_0^\infty u_x(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx \quad (11)$$

знайдемо, враховуючи співвідношення $\bar{u}_n = \frac{1}{\xi_n} \left(\bar{\theta}_n - \frac{d\bar{v}_n}{dy} \right)$ у вигляді

$$\bar{u}_n(y, s) = -B_n(s) \xi_n^{-1} \gamma_2 \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - \frac{\xi_n}{s^2} A_n(s) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2\bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2}. \quad (12)$$

Величини $A_n(s)$ і $B_n(s)$ знайдемо з крайових умов (5), які в трансформантах за Лапласом і Фур'є та в термінах знайдених вище виразів набудуть вигляду

$$(\kappa^2 - 2)\bar{\theta}_n + 2\frac{d\bar{u}_n}{dy} = 0, \quad \frac{d\bar{u}_n}{dy} - \xi_n \bar{v}_n = 0, \quad y = \pm y_0. \quad (13)$$

Враховуючи вирази (10)-(12), з умов (13) знайдемо

$$A_n(s) = \frac{s^2(\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1^2 \Delta(\xi, s)}, \quad B_n(s) = \frac{-2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1 \Delta(\xi, s)}. \quad (14)$$

$$\text{Тут } \bar{p}_n(s) = \frac{(-1)^n 2\xi_n (\kappa^2 - 2) \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2},$$

$$\Delta(\xi, s) = 4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0).$$

За відомими $A_n(s)$ і $B_n(s)$ одержимо

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(y, s) &= \left(\frac{1}{(\kappa^2 - 2)\xi_n} + \frac{\xi_n}{\Delta} \left[2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) \right] \right) \frac{\bar{p}_n}{\gamma_1^2}; \\ \bar{v}_n(y, s) &= \gamma_1^{-1} \Delta^{-1} \left[(\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y) \right] \bar{p}_n \end{aligned} \quad (15)$$

Обернення за Лапласом проведено з використанням теореми розвинення [6]. Остаточно для довільної функції навантаження $p(\tau)$ отримали

$$\begin{aligned} u_x(x, y, \tau) &= \frac{4p^*}{\mu} \left(1 - \frac{2}{\kappa^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n^2 \sin(\xi_n x) \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \tilde{\Delta}_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{2\gamma_1 \tilde{\gamma}_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \tilde{\Delta}_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y) + (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_1 y)}{\tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\Delta}_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\}; \\ u_y(x, y, \tau) &= \frac{4p^*}{\mu} \left(1 - \frac{2}{\kappa^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y)}{\gamma_1 \tilde{\Delta}_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y)}{\gamma_1 \tilde{\Delta}_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_1 y) - 2\xi_n^2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y)}{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\Delta}_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\} \cos(\xi_n x). \end{aligned} \quad (16)$$

Тут $\eta_{n,k,1}$, $\eta_{n,k,2}$, $\eta_{n,k,3}$ – відповідно, додатні корені рівнянь

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) = 0 \quad (17)$$

при $\gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 - \eta^2}$, $\gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 - \kappa^2 \eta^2}$, $0 \leq |\eta| \leq \kappa^{-1} \xi_n$;

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \tilde{\gamma}_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) - (\xi_n^2 + \tilde{\gamma}_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) = 0 \quad (18)$$

при $\tilde{\gamma}_2 = \sqrt{\kappa^2 \eta^2 - \xi_n^2}$, $\kappa^{-1} \xi_n < |\eta| \leq \xi_n$;

$$4\xi_n^2 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + (\xi_n^2 + \tilde{\gamma}_2^2) \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) = 0, \quad (19)$$

при $\tilde{\gamma}_1 = \sqrt{\eta^2 - \xi_n^2}$, $|\eta| > \xi_n$;

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(n, k) \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,1}} &= \pm i \eta_{n,k,1} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \right. \right. \\ &+ x_0 \gamma_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \kappa^2 y_0 \gamma_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \\ &\left. - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) / \gamma_1 - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\gamma_2} \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_2(n, k) \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,2}} &= \mp \eta_{n,k,2} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\tilde{\gamma}_2}{\gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) - \right. \right. \\ &- \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\tilde{\gamma}_2} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + x_0 \tilde{\gamma}_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + \kappa^2 y_0 \gamma_1 \times \\ &\times \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2) \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) - \\ &\left. - (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) / \gamma_1 + (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\tilde{\gamma}_2} \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3(n, k) \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,3}} &= \mp \eta_{n,k,3} \left\{ 4\xi_n^2 \left[\frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + \right. \right. \\ &+ \frac{\kappa^2 \tilde{\gamma}_1}{\tilde{\gamma}_2} \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) + y_0 \tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) - \kappa^2 y_0 \tilde{\gamma}_1 \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \times \\ &\times \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2) \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) - (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{y_0}{\tilde{\gamma}_1} \sin(\tilde{\gamma}_1 y_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 y_0) + \\ &\left. + (\xi_n^2 - \tilde{\gamma}_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\tilde{\gamma}_2} \cos(\tilde{\gamma}_1 y_0) \cos(\tilde{\gamma}_2 y_0) \right\}. \end{aligned}$$

Функції $f(\eta, \tau)$ обчислюють з використанням інтегральної згортки

$$f(\eta, \tau) = \int_0^\tau p(\tau - t) \sin(\eta t) dt. \quad (20)$$

Формули (16) дають точний замкнутий розв'язок динамічної задачі теорії пружності для прямокутної пластини за довільної залежності зовнішнього навантаження від часу. За одержаними компонентами вектора переміщення (16) компоненти тензора деформацій і тензора напружень обчислюють за формулами (6).

Розрахунок проводили для пластинки з алюмінієвого сплаву 2024-T3: $E = 6.9$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.85$ г/см³ при $y_0 = 0.3$ та для часової залежності навантаження

$$p(\tau) = p^* (1 - \exp(-\tau_0 \tau))^2, \quad (21)$$

де p^* – розмірна величина (H / m^2); τ_0 – безрозмірний параметр, який визначає час виходу зовнішнього навантаження на усталене значення. Вираз (21) дає змогу узгодити початкові та крайові умови, а також у багатьох випадках досить точно наблизити реальну залежність динамічного навантаження від часу.

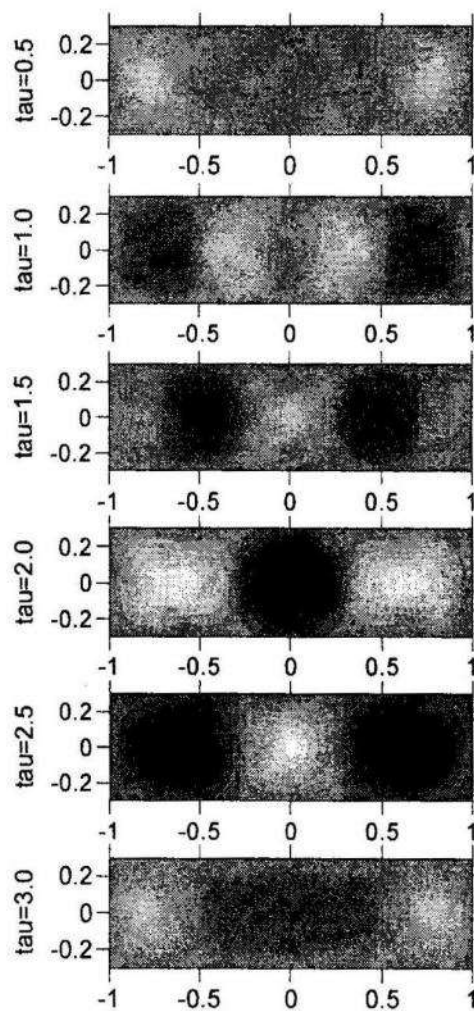


Рис. 1

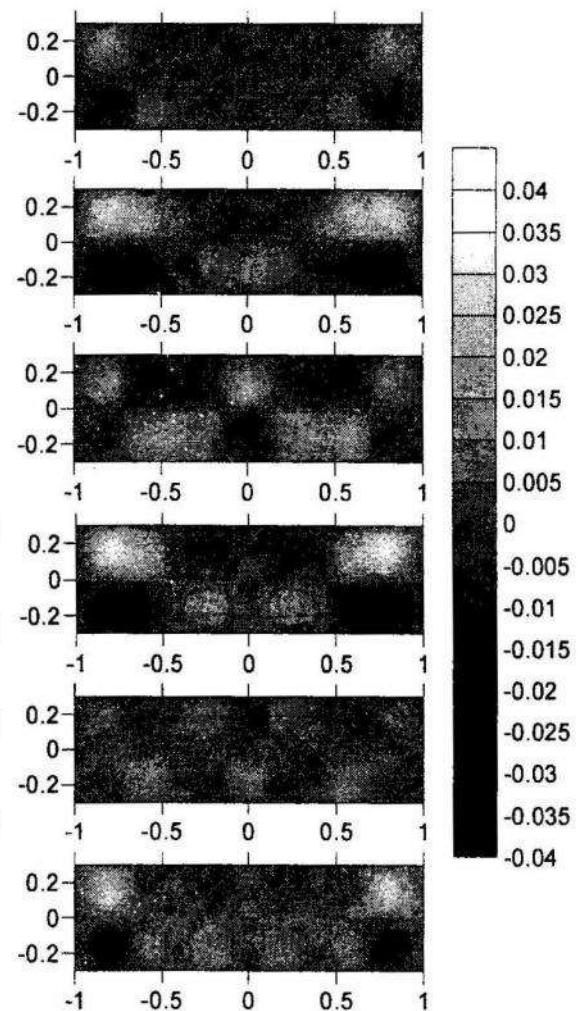


Рис. 2

На рис. 1 показано розподіл у пластинці безрозмірних напружень $\sigma_{yy}(x, y, \tau) / p^*$, а на рис. 2 – розподіл дотичних напружень $\sigma_{xy}(x, y, \tau) / p^*$ у різні моменти часу при $\tau_0 = 5$. Як видно з наведеного, максимальні за

модулем поперечні напруження під час перехідного періоду досягають 40% від усталеного значення p^* для зовнішнього навантаження, а дотичні напруження лише 4%.

На рис. 3 зображено результати розрахунку напружень $\sigma_{xx}(x, y, \tau) / p^*$ у пластинці, одержаних за формулами (16) (ліва частина рисунка) та розрахованих на підставі одновимірної моделі.

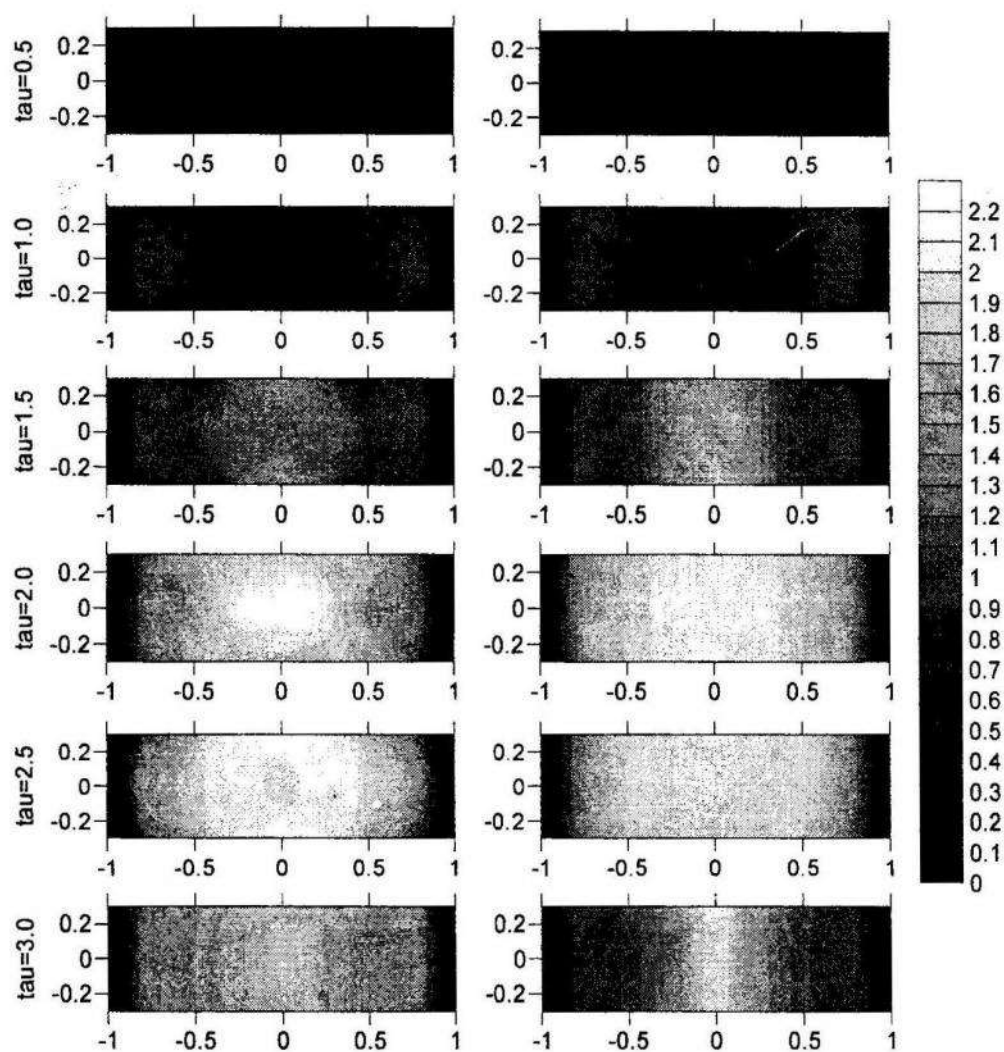


Рис. 3

Як видно з рисунка, похибка розрахунків, одержаних з використанням одновимірної моделі, не перевищує 10% порівняно з двовимірною. Це, враховуючи наведені вище результати для дотичних напружень, дає змогу при інженерних розрахунках використовувати значно простішу одновимірну модель.

Список використаної літератури

1. Божидарник В.В. Елементи теорії пружності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим – Львів, 1994.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон – М., 1955.
3. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach – New York: Amer. Elsevier Publ. Co., 1973.
4. Chausov M.G. Laws of deformations processes and fracture of plastic steel from the point of view of dynamic overloading / M.G. Chausov, A.P. Pylypenko // *Mechanika*. – 2005. – 54. – P. 24-29.
5. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem / V.V. Meleshko // *Appl. Mech. Rev.* – 56, No 1. – P. 33-85.

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ****Владимир ГУЦАЙЛЮК¹, Георгий СУЛИМ², Игорь ТУРЧИН²**¹Военная техническая академия имени Ярослава Домбровского,
ул. Генерала С. Калиского, 2 00908 Варшава, Польша²Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

С использованием интегрального преобразования Лапласа получено решение задачи теории упругости о двумерных колебаниях пластинки прямоугольной формы. Решение получено в предположении, что поверхность, на которой действует нагрузка, частично закреплена.

Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, продольные колебания, интегральное преобразование Лапласа.

DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR A RECTANGULAR PLATE

Volodymyr HUTSAYLYUK¹, Heorgiy SULYM², Ihor TURCHYN²

¹*Military University of Technology
Gen. S. Kaliskiego str., 2 00908 Warsaw, Poland*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Using the Laplace integral transformation we obtain a solution of the elasticity problem of two-dimensional oscillations of rectangular plates. The solution is obtained under the assumption that the loading surface is partially clamped.

Keywords: dynamic problem of elasticity, longitudinal oscillations, Laplace integral transformation.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

Publikacja wykonana w ramach realizacji projektu № N501 056740. Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КУСКОВО-НЕОДНОРІДНИХ ТЕРМО- ЧУТЛИВИХ СФЕРИЧНИХ ТІЛ ЗА ОДНАКОВИХ СТАЛИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПУАССОНА

Борис ПРОЦЮК

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36 79060 Львів, Україна*

Визначено термопружний стан, зумовлений центрально-симетричними температурними полями та поверхневими навантаженнями у шаруватих ізотропних тілах із сферичними поверхнями поділу з урахуванням залежності від температури та координати модулів пружності і коефіцієнтів лінійного розширення. Розв'язання задач термопружності зведено до систем інтегро-алгебричних рівнянь стосовно зведених радіальних напружень. Використано функцію Гріна задачі пружності для однорідної кулі. Числові дослідження наведено для тришарової кулі з функціонально-градієнтним шаром.

Ключові слова: ізотропні термочутливі сферичні тіла, функціонально-градієнтні матеріали, термопружний стан, функція Гріна, інтегро-алгебричні рівняння.

Одновимірні задачі термопружності для одно- та багат шарових сферичних тіл із залежними від температури або координати фізико-механічними характеристиками (ФМХ) розглядали в [1-4, 7, 9-12]. Далі з використанням узагальнених функцій та функції Гріна задачі пружності для однорідної кулі пропонуємо спосіб визначення статичного та квазістатичного термопружного стану в шаруватих тілах сферичними поверхнями поділу з урахуванням залежності від температури і координати модулів пружності, коефіцієнтів лінійного розширення за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона.

Нехай граничні поверхні пружного тіла, яке складається з ідеально контактуючих концентрично розташованих порожнистих ізотропних куль, перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень σ_{01} , σ_{0n} , відповідно, а саме тіло перебуває в температурному полі, яке описується функцією

$$t(r) = t_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} [t_{i+1}(r) - t_i(r)] S(r - r_i), \quad (1)$$

де $t_p(r)$, $(p = \overline{1, n})$ – відомі розподіли температур при $r_{p-1} < r < r_p$; r, r_0 і r_p – віднесені до характерного лінійного розміру l радіальна координата, внутрішній радіус першого і зовнішній радіус p -го шару; n – кількість шарів; $S(\zeta)$ – функція Хевісайда.

Визначимо термопружний стан тіла за припущення, що коефіцієнти Пуассона є однаковими та сталими, а модулі пружності і коефіцієнти лінійного розширення шарів залежать від температури та координати.

Для визначення термопружного стану такого циліндра використаємо рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0 \quad (2)$$

та співвідношення

$$\frac{\sigma_{rr}}{c(r)} = \frac{du}{dr} + 2\nu^* \frac{u}{r} - K_\nu \Phi(r) = \bar{\sigma}_r, \quad \frac{\sigma_{\phi\phi}}{c(r)} = \nu^* \frac{du}{dr} + \frac{1}{1-\nu} \frac{u}{r} - K_\nu \Phi(r) = \bar{\sigma}_\phi, \quad (3)$$

де віднесене до l радіальне переміщення $u(r)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = \frac{K_\nu}{E(t, r)} \frac{d}{dr} [E(t, r) \Phi(r)] - X(r) \quad (4)$$

і граничні умови

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=r_0} = -\sigma_{01}, \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=r_n} = -\sigma_{0n}. \quad (5)$$

Тут

$$X(r) = x(r) \left(\frac{du}{dr} + 2\nu^* \frac{u}{r} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \left(\frac{du}{dr} + 2\nu^* \frac{u}{r} \right) \Big|_{r=r_i-0} \delta(r - r_i), \quad \nu^* = \frac{\nu}{1-\nu},$$

$$K_\nu = \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad c(r) = \frac{E(t, r)}{k_0(1+\nu)}, \quad k_0 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad K_E^{(i)} = \left[1 - \frac{E_i(t_i, r)}{E_{i+1}(t_{i+1}, r)} \right] \Big|_{r=r_i};$$

функції $x(r)$, $E(t, r)$ і $\Phi(r)$ набули вигляду (1), а в межах p -го шару збігаються з

$$x_p(r) = \frac{1}{E_p(t_p, r)} \left[\frac{dE_p(t_p, r)}{dt_p} \frac{dt_p}{dr} + \frac{dE_p(t_p, r)}{dr} \right], \quad E_p(t_p, r) \quad \text{і} \quad \Phi_p(r) =$$

$$= \int_0^{t_p(r)} \alpha_{tp}(\zeta, r) d\zeta; \quad E_p(t_p, r); \quad \alpha_{tp}(t_p, r) \quad \text{і} \quad \nu - \text{модулі пружності, температурні}$$

коефіцієнти лінійного розширення та коефіцієнти Пуассона p -го шару.

Зауважимо, що рівняння (4) отримано внаслідок підстановки (3) в (2), диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій за правилом

$$[\phi(x)\psi(x)]' = \phi'(x)\psi(x) + \phi(x)\psi'(x) \quad (6)$$

та використання операцій некомутативного, але асоціативного множення

$$f(x)\delta(x-a) = f(a+0)\delta(x-a), \quad \delta(x-a)f(x) = f(a-0)\delta(x-a), \quad (7)$$

де $\delta(\zeta)$ – дельта-функція Дірака.

Задачу (4), (5) розв'язуватимемо методом функцій Гріна. Для цього використовуємо отриману як частковий випадок з [5] функцію Гріна

$$\bar{G}(r, \rho) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{r}{\rho^2} S(\rho - r) + \frac{\rho}{r^2} S(r - \rho) + \frac{\rho r}{r_n^3 - r_0^3} \left[\psi_0^{(1)}(\rho) + \frac{k r_0^3}{r^3} \psi_n^{(1)}(\rho) \right] \right\}, \quad (8)$$

тобто функцію, що є розв'язком задачі

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \bar{G}) \right] = -\frac{1}{\rho^2} \delta(r - \rho), \quad (9)$$

$$(d\bar{G}/dr + 2\nu^* \bar{G}/r) \Big|_{r=r_0} = (d\bar{G}/dr + 2\nu^* \bar{G}/r) \Big|_{r=r_n} = 0. \quad (10)$$

Тут і далі $\psi_m^{(i)}(\rho) = 1/k + (-2)^{i-1} r_m^3 / \rho^3$, $m = 0, n$; $k = 0.5(1 + \nu)/(1 - 2\nu)$.

Домножимо (4), (9) відповідно на $r^2 \bar{G}(r, \rho)$, $r^2 u(r)$ і віднімемо отримані рівняння. Інтегруючи різницю в межах від r_0 до r_n , одержуємо

$$u(\rho) = \left\{ r^2 \left(\bar{G} \frac{du}{dr} - u \frac{d\bar{G}}{dr} \right) \right\} \Big|_{r_0}^{r_n} - K_\nu \int_{r_0}^{r_n} \frac{r^2 \bar{G}(r, \rho)}{E(t, r)} \frac{d}{dr} [E(t, r) \Phi(r)] dr + \\ + \int_{r_0}^{r_n} r^2 \bar{G}(r, \rho) X(r) dr, \quad r_0 < \rho < r_n. \quad (11)$$

Після інтегрування частинами у другому доданку (11) і урахування граничних умов (5) і (10) прийдемо до такого співвідношення:

$$u(\rho) = K_\nu \int_{r_0}^{r_n} \frac{d}{dr} \left[r^2 \bar{G}(r, \rho) \frac{1}{E(t, r)} \right] E(t, r) \Phi(r) dr + \int_{r_0}^{r_n} r^2 \bar{G}(r, \rho) X(r) dr + u^y(\rho), \quad (12)$$

де

$$u^y(\rho) = r_0^2 \bar{G}(r_0, \rho) \sigma_{01} / c_1 - r_n^2 \bar{G}(r_n, \rho) \sigma_{0n} / c_n.$$

Підставивши в (12) вирази для $\bar{G}(r, \rho)$, $X(r)$ та зробивши відповідні перетворення з використанням (7), отримаємо

$$u(\rho) = K_\nu \frac{1}{\rho^2} \int_{r_0}^{\rho} r^2 \Phi(r) dr + K_\nu \frac{\rho \psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} \int_{r_0}^{r_n} r^2 \Phi(r) dr +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\rho^2} \int_{r_0}^{\rho} r^3 x(r) \bar{\sigma}_r(r) dr + \rho \int_{\rho}^{r_n} x(r) \bar{\sigma}_r(r) dr \right] + \\
 & + \frac{1}{3(r_n^3 - r_0^3)} \left[\rho \psi_0^{(1)}(\rho) \int_{r_0}^{r_n} r^3 x(r) \bar{\sigma}_r(r) dr + k r_0^3 \rho \psi_n^{(1)}(\rho) \int_{r_0}^{r_n} x(r) \bar{\sigma}_r(r) dr \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_r(r_i - 0) r_i \bar{G}(r_i, \rho) + u^y(\rho). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Для переміщення у p -му шарі ($r_{p-1} < \rho < r_p$) з (13) отримаємо

$$\begin{aligned}
 u_p(\rho) = & K_\nu \rho \{ [\psi_n^{(1)}(\rho) d_{pt} + \psi_0^{(1)}(\rho) d_{pt}^*] / (r_n^3 - r_0^3) + V_p(\rho) / \rho^3 \} + \\
 & + \frac{\rho}{3} \left[\frac{\psi_n^{(1)}(\rho) d_p + \psi_0^{(1)}(\rho) d_p^*}{r_n^3 - r_0^3} + \frac{\chi_{p2}(\rho)}{\rho^3} - \chi_{p1}(\rho) \right] + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{r_i}(r_i) r_i^2 \bar{G}_p^{(i)}(\rho) + u^y(\rho), \quad (14)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 d_{pt} &= \sum_{i=1}^{p-1} V_i(r_i), \quad d_{pt}^* = \sum_{i=p}^n V_i(r_i), \quad V_p(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2 \Phi_p(r) dr; \\
 d_p &= \sum_{i=1}^{p-1} \chi_{i2}(r_i) + k r_0^3 \sum_{i=1}^{p-1} \chi_{i1}(r_i), \quad d_p^* = \sum_{i=p}^n \chi_{i2}(r_i) + k r_n^3 \sum_{i=p}^n \chi_{i1}(r_i), \\
 \chi_{p1}(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} x_p(r) \bar{\sigma}_{rp}(r) dr, \quad \chi_{p2}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^3 x_p(r) \bar{\sigma}_{rp}(r) dr; \\
 \bar{G}_p^{(i)}(\rho) &= \frac{r_i \rho}{3(r_n^3 - r_0^3)} \left[\psi_0^{(1)}(\rho) + \frac{k r_0^3}{r_i^3} \psi_n^{(1)}(\rho) \right] + \frac{1}{3} \begin{cases} \rho / r_i^2, & p \leq i \\ r_i / \rho^2, & p > i \end{cases}
 \end{aligned}$$

Одержимо співвідношення для інших компонент напружено-деформованого стану.

Продиференціювавши (14) за ρ , отримаємо вираз для радіальної деформації

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rp}(\rho) = & K_\nu \left[\frac{\psi_n^{(2)}(\rho) d_{pt} + \psi_0^{(2)}(\rho) d_{pt}^*}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2}{\rho^3} V_p(\rho) \right] + K_\nu \Phi_p(\rho) + \\
 & + \frac{1}{3} \left[\frac{\psi_n^{(2)}(\rho) d_p + \psi_0^{(2)}(\rho) d_p^*}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2\chi_{p2}(\rho)}{\rho^3} - \chi_{p1}(\rho) \right] + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{r_i}(r_i) r_i^2 \bar{e}_p^{(i)}(\rho) + \varepsilon_r^y(\rho), \quad (15)
 \end{aligned}$$

де

$$\bar{e}_p^{(i)}(\rho) = \frac{r_i}{3(r_n^3 - r_0^3)} \left[\psi_0^{(2)}(\rho) + \frac{kr_0^3}{r_i^3} \psi_n^{(2)}(\rho) \right] + \frac{1}{3} \begin{cases} 1/r_i^2, p \leq i \\ -2r_i/\rho^3, p > i \end{cases},$$

$$\varepsilon_r^y(\rho) = r_0^2 \bar{e}_1^{(0)}(\rho) \sigma_{01}/c_1 - r_n^2 \bar{e}_n^{(n)}(\rho) \sigma_{0n}/c_n.$$

Підставляючи (14), (15) в отримані на підставі (3) залежності для p -го шару, одержимо

$$\bar{\sigma}_{rp}(\rho) = f_p^t(\rho) + \frac{2k_0}{3\rho^3} \left[\frac{\rho^3 - r_n^3}{r_n^3 - r_0^3} d_p + \frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} d_p^* - \chi_{p2}(\rho) - k\rho^3 \chi_{p1}(\rho) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{ri}(r_i) r_i^2 \bar{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) + \sigma_r^y(\rho), \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_{\phi p}(\rho) = \frac{K_\nu k_0}{\rho^3} \left[\frac{2\rho^3 + r_n^3}{r_n^3 - r_0^3} d_{pt} + \frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} d_{pt}^* + V_p(\rho) - \rho^3 \Phi_p(\rho) \right] +$$

$$+ \frac{k_0}{3\rho^3} \left[\frac{2\rho^3 + r_n^3}{r_n^3 - r_0^3} d_p + \frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} d_p^* + \chi_{p2}(\rho) - 2k\rho^3 \chi_{p1}(\rho) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{ri}(r_i) r_i^2 \bar{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) + \sigma_\phi^y(\rho). \quad (17)$$

Тут

$$f_p^t(\rho) = 2K_\nu k_0 \frac{1}{\rho^3} \left[\frac{\rho^3 - r_n^3}{r_n^3 - r_0^3} d_{pt} + \frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} d_{pt}^* - V_p(\rho) \right],$$

$$\bar{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) = \frac{2k_0 r_i}{3\rho^3} \left[\frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} + k \frac{r_0^3}{r_i^3} \frac{\rho^3 - r_n^3}{r_n^3 - r_0^3} \right] + \frac{K_\nu}{3} \begin{cases} 1/r_i^2, p \leq i \\ -r_i/(k\rho^3), p > i \end{cases},$$

$$\bar{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) = \frac{k_0 r_i}{3\rho^3} \left[\frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^2 - r_0^2} + k \frac{r_0^3}{r_i^3} \frac{2\rho^3 + r_n^3}{r_n^2 - r_0^2} \right] + \frac{K_\nu}{3} \begin{cases} 1/r_i^2, p \leq i \\ r_i/(2k\rho^3), p > i \end{cases},$$

$$\sigma_r^y(\rho) = r_0^2 \bar{\tau}_{r1}^{(0)}(\rho) \sigma_{01}/c_1 - r_n^2 \bar{\tau}_{rn}^{(n)}(\rho) \sigma_{0n}/c_n,$$

$$\sigma_\phi^y(\rho) = r_0^2 \bar{\tau}_{\phi 1}^{(0)}(\rho) \sigma_{01}/c_1 - r_n^2 \bar{\tau}_{\phi n}^{(n)}(\rho) \sigma_{0n}/c_n.$$

Невідомі зведені напруження $\bar{\sigma}_{rp}(\rho)$, через які виражаються компоненти термопружного стану, розшукуватимемо у вигляді суми

$$\bar{\sigma}_{rp} = \sigma_{rp}^t(\rho) + \sigma_{rp}^y(\rho). \quad (18)$$

Тут перший доданок відповідає напруженням, які зумовлені температурним полем, другий (з урахуванням залежності від температури і координат тільки модулів пружності) – поверхневими навантаженнями.

Відповідно до (18) інтегральні оператори $\chi_{pj}(\rho)$ ($j = 1, 2$), d_p і d_p^* набудуть вигляду

$$\chi_{pj}(\rho) = \chi_{pj}^t(\rho) + \chi_{pj}^y(\rho), \quad d_p = d_p^t + d_p^y, \quad d_p^* = d_p^{*t} + d_p^{*y}, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_{p1}^s(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} x_p(r) \sigma_{rp}^s(r) dr, \quad \chi_{p2}^s(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^3 x_p(r) \sigma_{rp}^s(r) dr; \\ d_p^s &= \sum_{i=1}^{p-1} \chi_{i2}^s(r_i) + k r_0^3 \sum_{i=1}^{p-1} \chi_{i1}^s(r_i), \quad f_p^y(\rho) = \sigma_r^y(\rho), \quad d_p^{*s} = \sum_{i=p}^n \chi_{i2}^s(r_i) + k r_n^3 \sum_{i=p}^n \chi_{i1}^s(r_i). \end{aligned}$$

Підставивши співвідношення (18), (19) у (16), отримаємо для знаходження функцій $\sigma_{rp}^s(\rho)$ ($s = t, y$) систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rp}^s(\rho) - \frac{2k_0}{3\rho^3} \left[\frac{\rho^3 - r_n^3}{r_n^3 - r_0^3} d_p^s + \frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} d_p^{*s} - \chi_{p2}^s(\rho) - k\rho^3 \chi_{p1}^s(\rho) \right] - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \sigma_{ri}^s(r_i) r_i^2 \bar{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) = f_p^s(\rho), \quad f_p^y(\rho) = \sigma_r^y(\rho). \end{aligned} \quad (20)$$

Розглянемо часткові випадки. Для простору зі сферичною порожниною ($r_n \rightarrow \infty$) отримаємо

$$\begin{aligned} u_p(\rho) &= K_\nu [d_{pt} + V_p(\rho)] / \rho^2 + [d_p + \chi_{p2}(\rho) - \rho^3 \chi_{p1}(\rho)] / (3\rho^2) + k\rho \psi_0^{(1)}(\rho) d_{p1}^* / 3 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{ri}(r_i) r_i^2 \bar{G}_p^{(i)}(\rho) + u^y(\rho), \\ \varepsilon_{rp}(\rho) &= K_\nu [-2d_{pt} - 2V_p(\rho) + \rho^3 \Phi_p(\rho)] / \rho^3 - [2d_p + 2\chi_{p2}(\rho) + \rho^3 \chi_{p1}(\rho)] / (3\rho^3) + \\ &\quad + k\psi_0^{(2)}(\rho) d_{p1}^* / 3 + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{ri}(r_i) r_i^2 \bar{e}_p^{(i)}(\rho) + \varepsilon_r^y(\rho), \\ \bar{\sigma}_{rp}(\rho) &= f_p^t(\rho) - 2k_0 [d_p - k(\rho^3 - r_0^3) d_{p1}^* + \chi_{p2}(\rho) + k\rho^3 \chi_{p1}(\rho)] / (3\rho^3) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{ri}(r_i) r_i^2 \bar{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) + \sigma_r^y(\rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\phi p}(\rho) = k_0 K_\nu [d_{pt} + V_p(\rho) - \rho^3 \Phi_p(\rho)] / \rho^3 + k_0 [d_p + k(2\rho^3 + r_0^3) d_{p1}^* + \\ + \chi_{p2}(\rho) - 2k\rho^3 \chi_{p1}(\rho)] / (3\rho^3) + \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \bar{\sigma}_{ri}(r_i) r_i^2 \bar{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) + \sigma_\phi^y(\rho), \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} f_p^t(\rho) = -2k_0 K_\nu [d_{pt} + V_p(\rho)] / \rho^3; \quad d_{p1}^* = \sum_{i=p}^{n-1} \chi_{i1}(r_i) + \chi_{n1}(\infty); \\ u^y(\rho) = r_0^2 \bar{G}_1^{(0)}(\rho) \sigma_{01} / c_1, \quad \varepsilon_r^y = r_0^2 \bar{e}_1^{(0)}(\rho) \sigma_{01} / c_1, \\ \sigma_r^y(\rho) = r_0^2 \bar{\tau}_{r1}^{(0)}(\rho) \sigma_{01} / c_1, \quad \sigma_\phi^y(\rho) = r_0^2 \bar{\tau}_{\phi 1}^{(0)}(\rho) \sigma_{01} / c_1; \\ \bar{G}_p^{(i)}(\rho) = \frac{k r_0^3}{3 r_i^2 \rho^2} + \frac{1}{3} \begin{cases} \rho / r_i^2, p \leq i \\ r_i / \rho^2, p > i \end{cases}, \quad \bar{e}_p^{(i)} = -\frac{2k r_0^3}{3 r_i^2 \rho^3} + \frac{1}{3} \begin{cases} 1 / r_i^2, p \leq i \\ -2r_i / \rho^3, p > i \end{cases}, \\ \bar{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) = -\frac{K_\nu r_0^3}{3 r_i^2 \rho^3} + \frac{K_\nu}{3} \begin{cases} 1 / r_i^2, p \leq i \\ -r_i / (k \rho^3), p > i \end{cases}, \quad \bar{\tau}_{\phi p}^{(i)}(\rho) = \frac{K_\nu r_0^3}{6 r_i^2 \rho^3} + \frac{K_\nu}{3} \begin{cases} 1 / r_i^2, p \leq i \\ r_i / (2k \rho^3), p > i \end{cases}; \end{aligned}$$

$\sigma_{rp}^s(\rho)$ ($s = t, y$) розв'язки систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\sigma_{rp}^s(\rho) + 2k_0 [d_p^s + \chi_{p2}^s(\rho) + k\rho^3 \chi_{p1}^s(\rho)] / (3\rho^3) - \sum_{i=1}^{n-1} K_E^{(i)} \sigma_{ri}^s(r_i) r_i^2 \bar{\tau}_{rp}^{(i)}(\rho) = f_p^s(\rho). \quad (22)$$

Прийнявши фізико-механічні характеристики складових однаковими та такими, як у першій складовій, з (14)–(22) отримаємо співвідношення для визначення компонент термопружного стану:

– в неоднорідній порожнистій термочутливій кулі

$$\begin{aligned} u(\rho) = K_\nu \left[d_{1t}^* \frac{\rho \psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} + \frac{V_1(\rho)}{\rho^2} \right] + \frac{1}{3} \left[d_1^* \frac{\rho \psi_0^{(1)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} + \frac{\chi_{12}(\rho)}{\rho^2} - \rho \chi_{11}(\rho) \right] + u^y(\rho), \\ \varepsilon_r(\rho) = K_\nu \left[d_{1t}^* \frac{\psi_0^{(2)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2V_1(\rho)}{\rho^3} + \Phi_1(\rho) \right] + \frac{1}{3} \left[d_1^* \frac{\psi_0^{(2)}(\rho)}{r_n^3 - r_0^3} - \frac{2\chi_{12}(\rho)}{\rho^3} - \chi_{11}(\rho) \right] + \varepsilon_r^y(\rho), \\ \bar{\sigma}_r(\rho) = f_1^t(\rho) + \frac{2k_0}{3\rho^3} \left[d_1^* \frac{\rho^3 - r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} - \chi_{12}(\rho) - k\rho^3 \chi_{11}(\rho) \right] + \sigma_r^y(\rho), \\ \bar{\sigma}_\phi(\rho) = \frac{K_\nu k_0}{\rho^3} \left[d_{1t}^* \frac{2\rho^3 + r_0^3}{r_n^3 - r_0^3} + V_1(\rho) - \rho^3 \Phi_1(\rho) \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{k_0}{3\rho^3}\left[d_1^*\frac{2\rho^3+r_0^3}{r_n^3-r_0^3}+\chi_{12}(\rho)-2k\rho^3\chi_{11}(\rho)\right]+\sigma_\phi^y(\rho), \quad (23)$$

де $f_1^t(\rho) = 2K_\nu k_0 [d_{pt}^* (\rho^3 - r_0^3) / (r_n^3 - r_0^3) - V_p(\rho)] / \rho^3$; $\sigma_{r1}^s(\rho)$ ($s = t, y$) розв'язки систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\bar{\sigma}_{r1}^s(\rho) - 2k_0 [d_1^{*s} (\rho^3 - r_0^3) / (r_n^3 - r_0^3) - \chi_{12}^s(\rho) - k\rho^3\chi_{11}^s(\rho)] / (3\rho^3) = f_1^s(\rho); \quad (24)$$

- в неоднорідному термочутливому просторі зі сферичною порожниною

$$\begin{aligned} u(\rho) &= K_\nu [d_{1t} + V_1(\rho)] / \rho^2 + [d_1 + \chi_{12}(\rho) - \rho^3\chi_{11}(\rho)] / (3\rho^2) + k\rho\psi_0^{(1)}(\rho)\chi_{11}(\infty) / 3 + \\ &\quad + u^y(\rho), \\ \varepsilon_r(\rho) &= K_\nu [-2d_{1t} - 2V_1(\rho) + \rho^3\Phi_1(\rho)] / \rho^3 - [2d_1 + 2\chi_{12}(\rho) + \rho^3\chi_{11}(\rho)] / (3\rho^3) + \\ &\quad + k\psi_0^{(2)}(\rho)\chi_{11}(\infty) / 3 + \varepsilon_r^y(\rho), \\ \bar{\sigma}_r(\rho) &= f_1^t(\rho) - 2k_0 [d_1 - k(\rho^3 - r_0^3)\chi_{n1}(\infty) + \chi_{12}(\rho) + k\rho^3\chi_{11}(\rho)] / (3\rho^3) + \sigma_r^y(\rho), \\ \bar{\sigma}_\phi(\rho) &= k_0 K_\nu [d_{1t} + V_1(\rho) - \rho^3\Phi_1(\rho)] / \rho^3 + k_0 [d_1 + k(2\rho^3 + r_0^3)\chi_{11}(\infty) + \\ &\quad + \chi_{12}(\rho) - 2k\rho^3\chi_{11}(\rho)] / (3\rho^3) + \sigma_\phi^y(\rho), \end{aligned} \quad (25)$$

де $f_1^t(\rho) = -2k_0 K_\nu [d_{1t} + V_1(\rho)] / \rho^3$; $\sigma_{r1}^s(\rho)$ ($s = t, y$) розв'язки систем інтегро-алгебричних рівнянь

$$\sigma_{r1}^s(\rho) + 2k_0 [d_1^s + \chi_{12}^s(\rho) + k\rho^3\chi_{11}^s(\rho)] / (3\rho^3) = f_1^s(\rho). \quad (26)$$

Прийнявши в (14)-(18), (20)-(26) $r_0 = 0$, отримаємо формули для відповідних суцільних тіл. У цьому разі треба врахувати

$$V_1(\rho) / \rho^2 \rightarrow 0, \quad 3V_1(\rho) / \rho^3 \rightarrow \Phi_1(0), \quad \chi_{12}(\rho) / \rho^2 \rightarrow 0, \quad \chi_{12}(\rho) / \rho^3 \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0.$$

Зауважимо, що отримані співвідношення можна використати для визначення термопружного стану, зумовленого нестационарним температурним полем.

Наприклад, проведемо за змінних і сталих ФМХ числові дослідження статичного термопружного стану у вільній від силових навантажень порожнистій тришаровій кулі, на внутрішній поверхні якої задано тепловий потік $q_0 = 6 \cdot 10^5$ [Вт/м²], а на зовнішній - температуру $t_c = 20^\circ\text{C}$. Залежності ФМХ першого і третього шарів брали у вигляді

$$\lambda_i^{(1)}(T_1) = 1.71 + 0.21 \cdot 10^{-3} T_1 + 0.116 \cdot 10^{-6} T_1^2 \text{ [Вт/мК]},$$

$$\alpha_t^{(1)}(T_1) = 13.3 \cdot 10^{-6} - 18.9 \cdot 10^{-9} T_1 + 12.7 \cdot 10^{-12} T_1^2 [\text{K}^{-1}],$$

$$E_1(T_1) = 132.2 - 50.3 \cdot 10^{-3} T_1 - 8.1 \cdot 10^{-6} T_1^2 [\text{ГПа}],$$

$$\lambda_t^{(3)}(T_3) = 14.3 + 0.014 T_3 [\text{Вт/мК}],$$

$$\alpha_t^{(3)}(T_3) = 14.854 \cdot 10^{-6} + 0.0033 \cdot 10^{-6} T_3 [\text{K}^{-1}],$$

$$E_3(T_3) = 206.11 - 0.07 T_3 [\text{ГПа}],$$

а другого шару визначали на підставі співвідношення [8]

$$p_2(T_2, \rho) = \frac{1}{2} [p_1(T_2) - p_3(T_2)] \cos \left(\pi \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right) + \frac{1}{2} [p_1(T_2) + p_3(T_2)]. \quad (27)$$

Тут $p_1(T), p_3(T)$ відповідні залежності першого та третього шарів; $\lambda_t^{(i)}(T_i)$ – коефіцієнти теплопровідності; $T_i = t_i(\rho) - 273^\circ\text{C}$.

Сталим ФМХ відповідали такі середні значення наведених вище залежностей: $\lambda_{s1} = 1.945 [\text{Вт}/(\text{м}^\circ\text{C})]$, $\lambda_{s2} = 13.18398 [\text{Вт}/(\text{м}^\circ\text{C})]$, $\lambda_{s3} = 24.42 [\text{Вт}/(\text{м}^\circ\text{C})]$, $\alpha_{s1} = 0.88457 \cdot 10^{-5} [^\circ\text{C}^{-1}]$, $\alpha_{s2} = 1.30428 \cdot 10^{-5} [^\circ\text{C}^{-1}]$, $\alpha_{s3} = 1.72399 \cdot 10^{-5} [^\circ\text{C}^{-1}]$, $E_{s1} = 89.95874 [\text{ГПа}]$, $E_{s2} = 122.72937 [\text{ГПа}]$, $E_{s3} = 155.5 [\text{ГПа}]$.

Розподіли температур $t_i(\rho)$ знаходили з системи інтегральних рівнянь [6]

$$t_3(\rho) = t_c + t_s r_0^2 \int_{\rho}^{r_3} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(3)}[t_3(\xi)]} d\xi, \quad t_2(\rho) = t_3(r_2) + t_s r_0^2 \int_{\rho}^{r_2} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(2)}[t_2(\xi), \xi]} d\xi, \\ t_1(\rho) = t_2(r_1) + t_s r_0^2 \int_{\rho}^{r_1} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(1)}[t_1(\xi)]} d\xi, \quad (t_s = q_0 l / \lambda_{s1}), \quad (28)$$

яку, як і систему (20) ($n = 3, \sigma_r^y(\rho) = 0, \nu = 0.3$), розв'язували методом послідовних наближень при $r_0 = 0.8$, $r_1 = 0.82$, $r_2 = 0.9$, $r_3 = 1$, $l = 0.05 \text{ м}$.

У табл. подано за сталих ФМХ значення безрозмірних температурних переміщень $\tilde{u} = u / (\alpha_{s1} t_s)$, напружень $\tilde{\sigma}_j = \sigma_{jj} / (E_{s1} \alpha_{s1} t_s)$ ($j = r, \phi$) і деформацій $\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r / (\alpha_{s1} t_s)$ на обмежувальних і серединних поверхнях шарів. Для кожного ρ підрахунок виконано на підставі точного розв'язку [5] (третій рядок) і наближеного розв'язку системи (20) (перший рядок для двох, другий – шести наближень). Бачимо швидку збіжність методу послідовних наближень і високу точність визначення компонент термопружного стану запропонованим способом.

ρ	$\tilde{u}$	$\tilde{\varepsilon}_r$	$10^2 \tilde{\sigma}_r$	$\tilde{\sigma}_\phi$
r_0	0.009169649	0.058361636	0.0	-0.036076596
	0.009169628	0.058361658	0.0	-0.036076632
	0.009169621	0.058361657	0.0	-0.036076639
$\frac{r_0 + r_1}{2}$	0.009656166	0.039101219	-0.070621712	-0.021614068
	0.009656146	0.039101239	-0.070635727	-0.021614104
	0.009656138	0.039101242	-0.070635652	-0.021614113
$r_1 - 0$	0.009954767	0.020768899	-0.104265018	-0.007680567
	0.009954747	0.020768919	-0.104292373	-0.007680603
	0.009954739	0.020768924	-0.104292215	-0.007680613
$r_1 + 0$	0.009954767	0.036134971	-0.104465263	-0.026224586
	0.009954747	0.036135045	-0.104292365	-0.026224592
	0.009954739	0.036135047	-0.104292215	-0.026224604
$\frac{r_1 + r_2}{2}$	0.011067321	0.020004641	-0.257404394	-0.010061677
	0.011067303	0.020004706	-0.257306785	-0.010061679
	0.011067294	0.020004711	-0.257306575	-0.010061693
$r_2 - 0$	0.011591608	0.006615375	-0.259647698	0.003978577
	0.011591593	0.006615433	-0.259529655	0.003978579
	0.011591584	0.006615440	-0.259529503	0.003978562
$r_2 + 0$	0.011591608	0.013049257	-0.259688265	-0.002820938
	0.011591593	0.013049274	-0.259529634	-0.002820976
	0.011591584	0.013049280	-0.259529503	-0.002820996
$\frac{r_2 + r_3}{2}$	0.011978517	0.002796434	-0.187639468	0.011171732
	0.011978503	0.002796448	-0.187568482	0.011171697
	0.011978493	0.002796456	-0.187568352	0.011171675
r_3	0.011903644	-0.005507542	0.0	0.023151121
	0.011903630	-0.005507531	0.0	0.023151087
	0.011903620	-0.005507522	0.0	0.023151063

На рис. 1, 2 зображено графіки розподілу радіальних і кільцевих напружень за товщиною кулі. Криві 1 відповідають залежним від температури, 2 – сталим характеристикам крайніх шарів. Криві 3 побудовано за всіх сталих характеристик шарів.

З їхнього аналізу випливає, що не врахування змінності ФМХ може призвести, залежно від розглядуваної поверхні, до завищення та до заниження відповідних напружень. Зокрема, абсолютні значення кільцевих напружень на внутрішній поверхні кулі за сталих ФМХ на 60% більші, ніж за температурозалежних.

Отже, запропоновано спосіб розв'язання за сталих однакових коефіцієнтів Пуассона та залежних від температури і координати решти ФМХ статичних і квазістатичних задач термопружності для шаруватих зі сферичними поверхнями поділу тіл, які перебувають під дією центрально-симетричних температурних полів і поверхневих навантажень. Він передбачає розв'язання стосовно зведених радіальних напружень систем інтегро-алгебричних рівнянь, отриманих з використанням узагальнених

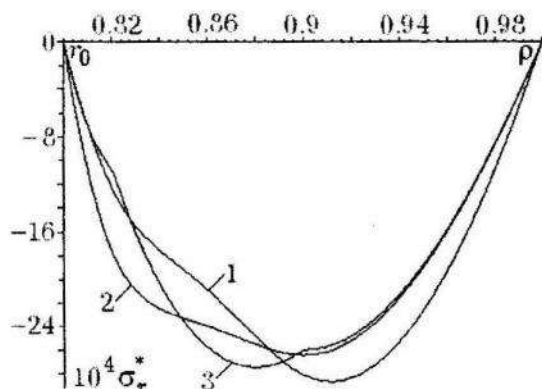


Рис. 1

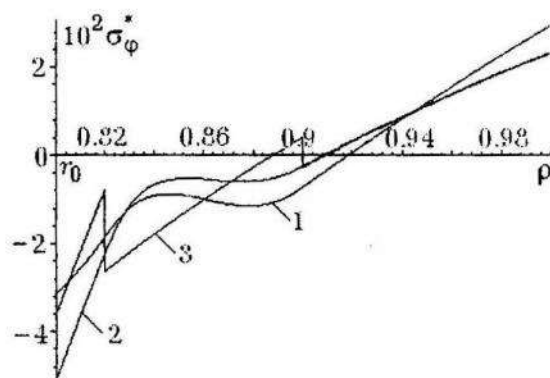


Рис. 2

функцій і функції Гріна задачі пружності для однорідної кулі. На модельній задачі показано його високу точність.

Список використаної літератури

1. *Калиняк Б.М.* Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь / Б.М. Калиняк, І.І. Яцків // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2009. – Вип. 7. – С. 142–150.
2. *Махоркин И.Н.* Исследование температурных полей и напряжений в неоднородных сферических телах на основе уравнений с особенностями импульсного типа / И.Н. Махоркин: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.04 – мех. деформ. тв. тіла. – Львов, 1981.
3. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Т. 3: Термопружність термочутливих тіл низької електропровідності / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів : СПОЛОМ, 2009.
4. *Постольник Ю.С.* Металургійна термомеханіка / Ю.С. Постольник, А.П. Огурцов. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002.
5. *Процюк Б.В.* Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл / Б.В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 95–109.
6. *Процюк Ю.Б.* Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури / Ю.Б. Процюк // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. 2010. – 53, № 4. – С. 151–161.
7. *Процюк Ю.Б.* Задачі термопружності для тришарових термочутливих тіл простої геометричної форми з функціонально-градієнтним шаром / Ю.Б. Процюк // IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача. (Львів, 24-27

- травня 2011 р.): тези доповідей. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2011. – С. 71–72.
8. *Ganczarski A.* A study on coupled thermo-elasto-plastic-damage dissipative phenomena: models and application to some innovative materials / A. Ganczarski, J. Skrzypek // *J. Thermal Stresses.* – 2009. – **32**. – P. 698–751.
 9. *Kushnir R.* A Method of the Green's Functions for Quasistatic Thermo-elasticity Problems in Layered Thermosensitive Bodies under Complex Heat Exchange / R. Kushnir, B. Protsiuk // *Operator Theory: Advances and Applications.* – 2009. – Vol. 191. – P. 143–154.
 10. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties, in R.B. Hetnarski (ed.) / N. Noda // *Thermal Stresses I.* – 1986. – P. 391–483.
 11. *Nowinski J.* Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature dependent Properties / J. Nowinski // *The Journal of Applied Mathematics and Physics.* – 1959. – **10**, № 39. – P. 565–575.
 12. *Obata Y.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material / Y. Obata, N. Noda // *J. Thermal Stresses.* – 1994. – **17**. – P. 471–487.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ОДИНАКОВЫХ ПОСТОЯННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ПУАССОНА

Борис ПРОЦЮК

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 36 79060 Львов, Украина*

Определено термоупругое состояние, обусловленное центрально-симметричными температурными полями и поверхностными нагрузками в слоистых изотропных телах со сферическими поверхностями раздела с учетом зависимости от координаты и температуры модулей упругости и коэффициентов линейного расширения. Решение задачи термоупругости сведено к системам интегро-алгебраических уравнений относительно приведенных радиальных напряжений. При этом использованы функции Грина задачи упругости для однородной сферы. Численные исследования приведены для трехслойной сферы с функционально-градиентным слоем.

Ключевые слова: изотропные слоистые термочувствительные сферические тела, функционально-градиентные материалы, термоупругое состояние, функция Грина, интегро-алгебраические уравнения.

THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE-INHOMOGENEOUS THERMOSENSITIVE SPHERICAL BODIES AT SIMILAR CONSTANT POISSON'S RATIOS

Borys PROTSIUK

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine*

The thermoelastic state caused by centrally-symmetric temperature fields and surface loadings in layer isotropic bodies with spherical interfaces has been determined with regard for dependence on temperature and coordinate of elasticity moduli and coefficients of linear expansion. The solution of thermoelasticity problems has been reduced to a system of integro-algebraic equations with respect to the brought radial stresses. In addition Greens function of elasticity problem for homogeneous sphere has been used. Numerical studies are presented for a three-layer sphere with functionally-gradient layer.

Key words: isotropic layer thermosensitive spherical bodies, functionally-gradient materials, thermoelastic state, Greens function, integro-algebraic equations.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

Дослідження проведені за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № Ф41.2/001).

УДК 539.377

ОПТИМІЗАЦІЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ВИТРИМКИ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТИТАНОВОГО СПЛАВУ З ВРАХУВАННЯМ ПОЛІМОРФНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Ігор ЧУПИК

*Інститут прикладних проблем механіки та математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна*

На підставі методу скінченних елементів і методу Хука-Джівса розроблено числову методику оптимізації локального поля температурної витримки осесиметричної оболонки, яка виготовлена з титанового сплаву. Враховано явище поліморфного перетворення при зміні температури.

Ключові слова: оптимізація, термомеханічні процеси, фазові перетворення, залишкові напруження.

Завдяки поєднанню цінних властивостей титану: висока міцність, корозійна стійкість, зварюваність тощо вироби з титанових сплавів активно використовують у різних галузях народного господарства. Для їхнього виготовлення часто застосовують технології локального нагрівання, внаслідок чого у матеріалі відбуваються поліморфні (фазові) перетворення і, відповідно, змінюється фазовий склад, що спричиняє появу залишкових напружень. Зміна фазового складу додатково впливає на напружений стан конструкцій і може поглинати частину їхнього міцнісного ресурсу. Тому для побудови раціональних режимів термообробки виробів з титанових сплавів треба враховувати фазові перетворення, які відбуваються в ньому зі зміною температури.

Оптимізацію напруженого стану при локальній термообробці можна проводити вибором теплового режиму та оптимізацією поля підігріву локальної зони. У [7] показано, що при застосуванні неоптимального поля підігріву ефективність локальної термообробки незначна. Математична теорія оптимального локального нагрівання викладена у [1, 5–7, 9, 15–17]. Ця теорія побудована для матеріалів і режимів нагрівання без урахування структурних перетворень у матеріалі. Питанням дослідження фазового складу титанових сплавів присвячені праці [7, 9]. Переважна більшість цих праць – експериментальні. У цьому разі система рівнянь для визначення напружено-деформованого стану тіла з урахуванням фазових поліморфних перетворень є нелінійною і аналітичні методи її розв'язку не розроблені [3].

Наша мета – розглянути задачу оптимізації локального температурного поля витримки (локального нагрівання), який часто використовують в інженерній практиці при відпалюванні, для тонкостінної титанової оболонки обертання, де враховано, що в матеріалі трапляються фазові перетворення при нагріві, а після охолодження фіксується неоднорідний фазовий склад. Рівні напружень, які виникають від нагрівання і фазових змін, повинні бути

мінімальними. Приймається також, що локальне температурне поле під час термообробки не спричиняє пластичних деформацій (причиною виникнення залишкових напружень вважаємо лише нерівномірний розподіл фаз, який усталюється в оболонці після її охолодження). Зазначимо, що розглядувані структурні напруження залишкові в тому розумінні, що вони існують в тілі без зовнішніх термомеханічних навантажень і в багатьох випадках тривалість існування таких напружень збігається з часом експлуатації виробу [18–20].

Формулювання задачі. Розглянемо вільну від силового навантаження скінченну осесиметричну оболонку з α - β титанового сплаву, яка займає область $\Omega \in E^3$ евклідового простору з неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ , за умов локального кільцевого осесиметричного температурного поля, схему якого зображено на рис. 1 (r, φ, z – циліндричні координати, t_0 температура навколишнього середовища, t_1 максимальна температура в центрі зони локального поля температурної витримки, r_0, r_1 внутрішній і зовнішній радіус оболонки, z_0 півширина локальної зони поля температурної витримки, z_1 півдовжина оболонки).

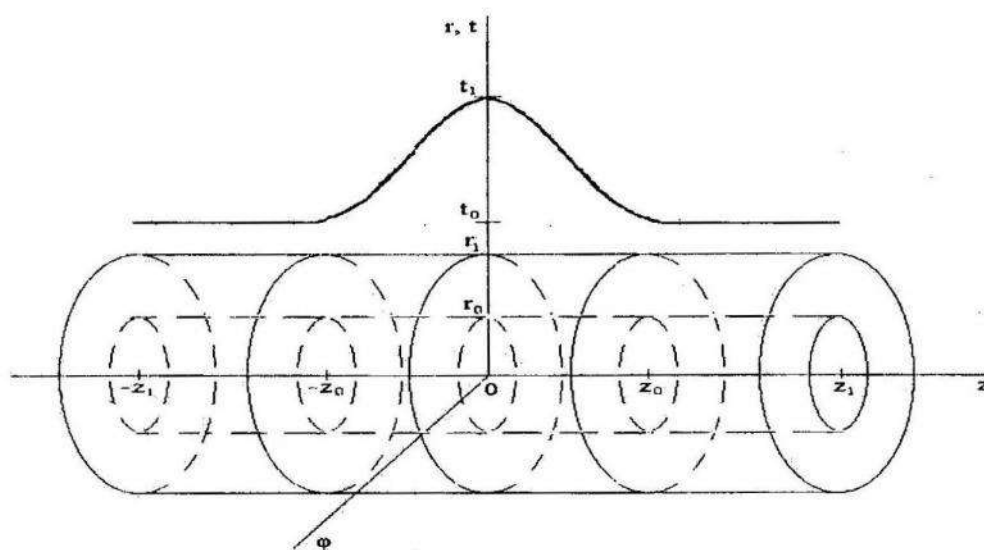


Рис. 1

У відомих працях з оптимізації поля витримки задачу розв'язують за припущення, що після припинення нагрівання у матеріалі оболонки не відбувається ніяких структурних змін [7]. За наявності структурних перетворень локальне поле підігріву, з одного боку, створює умови для релаксації попередньо наведених у тілі залишкових напружень, а з іншого – само може бути причиною їхнього виникнення, особливо за умов швидкого некерованого охолодження після завершення операції локального відпалювання. Ми приймаємо, що після завершення локального поля витримки у тілі фіксується деякий просторово неоднорідний нерівноважний

фазовий склад, який є причиною виникнення залишкових (структурних) напружень. У цьому разі формулюється задача знаходження такого розподілу фаз в оболонці, за якого відповідні йому напруження є мінімальними. За знайденим оптимальним розподілом фаз на підставі емпірично визначених залежностей (рис. 2, крива 2) знаходимо температурне поле, яке формує цей фазовий склад.

Приймаємо, що в зоні локального поля температурної витримки температура змінюється вздовж твірної циліндра і є однорідною за товщиною оболонки [7]

$$t = \begin{cases} t_1 (1 - 3z^2 + 2|z^3|), & |z| \leq z_0, \\ t_0, & |z| > z_0. \end{cases} \quad (1)$$

Формулюється задача оптимізації локального температурного поля витримки для оболонки обертання з урахуванням фазових перетворень, за якого в оболонці виникають мінімальні залишкові (структурні) напруження.

У рівноважному стані при кімнатній температурі t_0 структура α - β титанових сплавів складається з α -фази (з гексагональною щільно-упакованою ґраткою) і β -фази (з об'ємноцентрованою кубічною ґраткою). Під час нагрівання тіла з титанового сплаву від кімнатної температури t_0 до температури початку фазових перетворень t_{f0} у ньому не відбувається фазових перетворень, а за нагрівання від температури початку фазових перетворень t_{f0} до температури завершення фазових перетворень t_{f1} відбуваються фазові перетворення, а саме, α -фаза поступово переходить у β -фазу. При досягненні температури завершення фазових перетворень t_{f1} кількість β -фази у такому тілі становить 100 % (α -фаза повністю переходить у β -фазу). Різниця питомих об'ємів α і β фаз (питомий об'єм α -фази більший від β -фази) суттєво впливає на розподіл і величину тимчасових напружень під час термообробки та залишкових (структурних) напружень, які зумовлені неоднорідним розподілом фаз після завершення термообробки [8].

Задачу оптимізації локального температурного поля витримки формулюємо за два етапи. На першому – визначаємо тимчасовий (під час температурної витримки) і залишковий (після охолодження) напружений стан оболонки обертання. Для цього записуємо співвідношення, які окреслюють процес деформування оболонки у квазіусталеному формулюванні за припущення, що на етапі температурної витримки у кожній точці у кожний момент часу усталюється рівноважний фазовий склад, а після охолодження в оболонці фіксується неоднорідний розподіл фаз. На другому етапі знаходимо оптимальне температурне поле (методом Джівса-Хука), яке зумовлює мінімальні залишкові напруження.

Під час формулювання задачі першого етапу приймаємо, що відсотковий вміст β -фази у титановому сплаві оболонки при нагріванні визначається функцією повноти фазових перетворень [8]

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_0, & t < t_{f0} \\ \frac{\xi_1 - \xi_0}{t_{f1} - t_{f0}} t + \frac{\xi_0 t_{f1} - \xi_1 t_{f0}}{t_{f1} - t_{f0}}, & t_{f0} \leq t < t_{f1} \\ \xi_1, & t \geq t_{f1} \end{cases}, \quad (2)$$

де ξ_0 – відсотковий вміст β -фази у титановому сплаві у температурному діапазоні $t < t_{f0}$; ξ_1 – стовідсотковий вміст β -фази у титановому сплаві у температурному діапазоні $t \geq t_{f1}$.

Під час нагрівання сумарна зміна об'єму титанового сплаву оболонки складається з двох частин – теплової $d\varepsilon^t$ і структурної $d\varepsilon^\xi$

$$d\varepsilon^{(T)} = d\varepsilon^t + d\varepsilon^\xi. \quad (3)$$

Тут $d\varepsilon^t = 3\alpha_t dt$, $d\varepsilon^\xi = 3\beta_\xi d\xi$, α_t – лінійний коефіцієнт теплового розширення; β_ξ – лінійний коефіцієнт структурної дилатації (дилатація, що зумовлена зміною питомого об'єму матеріалу при поліморфному перетворенні). У загальному випадку коефіцієнти α_t і β_ξ є функціями температури. При постійній за товщиною температурі коефіцієнт β_ξ можна прийняти константою і визначити зі співвідношення

$$\beta_\xi = (V_1 - V_0) / V_0, \quad (4)$$

де V_0 – питомий об'єм сплаву при температурі t_{f0} ; V_1 – питомий об'єм сплаву при температурі t_{f1} .

Зауважимо, що в діапазоні температур фазового перетворення титанового сплаву температурна компонента зміни об'єму $d\varepsilon^t$ зі зростанням температури збільшується, а структурна $d\varepsilon^\xi$ – зменшується [8].

Якщо дуже повільне (стаціонарне) нагрівання, то в кожній точці матеріалу усталюється фазовий склад, який залежить від температури у цій точці. Повну відносну зміну об'єму у цьому випадку можна визначити з рівняння [8]

$$\varepsilon^{(T)} = 3 \int_{t_0}^{t_1} \alpha_t^*(t) dt, \quad (5)$$

де $\alpha_t^*(t)$ – узагальнений лінійний коефіцієнт теплового розширення, який враховує температурну та структурну дилатацію у титановій оболонці при нагріванні [23]

$$\alpha_t^*(t) = \begin{cases} \alpha_{t_{f0}}, & t < t_{f0} \\ (\alpha_{t_{f0}} + \alpha_{t_{f1}}) / 2 + \beta_\xi d\xi / dt, & t_{f0} \leq t < t_{f1} \\ \alpha_{t_{f1}}, & t \geq t_{f1} \end{cases} \quad (6)$$

Тут $\alpha_{t_{f0}}$ і $\alpha_{t_{f1}}$ – лінійні коефіцієнти теплового розширення у температурних діапазонах $t < t_{f0}$ та $t \geq t_{f1}$, відповідно.

Після охолодження в оболонці фіксується неоднорідний фазовий розподіл, який створює деякий залишковий напружений стан. Залишковий відсотковий вміст β -фази у титановому сплаві оболонки після охолодження описуємо формулою [8]

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_0, & t < t_{f0} \\ \frac{\xi_{res_1} - \xi_0}{t_{f1} - t_{f0}} t + \frac{\xi_0 t_{f1} - \xi_{res_1} t_{f0}}{t_{f1} - t_{f0}}, & t_{f0} \leq t < t_{f1} \\ \xi_{res_1}, & t \geq t_{f1} \end{cases} \quad (7)$$

де ξ_{res_1} – залишковий відсотковий вміст β -фази у титановому сплаві при температурі завершення фазових перетворень t_{f1} . У цьому випадку зміну об'єму визначають так [8]:

$$\varepsilon^{(\Xi)} = 3 \int_{\xi_0}^{\xi_{res_1}} \beta_\xi d\xi. \quad (8)$$

Тут ξ_{res_1} – залишковий відсотковий вміст β -фази у титановому сплаві, який відповідає максимальній температурі локального поля температурної витримки t_1 .

З урахуванням виписаних вище положень для визначення тимчасового і залишкового напружено-деформованого стану осесиметричної титанової оболонки використовуємо математичне формулювання статичної задачі теорії пружності у вигляді варіаційного принципу Лагранжа в зручній для чисельної реалізації матрично-векторній формі [11, 14, 25, 26]. З цієї метою введемо вектори переміщень $\{u\} = (u_r, u_z)^T$, деформацій

$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, 2\varepsilon_{rz})^T$ та напружень $\{\sigma\} = (\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \sigma_{rz})^T$. Тоді запишемо співвідношення Коші

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}; \quad (9)$$

рівняння рівноваги

$$[B]^T \{\sigma\} = 0; \quad (10)$$

рівняння стану

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{(V)}\}); \quad (11)$$

і крайові умови

$$[A]^T \{\sigma\} = 0, \text{ при } (r = r_1, z \in [z_0, z_1]), (r \in [r_0, r_1], z = z_1), \quad (12)$$

де $V = T, \Xi$ – індекси для тимчасових (температурних) і залишкових (структурних) деформацій відповідно [2],

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}^T, \quad (13)$$

матриця геометричних співвідношень;

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu & \nu \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

матриця пружних сталей;

$$[A] = \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & n_r \end{bmatrix}^T, \quad (15)$$

матриця напрямних косинусів, записані з урахуванням осьової симетрії задачі.

Згідно з варіаційним принципом Лагранжа [14] переміщення, які відповідають стану рівноваги, визначають з умови мінімуму функціонала

$$L(u) = \pi \int_{\Omega_2} \{u\}^T [B]^T [D] [B] \{u\} r dr - 2\pi \int_{\Omega_2} [B]^T [D] \{\varepsilon^{(V)}\} r dr, \quad (16)$$

на множині

$$\Omega_2 = \left\{ \{u\} = \{u_r, u_z\}^T; (u_r = 0, r = 0, z \in [z_0, z_1]), (u_z = 0, r \in [r_0, r_1], z = 0) \right\}. \quad (17)$$

За відомими переміщеннями деформації та напруження в кожній точці оболонки визначаємо за співвідношеннями (9) та (11).

У разі визначення оптимального за напруженнями осесиметричного поля температурної витримки титанової оболонки обертання у діапазоні температур фазового переходу матеріалу за критерій оптимізації приймаємо мінімум функціонала енергії залишкових пружних деформацій оболонки [7]

$$F = \frac{1}{2E} \int_{\Omega_2} (\sigma_z^2 + \sigma_\varphi^2 - 2\nu\sigma_z\sigma_\varphi) d\Omega. \quad (18)$$

Приймаємо, що залишкові напруження, що утворюються в оболонці після охолодження, визначаються неоднорідним фазовим розподілом. Тому ми оптимізуємо фазовий розподіл в оболонці, а потім визначаємо з (7) температурне поле, що зумовлює цей фазовий розподіл. Так формулюється задача про визначення оптимального фазового розподілу у матеріалі, що відповідає локальному однорідному за товщиною поля температурної витримки. Задачу розв'язують з такими граничними умовами:

$$\xi(\pm z_0) = \xi_{f0}, \quad \xi(0) = \xi_{rest1}, \quad \frac{d\xi(\pm z_0)}{dz} = 0. \quad (19)$$

Оптимальний фазовий розподіл є розв'язком задачі про визначення екстремуму функціонала пружної енергії (18), що задовольняє умови (19).

Методика розв'язування. В основу методики покладено підхід, який ґрунтується на використанні методу скінчених елементів для апроксимації шуканих розв'язків за просторовими змінними [25].

На першому етапі внаслідок використання стандартної процедури методу скінчених елементів задачу визначення тимчасового та залишкового напруженого стану (9)–(12) зводимо до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$[R]\{u_h\} = \{b\} \quad (20)$$

стосовно значень переміщень $\{u_h\}$ у вузлах скінчено-елементного поділу області, де матриця реакцій $[R]$ і вектор навантаження $\{b\}$ визначають шляхом підсумовування відповідних матричних характеристик

$$[R^{(e)}] = \int_{\Omega_2^{(e)}} [N]^T [B]^T [D] [B] [N] d\Omega, \quad (21)$$

$$\{b^{(e)}\} = \int_{\Omega_2^{(e)}} [N] [B]^T [D] \{\epsilon^{(V)}\} d\Omega \quad (22)$$

окремих скінченних елементів, де $[N]$ – матриці функцій форми; $\Omega_2^{(e)}$ – область скінченного елемента.

На підставі запропонованої методики створено відповідне програмне забезпечення та розв'язано конкретні задачі.

Числові дослідження. Як приклад розглянемо вільну від силового навантаження циліндричну оболонку з титанового сплаву ВТ-23 за дії локального кільцевого осесиметричного поля температурної витримки. Максимальна температура t_1 у центрі зони температурної витримки становить 720°C , температура навколишнього середовища $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Цей сплав має такий хімічний склад: Al-5,4%, Mo-1,9%, V-4,7%, Cr-1,2%, Fe-0,5%, Ti-86,3%. У рівноважному стані при температурі $t_0 = 20^\circ\text{C}$ сплав містить 80% α -фази (гексагональна щільноупакована ґратка) і 20% β -фази (об'ємноцентрована кубічна ґратка). Як показано в [8, 9], різниця питомих об'ємів між α і β фазами є приблизно 2,5%, що значно впливає на розподіл і величину тимчасових і залишкових напружень.

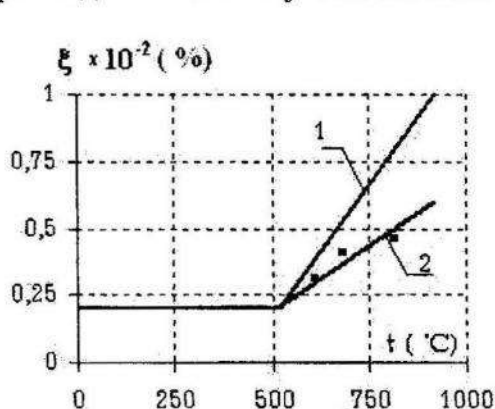


Рис. 2

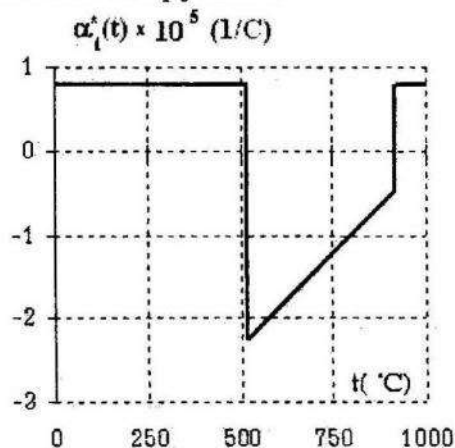


Рис. 3

Числові дослідження проводили для параметрів [21] $r_0 = 0,024$ м; $r_1 = 0,025$ м; $z_0 = 0,028$ м; $z_1 = 0,05$ м; $c = 0,523^\circ\text{Дж}/(\text{К моль})$; $\rho = 4540^\circ\text{кг}/\text{м}^3$; $t_{f0} = 520^\circ\text{C}$, $t_{f1} = 920^\circ\text{C}$, $t_1 = 720^\circ\text{C}$, $E = 106$ МПа; $\nu = 0,3$, $\alpha_{t_{f0}} = 0,8 \cdot 10^{-5} 1/\text{C}$, $\alpha_{t_{f1}} = 0,8 \cdot 10^{-5} 1/\text{C}$; $\beta_\xi = -0,013$; $\xi_{rest_1} = 38\%$; $\xi_{res_1} = 60\%$.

На рис. 2 зображено графік лінеаризованої функції повноти фазових перетворень $\xi(t)$ при рівномірному нагріванні (крива 1) і експериментально визначена залежність відносного вмісту залишкової β - фази в матеріалі після охолодження (крива 2). На рис. 3 зображено залежність узагальненого лінійного коефіцієнта теплового розширення від температури, який враховує структурну та температурну дилатацію у титановій оболонці при нагріванні.

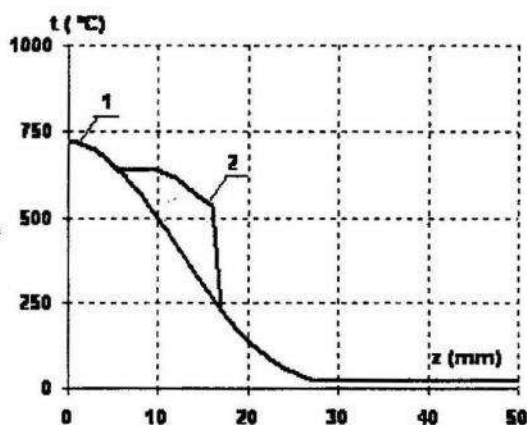


Рис. 4

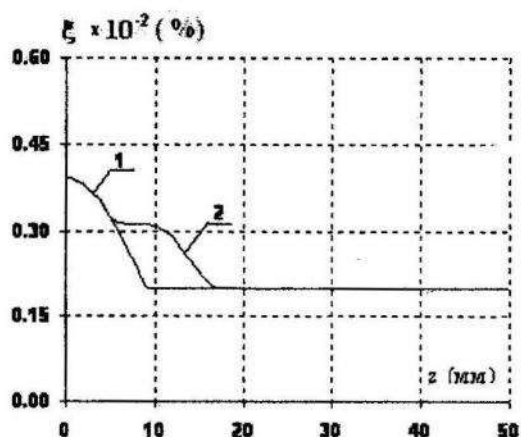


Рис. 5

На рис. 4 зображено початковий розподіл температури в оболонці (крива 1) і розподіл температури, який відповідає оптимальному розподілу фаз (крива 2).

На рис. 5 показано залишковий розподіл β - фази, який відповідає початковому розподілу температури в оболонці (крива 1) і оптимальний залишковий розподіл β - фази після охолодження (крива 2), відповідно.

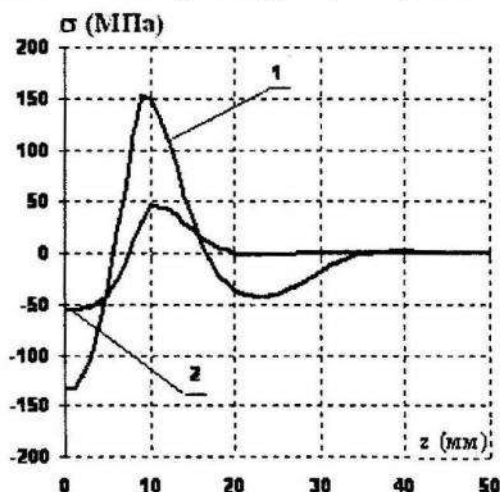


Рис. 6

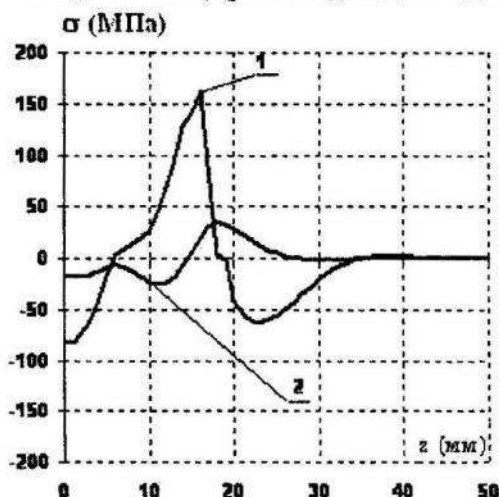


Рис. 7

На рис. 6 зображено розподіл тимчасових осьових напружень, який відповідає початковому розподілу температури в оболонці і залишкових осьових напружень після охолодження (крива 2).

На рис. 7 показано розподіл оптимальних тимчасових осьових напружень під час температурної витримки (крива 1) і оптимальних залишкових осьових напружень після охолодження (крива 2).

Задачу оптимізації розв'язували методом Хука-Джівса [28]. Залишковий фазовий розподіл, який зображений на рис. 5, крива 1, був прийнятий за початкове наближення для визначення оптимального, який спричиняє мінімальні залишкові напруження. Мінімізація функціонала (21) відбувалася шляхом варіювання залишкового фазового розподілу. Мінімізацію проводили доти, доки його n -те наближення не відрізнялося більше ніж на 1 % від попереднього.

При оптимізації функціонала (21) за залишковими напруженнями початкове значення функціонала було визначено за допомогою залишкового фазового розподілу (рис. 5, крива 1), який виник після температурної витримки температурним полем (рис. 4, крива 1). Оптимальний залишковий фазовий розподіл (рис. 5, крива 2) було визначено методом Хука-Джівса. Залишкові осьові напруження на зовнішній поверхні оболонки (криві 2 на рис. 7) відповідають цьому оптимальному фазовому розподілу. Режим температурної витримки (рис. 4, крива 2), що створює цей фазовий розподіл, був визначений за допомогою залежності $\xi = \xi(t)$, яка зображена на рис. 2, крива 2. Знайдене тут температурне поле мінімізує залишкові напруження у циліндрі, які з'явилися після цього режиму температурної витримки.

Висновки. Розроблено методику розв'язання задач визначення й оптимізації фазового складу та залишкового структурного напруженого стану титанових сплавів за умов локального поля температурної витримки на підставі методу скінчених елементів.

У рамках запропонованої методики виконали розрахунок і оптимізацію тимчасових і залишкових (структурних) напружень в осесиметричній оболонці за умов локального поля температурної витримки.

Список використаної літератури

1. Бурак Я.И. О применении методов вариационного исчисления к решению задач об оптимальном нагреве тонких оболочек / Я.И. Бурак, Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач. В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С. 100–108.
2. Беленов Ф.С. Кинетика закалки и определение временных закалочных напряжений / Ф.С. Беленов. // Журнал технической физики. – Т. 22, Вып. 1. – 1952. – С. 111–120.
3. Василик А.В.. Теплові розрахунки при зварюванні / А.В. Василик, Я.А. Дрогомирецький, Я.А. Криль. – Івано-Франківськ: Факел, 2004.
4. Гачкевич О.Р. Математичне моделювання і аналіз термомеханічної поведінки твердих тіл в умовах фазових перетворень / О.Р. Гачкевич, В.І. Асташкін // Прикладні проблеми механіки і математики. – Львів, 2003. – №1. – С. 68–72.

5. Григолюк Э.И. Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки / Э.И. Григолюк, Я.И. Бурак, Я.С. Подстригач. Докл. АН СССР. – 1967. – 174, №3. – С. 534–537.
6. Григолюк Э.И. Постановка и решение некоторых вариационных задач термоупругости тонких оболочек применительно к выбору оптимальных режимов местной термообработки / Э.И. Григолюк, Я.И. Бурак, Я.С. Подстригач. – Журн. прикл. механики и тех. физики. – 1968. – №4. – С. 47–54.
7. Григолюк Э.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак. – К: Наук. думка, 1979.
8. Ильин А.А. Объемные изменения, происходящие в (α - β) титановых сплавах при полиморфном превращении / А.А. Ильин, М.Ю. Коллеров, В.В. Засыпкин, В.И. Майстров // Металловедение и термическая обработка. – 1986. – №1. – С. 52–55.
9. Ильин А.А. Механизм и кинетика фазовых и структурных превращений в титановых сплавах / А.А. Ильин. – М.: Наука, 1994.
10. Зайффарт П. Расчетные модели для оценки механических свойств металла ЗТВ при сварке низколегированных сталей / П. Зайффарт, О.Г. Касаткин // Микроструктура и свойства. – 2002. – № 2. – С. 103–106.
11. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986.
12. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – К: Наук. думка, 1970.
13. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970.
14. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Под ред. Сахарова А.С., Альтенбаха И. – К.: Вища школа, 1982.
15. Підстригач Я.С. Основи теорії оптимальних режимів локальної термообробки зварних швів / Я.С. Підстригач // Вісн. АН УРСР – 1969. – №5. – С. 37–43.
16. Подстригач Я.С. О влиянии профиля температурного поля на релаксацию остаточных напряжений при локальном нагреве кольцевых сварных швов / Я.С. Подстригач, З.И. Горячева, Я.И. Бурак, Л.П. Беседина, Л.А. Козакова, В.А. Каныгин // Физ.-хим. механика материалов. – 1970. – №1. – С. 42–45.
17. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984.

18. Прохоров Н.Н. Физические процессы в металлах при сварке / Н.Н. Прохоров. Т. II. Внутренние напряжения, деформации и фазовые превращения. – М.: Металлургия, 1976.
19. Рыкалин Н.Н. Тепловые процессы при сварке плавлением / Н.Н. Рыкалин, Н.Н. Рыкалин, А.И. Пугин. – М.: Профиздат, 1959.
20. Рыкалин Н.Н. Тепловые основы сваривания / Н.Н. Рыкалин. – М.: Изво АН СССР, 1947. Ч. 1.
21. Таблицы физических величин. / Под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976.
22. Monkawa M. Analyses of structural and stress changes during quenching and low-temperature-tempering of steels / M. Monkawa, S. Nagaki and T. Inine // The Journal of Society Material Science, Japan, 1980, Vol. 29. N 327. P. 1173–1179.
23. Budz S. Optimization of local heating for a spherical shell made of titanium alloy BT-23 / S. Budz, W. Astashkin, I. Budz and I. Chupyk. Archives of mechanics, Warszawa, 1998, Vol. 50. N 1. P. 113–126.
24. Hachkevych A. A mathematical simulation of high temperature induction heating of electroconductive solids / A. Hachkevych, B. Drobenko, T. Kournyts'kyi // International Journal of Heat and Mass Transfer, 50 (2007). P. 616–624.
25. Zienkiewicz O.C. Finite Element Method: V. 1. The Basis. / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – London: Butterworth Heinemann, 2000.
26. Zienkiewicz O.C. A unified set of single step algorithm. Part 1: General formulation and applications / O.C. Zienkiewicz, W.L. Wood, N.W. Nine // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1984. 20. – P. 1529–1552.
27. Коваль Ю.Н. Деформационные и релаксационные явления при превращениях мартенситного типа / Ю.Н. Коваль, В.А. Лободюк. – К.: Наук. думка, 2010.
28. Химмельблау. Прикладное нелинейное программирование / Химмельблау. – М.: Мир, 1975.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ВЫДЕРЖКИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ТИТАНОВОГО СПЛАВА С УЧЕТОМ ПОЛИМОРФНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Игорь ЧУПИК

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина*

На основании метода конечных элементов и метода Хука-Пондизса разработано числовую методику оптимизации локального поля температурной выдержки осесимметричной оболочки, которая изготовлена из титанового сплава. Учтено явление полиморфного превращения при изменении температуры.

Ключевые слова: оптимизация, термомеханические процессы, фазовые превращения, остаточные напряжения.

OPTIMIZATION OF LOKAL TEMPERATURE CURING FOR AXIS- SYMMETRIC SHELLS MADE FROM TITANIUM ALLOY TAKING INTO ACCOUNT POLIMORPHIC TRANSITION

Ihor CHUPYK

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine*

Numerical optimization method of local temperature curing for axis-symmetric shells made of titanium alloy based on finite element and Hooke-Jeeves method is developed. The phenomena of polymorphic transition during temperature changing is taken into account.

Key words: optimization, thermo-mechanical processes, phase transitions, residual stresses.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.2012
Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 539.3

ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Микола СЛОБОДЯН, Василь БЕДРІЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розв'язано задачу про двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором і наскрізною радіальною прямолінійною тріщиною, береги якої гладко контактують поблизу однієї з основ пластини. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту та горизонтальних переміщень на тріщині. Крайові умови на круговому отворі задовольняються аналітично. Побудовано графічні залежності контактного зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль.

Ключові слова: згин, пластина, круговий отвір, комплексні потенціали, контактний тиск, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Вступ. Пластинчасті елементи широко застосовують у машинобудуванні, авіаційній, будівельній, суднобудівельній та інших галузях техніки. Ці елементи з технічних міркувань можуть містити кругові отвори. Під час встановлення чи в процесі експлуатації у них можуть виникати тріщиноподібні дефекти. Під дією зовнішнього навантаження в пластинчастих елементах біля тріщиноподібних дефектів виникають високі концентрації напружень. Важливо знати, як ці дефекти будуть впливати на напружено-деформований стан і на міцність пластини при згині.

З фізичних міркувань зрозуміло, що за згину пластини береги тріщин будуть контактувати. Розв'язати задачу згину пластини з круговим отвором і тріщинами, береги яких контактують, у тривимірному формулюванні досить складно. Набагато простіше розв'язати таку задачу, використовуючи класичну теорію згину пластин і плоску задачу теорії пружності.

У працях [1-5] розв'язано задачі згину пластин з тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії на одній із основ пластини. Вплив ширини області контакту тріщин на напружено-деформований стан пластини вивчали у [6-9]. В [10-13] розглянуто двосторонній згин пластини з коловою межею поділу матеріалів і прямолінійними тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії на одній із основ пластини.

Мета нашої праці – дослідити вплив ширини області контакту тріщини на напружено-деформований стан ізотропної пластини з круговим отвором і радіальною тріщиною.

Формулювання задачі. Досліджено задачу про двовісний згин безмежної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з круговим отвором радіуса R та

радіальною тріщиною завдовжки $2l$. Будемо користуватись декартовою системою координат Oxy і полярними координатами r, θ з полярною віссю Ox . Береги тріщини під дією розподілених згинальних моментів M_x^∞ і M_y^∞ на нескінченності приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 поблизу верхньої основи пластини [8] (рис. 1). За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подається у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини та плоскої задачі.

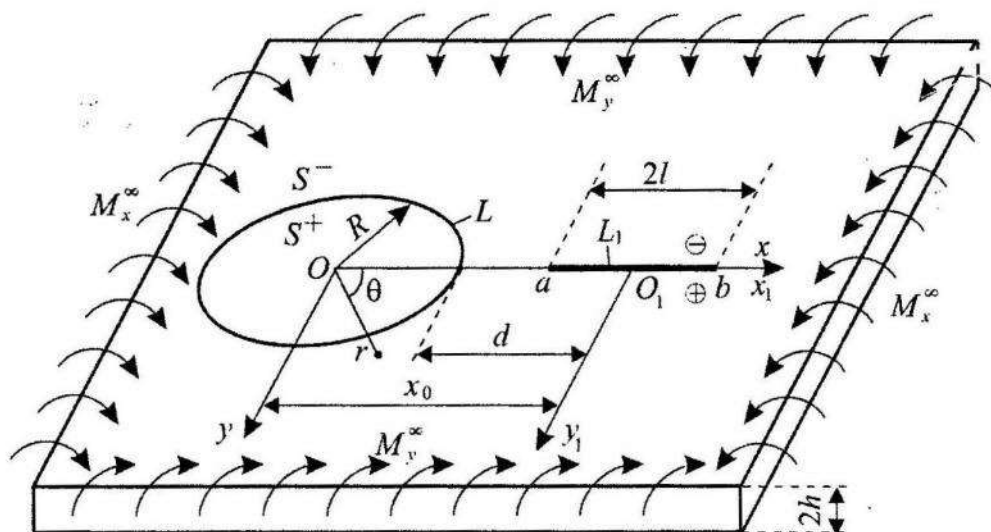


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Задача розв'язана за таких крайових умов:

$$\sigma_r = 0, \sigma_{r\theta} = 0, M_r = 0, P_r = 0, \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^\pm = -N/(2h), \sigma_{xy}^\pm = 0, P^\pm = 0, M_y^\pm = M_y, x \in L_1, \quad (2)$$

$$M_y = \beta N, \partial_x[v_P] + \alpha \partial_{xy}^2[w] = 0, x \in L_1, \quad (3)$$

$$\alpha = 0,5 \left(1 + (1 - \gamma)^2\right) h, \beta = (1 - \gamma/3) h, \gamma = h_1/h, \quad (4)$$

де N – контактний тиск між берегами тріщини; $\sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_r$ і $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень; v_P – компонента вектора переміщень у плоскій задачі; w – прогин пластини в задачі згину; M_y і M_r – згинальний момент; P і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили; $[f] = f^+ - f^-$, значками “+” і “-” позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Розв'язок задачі. З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [14] і класичної теорії згину пластин [15], аналогічно як у [10], розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної площини у задачі згину $Y(\eta)$ та стрибків переміщень на берегах тріщини у плоскій задачі $G(\eta)$, яка набула вигляду

$$\int_{-1}^1 \{K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi)\} Y_1(\eta) d\eta - \frac{\varepsilon^2 c'}{X^2} = c'_0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi)\} G_2(\eta) d\eta = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{L(\eta, \xi) - K(\eta, \xi)\} Y_2(\eta) d\eta + \\ & + \frac{2\beta\tilde{m}}{\pi} \int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi)\} G_1(\eta) d\eta = P(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} P(\xi) &= -\tilde{\kappa}A + \frac{\tilde{B}}{X^2} + A - \frac{\tilde{B}}{\tilde{\kappa}X^2} - \frac{\tilde{B}}{\tilde{\kappa}X^4} + \frac{A}{X^2} + \frac{2\tilde{B}}{\tilde{\kappa}} \frac{X^2 - 1}{X^4} + \tilde{B} - \frac{\tilde{\kappa}A}{X^2}, \\ K(\eta, \xi) &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\tilde{\kappa}}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{2\tilde{\kappa}}{X(TX - 1)} + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \frac{1 - T^2}{T(TX - 1)^2} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \frac{(1 - T^2)(2TX^3 - 3TX + 1)}{TX^2(1 - TX)^3} \right) \right\}, \\ L(\eta, \xi) &= \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{T^2 - 1}{T(TX - 1)^2} - \frac{1}{X(TX - 1)} - \frac{1}{TX^2} + \frac{X^2(2TX - 1) - 3TX + 2}{X^3(TX - 1)^2} \right\}, \\ R(\eta, \xi) &= \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{X(TX - 1)} + \frac{1 - T^2}{T(TX - 1)^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(1 - T^2)(2TX^3 - 3TX + \varepsilon^4) - TX(1 - TX)^2}{TX^2(1 - TX)^3} \right\}, \end{aligned}$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1 - T^2}{T(TX - 1)^2} + \frac{1}{X(TX - 1)} + \frac{1}{TX^2} - \frac{X^2(2TX - 1) - 3TX + 2}{X^3(TX - 1)^2} \right\},$$

$$A = -\frac{\rho + 1}{4\tilde{D}(1 + v)}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{3 + v}{1 - v}, \quad \kappa = \frac{3 - v}{1 + v}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + v)},$$

$$\tilde{B} = \frac{1 - \rho}{2} \tilde{m}, \quad \tilde{D} = \frac{2}{3(1 - v^2)}, \quad \tilde{m} = -\frac{1}{\tilde{D} \cdot (1 - v)}, \quad \rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty},$$

$$\lambda = l/R, \quad \varepsilon = d/R, \quad T = 1 + \varepsilon + \lambda\eta, \quad X = 1 + \varepsilon + \lambda\xi,$$

$$y(x) Eh^3 / M_y^\infty = Y(x) = Y_1(x) + iY_2(x), \quad y(x) = (1 + \tilde{\kappa})^{-1} [\partial_x w + i\partial_y w],$$

$$\frac{h^2 g'(x)}{M_y^\infty} = G(x) = G_1(x) + iG_2(x), \quad g'(x) = \frac{2\mu}{i(1 + \kappa)} [\partial_x (u_P + iv_P)],$$

$Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$ – дійсні функції; E – модуль Юнга; v – коефіцієнт Пуассона.

Зауважимо, що на підставі (3) функції $G_1(\eta)$ і $Y_2(\eta)$ пов'язані співвідношенням

$$G_1(\eta) + \frac{\alpha(1 + \tilde{\kappa})}{(1 + \kappa)(1 + v)} Y_2(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (8)$$

Рівняння (5)-(7) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 Y(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta Y_1(\eta) d\eta = 0, \quad (9)$$

які виражають, відповідно, однозначність кутів повороту та прогину пластини при обході контуру тріщини.

Для знаходження сталої c' використаємо однозначність прогину пластини при обході кругового отвору

$$c' = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda Y_1(\eta) d\eta}{T}. \quad (10)$$

Враховуючи умову однозначності переміщень при обході контуру тріщини, отримаємо

$$\int_{-1}^1 G(\eta) d\eta = 0. \quad (11)$$

Контактне зусилля між берегами тріщини обчислимо за формулою

$$N^*(\xi) = \frac{hN(\xi)}{M_y^\infty} = 2 \int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi)\} G_1(\eta) d\eta, \quad \xi \in [-1, 1].$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КИМ) $K = K_1 - iK_2$ та зусиль (КІЗ) $k = k_1 - ik_2$ можна обчислити за формулами [16]

$$k = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)g'(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)/l},$$

$$K = \mp 4Eh^3(3 + \nu)(3(1 - \nu^2))^{-1} \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)y(x)).$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Отримана система інтегральних рівнянь (5)-(11) розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур [17, 18] при $\nu = 0.3$, $\gamma = h_1/h = 0.13$.

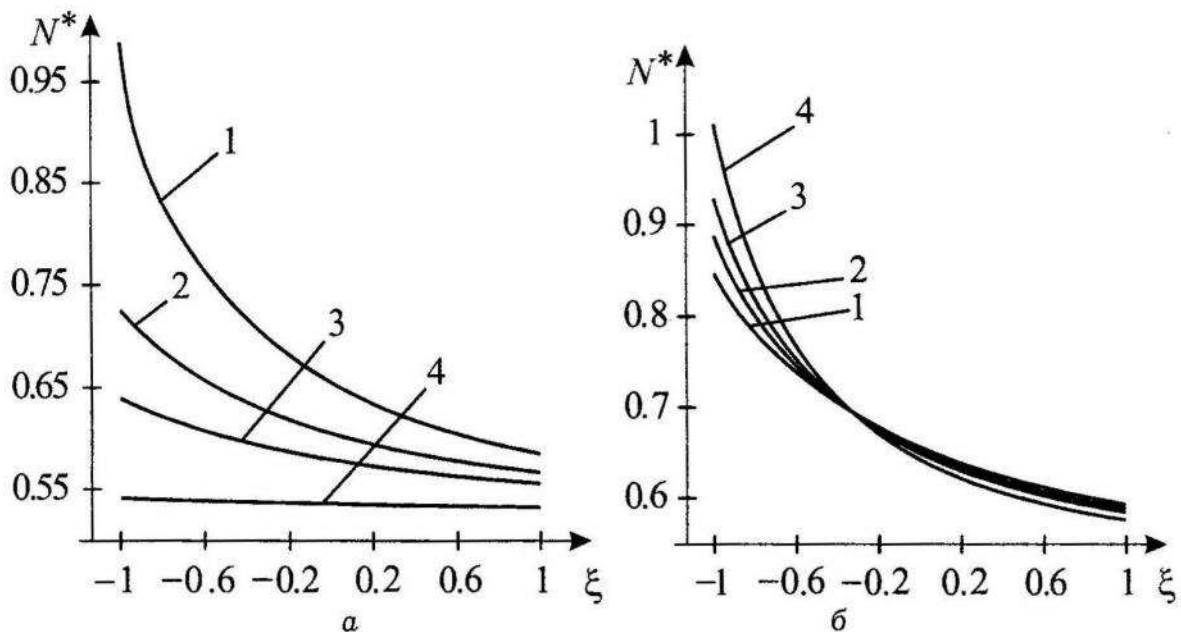


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактеного зусилля між берегами тріщини

На рис. 2, а зображено графічну залежність зведеного контактеного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $\lambda = l/R = 0.9$, $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$. Крива 1 побудована при $\varepsilon = d/R = 1$, крива 2 – $\varepsilon = 1.5$, крива 3 – $\varepsilon = 2$, крива 4 – $\varepsilon = 5$. Як видно з цього рисунка, зі збільшенням відносної відстані ε від центра

тріщини до кругового отвору контактне зусилля між берегами тріщини зменшується, а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ отримаємо результати [8].

На рис. 2 б зображено графічну залежність зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $\lambda = 0.8$, $\varepsilon = 1$. Крива 1 побудована при $\rho = 0$, крива 2 – $\rho = 1$, крива 3 – $\rho = 2$, крива 4 – $\rho = 4$. Бачимо, що зі збільшенням відношення моментів $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty$ контактне зусилля у вершині a збільшується, а у вершині b – зменшується. З рис. 2 видно, що контактний тиск максимального значення набуває у ближній вершині тріщини стосовно кругового отвору.

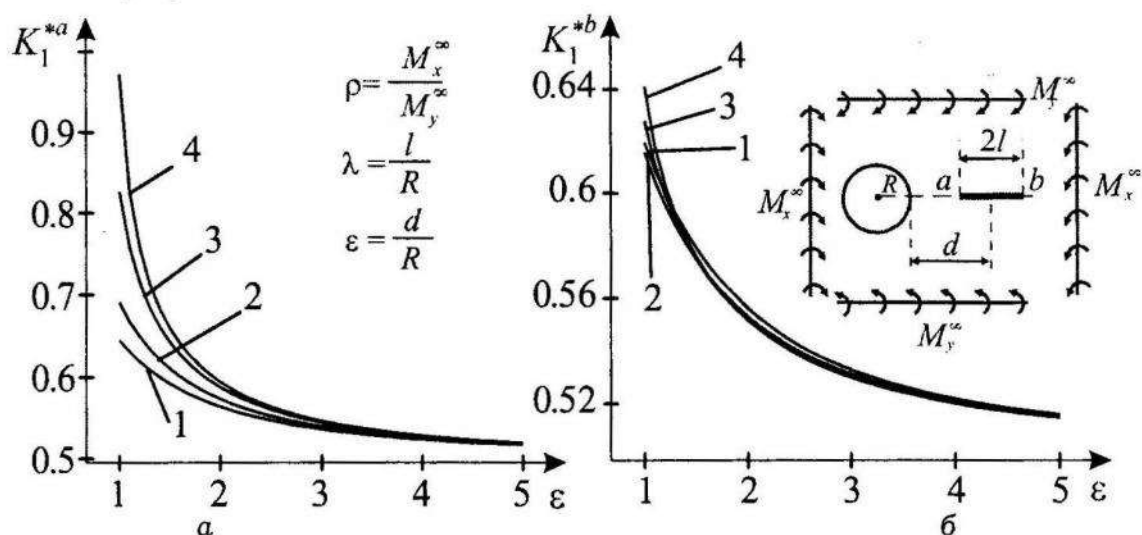


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності моментів

На рис. 3 показано графічну залежність зведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КІМ) $K_1^* = K_1/(M_y^\infty \sqrt{l})$ у вершині a (рис. 3, а) та у вершині b (рис. 3, б) від відносної відстані центра тріщини до кругового отвору ε при $\rho = 0.5$. Криві 1 побудовані при $\lambda = 0.2$, криві 2 – $\lambda = 0.5$, криві 3 – $\lambda = 0.8$, криві 4 – $\lambda = 0.9$. З рис. 3 видно, що КІМ у вершині тріщини a є більшими, ніж у вершині b . Зі збільшенням відносної довжини тріщини λ КІМ у вершині тріщини a збільшуються, а у вершині b майже не змінюються. При віддаленні тріщини від отвору КІМ у вершинах a та b тріщини зменшуються і прямують до однієї величини, яка відповідає випадку однієї ізольованої тріщини [8].

Числовий аналіз виявив, що береги тріщини будуть завжди контактувати. Коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль у ближній вершині тріщини стосовно отвору завжди більші, ніж в дальній вершині. При $\gamma = 0$ отримаємо результати роботи [10]. Крім того, між зведеним

коефіцієнтом інтенсивності зусиль $k_1^* = h k_1 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ і коефіцієнтом інтенсивності моментів $K_1^* = K_1 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ існує залежність $\frac{k_1^*}{K_1^*} = \frac{3\alpha(1+\nu)}{(3+\nu)h}$, а $k_2^* = 0$ і $K_2^* = 0$ при такому розміщенні тріщини стосовно отвору.

Список використаної літератури

1. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
2. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / Young M., Sun C. // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.
3. Шацкий И.П. Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2000. – № 31. – С. 91-97.
4. Шацький І. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. Львів: Каменяр, 2000. – Т. 2, С. 51-54.
5. Опанасович В. Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, І.М. Яцик // Вісн. Дніпропетровського ун-ту, 2007. Механіка. Вип.11. Т. 2. № 2/2. С.141-148.
6. Slepian L.I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.I. Slepian, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727-1749.
7. Dempsey J.P. Closure of a through crack in a plate under bending. / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.L. Slepian // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35. – P. 4077-4089.
8. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123-127.
9. Опанасович В. Визначення критичного навантаження за згину пластини Рейснера з наскрізними тріщинами та з урахуванням контакту їхніх берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Механіка

- руйнування матеріалів і міцність конструкцій: наук. зб.; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 155–160.
10. Опанасович В. Двосторонній згин пластины з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 46–59.
 11. Опанасович В.К. Двовісний згин пластины з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106–119.
 12. Опанасович В. Двовісний згин безмежної пластины з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують / В. Опанасович, М. Слободян // Вісник Львівського державного аграрного університету. – 2007. – № 8. – С. 75–87.
 13. Опанасович В. Двосторонній згин ізотропної кусково-однорідної пластины з коловою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з урахуванням контакту берегів / В. Опанасович, І. Звізло // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. Львів: Каменяр. – 2009. – Вип. 8. – С. 63–78.
 14. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили – М.: Наука, 1966.
 15. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.
 16. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук – К.: Наук. думка, 1988.
 17. Панасюк В. В. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин – К.: Наук. думка, 1976.
 18. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим – Львів, 2007.

ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Виктор ОПАНАСОВИЧ, Николай СЛОБОДЯН, Василий БЕДРИЙ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Исследовано задачу об изгибе изотропной пластины с круговым отверстием и радиальной прямолинейной трещиной с учетом ширины области контакта ее берегов. Используя метод теории функций комплексного переменного и комплексные потенциалы плоской задачи и классической теории изгиба пластины, решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений на трещине, которая решена численно. Проведен численный анализ задачи.

Ключевые слова: изгиб, пластина, круговое отверстие, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности моментов и усилий.

BENDING OF THE PLATE WITH A CIRCULAR ORIFICE AND A RADIAL CRACK WITH THE WIDTH OF THE CONTACT AREA OF THE SHORES

Viktor OPANASOVYCH, Mykola SLOBODYAN, Vasil BEDRIY

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The bilateral bending of an isotropic plate with a circular orifice and a radial crack with considering of the contact it's shores is investigated. With application of methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the solution of a problem is shown to a system of integral equations, which is solved by numerical method with the help of method of mechanical quadratures. The numerical analysis of a problem is conducted, because of which are constructed of graphic dependence of contact pressure, coefficients intensity moment and efforts.

Key words: bilateral bending, isotropic plate, circular orifice, radial crack, two-dimensional problem of the theory of elasticity, classical theory of bend, complex potentials, contact pressure, coefficients intensity moment.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

УДК 517.982.4

FUNCTIONAL CALCULUS ON A WIENER TYPE ALGEBRA OF ANALYTIC FUNCTIONS OF INFINITY MANY VARIABLES

Olga MYAUS

*Lviv Polytechnic National University
 12 St. Bandera, 79013 Lviv, Ukraine*

For generators of isometric strong continuous operator groups, defined on nuclear Wiener algebras of analytic complex functions on a unit Banach ball, a functional calculus is constructed. Its symbol algebra consists of Fourier-images of exponential type distributions.

Key words: Functional calculus, Wiener type algebra, Banach ball, Fourier-image of exponential type distributions.

1. C_0 -group $\hat{U}_t$ over the Wiener algebra W_π

Let X, X' be complex Banach reflexive space and its dual, respectively. By $\langle X | X' \rangle$ we denote the corresponding duality. We use the main notations and definitions from [1]. For every $F'_n \in X'^{\odot n}_\pi$ there exists [2] a unique n -homogeneous polynomials F_n such that

$$F_n(x) := \langle x^{\odot n} | F'_n \rangle \text{ for all } x \in X.$$

We denote by

$$\mathcal{P}^n_\pi(X) = \{F_n : F'_n \in X'^{\odot n}_\pi\}$$

the space of so-called nuclear n -homogeneous polynomials, where the complete symmetric tensor product $X'^{\odot n}_\pi$ with the projective norm $\|\cdot\|_\pi$ endowed. It follows from it the isomerty $\mathcal{P}^n_\pi(X)$ and $X'^{\odot n}_\pi$, so on $\mathcal{P}^n_\pi(X)$ we may define the following norm

$$\|F_n\| := \|F'_n\|_\pi, F'_n \in X'^{\odot n}_\pi.$$

Definition. The ℓ_1 -sum

$$W_\pi := \{F = \sum_{n \geq 0} F_n : F_n \in \mathcal{P}^n_\pi(X)\}$$

with the norm $\|F\| = \sum \|F_n\|$ is called the nuclear Wiener type algebra.

© Myaus O., 2012

Друкується в авторській редакції.

Similar to [3], it can be shown that W_π is a Banach algebra of bounded analytic functions in $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$.

It is known ([4], theorem 1) that for C_0 -group of linear isometric operator $\mathbb{R} \ni t \mapsto U_t \in \mathcal{L}(X)$ the C_0 -group

$$\hat{U}_t F(x) = F(U_t x), (x \in B) \text{ on } W_\pi$$

is contractive.

Applying the isometric property of $\hat{U}_t$ over W_π and [5, theorem 2] we obtain that its (infinitesimal) generator $\hat{A}$ is a closable conservative differentiation on W_π .

We will use the fact that the C_0 -group $\hat{U}_t$ over the Wiener algebra W_π is well-defined and acted as follows

$$\hat{U}_t F = \sum_{n \geq 0} \hat{U}_t^{\odot n} F_n, F = \sum F_n \in W_\pi,$$

where $\hat{U}_t^{\odot n}$ is defined in [4, proposition 2] by the equality

$$\hat{U}_t^{\odot n} F_n(x) = \langle x^{\odot n} | U_t'^{\otimes n} F_n' \rangle \text{ for all } x \in X,$$

where $U_t'^{\otimes n} = \underbrace{U_{t'} \otimes \dots \otimes U_{t'}}_n$ and $\langle U_t x | y \rangle = \langle x | U_t' y \rangle$ for all $x, y \in X$, U_t' is

the adjoint group of U_t .

Let $\hat{A}$ be the generator of $\hat{U}_t$ of the form ([4, proposition 3])

$$\hat{A}F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \left| \sum_{j=0}^n A_j' F_n' \right. \right\rangle, A_j' := \frac{I' \otimes \dots \otimes I'}{j-1} \otimes A' \otimes \frac{I' \otimes \dots \otimes I'}{n-j+1}, x \in B,$$

defined on a norm dense subspace $\mathcal{D}(\hat{A}) = \{F = \sum F_n : F_n' \in \mathcal{D}(A')^{\odot n}\}$ in W_π , where $\mathcal{D}(A')$ is the definition's domain of adjoint generator A' .

2. Finite functions of the generator $\hat{A}$

For $\nu > 0$ we consider (see [6]) $\mathcal{E}^\nu := \{\varphi \in L_1(\mathbb{R}) : \|\varphi\|_\nu < \infty\}$ with the

$$\text{norm } \|\varphi\|_\nu = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|D^k \varphi(t)\|_{L_1}}{\nu^k}$$

- the subspace in $L_1(\mathbb{R})$ of entire analytic complex functions of exponential type ν on $\mathbb{C}$, whose restrictions to $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ belongs to $L_1(\mathbb{R})$. Let

$$\mathcal{E} := \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}^\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } \mathcal{E}^\nu$$

be the inductive limit of Banach spaces $\mathcal{E}^\nu$ under the continuous embeddings $\mathcal{E}^\nu \subset \mathcal{E}^\mu$ with $\nu \leq \mu$. Note that the subspace $\mathcal{E} \subset L_1(\mathbb{R})$ consists of all entire analytic complex functions on $\mathbb{C}$ of exponential type, whose restrictions to the real axis $\mathbb{R}$ belong to $L_1(\mathbb{R})$. Following [6], the functionals of the space $\mathcal{E}'$ are called *exponential type distributions* over $\mathbb{R}$. In the dual pair $\langle \mathcal{E} | \mathcal{E}' \rangle$ the space $\mathcal{E}$ play a role of the space test functions and the embedding $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ is dense.

It is proven in [6] that $\mathcal{E}'$ is invariant under the differentiations. Consequently, we obtain

$$\langle D^k g | \varphi \rangle = (-1)^k \langle g | D^k \varphi \rangle, k \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

for all functionals $g \in \mathcal{E}'$ and all entire functions $\varphi \in \mathcal{E}$ on $\mathbb{R}$ of exponential type. It follows from [6] that $\mathcal{E}'$ is a locally convex topological algebra with respect to the convolution

$$\mathcal{E}' \times \mathcal{E}' \ni (g, h) \mapsto g * h \in \mathcal{E}'$$

and $\mathcal{E}$ is its convolution subalgebra.

By the well-known Paley-Wiener theorem [7], the Fourier-image $\hat{\mathcal{E}}$ of the space $\mathcal{E}$, endowed with inductive topology under the Fourier transform $\mathcal{F} : \mathcal{E} \ni \varphi \rightarrow \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{E}}$, consist of infinitely smooth finite complex functions on $\mathbb{R}$. So,

$$\hat{\mathcal{E}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (2)$$

where $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ means the classic Schwartz space of test functions.

Via [6] the Fourier transform $\mathcal{F}$ can be extended from the space $\mathcal{E}$ onto the strong dual space

$$\mathcal{F}^\# : \mathcal{E}' \ni g \rightarrow \hat{g} \in \hat{\mathcal{E}}',$$

where $\hat{\mathcal{E}}'$ denotes its image, i.e. $\mathcal{F}^\#|_{\mathcal{E}} = \mathcal{F}$. This extended Fourier transform $\mathcal{F}^\#$ has the property

$$\mathcal{F}^\#(g * h) = \hat{g} \cdot \hat{h}, \quad g, h \in \mathcal{E}'.$$

So, the extended Fourier-image $\hat{\mathcal{E}}'$ is a topological algebra with pointwise multiplication and $\hat{\mathcal{E}}$ is its multiplication subalgebra.

Since the embedding (2) is dense, the dense embedding

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \subset \hat{\mathcal{E}}'$$

holds, where the dual spaces $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ and $\hat{\mathcal{E}}'$ are endowed with the strong (or weak) topologies under the dualities $\langle \mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rangle$ and $\langle \hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{E}}' \rangle$, respectively. Hence, $\langle \hat{\mathcal{E}} | \hat{\mathcal{E}}' \rangle$ forms a new dual pair, which is a Fourier-image of the dual pair $\langle \mathcal{E} | \mathcal{E}' \rangle$.

The following theorem is a generalization of [7, theorem 3] and may be proven in analogous way.

Theorem 1. For every $\varphi \in \mathcal{E}$ the operator

$$\hat{\varphi}(\hat{A})F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \mid \sum_{j=0}^n [\hat{\varphi}(A_j)]' F_n' \right\rangle, \quad x \in B, \quad (3)$$

belongs to the Banach algebra $\mathcal{L}(W_\pi)$ of all bounded linear operators over W_π , where the operators

$$\hat{\varphi}(A) = \int_{\mathbb{R}} U_t \varphi(t) dt, \quad [\hat{\varphi}(A_j)]' := \frac{I' \otimes \dots \otimes I'}{j-1} \otimes [\hat{\varphi}(A)]' \otimes \frac{I' \otimes \dots \otimes I'}{n-j+1}$$

(here $[\hat{\varphi}(A)]'$ is adjoint to $\hat{\varphi}(A) \in \mathcal{L}(X)$) are bounded over X and $X_\pi^{\odot n}$, respectively. Moreover, the differential property

$$\hat{(D\varphi)}(A) = \hat{A} \circ \hat{\varphi}(A), \quad \varphi \in \mathcal{E}$$

holds and the mapping

$$\hat{E} \ni \hat{\varphi} \mapsto \hat{\varphi}(A) \in \mathcal{L}(W_\pi)$$

is an algebraic homomorphism, particularly

$$\hat{(\varphi * \psi)}(A) = \hat{\varphi}(A) \cdot \hat{\psi}(A) \quad \text{for all } \varphi, \psi \in \mathcal{E}.$$

3. Functional calculus for the generator $\hat{A}$ in the symbol algebra $\hat{\mathcal{E}}'$

Following [6] we define the completions $\mathcal{E}(W_\pi) := \mathcal{E} \otimes_\pi W_\pi$ and $\mathcal{E}''(W_\pi) := \mathcal{E}'' \otimes_\pi W_\pi$ of the tensor product $\mathcal{E} \otimes W_\pi$ and $\mathcal{E}'' \otimes W_\pi$ under the

corresponding projective tensor topologies. Then

$$\mathcal{E}(W_\pi) = \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}^\nu(W_\pi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } \mathcal{E}^\nu(W_\pi) = \left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } \mathcal{E}^\nu \right) \otimes_\pi W_\pi.$$

Each element $F \in \mathcal{E}(W_\pi)$ is a W_π -valued exponential type entire function

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto F(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} F_n(x, t) \in W_\pi,$$

which also is an analytic complex function of $x \in B$ for any fixed t .

It follows from the known Grotendieck theorem [8] that for every $F \in \mathcal{E}(W_\pi)$ there exists $\nu > 0$ such that

$$F = \sum_{j \in \mathbb{N}} F_j \otimes \varphi_j \quad \text{with} \quad F_j \in W_\pi, \quad \varphi_j \in \mathcal{E}^\nu \quad (4)$$

is absolutely convergent in $\mathcal{E}^\nu(W_\pi)$. Hence, we can well-define the elements

$$\hat{F} := \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} \hat{\varphi}_j(\hat{A}) F_j,$$

where $\hat{\varphi}_j(\hat{A})$ is defined by (3). For any $\nu > 0$ the subspace

$$\hat{\mathcal{E}}^\nu(W_\pi) := \{ \hat{F} : F \in \mathcal{E}^\nu(X) \}$$

is complete under the norm induced by the mapping $\mathcal{E}^\nu(W_\pi) \ni F \mapsto \hat{F} \in \hat{\mathcal{E}}^\nu(W_\pi)$ (see [5, lemma 5]).

We define the convolution of an exponential type distribution $g \in \mathcal{E}'$ and W_π -valued exponential type entire function $F \in \mathcal{E}(W_\pi)$, representing by a series (4), as follows

$$(F * g)(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} F_j(x) \otimes (g * \varphi_j)(t), \quad x \in B, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Denote

$$(F * g)(x, t) := (I \otimes K_g)F(x, t), \quad x \in B, \quad t \in \mathbb{R},$$

where I is identity operator on W_π and the convolution $g * \varphi$ of exponential type distribution $g \in \mathcal{E}'$ and exponential type entire complex function $\varphi \in \mathcal{E}$ is defined in [5].

For any $\nu > 0$ the subspace $\hat{\mathcal{E}}(W_\pi)$ is invariant under each operator $I \otimes K_g$ with $g \in \mathcal{E}'$ (see [5], lemma 6). If we define the inductive limit

$$\hat{\mathcal{E}}(W_\pi) := \bigcup_{\nu > 0} \hat{\mathcal{E}}^\nu(W_\pi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } \hat{\mathcal{E}}^\nu(W_\pi)$$

then $\hat{\mathcal{E}}(W_\pi)$ also is invariant under each operator $I \otimes K_g$ with $g \in \mathcal{E}'$.

The following theorem is a generalization of [6, theorem 6]. We denote by $\mathcal{L}[\hat{\mathcal{E}}(W_\pi)]$ the algebra of all bounded linear operators over the space $\hat{\mathcal{E}}(W_\pi)$ endowed with the strong operator topology.

Theorem 2. The mapping $\mathcal{E}' \ni \hat{g} \rightarrow \hat{g}(\hat{A}) \in \mathcal{L}[\hat{\mathcal{E}}(W_\pi)]$, where the linear operator $\hat{g}(\hat{A})$ is defined by

$$\hat{g}(\hat{A}) : \hat{\mathcal{E}}(W_\pi) \ni \hat{F} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} \hat{\varphi}_j(\hat{A}) F_j \rightarrow \hat{g}(\hat{A}) \hat{F} := \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} (g \hat{*} \varphi_j)(\hat{A}) F_j \in \hat{\mathcal{E}}(W_\pi),$$

is a continuous homomorphism from the symbol algebra $\mathcal{E}'$ into $\mathcal{L}[\hat{\mathcal{E}}(W_\pi)]$. Moreover,

$$(\hat{D}g)(\hat{A}) = \hat{A} \circ \hat{g}(\hat{A}), \quad g \in \mathcal{E},$$

where the generalized derivative D is defined by (1).

Список використаної літератури

1. *Lopushansky A.* Sectorial operators on Wiener algebras of analytic functions / A. Lopushansky // *Topology*. – 2009. – Vol. 48 (2-4). – P. 105-110.
2. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces / S. Dineen // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. – 1998.
3. *Lopushansky O. V.* Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables / O.V. Lopushansky, A.V. Zagorodnyuk // *Ann. Pol. Math.* – 2003. – Vol. 81(2). – P. 111-122.
4. *Bednarz A.* Exponential Type Vectors in Wiener algebras on a Banach ball / A. Bednarz // *Opuscula Mathematica*. – 2008. – Vol. 28, No. 1. – P. 5-17.
5. *Bednarz A.* Exponential Type Vectors of Isometric Group Generators / A. Bednarz, O. Lopushansky // *Matematychni Studii (Proceedings of the Lviv Mathematical Society)*. – 2002. – Vol. 18, No. 1. – P. 99-106.

6. Лозинська В.Я. Аналітичні розподіли експоненціального типу / В.Я. Лозинська, О.В. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – V.42, No 4. – Р. 46-55.
7. Nikolskii S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Embeddings Theorems/ S.M. Nikolskii. – Moscow, Science. – 1977.
8. Schaefer H. Topological Vector Spaces / H. Schaefer. – Springer. – 1971.

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ НА АЛГЕБРИ ТИПУ ВІНЕРА АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НЕСКІНЧЕНОЇ КІЛЬКОСТІ ЗМІННИХ

Ольга М'ЯУС

*Національний університет „Львівська політехніка”,
вул. С. Бандери, 12 79013 Львів, Україна*

Для генераторів ізометричних сильно неперервних операторних груп на ядерних алгебрах Вінера аналітичних комплексних функцій на одиничній банаховій кулі побудовано функціональне числення. Його алгебра символів складається з Фур'є-образів розподілів експоненціального типу.

Ключові слова: функціональне числення, алгебра Вінера, банахова куля, Фур'є-образ розподілів експоненціального типу.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА АЛГЕБРЕ ТИПА ВИНЕРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО КОЛИЧЕСТВА ПЕРЕМЕННЫХ

Ольга МЯУС

*Национальный университет „Львовская политехника”,
ул. С. Бендеры, 12 79013 Львов, Украина*

Для генераторов изометрических сильно непрерывных операторных групп на ядерных алгебрах Винера аналитических комплексных функций на единичном банаховом шаре построено функциональное исчисление. Его алгебра символов состоит из Фурье-образов распределений экспоненциального типа.

Ключевые слова: функциональное исчисление, алгебра Винера, банахов шар, Фурье-образ распределений экспоненциального типа.

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською мовою. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці; назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора (авторів), місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторові дискету; тексти можна надіслати за адресою lnu.visn.mt@gmail.com);

довідку про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10 pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів Кирилиця (Windows) (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. Грабович А.І. Назва / Грабович А.І. – К., 1985.

2. Петренко О.Б. Назва / Петренко О.Б., Шинк М.М. – Л., 2001.

3. Кравчук О.М. Назва / Кравчук О.М. // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2. –

С. 4-20.

4. Михайленко Г.Д. Назва / Михайленко Г.Д. – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

5. Михайленко Г.Д. Назва / Михайленко Г.Д., Степаняк С.І. – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

6. Колмаз Ю. А. Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / Колмаз Ю.А. – К., 2008. – 20 с.

7. Сенік С.М. Назва / Сенік С.М. – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України. 194 2020-1995.

8. Сенік С.М. Назва / Сенік С.М., Мандрик І.Т. – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, 194 2020-1995.

9. Муравський В.К. Назва / Муравський В.К. // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня-2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

10. Муравський В.К. Назва / Муравський В.К., Ліско С.В. // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

