

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 77



2012

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 77



Львівський національний університет імені Івана Франка
2012

V I S N Y K
OF THE LVIV
UNIVERSITY

Series
Mechanics and Mathematics

Issue 77

Scientific journal

Published 1-2 issues per year

Published since 1965

Ivan Franko National
University of Lviv

В І С Н И К
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
механіко-математична

Випуск 77

Збірник наукових праць

Виходить 1-2 рази на рік

Видається з 1965 року

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2012

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету
імені Івана Франка

СВІДОЦТВО про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Р е д а к ц і й н а к о л е г і я :

д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний* (головний редактор); д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заступник головного редактора); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Бугрій* (відповідальний секретар); д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *О. Андрейків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Андрійчук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Т. Банах*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Заболоцький*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Іванцов*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Кирилич*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Кондратюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. Копитко*; канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. Питула*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Шеремета*.

Professor *M. Zarichny* – Editor-in-chief,
Professor *M. Komarnitskyi* – Associate editor,
Associate professor *O. Buhrîi* – Executive secretary.

Відповідальний за випуск *Михайло Зарічний*

Адреса редколегії:

Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
<http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp>

Editorial office address:

Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytets'ka Str. 1,
UA-79000 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk_en.asp

Редактор Н. ПЛИСА
Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
СВІДОЦТВО про внесення суб'єкта видавничої
справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 19,7
Наклад 200 прим. Зам.

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2012

ЗМІСТ

<i>Біляк Юлія</i> . Про відносно-псевдорегулярні скрути в категорії полігонів над моноїдом з нулем	5
<i>Бокало Микола</i> . Задача без початкових умов для лінійних і нелінійних еліптично-параболічних рівнянь, які вироджуються в початковий момент часу	11
<i>Бокало Тарас</i> . Про єдиність розв'язку деяких нелінійних диференціальних рівнянь спеціального вигляду	24
<i>Бугрій Олег</i> . Про розв'язність модельних неоднорідних задач для півлінійних параболічних рівнянь зі змінними степенями нелінійності	29
<i>Бугрій Олег, Гурняк Іван, Пукач Петро, Холявка Оксана</i> . Гіперболічні варіаційні нерівності другого порядку зі змінним показником нелінійності	41
<i>Бурбан Наталія</i> . Взаємно однозначні відповідності між класами об'єктів категорії $\mathcal{UR} - Mod$ і радикальними функторами	54
<i>Буряченко Катерина</i> . Теореми існування та регулярності розв'язку задачі з трьома крайовими умовами для еліптичних рівнянь четвертого порядку в крузі	64
<i>Гнатюк Оксана</i> . Характеристики зростання δ -субгармонійних у симетричних кульових прошарках функцій	78
<i>Гуран Ігор, Кісіль Марія</i> . Альтернатива Понтрягіна для локально компактних моноїдів зі скороченнями	84
<i>Гут Віталій</i> . Коливні системи з важкими включеннями малої жорсткості: асимптотика спектра	89
<i>Іванцов Микола</i> . Про нелокальну обернену задачу для рівняння дифузії	103
<i>Кінаш Орест, Пароля Марта</i> . Про зростання характеристичних функцій ймовірнісних законів	109
<i>Кулявець Любов, Шеремета Мирослав</i> . Про модифіковані узагальнені порядки цілих рядів Діріхле та характеристичні функції ймовірнісних законів	124
<i>Лопушанський Андрій</i> . Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій	132
<i>Мегралієв Яшар</i> . Про обернену крайову задачу для еліптичного рівняння другого порядку з інтегральною умовою	145
<i>Мулява Оксана, Шеремета Мирослав</i> . Властивості адамарових композицій похідних рядів Діріхле	157
<i>Новосад Оксана</i> . Кватерніонні алгебри над псевдоглобальним полем	167
<i>Савочкіна Тетяна</i> . Структурні властивості скінченних DM -груп	173
<i>Сидоренко Юрій, Чварталцький Олександр</i> . Факторизація інтегральних операторів і нелінійні інтегровні моделі, I	185
<i>Снітко Галина</i> . Обернена задача для параболічного рівняння з невідомим молодшим коефіцієнтом в області з вільною межею	218
<i>Холявка Ярослав</i> . Сумісні наближення значень двох еліптичних функцій	231
<i>Шахно Степан</i> . Метод лінійної інтерполяції Курчатова за узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць першого та другого порядків	235

CONTENT

<i>Bilyak Yuliya</i> . On relatively-pseudoregular torsions in the category of polygons over monoids with zero	5
<i>Bokalo Mykola</i> . Problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations degenerated at the initial time moment	11
<i>Bokalo Taras</i> . On uniqueness of solution of some nonlinear differential equations of a special form	24
<i>Buhrii Oleh</i> . On solvability of model nonhomogeneous problems for semilinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity	29
<i>Buhrii Oleh, Hurnyak Ivan, Pukach Petro, Kholyavka Oksana</i> . Second order hyperbolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity	41
<i>Burban Nataliya</i> . One-to-one correspondences between classes of objects of the category $\bigcup \mathcal{R} - Mod$ and radical functors	54
<i>Buryachenko Kateryna</i> . Existence of solution and regularity theorems for boundary value problem with three conditions on the boundary for elliptic fourth order equations in a disk	64
<i>Gnatiuk Oksana</i> . Growth characteristics of functions δ -subharmonic in symmetric ball layers	78
<i>Guran Igor, Kisil Mariia</i> . The Pontryagin alternative for locally compact monoids with cancellation	84
<i>Hut Vitalii</i> . Oscillation systems with heavy soft inclusions: asymptotics of spectrum	89
<i>Ivanchov Mykola</i> . A nonlocal inverse problem for the diffusion equation	103
<i>Kinash Orest, Parolya Marta</i> . About the growth of characteristic functions of probability laws	109
<i>Kulyavec' Lyubov, Sheremeta Myroslav</i> . On modified generalized orders of entire Dirichlet and characteristic functions of probability laws	124
<i>Lopushanskyj Andrii</i> . The solution of Cauchy problem for fractional derivative equations in spaces of distributions	132
<i>Mehraliyev Yashar</i> . On an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition	145
<i>Mulyava Oksana, Sheremeta Myroslav</i> . Properties of Hadamard compositions of the derivatives of Dirichlet series	157
<i>Novosad Oksana</i> . Quaternion algebras over pseudoglobal field	167
<i>Savochkina Tetiana</i> . Structural properties of finite DM -groups	173
<i>Sydorenko Yuriy, Chvartatskyi Oleksandr</i> . Factorization of integral operators and nonlinear integrable equations, I	185
<i>Snitko Halyna</i> . Inverse problem for a parabolic equation with unknown minor coefficient in a free boundary domain	218
<i>Kholyavka Yaroslav</i> . Simultaneous approximation of value of two elliptic functions	231
<i>Shakhno Stepan</i> . Kurchatov method of linear interpolation under the generalized Lipschitz conditions for the first- and second-order divided differences	235

УДК 511.3

ПРО ВІДНОСНО-ПСЕВДОРЕГУЛЯРНІ СКРУТИ В КАТЕГОРІЇ ПОЛІГОНІВ НАД МОНОЇДОМ З НУЛЕМ

Юлія БІЛЯК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: jbiljak@ukr.net*

Введено поняття T -псевдорегулярного S -полігону. Розглянуто теорії скруту, періодичні класи яких складаються з T -псевдорегулярних S -полігонів, де T – власний підмоноїд моноїда S . Описано відповідні квазіфільтри. Розглянуто питання про скінченну аксіоматизовність класу точних S -полігонів.

Ключові слова: T -псевдорегулярний полігон, теорія скруту, квазі-фільтр, аксіоматизовний клас.

1. Вступ. Узагальнено деякі конструкції для полігонів, які вперше розглядав Кьюї [2] і продовжено вивчення скрутів у категорії полігонів. Людеман у 1983 р. [1] ввів поняття скруту в категорії лівих S -полігонів за аналогією з поняттям скруту у категорії R -модулів. Інші підходи до вивчення скрутів у категорії полігонів можна знайти в працях Занга, Гао, Шума (див. [3], [4]). Скрути в більш загальних категоріях полігонів розглядали Вігандт і Лекс.

В [2] Кьюї описав радикал, радикальний клас якого складається з усіх відносно-псевдорегулярних S -полігонів і описав відповідний квазіфільтр, були доведені його властивості.

Тут введено поняття відносно-псевдорегулярного S -полігону та описано теорії скрутів, радикальні класи яких визначаються як класи відносно-псевдорегулярних полігонів. Крім того, ми описуємо відповідні цим теоріям скруту квазіфільтри.

Остання частина праці присвячена проблемі аксіоматизовності класу точних S -полігонів. Скорняков Л.А. [5] в 1978 р. знайшов умови, за яких клас точних R -модулів скінченно аксіоматизовний. В останній частині за аналогією описано умови скінченної аксіоматизовності класу точних S -полігонів, які належать до класу відносно-псевдорегулярних полігонів.

2. Попередні дані. Нехай S мультиплікативна півгрупа з 0 і 1 , $0 \neq 1$.

Означення 1. Множину M назвемо лівим S -полігоном, якщо задано відображення $\mu : S \times M \rightarrow M$,

$$(s, m) \rightarrow sm = \mu(s, m)$$

таке, що для всіх $s, t \in S$ та $m \in M$ $s(tm) = (st)m$.

Лівий S -полігон називають унітарним, якщо для всіх $m \in M$ виконується $1m = m$. Лівий полігон називають центрованим, якщо для довільних $m \in M$ та $s \in S$ правильне $0m = s0 = 0$. Категорію лівих S -полігонів позначаємо $S - Act$.

Означення 2. Нехай M, N ліві S -полігони. Відображення $f : M \rightarrow N$ називають гомоморфізмом полігонів, якщо для всіх $a \in S$ та $m \in M$ виконується $f(am) = af(m)$.

Відношення еквівалентності ρ на S ($\rho \subseteq S \times S$) називається лівою конгруенцією на S , якщо для всіх $x, y, z \in S$ з того, що xry випливає $zrxzy$. Сукупність всіх лівих конгруенцій на S позначаємо через $L(S)$.

Лівою конгруенцією на S -полігоні M називають відношення еквівалентності ρ на M ($\rho \subseteq M \times M$) таке, що $(x_1, x_2) \in \rho \Rightarrow (sx_1, sx_2) \in \rho, \forall s \in S$. Для кожного $a \in S$ визначаємо ρ -клас $\overline{a\rho} = \{b \in S \mid \exists m \in M : (am, bm) \in \rho\}$. Також приймемо $(\rho : a) = \{(\lambda, \mu) \in \rho \mid \exists b \in M : (a\lambda = b\mu)\}$. Тотожну конгруенцію на M позначимо через id_M .

Нагадаємо ще одне означення, пов'язане з псевдорегулярними S -полігонами, яке введене у [2].

Означення 3. Елемент m S -полігону M називають псевдорегулярним, якщо існує $s \in S \setminus \{1\}$ таке, що $sm = m$. Якщо в полігоні всі ненульові елементи псевдорегулярні, то його називають псевдорегулярним.

Нехай T підмоноїд S , що не містить нуля.

Означення 4. Елемент m S -полігону M називають відносно-псевдорегулярним (T -псевдорегулярним), якщо $\exists t \in T \setminus \{1\} : tm = m$.

Множину всіх T -псевдорегулярних елементів позначають через M_{T_0} . S -полігон M називають T -псевдорегулярним, якщо $M = M_{T_0}$.

Приклад 1. Розглянемо моноїд S заданий таблицею Келі:

$\cdot$	0	1	a	d	e
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	d	e
a	0	a	a	d	d
d	0	d	d	a	a
e	0	e	d	a	a

Розглянемо підмоноїд $T = \{1, a, d\}$ і множину $L = \{0, a, d\}$. Очевидно, що L є лівим T -псевдорегулярним S -полігоном.

Означення 5. Під теорією скруту τ над S будемо розуміти впорядковану пару класів S -полігонів (T_τ, F_τ) для яких виконуються умови:

- 1) $Hom_S(M, N) = 0, \forall M \in T_\tau, \forall N \in F_\tau$;
- 2) $Hom_S(M, N) = 0, \forall M \in T_\tau$, то $N \in F_\tau$;
- 3) $Hom_S(M, N) = 0, \forall N \in F_\tau$, то $M \in T_\tau$.

Означення 6. Теорія радикала τ на S є спадковою теорією скруту, якщо клас T_τ є замкнутим стосовно підоб'єктів.

Визначимо напередрадикал τ , задавши періодичний T_τ і напівпростий класи $\overline{T_\tau}$. Прийmemo T_τ – клас всіх T -псевдорегулярних S -полігонів і $\overline{T_\tau}$ – клас тих S -полігонів, які не містять ненульових T -псевдорегулярних підполігонів.

Означення 7. Систему лівих конгруенцій Q на S називають квазіфільтром S , якщо виконуються такі умови:

- 1) якщо μ ліва конгруенція на S : $\rho \in Q$, $\rho \subseteq \mu$, то $\mu \in Q$;
- 2) якщо $\rho \in Q$, то $(\rho : a) \in Q$, $\forall a \in S$;
- 3) якщо μ ліва конгруенція, $\rho \in Q$ і $\forall (a, b) \in Q$ $(\mu : a) \in Q$ і $(\mu : b) \in Q$, то $\mu \in Q$.

3. Теорія скруту T -псевдорегулярних S -полігонів.

Теорема 1. $\tau = (T_\tau, \overline{T_\tau})$ є спадковою теорією скруту.

Доведення. Спочатку доведемо, що τ є теорією радикала. Припустимо, що існують $M \in T_\tau$, $N \in \overline{T_\tau}$ $Hom_S(M, N) \neq 0$, тобто, що існує $f \in Hom_S(M, N)$. Тоді зрозуміло, що $f(M) = Im(f)$ є підполігоном в N . Для довільного $n \in f(M)$ існує $m \in M$ таке, що $f(m) = n$. M є T -псевдорегулярним S -полігоном, тому з того, що $m \in M$ існує елемент $t \in T \setminus \{1\}$: $tm = m$. Звідси $n = f(m) = f(tm) = tf(m) = tn$, тобто, $n \in T$ -псевдорегулярним, як і всі елементи $f(M)$. Але $N \in \overline{T_\tau}$ і за визначенням не може містити ненульових T -псевдорегулярних підполігонів. Тому $f(M) = 0$, звідси f є нульовим відображенням.

Нехай N -лівий S -полігон і $Hom_S(M, N) = 0$ для всіх $M \in T_\tau$, треба довести, що $N \in \overline{T_\tau}$. Припустимо, що $N \notin \overline{T_\tau}$, тоді N містить ненульовий T -псевдорегулярний підполігон N' . Тому вкладення $i : N' \rightarrow N$ – ненульовий морфізм. Отримали суперечність. Тому $N \in \overline{T_\tau}$.

Нехай $Hom_S(M, N) = 0$, $\forall N \in F_\tau$, треба довести, що лівий S -полігон M лежить у класі T_τ . Розглянемо два випадки:

- 1) $M = 0$, то доводити нічого;
- 2) $M \neq 0$, тому M містить ненульовий T -псевдорегулярний підполігон M' .

Справді, у протилежному випадку $M \in \overline{T_\tau}$, тому $Hom_S(M, M) = 0$. Звідси $M = 0$, а це суперечність. Прийmemo $\Omega = \{L \in M \mid L \in T_\tau, L \neq 0\}$. $M' \in \Omega$, тому $\Omega \neq 0$. Зрозумілим є той факт, що Ω частково впорядкована й індуктивно впорядкована (кожна повністю впорядкована підмножина має верхню грань). Тоді за лемою Цорна Ω містить максимальний член $L \in \Omega$. Можемо припустити, що $L = M$.

Припустимо, що $M \neq l$, тоді $M/L \neq 0$ і нехай $\overline{M} = M/L \notin \overline{T_\tau}$ (у протилежному випадку ми отримали б $Hom(M, M/L) = 0$, звідки $M = 0$). Отже, M/L містить ненульовий T -псевдорегулярний підполігон $\overline{K}$, нехай $\overline{K} = K/L$ – T -псевдорегулярний підполігон для якого виконується умова $L \subset K \subseteq M$. Далі для довільного $x \in N \setminus L$ ($\overline{x} \neq 0$) з того, що $\overline{N} \in T_\tau$ існує $t \in T \setminus \{1\}$: $t\overline{x} = \overline{x}$, тому $t\overline{x} = \overline{x}$, оскільки $x \notin L$, то $tx = x$. Звідси x – T -псевдорегулярний елемент, тому $N \in T_\tau$ і у підсумку $N \in \Omega$. Це суперечить максимальності L , тому $M/L \in \overline{T_\tau}$.

Розглянемо природний епіморфізм $\eta : M \rightarrow M/L$, він ненульовий, але $M/L \in \overline{T_\tau}$, тому $Hom_S(M, M/L) = 0$. Отже, $M = L \in T_\tau$.

Отже, τ є теорією радикала. Зрозумілим є той факт, що T_τ є замкненим стосовно підоб'єктів. Тому τ – теорія скруту. $\square$

Якщо $\tau = (T_\tau, \overline{T_\tau})$ є теорією скруту, то з (2) $E_\tau = \{\rho \in L(S) \mid S/\rho \in T_\tau\}$ є відповідним квазіфільтром.

Нижченаведені теореми доведені для випадку, коли $S \setminus T$ скінченна. Варто також зауважити, що $|\rho| = \infty$ означає, що множина нескінченна.

Теорема 2. Нехай $\tau = (T_\tau, \overline{T_\tau})$ є теорією скруту. Приймемо $\chi = \{\rho \in L(S) \mid |\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S\}$ і $T = \{M \in S - \text{Act} \mid (id_M : m) \in \chi, \forall m \in M\}$.

Тоді:

- 1) $T_\tau = T$;
- 2) $C_\tau = \chi$.

Доведення. 2. $\rho \in \chi$ тоді і лише тоді, коли $\forall a \in S \exists t \in T: (t, 1) \in (\rho : a)$, а це означає, що $t \text{ ara}$. Це має зміст тоді і лише тоді, коли $S/\rho \in T_\tau$. Тому зрозуміло, що $C_\tau = \chi$.

1. Нехай $M \in T$, тоді $\forall m \in M (id_M : m) \in C_\tau$, звідси $|\overline{1_{(id_M:m)}}| = \infty$. Це означає, що $\exists t \in T \setminus \{1\}: (t, 1) \in (id_M : m)$, тобто, $tm = m$. Отже, елемент m є T -псевдорегулярним і у підсумку $M \in T_\tau$.

Тепер нехай $M \in T_\tau$, тоді $\forall m \in M \forall a \in S \exists t \in T \setminus \{1\}: tam = am$. Звідси $(ta, a) \in (id_M : m)$, далі $(t, 1) \in ((id_M : m) : a)$. Отож, $|\overline{1_{((id_M:m):a)}}| = \infty$, тобто, $(id_M : m) \in C_\tau$. Отже, $M \in T$. Теорему доведено. $\square$

Теорема 3. Нехай S – мультиплікативна півгрупа з 0 і 1. Введемо позначення $S_T = \{b \in S \mid \exists t \in T \setminus \{1\}: ta = a\}$. Тоді $C_\tau = \{\rho \in L(S) \mid |\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R\}$.

Доведення. $L(S) \mid S/\rho \in T_\tau = \{\rho \in L(S) \mid |\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R\}$.

Отже, нехай $\rho \in \{\rho \in L(S) \mid S/\rho \in T_\tau\}$, тому з попередньої теореми видно, що $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R$. Тепер припустимо, що $\rho \in L(S)$ і $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R$. Залишилося перевірити, що $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty \forall a \in S_R$. Нехай $a \in S_R$, тоді $\exists t \in T \setminus \{1\}: ta = a$. Звідси $(ta, a) \in id_S \subseteq \rho$, тоді $(s, 1) \in (\rho : a)$. Отож, $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty$, тому $\rho \in C_\tau$. Теорему доведено. $\square$

4. Скінченна аксіоматизованість класу точних S -полігонів. Цей розділ присвячений умовам скінченної аксіоматизованості класу точних S -полігонів. Нехай S моноїд і M – унітарний лівий S -полігон. Через Δ позначатимемо тотожну конгруенцію на S .

Означення 8. Лівим анулятором елемента $m \in M$ будемо розуміти множину $\text{Ann}(m) = \{(s, t) \in S \times S \mid sm = tm\}$.

Відповідно лівим анулятором S -полігона M буде $\text{Ann}(M) = \{(s, t) \in S \times S \mid \forall m \in M sm = tm\}$.

Означення 9. S -полігон M називають точним, якщо $\text{Ann}(M) = \Delta$.

Тепер нагадаємо деякі основні поняття теорії моделей. Ми використовуємо мову S -мову лівих S -полігонів першого порядку. Множину всіх речень (замкнутих формул) мови, що є істинними в класі полігонів Ψ , називаємо теорією класу і позначаємо $Th(\Psi)$. Під моделлю теорії T розуміємо клас полігонів, для яких справджуються

аксіоми з цієї теорії, позначаємо через $Mod(T)$. Клас називають аксіоматизованим, якщо $Mod(Th(\Psi)) = \Psi$. Аксіоматизований клас полігонів називають скінченно аксіоматизованим, якщо його можна задати скінченною кількістю формул.

Теорема 4. Для моноїда S нижченаведені властивості еквівалентні:

- 1) клас точних унітарних лівих S -полігонів скінченно аксіоматизований;
- 2) $\exists F \subseteq S \times S$ – скінченна множина така, що S -полігон M точний, якщо $\forall (a, b) \in F \exists x \in M: ax \neq bx$;
- 3) $\exists T \subseteq (S \times S) \setminus \Delta$ – скінченна множина, що має непорожній перетин з усіма конгруенціями на S ;
- 4) S – містить таку скінченну систему A мінімальних конгруенцій, що довільна нетотожна конгруенція на S містить хоч одну конгруенцію з A .

Доведення 1) $\Rightarrow$ 2) Нехай Ψ – клас всіх точних лівих S -полігонів і нехай він описується скінченною системою аксіом U . Зрозуміло, що клас Ψ можна описати системою аксіом

$$U_{(\lambda, \mu)} = (\exists x(\lambda x \neq \mu x)), \quad (\lambda, \mu) \in S \times S.$$

Далі систему U можна вивести зі скінченної кількості аксіом з $\{U_{(\lambda, \mu)}\}$, наприклад, $\{U_{(\lambda_1, \mu_1)}, \dots, U_{(\lambda_m, \mu_m)}\}$. Тому прийmemo $F = \{(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_m, \mu_m)\}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Нехай $\rho \subseteq S \times S$ – нетотожна конгруенція на S . Припустимо, що $\rho \cap F = \emptyset$. Розглянемо S/ρ як лівий S -полігон. Зрозуміло, що для всіх $(\lambda, \mu) \in F$ існує $\bar{x} \in S/\rho(\lambda\bar{x} = \mu\bar{x})$. Тому S/ρ – точний S -полігон, але $Ann(S/\rho)$ містить конгруенцію ρ . Отримали суперечність. Тому прийmemo $T = F$.

3) $\Rightarrow$ 4) Нехай $T = \{(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_m, \mu_m)\}$. Приймемо $\rho_i = \rho(\lambda_i, \mu_i)$, де $\rho(\lambda_i, \mu_i)$ – головна конгруенція породжена (λ_i, μ_i) .

Зрозумілий такий факт: якщо існують різні $i, j: \rho_i \subset \rho_j$, то система T без (λ_j, μ_j) не втрапить своїх властивостей. Тому всі конгруенції ρ_i можна вважати попарно непорівняними. Якщо ρ нетотожна конгруенція на S , що міститься в деякому ρ_i , то з властивостей T отримаємо $(\lambda_i, \mu_i) \in \rho$. Звідси $\rho = \rho_i$. Отож, зрозуміло, що ρ_i – мінімальна конгруенція і можна прийняти $A = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$.

4) $\Rightarrow$ 3) Множину T отримаємо, вибравши з кожної конгруенції по одній парі $(\lambda_i, \mu_i) \notin \Delta$.

3) $\Rightarrow$ 2) Нехай M – лівий S -полігон такий, що $\forall (\lambda, \mu) \in T \exists x \in M: \lambda x \neq \mu x$. Припустимо, що M не є точним, тобто $Ann(M) \neq \Delta$. Тому $\exists (s, t) \in (S \times S) \setminus \Delta \forall m \in M: sm = tm$. Зрозумілим є той факт, що $Ann(M)$ є конгруенцією, тому з (3) $\exists (\lambda, \mu) \in Ann(M) \cap T: \lambda x = \mu x \forall x \in X$. Отримали суперечність.

2) $\Rightarrow$ 1) Впливає з побудови множини T .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Luedeman J.K. Torsion theories and semigroup of quotients / J.K. Luedeman – Lecture Notes in Mathematics 998: Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983.
2. Qiu D.R. Hereditary torsion theory of pseudoregular S -systems / D.R. Qiu // Semigroup Forum. – 2003. – Vol. 66, №1. – P. 131-139.
3. Zhang R.Z. Torsion theories and quasi-filters of right congruences / R.Z. Zhang, W.M. Gao, F.Y. Xu // Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1, №1. – P. 273-280.

4. Zang R.Z. Hereditary torsion classes of systems / R.Z. Zang, K.P. Shum // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 253-270.
5. Скорняков Л.А. Конечная аксиоматизируемость класса точных модулей / Л.А. Скорняков – Colloquium Mathematicum. – 1979. – Vol. 42. – С. 365-366.

Стаття: надійшла до редакції 20.07.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ON RELATIVELY-PSEUDOREGULAR TORSIONS IN THE CATEGORY OF POLYGONS OVER MONOIDS WITH ZERO

Yuliya BILYAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: jbilyak@ukr.net

Introduced the concept of T -pseudoregular S -act. Considered torsion theories for which torsion classes contain all T -pseudoregular S -acts, where T is proper submonoid of monoid S . Described corresponding quasifilters. Considered the problem of finite axiomatizability of class of faithful acts.

Key words: T -pseudoregular act, torsion theory, quasifilter, axiomatized class.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНО-ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫХ КРУЧЕНИЯХ В КАТЕГОРИИ ПОЛИГОНОВ НАД МОНОИДОМ С НУЛЕМ

Юлія БІЛЯК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: jbilyak@ukr.net

Введено понятие T -псевдoreгулярного S -полигона. Рассмотрены теории кручения, периодические классы которых состоят из T -псевдoreгулярных полигонов, где T – собственный подмоноид моноида S . Описаны соответствующие квазифильтры. Рассмотрен вопрос об конечной аксиоматизованности класса точных S -полигонов.

Ключевые слова: T -псевдoreгулярный полигон, теория кручения, квазифильтр, аксиоматизованный класс.

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ВИРОДЖУЮТЬСЯ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

Микола БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі без початкових умов для лінійних і нелінійних анізотропних еліптично-параболічних рівнянь другого порядку, які задані в необмежених за просторовими змінними областях і вироджуються в початковий момент часу. Накладаються умови на поведінку розв'язків задачі та зростання її вихідних даних в околі початкового моменту часу та на нескінченності за просторовими змінними. Рівняння мають показники нелінійності, які залежать від точок області визначення рівнянь і напряду диференціювання, а їхні узагальнені розв'язки отримують з узагальнених просторів Лебега-Соболева.

Ключові слова: лінійне рівняння, нелінійне рівняння, еліптично-параболічне рівняння, вироджене параболічне рівняння, задача без початкових умов, узагальнений простір Лебега-Соболева, необмежена область.

1. Вступ. Нехай Ω – необмежена область в арифметичному просторі $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) з евклідовою нормою $|\cdot|$ ($|x| := (|x_1|^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$). Припускаємо, що межа $\partial\Omega$ області $\Omega \in C^1$ многовидом розмірності $n - 1$. Нехай Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі. Нехай $S := (0, T]$, де $T > 0$ – деяке число. Прийmemo $Q := \Omega \times S$, $\tilde{Q} := \bar{\Omega} \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$.

Розглянемо питання про відшукування функції $u : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} (b(x)u) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

та крайові умови

$$u|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}|_{\Sigma_1} = 0, \quad (2)$$

де $a_i(x, t, s, \xi)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f(x, t)$, $(x, t) \in Q$, – задані дійснозначні функції, $\partial u(y, t)/\partial \nu_a := \sum_{i=1}^n a_i(y, t, u, \nabla u) \nu_i(y)$, $(y, t) \in \Sigma_1$, – похідна по “конормалі”, а φ, b – функції, які задовольняють умови

Ф: $\varphi \in C([0, T]) \cap C^1((0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ і $\int_0^T [\varphi(t)]^{-1} dt = +\infty$;

В: $b \in L_{\infty, \text{loc}}(\Omega)$, $b \geq 0$.

Зауважимо, що типовим прикладом функції φ , яка задовольняє умову **Ф**, є $\varphi(t) = t^\alpha$, $t \in [0, T]$, де $\alpha \geq 1$, а прикладом функції b , що задовольняє умову **В**, є характеристична функція довільної вимірної підмножини Ω , тобто рівність $b = 0$ може виконуватися на будь-якій вимірній підмножині Ω . Це разом з припущенням, що просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною, дає підстави стверджувати, що рівняння (1) *еліптично-параболічне* з виродженням у початковий момент часу [1]. Зазначимо, що параболічні рівняння, системи та варіаційні нерівності з виродженням у початковий момент розглядали, зокрема, в [2] – [7].

Зауваження 1. Нехай $\Omega = (0, +\infty)$, $\Gamma_0 = \{0\}$, $\Gamma_1 = \emptyset$ і задано рівняння

$$tu_t - u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T], \quad (3)$$

та крайову умову

$$u|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

Очевидно, що функція $u_{\lambda, A}(x, t) = At^{-\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x$, $(x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T]$, де $\lambda > 0$, A – довільні сталі, є розв’язком рівняння (3), який задовольняє його в класичному сенсі і для якого виконується умова (4). Також очевидно, що функція $u_A(x, t) = Ax$, де A – довільна стала, теж є розв’язком рівняння (3) і задовольняє умову (4). Звідси випливає, що для єдиності розв’язку рівняння (3) з крайовою умовою (4) потрібні додаткові умови на його поведінку при $|x| \rightarrow +\infty$ та $t \rightarrow +0$, які можна трактувати як аналоги крайової умови на нескінченності та стандартної початкової умови. Можна довести, що такими умовами може бути вимога обмеженості розв’язку.

На підставі цього зауваження можна зробити такий висновок. Оскільки умова єдиності розв’язку є визначальною для коректного формулювання задачі у випадку еволюційних рівнянь, то природно розглядати таку задачу: знайти розв’язок рівняння (1) в області Q , який задовольняє крайову умову (2) та деяку умову на його поведінку при $|x| \rightarrow +\infty$ і $t \rightarrow +0$ [8]. Такою додатковою умовою може бути умова належності розв’язку до певного вагового функційного простору [2] – [4], [6], [7]. Однак серед нелінійних рівнянь вигляду (1) є такі, для яких їхні розв’язки визначаються однозначно тільки крайовими умовами вигляду (2) [9], [10]. Наприклад, рівняння

$$tu_t - u_{xx} + |u|^{p-2}u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = (0, +\infty) \times (0, T],$$

де $p > 2$ – яке-небудь число, з крайовою умовою (4) має не більше одного розв’язку. Зауважимо, що задачі обох видів називають *задачами без початкових умов*.

Рівняння вигляду (1) тісно пов'язані з рівняннями, які мають вигляд відмінний від (1) тільки в тому, що $\varphi = 1$ і область задання необмежена знизу за часовою змінною, наприклад, має вигляд $\Omega \times (-\infty, 0]$ [1]. Детальніше це розглядатимемо пізніше. Для рівнянь, заданих в необмежених знизу за часовою змінною областях, також розглядаються задачі без початкових умов або, як їх ще називають, задачі Фур'є (див. [12] – [16] і бібліографію там) і ці задачі у відповідному сенсі еквівалентні згаданим вище. Ми, зробивши додаткові припущення на вихідні дані, виділили класи еліптично-параболічних рівнянь вигляду (1), елементами яких є лінійні та нелінійні анізотропні рівняння, для яких задачі без початкових умов за певних обмежень на поведінку розв'язків при $|x| \rightarrow +\infty$ і $t \rightarrow +0$ є однозначно розв'язними. Отримані тут результати є перенесенням на випадок рівнянь вигляду (1) результатів, отриманих в [5] для слабо нелінійних параболічних рівнянь.

Прикладами рівнянь типу (1), які тут вивчають, є анізотропні рівняння

$$\varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} (b(x)u) - \sum_{i=1}^n \left(\hat{a}_i(x, t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i} \right)_{x_i} + \hat{a}_0(x, t) |u|^{p_0(x)-2} u = f(x, t), \quad (5)$$

де $\hat{a}_i$ ($i = \overline{0, n}$) – деякі вимірні додатні та відділені від нуля функції, $p_i > 1$ ($i = \overline{0, n}$) – вимірні обмежені функції (так звані показники нелінійності).

В останні десятиліття дуже активно почали вивчати нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, частковими випадками яких є рівняння (5) (див., наприклад, [11], [17], [18]). Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [19].

Ми розглядатимемо *узагальнені розв'язки* рівняння (1), що задовольняють умови (2), а для їхнього означення та дослідження нам будуть потрібні деякі лінійні локально опуклі простори. Тому спочатку подамо означення цих просторів.

Нехай G – довільна область в $\mathbb{R}^m$, де $m = n$ або $m = n + 1$. Для будь-якої функції $r \in L_\infty(G)$ такої, що $r(z) \geq 1$ для майже всіх $z \in G$, на просторі $C_c(\overline{G}) := \{v \in C(\overline{G}) \mid \text{supp } v - \text{обмежена множина}\}$ вводимо норму

$$\|v\|_{L_{r(\cdot)}} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leq 1\},$$

де $\rho_{G,r}(v) := \int_G |v(z)|^{r(z)} dz$. Зауважимо таке: коли $r(z) = r_0 \equiv \text{const} \geq 1$ для м.в. $z \in G$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G)} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(G)}$. Поповнення отриманого нормованого лінійного простору – так званий *узагальнений простір Лебега* (див., наприклад, [20], [21]) – позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$. Зауважимо таке: $\text{ess inf}_{z \in \Omega} r(z) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ можна ототожнити з $L_{r^*(\cdot)}(G)$, де $r^*(z)$, $z \in G$ – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r^*(z)} = 1$, $z \in G$. Легко переконатися, що правильним є таке твердження: коли G – обмежена множина, то $L_{r(\cdot)}(G)$ є підпростором простору $L_1(G)$.

Якщо G є необмеженою областю, то через $L_{r(\cdot), \text{loc}}(\overline{G})$ позначатимемо поповнення $C(\overline{G})$ в топології, що породжена системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G')} \mid G' \in Bd(G)\}$, де під $Bd(G)$ розуміємо множину всіляких можливих обмежених підобластей області G . Зрозуміло, що $L_{r(\cdot), \text{loc}}(\overline{G}) \subset L_{1, \text{loc}}(\overline{G})$.

Визначимо

$$C(S; L_{2,\text{loc}}(\overline{\Omega})) := \{v : S \rightarrow L_{2,\text{loc}}(\overline{\Omega}) \mid v \in C([\sigma, T]; L_2(\Omega')) \forall \sigma \in (0, T), \forall \Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

з системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C([\sigma, T]; L_2(\Omega'))} \mid \sigma \in (0, T), \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Нехай $p = (p_0, \dots, p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову

P: для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $p_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна,
 $\text{ess inf}_{x \in \Omega'} p_i(x) > 1, \quad \text{ess sup}_{x \in \Omega'} p_i(x) < \infty$ для будь-яких $\Omega' \in Bd(\Omega)$.

Позначимо через $W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$ поповнення простору $C^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$ в топології, яка породжена системою півнорм

$$\left\{ \|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega')} + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega) \right\}.$$

Легко довести, що $W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0) \subset W_{1, \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$.

Введемо лінійний локально опуклий простір $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^{b,0}$ як поповнення простору $C^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0) := \{u \in C(\overline{Q}) \mid u_{x_i} \in C(\overline{Q}) \ (i = \overline{1, n}), \ u|_{\Sigma_0} = 0\}$ за топологією, породженою системою півнорм

$$\left\{ \|u\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega' \times (\sigma, T))} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega' \times (\sigma, T))} + \sup_{t \in [\sigma, T]} \|b^{1/2}(\cdot)u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega')} \mid \right. \\ \left. \sigma \in (0, T), \ \Omega' \in Bd(\Omega) \right\}.$$

Очевидно, якщо u – будь-який елемент простору $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^{b,0}$, то $u \in (S \rightarrow W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0))$, $b^{1/2}u \in C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega}))$ та $u \in L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega} \times (\sigma, T))$, $u_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega} \times (\sigma, T))$ ($i = \overline{1, n}$) для довільного $\sigma \in (0, T)$.

Позначимо через $\mathbb{U}_{p, c}^{1,0}$ простір, складений з елементів $v \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^{b,0}$ таких, що $\text{supp } v$ є обмеженою множиною, яка розташована на додатній відстані від гіперплощини $\{t = 0\}$, $v_t \in L_2(Q)$, $v(\cdot, T) = 0$.

2. Формулювання задачі й основних результатів. Спочатку введемо відповідні обмеження на вихідні дані задачі, а точніше, визначимо класи вихідних даних задачі, які ми будемо розглядати.

Нехай $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову **P**. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, які визначені на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ і задовольняють умови:

A₁: для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $a_i(x, t, s, \xi)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто, для майже всіх $(x, t) \in Q$ функція $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна і для будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot, \cdot, s, \xi) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна;

A₁^{*}: $a_i(x, t, 0, 0) = 0$ ($i = \overline{0, n}$) для майже всіх $(x, t) \in Q$;

A₂: для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x, t) \in Q$ виконується нерівність

$$|a_i(x, t, s, \xi)| \leq h_{1,i}^a(x, t) \left(|s|^{p_0(x)/p_i^*(x)} + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)} \right) + h_{2,i}^a(x, t),$$

де $h_{1,i}^a \in L_{\infty, \text{loc}}(\bar{Q})$, $h_{2,i}^a \in L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\bar{Q})$, $1/p_i(x) + 1/p_i^*(x) = 1$, $x \in \Omega$.

Зауваження 2. Умова $\mathbf{A}_1^*$ не є принциповою, ми її вводимо лише для спрощення викладення матеріалу.

Прийmemo

$$\mathbb{F}_{0, \text{loc}} := L_{2, \text{loc}}(\bar{Q}).$$

Означення 1. Нехай $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_{0, \text{loc}}$. Скажемо, що функція $u \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^{b, 0}$ є узагальненим розв'язком рівняння (1), що задовольняє крайові умови (2), якщо виконується інтегральна рівність

$$\iint_Q \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \nabla u) v_{x_i} + a_0(x, t, u, \nabla u) v - b u (\varphi v)_t \right\} dx dt = \iint_Q f v dx dt \quad (6)$$

для будь-яких $v \in \mathbb{U}_{p, c}^{1, 0}$.

Мета нашої праці – за додаткових умов на вихідні дані, які не виключають з розгляду лінійні рівняння, зазначити “аналоги крайової на нескінченності та початкової умов” такі, що задача, яка полягає у знаходженні узагальненого розв'язку рівняння (1), який задовольняє крайові умови (2) та ці “аналоги ...”, є однозначно розв'язною.

Нехай $k \in \{1, \dots, n\}$ – число таке, що множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 < \tau^2\}$ обмежена для будь-якого $\tau > 0$. Зокрема, коли $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$, Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, то k – саме те, про яке тільки що говорилося.

Вважатимемо, що $0 \in \Omega$ і позначимо для будь-якого $\tau > 0$ через Ω_τ зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 < \tau^2\}$, що містить 0.

Стосовно вектор-функції $p = (p_0, \dots, p_n)$ додатково до умови $\mathbf{P}$ припустимо, що $\mathbf{P}^*$: $p_0(x) = p_1(x) = \dots = p_k(x) = 2$ для м.в. $x \in \Omega$.

Нехай $\mathbb{K}$ – множина впорядкованих наборів (b, g, q, μ) , де b з умови $\mathbf{B}$, $g := ((g_{1,1}, g_{2,1}), \dots, (g_{1,k}, g_{2,k}))$ – вектор-функція, компонентами якої є пари невід'ємних функцій з простору $C(\tilde{Q})$, $q := (q_1, q_2)$ – вектор-функція, компоненти якої $q_1, q_2 \in C(\tilde{Q})$ такі, що $q_1(x, t) > 0$ при $(x, t) \in \tilde{Q}$ і для дійсного числа μ отримаємо

$$q_2(x, t) + \mu b(x) > 0 \quad \text{для м.в. } (x, t) \in Q.$$

Прийmemo

$$E_{k, \mu}(v) := q_1 \sum_{i=1}^k v_{x_i}^2 + (q_2 + \mu b) v^2.$$

Для кожних $\tau \in (0, +\infty)$, $t_0 \in (0, T)$ прийmemo

$$\Gamma_{j, \tau} := \Gamma_j \cap \partial \Omega_\tau \quad (j = 0, 1), \quad \Gamma_{*, \tau} := \Omega \cap \partial \Omega_\tau, \quad Q_{\tau, t_0} := \Omega_\tau \times (t_0, T],$$

$$\Sigma_{j, \tau, t_0} := \Gamma_{j, \tau} \times (t_0, T] \quad (j = 0, 1), \quad \Sigma_{*, \tau, t_0} := \Gamma_{*, \tau} \times (t_0, T]$$

і визначимо

$$d_1(\tau, t_0) := \sup_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \left(\sum_{i=1}^k g_{1,i}^2 / q_1 \right)^{1/2}, \quad d_2(\tau, t_0) := \sup_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \left(\sum_{i=1}^k g_{2,i}^2 \right)^{1/2};$$

$$\lambda(\tau, t_0) := \inf_{t, v} \left\{ \left[\int_{\Gamma_{*, \tau}} E_{k, \mu}(v) d\Gamma \right] \left[\int_{\Gamma_{*, \tau}} v^2 d\Gamma \right]^{-1} \right\},$$

де інфімум беремо по всіх неперервно-диференційовних в околі $\overline{\Gamma_{*, \tau}}$ функціях v , які дорівнюють нулю на $\partial\Gamma_{*, \tau} \cap \Gamma_0$, і всіх $t \in [t_0, T]$;

$$\Theta(\tau, t_0) := \sup_v \left\{ \left[\int_{\Omega_\tau} E_{k, \mu}(v)|_{t=t_0} dx \right]^{-1} \left[\int_{\Omega_\tau} b v^2 dx \right] \right\},$$

де супремум береться по всіх функціях $v \in C^1(\overline{\Omega_\tau})$, які дорівнюють нулю в околі $\Gamma_{0, \tau}$.

Через $\mathbb{K}^*$ позначимо підмножину множини $\mathbb{K}$, для кожного елемента (b, g, q, μ) якої існують неперервні додатні функції $A_1(\tau, t_0)$, $A_2(\tau, t_0)$, $(\tau, t_0) \in \Pi := [1, +\infty) \times (0, T/2]$ такі, що для будь-яких $(\tau, t_0) \in \Pi$ виконуються нерівності

$$d_1(\tau, t_0)\lambda^{-1/2}(\tau, t_0) + d_2(\tau, t_0)\lambda^{-1}(\tau, t_0) \leq A_1(\tau, t_0), \quad (7)$$

$$\Theta(\tau, t_0) \leq 2A_2(\tau, t_0), \quad (8)$$

і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = A_1(\tau, t_0), \quad \frac{dt_0}{d\alpha} = -\varphi(t_0)A_2(\tau, t_0), \quad (9)$$

$$\tau(0) = 1, \quad t_0(0) = T/2 \quad (10)$$

має єдиний розв'язок $\tau(\alpha), t_0(\alpha)$, $\alpha \in [0, +\infty)$, і цей розв'язок задовольняє умову

$$\tau(\alpha) \rightarrow +\infty, \quad t_0(\alpha) \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow +\infty.$$

Далі *всюди вважаємо*, що (b, g, q, μ) – який-небудь елемент $\mathbb{K}^*$.

Нехай $\mathbb{A}_p^1(b, g, q, \mu)$ – підмножина $\mathbb{A}_p$, будь-який елемент якої задовольняє ще дві умови, які ми зараз сформулюємо:

A₃: для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$, будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x, t) \in Q$

$$|a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2)| \leq g_{1,i}(x, t) \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2| + g_{2,i}(x, t) |s_1 - s_2|;$$

A₄: для будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x, t) \in Q$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2))(s_1 - s_2) \geq \\ \geq q_1(x, t) \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + q_2(x, t) |s_1 - s_2|^2. \end{aligned}$$

Нехай $\tau(\alpha), t_0(\alpha)$, $\alpha \in [0, +\infty)$, – розв'язок задачі (9), (10). Введемо ще такі позначення:

$$\Omega^\alpha := \Omega_{\tau(\alpha)}, \quad Q^\alpha := Q_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)} \quad \text{при} \quad \alpha \geq 0.$$

Приймемо

$$\langle v \rangle_\alpha := \left(\iint_{Q^\alpha} E_{k, \mu}(v) e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1} dx dt \right)^{1/2} \equiv$$

$$\equiv \left(\int_{t_0(\alpha)}^T e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1} dt \int_{\Omega_{\tau(\alpha)}} E_{k,\mu}(v) dx \right)^{1/2}$$

для всіх $\alpha \geq 0$.

Сформулюємо основні результати роботи. Вони стосуються однозначної розв'язності задачі на знаходження узагальненого розв'язку рівняння (1), яке задовольняє умови (2) та

$$\langle u \rangle_R = o(1)e^{R/2} \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

Далі цю задачу коротко будемо називати задачею (1),(2),(11), а шукану функцію u – узагальненим розв'язком цієї задачі (тут через $o(1)$ позначено довільну нескінченно малу при $R \rightarrow +\infty$ функцію).

Детальніше, умова (11) означає, що існує (залежна від u) нескінченно мала при $R \rightarrow +\infty$ функція $\gamma(R)$, $R \geq 0$, така, що для будь-яких $R \geq 0$

$$\int_{t_0(R)}^T e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1} dt \int_{\Omega_{\tau(R)}} \left[q_1(x, t) \sum_{i=1}^k |u_{x_i}|^2 + \right. \\ \left. + (q_2(x, t) + \mu b(x)) |u|^2 \right] dx = \gamma(R) e^{R/2}.$$

Теорема 1 (єдиність розв'язку). *Нехай $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^1(b, g, q, \mu)$ для деякого набору $(b, g, q, \mu) \in \mathbb{K}^*$. Тоді задача (1),(2),(11) має не більше одного узагальненого розв'язку.*

Перейдемо до формулювання теореми існування розв'язку задачі (1), (2), (11).

Нехай $\mathbb{A}_p^2(b, g, q, \mu)$ – підмножина множини $\mathbb{A}_p^1(b, g, q, \mu)$, кожний елемент якої $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ додатково задовольняє умову

A₅: для будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x, t) \in Q$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, t, s, \xi) \xi_i + a_0(x, t, s, \xi) s \geq q_1(x, t) \sum_{i=1}^k |\xi_i|^2 + q_2(x, t) |s|^2 + q_3^a(x, t) \sum_{i=k+1}^n |\xi_i|^{p_i(x)},$$

де $q_3^a \in L_\infty(Q)$, $\text{ess inf}_{x \in Q^m} q_3^a(x, t) > 0$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Для кожного натурального m приймемо

$$\Lambda_m = \inf_{t, v} \left\{ \left[\int_{\Omega^m} E_{k,\mu}(v) dx \right] \left[\int_{\Omega^m} v^2 dx \right]^{-1} \right\}, \quad (12)$$

де інфімум береться по всіх функціях v з $C^1(\overline{\Omega^m})$, які дорівнюють нулю на $\Gamma_{0,\tau(m)}$, і всіх $t \in [t_0(m), T]$.

Позначимо через $\mathbb{F}_{0,\text{loc}}^*$ підмножину множини $\mathbb{F}_{0,\text{loc}}$, яка складається з тих функцій f , для яких існують сталі $C_1 > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ такі, що

$$\iint_{Q^m} |f(x, t)|^2 e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1} dx dt \leq C_1 \Lambda_m e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Теорема 2 (існування розв'язку). Нехай $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p^2(b, g, q, \mu)$ для деякого набору $(b, g, q, \mu) \in \mathbb{K}^*$ і припустимо, що $f \in \mathbb{F}_{0, \text{loc}}^*$, тобто виконується нерівність (13) з деякими сталими $\varepsilon \in (0, 1)$, $C_1 > 0$. Тоді існує (єдиний) узагальнений розв'язок задачі (1), (2), (11) і він задовольняє оцінку

$$\iint_{Q^m} E_{k,m}(u) e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1} dx dt \leq C_2 e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка залежить тільки від ε та C_1 .

Зауваження 3. Очевидно, що рівняння

$$\begin{aligned} \varphi(t)(bu)_t - \sum_{i=1}^k (\hat{a}_{ij}(x, t) u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=k+1}^n (\hat{a}_i(x, t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} + \\ + \hat{a}_0(x, t) u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned}$$

є частковим прикладом рівняння (1). Для нього правильні твердження теорем 1 і 2, якщо $\hat{a}_{ij} \in L_{\infty, \text{loc}}(\bar{Q})$, $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$, $|\hat{a}_{ij}| \leq g_{1,i}$ ($i, j = \overline{1, k}$) і для майже всіх $(x, t) \in Q$

$$\sum_{i,j=1}^k \hat{a}_{ij}(x, t) \eta_i \eta_j \geq q_1(x, t) \sum_{i=1}^k |\eta_i|^2 \quad \forall \eta_i \in \mathbb{R} (i = \overline{1, k}),$$

$\hat{a}_0 \in L_{\infty, \text{loc}}(\bar{Q})$, $\hat{a}_0 \geq q_2$, $\hat{a}_i \in L_{\infty, \text{loc}}(\bar{Q})$ ($i = \overline{k+1, n}$), $\text{ess inf}_{(x,t) \in Q^m} \hat{a}_i(x, t) > 0$ для кожного $i \in \{k+1, \dots, n\}$ та $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{F}_{0, \text{loc}}^*$.

3. Обґрунтування основних результатів. Нехай $\hat{S} := (-\infty, 0]$. Прийmemo $\hat{Q} := \Omega \times \hat{S}$, $\hat{\Sigma}_0 = \Gamma_0 \times \hat{S}$, $\hat{\Sigma}_1 = \Gamma_1 \times \hat{S}$.

Визначимо лінійний локально опуклий простір

$$C(\hat{S}; L_{2, \text{loc}}(\bar{\Omega})) := \{\hat{v} : \hat{S} \rightarrow L_{2, \text{loc}}(\bar{\Omega}) \mid \hat{v} \in C([-l, 0]; L_2(\Omega')) \forall l \in \mathbb{N}, \forall \Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C([-l, 0]; L_2(\Omega'))} \mid l \in \mathbb{N}, \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Введемо лінійний локально опуклий простір $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$ як поповнення лінійного простору $C^{1,0}(\bar{Q}, \hat{\Sigma}_0) := \{\hat{v} \in C(\bar{Q}) \mid \hat{v}_{x_i} \in C(\bar{Q}) (i = \overline{1, n}), \hat{v}|_{\hat{\Sigma}_0} = 0\}$ за топологією, породженою системою півнорм

$$\left\{ \|\hat{v}\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega' \times (-l, 0))} + \sum_{i=1}^n \|\hat{v}_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega' \times (-l, 0))} + \sup_{t \in [-l, 0]} \|b^{1/2}(\cdot) \hat{v}(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega')} \right\} \\ l \in \mathbb{N}, \Omega' \in Bd(\Omega).$$

Очевидно, що для будь-якого $\hat{u} \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$ отримаємо $\hat{u} \in (\hat{S} \rightarrow W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega}, \Gamma_0)) \cap L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\bar{Q})$, $\hat{u}_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\bar{Q})$ ($i = \overline{1, n}$), $b^{1/2} \hat{u} \in C(\hat{S}; L_{2, \text{loc}}(\bar{\Omega}))$.

Визначимо ще два простори

$$\mathbb{U}_{p, c}^* := \{\hat{v} \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b \mid \text{supp } \hat{v} - \text{обмежена множина}, \hat{v}_t \in L_2(\hat{Q}), \hat{v}(\cdot, 0) = 0\}.$$

$$\mathbb{F}_{\text{loc}} := L_{2, \text{loc}}(\bar{Q}).$$

Нехай

$$\theta(t) := \int_T^t \frac{ds}{\varphi(s)}, \quad t \in S, \quad (15)$$

і позначимо через θ^{-1} функцію, яка є оберненою до функції θ , заданої в (15).

Тепер введемо лінійний оператор Z , який взаємно однозначно переводить лінійний простір функцій $F := \{h : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}\}$ на лінійний простір функцій $\hat{F} := \{\hat{h} : \hat{Q} \rightarrow \mathbb{R}\}$ за правилом

$$Zh = \hat{h}, \quad \text{де} \quad \hat{h}(s) := h(t)|_{t=\theta^{-1}(s)}, \quad s \in \hat{S}, \quad t \in S,$$

тобто оператор Z функції з простору F ставить у відповідність функцію з $\hat{F}$, отриману з цієї внаслідок заміни змінної

$$s = \theta(t), \quad t \in S, \quad s \in \hat{S}. \quad (16)$$

Легко переконатися, що звуження оператора Z на простори $\mathbb{U}_{p,\text{loc}}^{b,0}$, $\mathbb{U}_{p,c}^{1,0}$, $\mathbb{F}_{0,\text{loc}}$, $\mathbb{F}_{0,\text{loc}}^*$ взаємно однозначно переводить ці простори на простори, відповідно, $\mathbb{U}_{p,\text{loc}}^b$, $\mathbb{U}_{p,c}^*$, $\mathbb{F}_{\text{loc}}$, $\mathbb{F}_{\text{loc}}^*$.

Зробимо в інтегральній тотожності (6) заміну змінної t за правилом (16). У підсумку, прийнявши $\tilde{u} := Zu \in \mathbb{U}_{p,\text{loc}}^b$, $\tilde{f} := Zf \in \mathbb{F}_{\text{loc}}$ та позначивши через $\hat{a}_i(x, s, \xi, \eta)$, $(x, s, \xi, \eta) \in \hat{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($i = \bar{0}, n$), – функції, отримані після зазначеної заміни змінної t у функціях, відповідно, $a_i(x, t, \xi, \eta)$, $(x, t, \xi, \eta) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($i = \bar{0}, n$), одержимо

$$\iint_{\hat{Q}} \left\{ \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(x, s, \hat{u}, \nabla \hat{u}) \hat{v}_{x_i} + \hat{a}_0(x, t, \hat{u}, \nabla \hat{u}) \hat{v} - b \hat{u} \hat{v}_s \right\} dx ds = \iint_Q \hat{f} v dx ds \quad (17)$$

для будь-яких $\hat{v} \in \mathbb{U}_{p,c}^*$. Звідси легко випливає, що функція $\tilde{u}$ є узагальненим розв'язком рівняння

$$\frac{\partial}{\partial s}(b(x)\hat{u}) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \hat{a}_i(x, s, \hat{u}, \nabla \hat{u}) + \hat{a}_0(x, s, \hat{u}, \nabla \hat{u}) = \hat{f}(x, s), \quad (x, t) \in Q, \quad (18)$$

що задовольняє крайові умови

$$\hat{u}|_{\hat{\Sigma}_0} = 0, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu_{\hat{a}}}|_{\hat{\Sigma}_1} = 0, \quad (19)$$

де $\partial \hat{u}(y, s)/\partial \nu_{\hat{a}} := \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(y, s, u, \nabla u) \nu_i(y)$, $(y, s) \in \hat{\Sigma}_1$.

Неважко переконатися, що внаслідок заміни (16) змінної t умова (11) перейде в умову

$$\int_{t_0(R)}^T \int_{\Omega_{\tau(R)}} \left[\hat{q}_1(x, s) \sum_{i=1}^k |\hat{u}_{x_i}|^2 + (\hat{q}_2(x, s) + \mu b(x)) |\hat{u}|^2 \right] e^{-2\mu s} dx ds = o(1) e^{R/2} \quad (20)$$

при $R \rightarrow +\infty$, де $\tilde{q}_j := Zq_j$ ($j = 1, 2$).

Очевидно, що правильним є таке твердження: якщо u є розв'язком задачі (1), (2), (11), то $\hat{u}$ є розв'язком задачі (18)-(20), і навпаки. Задачу (18)-(20) розглядали (з

точністю до позначень) в [16] і припущення щодо вихідних даних задачі, які зроблені у згаданій праці, відповідають тим, що є в цій праці. Тому правильність теорем 1 і 2 випливає з теорем, відповідно, 1 і 2 [16].

4. Ілюстрація основних результатів. Отримані результати проілюструємо на одному простому прикладі задачі (1),(2),(11).

Нехай $n = 1$, $\Omega := (0, +\infty)$, $\Gamma_0 := \{0\}$, $\Gamma_1 := \emptyset$, $T := 2$. Тоді $Q = (0, \infty) \times (0, 2]$, $\Sigma_0 = \{(0, t) \mid t \in (0, 2]\}$, $\Sigma_1 = \emptyset$. Прийемо $b(x) := 1$, якщо $x \in (0, 1)$, і $b(x) := 0$, якщо $x \in [1, +\infty)$, а також $\varphi(t) := t$, $t \in [0, T]$. Припустимо, що для будь-яких $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^2$ отримаємо $a_0(x, t, s, \xi) = s$, $a_1(x, t, s, \xi) = \xi$. Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$t(b(x)u)_t - u_{xx} + u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (21)$$

а умови (2) –

$$u|_{x=0} = 0. \quad (22)$$

Очевидно, що в такому випадку умови A_1, A_1^*, A_2 виконуються з $p_0(x) = p_1(x) = 2$, $x \in (0, +\infty)$. Це, зокрема, означає, що виконуються умови P^* .

Тепер конкретизуємо умову (11). Легко переконатися, що умови A_3, A_4 , а також A_5 , виконуються з $g_{1,1} = 1$, $g_{2,1} = 0$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$. Прийемо $\mu = 0$. Очевидно, що цей набір (b, g, q, μ) належить $\mathbb{K}$ і $E_{1,0}(v) = v'^2 + v^2$.

Далі зауважимо, що в цьому випадку $k = 1$, $\Omega_\tau = (0, \tau)$, $\Gamma_{0,\tau} = \{0\}$, $\Gamma_{1,\tau} = \emptyset$, $\Gamma_{*,\tau} = \{\tau\}$ для всіх $\tau > 0$. Отож, для будь-яких $\tau \in (0, +\infty)$, $t_0 \in (0, 2)$ одержимо $Q_{\tau,t_0} = (0, \tau) \times (0, 2]$, $\Sigma_{0,\tau,t_0} = \{(0, t) \mid t \in (0, 2]\}$, $\Sigma_{1,\tau,t_0} = \emptyset$, $\Sigma_{*,\tau,t_0} = \{(\tau, t) \mid t \in (0, 2]\}$.

Неважко переконатися, що $d_1(\tau, t_0) = 1$, $d_2(\tau, t_0) = 0$, $\lambda(\tau, t_0) = 1$, $\Theta(\tau, t_0) \leq 1$ для довільних $(\tau, t_0) \in [1, +\infty) \times (0, 1]$. Отже, в цьому випадку можна вважати, що $A_1(\tau, t_0) = 1$, $A_2(\tau, t_0) = 1/2$, $(\tau, t_0) \in [1, +\infty) \times (0, 1]$. Зрозуміло, що задача Коші

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = 1, \quad \frac{dt_0}{d\alpha} = -\frac{t_0}{2}, \quad \tau(0) = 1, \quad t_0(0) = 1,$$

має єдиний розв'язок $\tau(\alpha) = \alpha + 1$, $t_0(\alpha) = e^{-\alpha/2}$, $\alpha \in [0, +\infty)$. Звідси, зокрема, випливає, що набір (b, g, q, μ) належить множині $\mathbb{K}^*$. Зрозуміло, що $\Omega^\alpha = (0, \alpha + 1)$, $Q^\alpha = (0, \alpha + 1) \times (e^{-\alpha/2}, 2]$. Отож, умову (11) в цьому випадку можна подати у вигляді

$$\int_{e^{-R/2}}^2 t^{-1} dt \int_0^{R+1} [u_x^2 + u^2] dx = o(1)e^R \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

Тепер розглянемо умови існування узагальненого розв'язку задачі (21)-(23). Неважко переконатися, що в цьому випадку отримаємо нерівність $\Lambda_m \geq 1$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Отож, на підставі теореми 2 для існування узагальненого розв'язку задачі (21)-(23) достатньо, щоб функція f задовольняла умову: існують сталі $C_1 > 0$ і $\varepsilon \in (0, 1)$ такі, що

$$\int_{e^{-m/2}}^2 t^{-1} dt \int_0^{m+1} f^2 dx \leq C_1 e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

У цьому випадку узагальнений розв'язок задачі (21)-(23) задовольняє, згідно з теоремою 2, оцінку

$$\int_{e^{-m/2}}^2 t^{-1} dt \int_0^{m+1} [u_x^2 + u^2] dx \leq C_2 e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка залежить тільки від C_1 і ε .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations / R.E. Showalter // Amer. Math. Soc. Journal. – 1997. – Vol. 49.
2. Олейник О.А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник, Е.В. Раджевич – Итоги науки. Матем. анализ. – 1969.
3. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка / А.С. Калашников // Вестник МГУ. Сер. матем. – 1971. – I, №2. – С. 42-48. – II, №3. – С. 3-8.
4. Пукач П.Я. Задачі для нелінійних параболических рівнянь з виродженням / П.Я. Пукач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1991. – Вип. 36. – С. 6-10.
5. Бокало М.М. Задача без початкових умов для слабо нелінійних параболических рівнянь, які сильно вироджуються в початковий момент часу / М.М. Бокало, В.М. Сікорський // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 35-43.
6. Buhrii O.M. Parabolic variational inequalities with degeneration / O.M. Buhrii // Mat. studii. – 1999. – Vol. 11, №2. – P. 189-198.
7. Бугрій О.М. Системи параболических варіаційних нерівностей з виродженням / О.М. Бугрій // Нелинейные граничные задачи. – 2003. – Вип. 13. – С. 43-55.
8. Шишков А.Є. Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности / А.Є. Шишков // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №2. – С. 277-289.
9. Brézis H. Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity / H. Brézis // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12, №3. – P. 271-282.
10. Boccardo L. Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ without growth restrictions on the data / L. Boccardo, T. Gallouët, J.L. Vázquez // J. Differential Equations. – 1993. – Vol. 105, №2. – P. 334-363.
11. Bokalo M.M. On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces / M.M. Bokalo, O.V. Domanska // Mat. studii. – 2007. – Vol. 28, №1. – P. 77-91.
12. Ивасишен С.Д. О параболических граничных задачах без начальных условий / С.Д. Ивасишен // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, №5. – С. 547-552.
13. Бокало Н.М. Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений / Н.М. Бокало // Дифф. уравнения. – 1994. – Т. 30, №8. – С. 1325-1334.
14. Бокало М.М. Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболических рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / М.М. Бокало, І.Б. Паучок // Mat. studii. – 2006. – Т. 24, №1. – С. 25-48.
15. Bokalo M. Linear evolution first-order problems without initial conditions / M. Bokalo, A. Lorenzi // Milan J. of Mathematics. – 2009. – Vol. 77. – P. 437-494.

16. Бокало М.М. Однозначна розв'язність задачі без початкових умов для лінійних та нелінійних еліптично-параболічних рівнянь / М.М. Бокало // Укр. мат. вісн. – 2011. – Т. 8, №1. – С. 54-85.
17. Самохін В.Н. Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации / В.Н. Самохін // Дифф. уравнения. – 1996. – Т. 32, №5. – С. 643-651.
18. Buhrii O.M. Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / O.M. Buhrii, R.A. Mashiyev // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, №6. – P. 2335-2331.
19. Růžička M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory / M. Růžička – Berlin: Springer-Verl, 2004.
20. Fan X. On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ / X. Fan, D. Zhao // J. Math. Anal. and Appl. – 2001. – Vol. 263. – P. 424-446.
21. Kováčik O. On spaces $L^{p(x)}(Q)$ and $W^{1,p(x)}$ / O. Kováčik, J. Rákosník // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol. 41, №4. – P. 592-618.

*Стаття: надійшла до редакції 27.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR LINEAR AND NONLINEAR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS DEGENERATED AT THE INITIAL TIME MOMENT

Mykola BOKALO

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com*

We consider the problem without initial conditions for linear and nonlinear anisotropic elliptic-parabolic second order equations. This equations defined in unbounded domains with respect to spatial variables and degenerated in initial time moment. It has been established the existence and uniqueness of the weak solutions of the given problem. We put the restrictions on the behaviour of the solutions of the considered problem and increasing of it's data-in at neighbourhoods of initial time moment and at spatial infinity. The equations have the nonlinearity indices depending on points of the domain and direction of differentiation. We consider the weak solutions out of general Lebesgue-Sobolev spaces.

Key words: linear equation, nonlinear equation, elliptic-parabolic equation, degenerate parabolic equation, problem without initial conditions, general Lebesgue-Sobolev space, unbounded domain.

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫЕ ВЫРОЖДАЮТСЯ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Николай БОКАЛО

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com*

Доказано существование и единственность обобщённых решений задачи без начальных условий для линейных и нелинейных анизотропных эллиптически-параболических уравнений второго порядка, которые заданы в неограниченных по пространственным переменным областях и вырождаются в начальный момент времени. При этом накладываются условия на поведение решений задач и возрастание их исходных данных в окрестности начального момента времени и на бесконечности по пространственным переменным. Уравнение имеет показатели нелинейности, которые зависят от точек области определения уравнений и направлений дифференцирования, а их обобщённые решения берутся из обобщённых пространств Лебега-Соболева.

Ключевые слова: линейное уравнение, нелинейное уравнение, эллиптически-параболическое уравнение, вырождающееся параболическое уравнение, задача без начальных условий, обобщённое пространство Лебега-Соболева, неограниченная область.

УДК 517.95

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Тарас БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com

Вивчено мішану задачу для одного класу деяких нелінійних параболических рівнянь вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}u) + Au = f,$$

де $\mathcal{P}$ – нелінійна функція; A – лінійний оператор; f – деяка функція. Степені нелінійності є функціями просторових змінних. За певних умов на коефіцієнти та степені нелінійності доведено єдиність розв'язку в узагальнених просторах Лебега і Соболева.

Ключові слова: єдиність розв'язку, узагальнені простори Лебега і Соболева, нелінійні диференціальні рівняння.

Нехай $T > 0$ – фіксоване число, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0, T)$, $\Omega_\tau = \{(x, t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in (0, T]$. Розглянемо мішану задачу для нелінійного параболического рівняння вигляду

$$(|u|^{r(x)-2}u + \alpha u)_t - \sum_{i=1}^n (a_i(x)u_{x_i})_{x_i} + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Відомо, що процеси дифузії в пористому середовищі описуються рівнянням

$$u_t - \Delta u = f,$$

яке можна узагальнити (див. [1]) до

$$(|u|^{r-2}u + \alpha u)_t - \Delta u = f,$$

що потрапляє у клас рівнянь, які ми вивчаємо.

Ми знайшли умови єдиності розв'язку розглядуваної задачі в узагальнених просторах Лебега і Соболева. Дослідженню різних задач для подвійно нелінійних параболических рівнянь зі сталим показником нелінійності r присвячено праці [2]–[7]

(див. також [8] та бібліографію в цій статті). Існуванню розв'язку задач з нелінійною головною частиною, які у модельному випадку мають вигляд (1)-(3) загалом, $r(x) \neq \text{const}$ присвячено працю [9] для $\alpha > 0$ та працю [10] для $\alpha = 0$. Мішані задачі для інших типів нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності вивчено в [11].

Позначатимемо $L_+^\infty(\Omega) = \{r \in L^\infty(\Omega) : \text{ess inf}_{x \in \Omega} r(x) > 1\}$. Для кожної функції $r \in L_+^\infty(\Omega)$ через r_0 та r^0 позначатимемо числа $r_0 \equiv \text{ess inf}_{x \in \Omega} r(x)$ та $r^0 \equiv \text{ess sup}_{x \in \Omega} r(x)$, а через r' – таку функцію, що $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для $x \in \Omega$.

Узагальнені простори Лебега були введені в [12]. Нагадаємо їхні означення та деякі властивості. Нехай $r \in L_+^\infty(\Omega)$. Визначимо функціонал $\rho_r(\cdot, \Omega)$ рівністю $\rho_r(v, \Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{r(x)} dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{r(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_r(v, \Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_r слабо напівноперервний знизу на $L^{r(x)}(\Omega)$ (див. [12, с. 208]). Крім того, $L^{r(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою

$$\|v; L^{r(x)}(\Omega)\| = \inf\{\lambda > 0 : \rho_r(v/\lambda, \Omega) \leq 1\}.$$

Зауважимо таке: якщо $r(x) \geq q(x)$, то $L^{r(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$. Спряженим до $L^{r(x)}(\Omega)$ є простір $L^{r'(x)}(\Omega)$.

Позначимо

$$V = H_0^1(\Omega), \quad U(Q_{0,T}) = L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Нехай виконуються умови

- (A): $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = \overline{1, n}$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x, t) \in Q_{0,T}$, де $a_0 > 0$;
 (C): $c \in L^\infty(\Omega)$.

Позначимо для спрощення

$$\mathcal{P}u = |u|^{r(x)-2}u + \alpha u.$$

Означення 1. Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap L^{r(x)}(Q_{0,T})$ називатимемо узагальненим розв'язком (1)-(3), якщо вона задовольняє тотожність

$$\int_{Q_{0,T}} \left[-\mathcal{P}u v_t + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} v_{x_i} + c(x) u v \right] dx dt = \int_{Q_{0,T}} f(x, t) v dx dt \quad (4)$$

для всіх $v \in \{w \in U(Q_{0,T}) : w_t \in L^{r(x)}(Q_{0,T}), w(\cdot, T) = 0\}$.

Основні результати цієї праці подамо у вигляді теорем.

Теорема 1. Нехай $r \in L_+^\infty(\Omega)$, $\alpha \geq 0$ та виконуються умови (A), (C), $c(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \Omega$. Тоді задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки u^1, u^2 задачі (1)-(3). Тоді з (4) отримаємо

$$\int_{Q_{0,T}} \left[-\mathcal{P}u^1 v_t + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}^1 v_{x_i} + c(x) u^1 v \right] dx dt = \int_{Q_{0,T}} f(x, t) v dx dt,$$

$$\int_{Q_{0,T}} \left[-\mathcal{P}u^2 v_t + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}^2 v_{x_i} + c(x) u^2 v \right] dx dt = \int_{Q_{0,T}} f(x, t) v dx dt.$$

Віднімаючи ці дві тотожності, отримаємо

$$\int_{Q_{0,T}} \left[-(\mathcal{P}u^1 - \mathcal{P}u^2) v_t + \sum_{i=1}^n a_i(x) (u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2) v_{x_i} + c(x) (u^1 - u^2) v \right] dx dt = 0. \quad (5)$$

Прийmemo в цій тотожності

$$v(x, t) = \int_t^T (u^1(x, s) - u^2(x, s)) ds, \quad (x, t) \in Q_{0,T}.$$

З умов теореми одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x) (u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2) v_{x_i} + c(x) (u^1 - u^2) v \right] dx dt = \\ &= \int_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x) (u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2) \int_t^T (u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2) ds + c(x) (u^1 - u^2) \int_t^T (u^1 - u^2) ds \right] dx dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{d}{dt} \left(\int_t^T (u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2) ds \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{Q_{0,T}} c(x) \frac{d}{dt} \left(\int_t^T (u^1 - u^2) ds \right)^2 dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) \left(\int_0^T (u_{x_i}^1 - u_{x_i}^2) ds \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) \left(\int_0^T (u^1 - u^2) ds \right)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Врахувавши цю оцінку та рівність $v_t = -(u^1 - u^2)$, з (5) отримаємо

$$\int_{Q_{0,T}} (\mathcal{P}u^1 - \mathcal{P}u^2) (u^1 - u^2) dx dt \leq 0. \quad (6)$$

Оскільки функція $u \rightarrow \mathcal{P}u$ строго монотонна, то підінтегральний вираз в (6) невід'ємний. Отже, з (6) отримаємо, що він дорівнює нулю. Тому $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. $\square$

Зауважимо, що аналогічний результат у випадку $r(x) \equiv \text{const}$ отримано в [4].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский* – М., 1953.
2. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Ж.Л. Лионс* – М.: Мир, 1972.
3. *Bernis F.* Qualitative properties for some non-linear higher order degenerate parabolic equations / *F. Bernis* // *Houston J. Math.* – 1998. – Vol. 14, №3. – С. 319-351.
4. *Олейник О.А.* Об уравнениях типа уравнений нестационарной фильтрации / *О.А. Олейник* // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, №6. – С. 1210-1213.
5. *Шушков А.Е.* Распространения возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений / *А.Е. Шушков* // *Мат. сборн.* – 1996. – Т. 187, №9. – С. 139-160.
6. *Дегтярев С.П.* L_1-L_∞ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными / *С.П. Дегтярев, А.Ф. Тедеев* // *Мат. сборн.* – 2007. – Т. 198, №9. – С. 639-660.
7. *Лантнев Г.И.* Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью / *Г.И. Лантнев* // *Мат. сборн.* – 1997. – Т. 188, №9. – С. 84-112.
8. *Бугрій О.М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням / *О.М. Бугрій* // *Укр. мат. вісн.* – 2008. – Т. 5, №4. – С. 435-469.
9. *Бокало Т.М.* Невироджені подвійно нелінійні параболическі рівняння / *Т.М. Бокало, О.М. Бугрій* // *Укр. мат. журн.* – 2010. – Т. 63, №5. – С. 612-628.
10. *Бокало Т.М.* Подвійно нелінійні параболическі рівняння зі змінними показниками нелінійності в молодших членах / *Т.М. Бокало, О.М. Бугрій* // *Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех.* – 2010. – Т. 15, Вип. 18. – С. 22-37.
11. *Бугрій О.М.* Мішана задача для параболического рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / *О.М. Бугрій, С.П. Лавренюк* // *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
12. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen / *W. Orlicz* // *Studia Mathematica (Lwow).* – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.

Стаття: надійшла до редакції 06.11.2012
прийнята до друку 12.12.2012

**ON UNIQUENESS OF SOLUTION OF SOME NONLINEAR
DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A SPECIAL FORM****Taras BOKALO***Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com*

We study a mixed problem of one class nonlinear parabolic equations of the form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}u) + Au = f,$$

where $\mathcal{P}$ is a nonlinear function; A – linear operator; f – arbitrary function. The exponent of nonlinearity is a function of spatial variable. Under some conditions to the coefficients it is proven the uniqueness of solution in general Lebesgue-Sobolev spaces.

Key words: uniqueness of solution, general Lebesgue-Sobolev space, nonlinear partial differential equation.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА****Тарас БОКАЛО***Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com*

Изучено смешанную задачу для одного класса нелинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}u) + Au = f,$$

где $\mathcal{P}$ некоторая нелинейная функция; A – линейный оператор; f – некоторая функция. Степени нелинейности уравнения функции пространственных переменных. При определенных условиях на коэффициенты и степени нелинейности доказано единственность решения в обобщенных пространствах Лебега и Соболева.

Ключевые слова: единственность решения, обобщенные пространства Лебега и Соболева, нелинейные дифференциальные уравнения.

УДК 517.95

ON SOLVABILITY OF MODEL NONHOMOGENEOUS PROBLEMS FOR SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Oleh BUHRII

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua*

The nonhomogeneous initial-boundary value Dirichlet problem for the equation

$$u_t - \Delta u + g(x, t)|u|^{q(x, t)-2}u = f(x, t)$$

in cylinder domain is considered. If the condition $1 < q_0 \leq q(x, t) \leq q^0 < 2$ is satisfied, then the existence of the mild solution of this problem is proved.

Key words: nonlinear parabolic equation, nonhomogeneous problem, initial-boundary value problem, variable exponent of nonlinearity, generalized Lebesgue and Sobolev spaces, mild solution, Green function.

1. Introduction. In this paper, we continue our study of semilinear parabolic equations from [1]. Let $n \in \mathbb{N}$ and $T > 0$ be fixed numbers, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with the boundary $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0, T]$.

We seek the mild solution u of the following problem

$$u_t - \Delta u + g(x, t)|u|^{q(x, t)-2}u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = d(x, t), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (3)$$

Here $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n}$ is the Laplace operator, g, q, f are real valued functions on $Q_{0,T}$, d is a real valued function on $\partial\Omega \times (0, T)$, u_0 is a real valued function on Ω .

Under some conditions for data-in of problem (1)-(3), using the Green function technique, we prove a solvability of these problems with variable exponents of nonlinearity.

The existence of the Green function and its various properties it is well known (see for instance [2], [3], [4], and the references given there). The various problems with variable exponents of nonlinearity and homogeneous boundary conditions are investigate

in [5], [6], [7], [8], [9], [10]. The Green function technique for some semilinear parabolic problems with variable exponents of nonlinearity and homogeneous boundary conditions are investigated in [1], [11], [12]. The extensive literature is reviewed in [1].

This paper is organized as follows. In Part 2, we give some definitions and main results. Auxiliary facts are given in Part 3. In Part 4, we prove the main theorem.

2. Motivation of the definition and main results.

2.1. *Case of the linear problem.* First we consider the problem

$$u_t - \Delta u = h(x, t) \quad \text{in } Q_{0,T}, \quad (4)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Recall that a function $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, t, \xi, s)$ $x, \xi \in \Omega$, $t > s \geq 0$, is called the Green function (see [13, p. 1118]) of the Dirichlet mixed problem for parabolic equation (4) if for every $(\xi, s) \in Q_{0,T}$ the function $\mathbf{G}$ satisfies homogeneous equation (4), and the boundary condition $\mathbf{G}|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$ with respect to the variables $x \in \Omega$, $t > s \geq 0$, and for every function $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ we have

$$\lim_{t \rightarrow s+0} \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x).$$

It is well known that the solution of problem (4)-(5) is

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) h(\xi, s) d\xi ds. \quad (6)$$

Further we consider a problem with a nonhomogeneous initial condition, i.e.

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } Q_{0,T}, \quad (7)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (9)$$

Its solution is

$$u(x, t) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in Q_{0,T}. \quad (10)$$

Now let us consider a problem with a nonhomogeneous boundary condition, i.e.

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } Q_{0,T}, \quad (11)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = d(x, t), \quad (12)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

We assume that there exists a function $\widehat{d} = \widehat{d}(x, t)$ such that

$$\widehat{d} \in C_{x,t}^{2,1}(Q_{0,T}) \cap C(\overline{Q_{0,T}}), \quad \widehat{d}|_{\partial\Omega \times (0,T)} = d(x, t). \quad (14)$$

If we replace u by $\widehat{d} + u^*$, we obtain a new problem

$$u_t^* - \Delta u^* = h^*(x, t) \quad \text{in } Q_{0,T}, \quad (15)$$

$$u^*|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \quad (16)$$

$$u^*|_{t=0} = u_0^*(x), \quad (17)$$

where $h^* = -\widehat{d}_t + \Delta \widehat{d}$, $u_0^* = -\widehat{d}|_{t=0}$. According to (6), (10), we have

$$u^*(x, t) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) u_0^*(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) h^*(\xi, s) d\xi ds. \quad (18)$$

Therefore the solution of problem (11)-(13) is

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \widehat{d}(x, t) - \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) \widehat{d}(\xi, 0) d\xi - \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) (\widehat{d}_t(\xi, s) - \Delta \widehat{d}(\xi, s)) d\xi ds, \quad (x, t) \in Q_{0,T}. \end{aligned} \quad (19)$$

Finally let us consider the general Dirichlet mixed problem for the model equation

$$u_t - \Delta u = h(x, t) \quad \text{in } Q_{0,T}, \quad (20)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = d(x, t), \quad (21)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (22)$$

Let again $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, t, \xi, s)$ be the Green function of the homogeneous Dirichlet problem (4)-(5); $\widehat{d} = \widehat{d}(x, t)$ be a function such that $\widehat{d}|_{\partial\Omega \times (0,T)} = d(x, t)$;

$$\begin{aligned} d^*(x, t) &= \widehat{d}(x, t) - \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) \widehat{d}(\xi, 0) d\xi - \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) (\widehat{d}_t(\xi, s) - \Delta \widehat{d}(\xi, s)) d\xi ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Clearly if we replace (20)-(22) by three problems, i.e. (4)-(5), (7)-(9), and (11)-(13), then, using formulas (6), (10), (19), we get a solution of problems (20)-(22) such that

$$u(x, t) = d^*(x, t) + \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) h(\xi, s) d\xi ds. \quad (24)$$

Let $p \geq 1$ be a fixed number. We introduce the following notion (see for comparison [14], [15]). A function u is called a mild solution of problem (20)-(22) if $u \in L^p(Q_{0,T})$, u satisfies equality (24) for a.e. $(x, t) \in Q_{0,T}$. In the same manner we define a mild solution of the mixed problem for parabolic equation (1). More precisely, we replace the function h by $f - g|u|^{q(x,t)-2}u$ and consider equality (24) as nonlinear integral equations. A solution of this integral equation is a solution for problem (1)-(3).

2.2. *Main results.* Suppose that the following conditions hold:

(G): $g \in L^\infty(Q_{0,T})$;

(Q): $q \in L^\infty(Q_{0,T})$, $1 < q_0 \leq q(x, t) \leq q^0 < +\infty$, where

$$q_0 \equiv \operatorname{ess\,inf}_{(x,t) \in Q_{0,T}} q(x, t), \quad q^0 \equiv \operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in Q_{0,T}} q(x, t);$$

(DFU): for some $p > 1$ we take $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^p(Q_{0,T})$, $\widehat{d} \in W^{1,p}(Q_{0,T}) \cap L^p(0, T; W^{2,p}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^p(\Omega))$ such that

$$\widehat{d}|_{\partial\Omega \times (0,T)} = d(x, t).$$

Let $\mathbf{G}(x, t, \xi, s)$ be the Green function of the mixed problem (4)-(5) such that the Gaussian estimate

$$|\mathbf{G}(x, t, \xi, s)| \leq \frac{M_1 \chi_{(0,+\infty)}(t-s)}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} e^{-M_2 \frac{|x-\xi|^2}{t-s}} \quad (25)$$

holds. Here $M_1, M_2 > 0$ are constants, $\chi_{(0,+\infty)}(z)$ is the indicator function of the segment $(0, +\infty)$. Let d^* be given by (23), where $\widehat{d}$ is taken from condition **(DFU)**.

Now we provide Definition of the solution and the main theorem.

Definition 1. A real valued function $u \in L^p(Q_{0,T})$ is called a mild solution of problems (1)-(3) if for a.e. $(x, t) \in Q_{0,T}$ the equality

$$\begin{aligned} u(x, t) = & d^*(x, t) + \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) f(\xi, s) d\xi ds - \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) g(\xi, s) |u(\xi, s)|^{q(\xi, s)-2} u(\xi, s) d\xi ds \end{aligned} \quad (26)$$

holds.

Theorem 1. Suppose that conditions **(Q)** with $q^0 < 2$, **(DFU)** with $p \in (1 + \frac{n}{2}, +\infty)$, and **(G)** are satisfied. If there exists the Green function of problem (1)-(3) such that the Gaussian estimate (25) is executed, then problem (1)-(3) has a mild solution.

In particular, the conditions of Theorem 1 are the conditions on $\partial\Omega$. For example, we recall some facts from [4]. First let us consider a nondecreasing bounded half-additive function $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$\frac{\omega(t)}{t} \leq 2 \frac{\omega(s)}{s}, \quad \frac{\omega(t)}{t^\gamma} \leq \widetilde{C} \frac{\omega(s)}{s^\gamma}, \quad 0 < s < t,$$

where $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, $\widetilde{C} > 0$. By definition, put

$$F(t) = \int_0^t \frac{\omega(s)}{s} ds, \quad t \geq 0, \quad \Phi(\tau) = \int_0^\tau \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad \tau \geq 0.$$

Suppose that there exist constants $\sigma > 0$, $\hat{C} > 0$ such that

$$F(\sigma) < +\infty, \quad \Phi(\sigma) < +\infty, \quad \int_t^\sigma \frac{\omega(s)}{s^2} ds \leq \hat{C} \frac{F(t)}{t}, \quad 0 < t < \sigma.$$

Let $m, N \in \mathbb{N}$ be fixed numbers, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$. Let $C^m(\mathcal{O})$ be the space of all functions φ which, together with all their partial derivatives $D^\alpha \varphi$ of orders $|\alpha| \leq m$, are continuous on $\mathcal{O}$. The set of all functions $\psi \in C^m(\mathcal{O})$ such that

$$|\psi|_m^\omega := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{y \in \mathcal{O}} |D^\alpha \psi(y)| + \sum_{|\beta|=m} \sup_{y, z \in \mathcal{O}} \frac{|D^\beta \psi(y) - D^\beta \psi(z)|}{\omega(|y - z|)} < +\infty,$$

is called the Dini space and is denoted by $C^{(m, \omega)}(\mathcal{O})$.

Further for our domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ we put $S = \partial\Omega$. We say that the surface S belongs to the Dini sets $C^{(m, \omega)}$ if $S = \bigcup_{k=1}^\ell S_k$, where for every $k \in \{1, \dots, \ell\}$ the open surface S_k is given by the rule $x_j = \varphi_j^k(x'_j)$, $x'_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{O}^k$, and the following conditions hold:

- 1) $\mathcal{O}^k$ is a bounded domain from $\mathbb{R}^{n-1}$; 2) $\varphi_j^k \in C^{(m, \omega)}(\mathcal{O}^k)$.

Finally we recall Theorem.

Example 1 (see Theorem 2.8 [4, p. 136]). If $\partial\Omega \in C^{(2, \omega)}$, then there exists the Green function of problem (1)-(3) such that the Gaussian estimate (25) is executed.

3. Auxiliary facts.

3.1. A fixed point theorem. First we recall some definitions. Let X, Y be normed spaces, $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$. A subset $\mathcal{M}$ of a normed space X is called a compact set if every sequence of points in $\mathcal{M}$ has a subsequence converging in X to an element of $\mathcal{M}$ (see [16, p. 6]). $\mathcal{M}$ is called a precompact set if its closure $\overline{\mathcal{M}}$ (in the norm topology) is compact (see [16, p. 7]).

An operator $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ is called a compact operator if $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ is precompact in Y whenever $\mathcal{M}$ is bounded in X (see [16, p. 8]). $\mathcal{A}$ is a completely continuous operator if it is continuous and compact (see [16, p. 9]). Every bounded linear operator is continuous. Hence every compact linear operator is completely continuous.

Further let us consider some examples.

Example 2. 1) Clearly if $A, B : X \rightarrow Y$ are completely continuous operators, and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, then the operator $\alpha A + \beta B$ also is completely continuous.

2) (see Lemma 1 [1, p. 81]) Let X, Y, Z be Banach spaces, $A : Y \rightarrow Z$, $B : X \rightarrow Y$. If A is completely continuous, and B is bounded continuous, then the composition of the operators $A \circ B : X \rightarrow Z$ is a completely continuous operator.

3) Clearly, every constant operator, i.e. an operator $C : X \rightarrow X$ such that

$$\exists y \in X \quad \forall x \in X : \quad Cx = y \tag{27}$$

is a nonlinear (if $y \neq 0$) completely continuous operator.

Suppose that $\mathbf{G}$ is a measurable on $Q_{0,T} \times Q_{0,T}$ real valued function such that almost everywhere in $Q_{0,T} \times Q_{0,T}$ we have Gaussian estimate (25). In particular, $\mathbf{G} = 0$ if $t \leq s$.

By $L^p(\Omega)$, where $p \geq 1$, we denote the standard Lebesgue space with respect to the norm

$$\|u; L^p(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

In the same manner we define the space $L^p(Q_{0,T})$.

Example 3. (Lemma 3 [1, p. 83]). Suppose the measurable real valued function $\mathbf{G}$ satisfies Gaussian estimate (25), the integral operator $\mathcal{J}$ is given by equality

$$(\mathcal{J}z)(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) z(\xi, s) d\xi ds, \quad (x, t) \in Q_{0,T}. \quad (28)$$

If $p > 1 + \frac{n}{2}$, then the operator $\mathcal{J} : L^p(Q_{0,T}) \rightarrow L^p(Q_{0,T})$ is completely continuous.

The following theorem plays main role in the proof of our results.

Proposition 1 (the Schauder fixed point theorem). ([17, p. 229]). *Let X be a Banach space, $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ be a completely continuous operator, $\mathcal{M} \subset X$ be a nonempty bounded closed convex set. If $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, then $\mathcal{A}$ has a fixed point.*

3.2. *Some properties of the integral operators.* We will need the following Proposition and Lemmas.

Proposition 2. (Lemma 2 [1, p. 83]). *Suppose that $r \in [1, +\infty)$ is a fixed number, G is a measurable real valued function such that Gaussian estimate (25) holds,*

$$J_r(x, t, s) = \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, s)|^r d\xi, \quad \widehat{J}_r(\xi, t, s) = \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, s)|^r dx \quad (29)$$

for a.e. $x, \xi \in \Omega$, $0 \leq s < t$. Then there exists a constant $C(r) > 0$ such that

$$0 \leq J_r(x, t, s) \leq \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(r-1)}}, \quad 0 \leq \widehat{J}_r(\xi, t, s) \leq \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(r-1)}}. \quad (30)$$

Remark 1. From (29), (30) it follows that if the measurable real valued function $\mathbf{G}$ satisfies Gaussian estimate (25), then there exists a constant $M > 0$ such that

$$\operatorname{ess\,sup}_{\substack{(x,t) \in Q_{0,T} \\ s \in (0,T)}} \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, s)| d\xi \leq M, \quad \operatorname{ess\,sup}_{\substack{t \in (0,T) \\ (\xi,s) \in Q_{0,T}}} \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, s)| dx \leq M. \quad (31)$$

Lemma 1. *Suppose that the measurable real valued function $\mathbf{G}$ satisfies Gaussian estimate (25) and the integral operator $\mathcal{J}_0$ is given by the equality*

$$(\mathcal{J}_0 v)(x, t) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) v(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in Q_{0,T}. \quad (32)$$

Then for every $p \in (1, +\infty)$ the linear operator $\mathcal{J}_0 : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(Q_{0,T})$ is bounded (therefore it is a continuous operator). In addition, there exists a constant $L_0 > 0$ such that for every $v \in L^p(\Omega)$ the estimate

$$\|\mathcal{J}_0 v; L^p(Q_{0,T})\| \leq L_0 \|v; L^p(\Omega)\| \quad (33)$$

holds (notice that L_0 depends on p but does not depend on v).

Proof. Clearly the complete proof of this Lemma follows from estimate (33). Let $p, p' \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Using the Hölder inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_0 v; L^p(Q_{0,T})\|^p &= \int_{Q_{0,T}} \left| \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) v(\xi) d\xi \right|^p dx dt \leq \\ &\leq \int_{Q_{0,T}} \left| \int_{\Omega} |\mathbf{G}|_{s=0}^{\frac{1}{p'}} |\mathbf{G}|_{s=0}^{\frac{1}{p}} |v| d\xi \right|^p dx dt \leq \int_{Q_{0,T}} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{G}|_{s=0} d\xi \right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{G}|_{s=0} |v|^p d\xi \right) dx dt. \end{aligned}$$

Taking into account estimates (31), the equality $\frac{p}{p'} = p - 1$, and the Fubini theorem, we get

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_0 v; L^p(Q_{0,T})\|^p &\leq M^{\frac{p}{p'}} \int_{Q_{0,T}} dx dt \int_{\Omega} |\mathbf{G}|_{s=0} |v|^p d\xi = M^{p-1} \times \\ &\times \int_0^T dt \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, 0)| |v(\xi)|^p d\xi = M^{p-1} \int_{\Omega} \left(\int_0^T dt \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, 0)| dx \right) |v(\xi)|^p d\xi \leq \\ &\leq M^{p-1} \int_{\Omega} \left(\int_0^T M dt \right) |v(\xi)|^p d\xi \leq T M^p \int_{\Omega} |v(\xi)|^p d\xi. \end{aligned}$$

Therefore (33) is true, and the Lemma is proved. $\square$

Lemma 2. Suppose that the measurable real valued function $\mathbf{G}$ satisfies Gaussian estimate (25), the integral operator $\mathcal{J}$ is given by equality (28). Then for every $p \in (1, +\infty)$ the linear operator $\mathcal{J} : L^p(Q_{0,T}) \rightarrow L^p(Q_{0,T})$ is bounded (therefore it is a continuous operator). In addition, there exists a constant $L > 0$ such that for every $z \in L^p(Q_{0,T})$ the estimate

$$\|\mathcal{J}z; L^p(Q_{0,T})\| \leq L \|z; L^p(Q_{0,T})\| \quad (34)$$

holds (notice that the constant L depends on p but does not depend on z).

Proof. Again it is enough to show only estimate (34). Let $p, p' \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Using the methods of Lemma 1, we obtain

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}z; L^p(Q_{0,T})\|^p &= \int_{Q_{0,T}} \left| \int_{Q_{0,t}} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) z(\xi, s) d\xi ds \right|^p dx dt \leq \\ &\leq \int_{Q_{0,T}} \left| \int_{Q_{0,t}} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{p'}} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{p}} |z| d\xi ds \right|^p dx dt \leq \\ &\leq \int_{Q_{0,T}} \left(\int_{Q_{0,t}} |\mathbf{G}| d\xi ds \right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_{Q_{0,t}} |\mathbf{G}| |z|^p d\xi ds \right) dx dt. \end{aligned}$$

Using estimate (31), equality $\frac{p}{p'} = p - 1$, and the Fubini theorem, we get

$$\|\mathcal{J}z; L^p(Q_{0,T})\|^p \leq (T M)^{\frac{p}{p'}} \int_{Q_{0,T}} dx dt \int_{Q_{0,t}} |\mathbf{G}| |z|^p d\xi ds =$$

$$\begin{aligned}
&= (TM)^{p-1} \int_0^T dt \int_{\Omega} dx \int_0^t ds \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, s)| |z(\xi, s)|^p d\xi = \\
&= (TM)^{p-1} \int_0^T ds \int_{\Omega} \left(\int_s^T dt \int_{\Omega} |\mathbf{G}(x, t, \xi, s)| dx \right) |z(\xi, s)|^p d\xi \leq \\
&\leq (TM)^{p-1} \int_0^T ds \int_{\Omega} \left(\int_s^T M dt \right) |z(\xi, s)|^p d\xi \leq (TM)^p \int_{Q_{0,T}} |z(\xi, s)|^p d\xi ds.
\end{aligned}$$

This inequality yields (34). The Lemma is proved. $\square$

3.3. Generalized Lebesgue spaces and Nemytskii operator with the variable exponent of nonlinearity. First let us introduce some notation and functional spaces. Suppose that $q \in L^{\infty}(Q_{0,T})$ satisfies condition **(Q)**. Consider a linear subspace $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ of the space $L^1(Q_{0,T})$ which consists of v such that $\rho_q(v, Q_{0,T}) < \infty$, where

$$\rho_q(v, Q_{0,T}) := \int_{Q_{0,T}} |v(x, t)|^{q(x,t)} dx dt.$$

It is the Banach space with respect to the Luxemburg norm

$$\|v; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})\| := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_q(v/\lambda, Q_{0,T}) \leq 1\}$$

(see [19, p. 599]) and it is called a generalized Lebesgue space. This space was first introduced by W. Orlicz in [18]. Note that if $q(x, t) = q_0 = \text{const}$ for a.e. $(x, t) \in Q_{0,T}$, then $\|\cdot; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})\|$ equals to the standard norm $\|\cdot; L^{q_0}(Q_{0,T})\|$ of the Lebesgue space $L^{q_0}(Q_{0,T})$. According to [19, p. 599], the conjugate space $[L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^*$ equals $L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})$, where the function q' is defined by the equality $\frac{1}{q(x,t)} + \frac{1}{q'(x,t)} = 1$ for a.e. $(x, t) \in Q_{0,T}$. Note also that the set $C(\overline{Q}_{0,T})$ is dense in $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ (see [19, p. 603]). In addition, the continuous embedding $L^{q(x,t)}(Q_{0,T}) \hookrightarrow L^{r(x,t)}(Q_{0,T})$ holds if $q(x, t) \geq r(x, t)$ (see [19, p. 599-600]).

Suppose that the function q satisfies condition **(Q)**,

$$S_q(s) = \begin{cases} s^{q_0}, & s \in [0, 1], \\ s^{q^0}, & s > 1, \end{cases} \quad S_{1/q}(s) = \begin{cases} s^{1/q^0}, & s \in [0, 1], \\ s^{1/q_0}, & s > 1, \end{cases} \quad (35)$$

where the constant q_0, q^0 are given by **(Q)** (see Lemma 1 [8, p. 168], Remark 3.1 [10, p. 453]). We will need the following Propositions.

Proposition 3. (Lemma 4 [1, p. 85]). Suppose that conditions **(Q)** with $q^0 < 2$, **(G)**, are satisfied, the Nemytskii operator $\mathcal{N}$ is defined by the formula

$$(\mathcal{N}z)(x, t) = g(x, t)|z(x, t)|^{q(x,t)-2}z(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}. \quad (36)$$

Then for every number $p \in [1, +\infty)$ the operator $\mathcal{N} : L^p(Q_{0,T}) \rightarrow L^p(Q_{0,T})$ is bounded and continuous. In addition, there exists a constant $N_p > 0$ such that for every $u, v \in L^p(Q_{0,T})$ we have

$$\|\mathcal{N}u - \mathcal{N}v; L^p(Q_{0,T})\| \leq N_p \left\{ S_{1/h} \left(\|u - v; L^p(Q_{0,T})\|^p \right) \right\}^{1/p}, \quad (37)$$

$$\|\mathcal{N}u; L^p(Q_{0,T})\| \leq M_p \left\{ S_{1/h} \left(\|u; L^p(Q_{0,T})\|^p \right) \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (38)$$

where $S_{1/h}$ is a continuous function from (35), and $h(x, t) = \frac{1}{q(x, t) - 1}$.

4. Proof of Theorem 1. We define the operators $\mathcal{D}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$ by the following identities. $\mathcal{D}$ is a constant (see (27)) operator such that

$$(\mathcal{D}z)(x, t) = d^*(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \quad (39)$$

where d^* is given by (23), $\widehat{d}$ is taken from (DFU). $\mathcal{K}$ is a constant operator such that

$$(\mathcal{K}z)(x, t) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, t, \xi, s) f(\xi, s) d\xi ds. \quad (40)$$

The nonlinear Nemytskii operator $\mathcal{N}$ is given by (36). The linear integral operator $\mathcal{J}$ is given by (28). The operator $\mathcal{A}$ is a combination of the operators $\mathcal{D}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, namely

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{K} - \mathcal{J} \circ \mathcal{N}. \quad (41)$$

Taking into account these notation, we rewrite equality (26) as

$$u = \mathcal{A}u. \quad (42)$$

Then the existence of the solution to problems (1)-(3) means the existence of the fixed point of the operator $\mathcal{A}$. We will show that conditions of the Schauder theorem are satisfied.

Step 1. Lemmas 1, 2 mean that $\mathcal{K}(L^p(Q_{0,T})) \subset L^p(Q_{0,T})$, and

$$\|\mathcal{K}z; L^p(Q_{0,T})\| \leq L_0 \|u_0; L^p(\Omega)\| + L \|f; L^p(Q_{0,T})\|, \quad (43)$$

where $L_0 > 0$ is taken from (33), $L > 0$ is taken from (34). Similarly $\mathcal{D}(L^p(Q_{0,T})) \subset L^p(Q_{0,T})$, and the estimate

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}z; L^p(Q_{0,T})\| &\leq \\ &\leq \|\widehat{d}; L^p(Q_{0,T})\| + L_0 \|\widehat{d}|_{t=0}; L^p(\Omega)\| + L \|\widehat{d}_t - \Delta \widehat{d}; L^p(Q_{0,T})\| \end{aligned} \quad (44)$$

holds. Recall that the constant operators are completely continuous.

Step 2. From Proposition 3 it follows that $\mathcal{N} : L^p(Q_{0,T}) \rightarrow L^p(Q_{0,T})$ is continuous and bounded operator. In addition, we have estimates (37), (38).

From Example 2 it follows that the operator $\mathcal{J} : L^p(Q_{0,T}) \rightarrow L^p(Q_{0,T})$ is completely continuous. In addition, estimate (34) holds.

Using Example 1 and the properties of the operators $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, we see that $\mathcal{J} \circ \mathcal{N}$ is a completely continuous operator as a composition of completely continuous and bounded continuous operators. Consequently, $\mathcal{A}$ is a completely continuous operator as a sum of the completely continuous operators $\mathcal{D}$, $\mathcal{K}$, and $\mathcal{J} \circ \mathcal{N}$ (see Example 1).

Step 3. Take a sufficiently small $\varepsilon \in (0, \min\{\frac{1}{2}, 2 - q^0\})$, where $q^0 \in (1, 2)$ is taken from condition (Q). Then $\varepsilon < \frac{1}{2}$, that is $1 - 2\varepsilon > 0$. In addition, $\varepsilon < 2 - q^0$, i.e. $2 - q^0 - \varepsilon > 0$.

Let $R > 0$ be a sufficiently large number such that

$$\left\{ \begin{array}{l} R^\varepsilon \geq \max\{\sqrt{\|\widehat{d}; L^p(Q_{0,T})\|}, \|\widehat{d}|_{t=0}; L^p(\Omega)\|, \|\widehat{d}_t - \Delta \widehat{d}; L^p(Q_{0,T})\|, \\ \|u_0; L^p(\Omega)\|, \|f; L^p(Q_{0,T})\|, L_0, L, 1\}, \\ \frac{5}{R^{1-2\varepsilon}} + \frac{N_p}{R^{2-q^0-\varepsilon}} \leq 1, \end{array} \right. \quad (45)$$

where the constants L_0, L are taken from (33), (34), and the constant N_p is taken from (38). By definition, put

$$B_R = \{u \in L^p(Q_{0,T}) \mid \|u; L^p(Q_{0,T})\| \leq R\}.$$

We will show that $\mathcal{A}(B_R) \subset B_R$. Take a function $u \in B_R$. Using the monotonicity of the function $S_{1/h}$, from estimations (34), (43), (38), (44), and (45), we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u; L^p(Q_{0,T})\| &\leq \|(\mathcal{D} + \mathcal{K} - \mathcal{J} \circ \mathcal{N})(u); L^p(Q_{0,T})\| \leq \\ &\leq \|\mathcal{D}u; L^p(Q_{0,T})\| + \|\mathcal{K}u; L^p(Q_{0,T})\| + \|\mathcal{J}(\mathcal{N}u); L^p(Q_{0,T})\| \leq \\ &\leq \|\mathcal{D}u; L^p(Q_{0,T})\| + \|\mathcal{K}u; L^p(Q_{0,T})\| + L\|\mathcal{N}u; L^p(Q_{0,T})\| \leq \\ &\leq \|\widehat{d}; L^p(Q_{0,T})\| + L_0\|\widehat{d}|_{t=0}; L^p(\Omega)\| + L\|\widehat{d}_t - \Delta \widehat{d}; L^p(Q_{0,T})\| + \\ &+ L_0\|u_0; L^p(\Omega)\| + L\|f; L^p(Q_{0,T})\| + LN_p \left\{ S_{1/h} \left(\|u; L^p(Q_{0,T})\|^p \right) \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq 5R^{2\varepsilon} + R^\varepsilon N_p \left\{ S_{1/h} \left(R^p \right) \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

where $h(x, t) = \frac{1}{q(x,t)-1}$. Taking into account (35), from inequality $R > 1$ it follows that

$$S_{1/h}(R^p) = (R^p)^{\frac{1}{\text{ess inf } h(x,t)}} = (R^p)^{\frac{1}{\text{ess inf } \frac{1}{q(x,t)-1}}} = (R^p)^{\frac{1}{q^0-1}} = R^{p(q^0-1)}.$$

By the choice of R , we get

$$\|\mathcal{A}u; L^p(Q_{0,T})\| \leq 5R^{2\varepsilon} + N_p R^{\varepsilon+q^0-1} = \left(\frac{5}{R^{1-2\varepsilon}} + \frac{N_p}{R^{2-q^0-\varepsilon}} \right) R \leq R,$$

i.e. $\mathcal{A}(B_R) \subset B_R$. Therefore, the operator $\mathcal{A}$ satisfies the conditions of the Schauder theorem (see Proposition 1), and has a fixed point. Theorem is proved. $\square$

Remark 2. Using monotonicity method, and the additional condition $g(x, t) \geq 0$ it is easy to show the uniqueness of the solution $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ of problem (1)-(3) (notice that Theorem 1 does not show that the solution u belongs to $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$).

Remark 3. The results of Theorem 1 can be extended on to the second and third mixed problems for equation (1) and its generalization.

REFERENCES

1. Бугрій О. Про існування слабкого розв'язку мішаної задачі для модельного півлінійного параболічного рівняння зі змінним степенем нелінійності / О. Бугрій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 79-90.
2. Эйдельман С.Д. Параболические системы. / С.Д. Эйдельман – М., 1964.
3. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач / С.Д. Ивасишен – К.: Вища школа, 1990.
4. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. / М.І. Матійчук – Чернівці: Прут, 2003.
5. Алхутюв Ю.А. Параболические уравнения с переменным порядком нелинейности / Ю.А. Алхутюв, С.Н. Антонцев, В.В. Жиков // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 23-50.
6. Zhikov V.V. Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations / V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Vol. 270. – P. 104–131.
7. Bokalo M.M. The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations / M.M. Bokalo // J. Math. Sciences. – 2011. – Vol. 178, №1. – P. 41-64.
8. Бугрій О.М. Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / О.М. Бугрій // Мат. студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.
9. Buhrii O.M. Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / O.M. Buhrii, R.A. Mashiyev // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, №6. – P. 2335-2331.
10. Mashiyev R.A. Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
11. Pinasco J.P. Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents / J.P. Pinasco // Nonlinear Analysis. – 2009. – Vol. 71. – P. 1094-1099.
12. Sawangtong P. Blow-up solutions of degenerate parabolic problems / P. Sawangtong, W. Jampen // WSEAS Transactions on Mathematics. – 2010. – Vol. 9, Issue 9. – P. 723-733.
13. Математическая энциклопедия. В 5 т. / гл. ред. И. М. Виноградов, Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 1140 с.
14. Лопушанская Г.П. О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, №6. – С. 795-798.
15. Agase S.B. Existence of mild solutions of semilinear differential equations in Banach spaces / S.B. Agase, V. Raghavendra // Indian J. Pure Appl. Math. – 1990. – Vol. 21 (9). – P. 813-821.
16. Adams R.A. Sobolev spaces. / R.A. Adams – New York, San Francisco, London: Academic press, 1975.
17. Хатсон В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Дж. Пум – М.: Мир, 1983.
18. Orlicz W. Uber Konjugierte Exponentenfolgen / W. Orlicz // Studia Mathematica (Lwów). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
19. Kováčik O. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / O. Kováčik, J. Rakosnik // Czechoslovak Math. J. – 1991. – 41 (116). – P. 592-618.

Стаття: надійшла до редакції 21.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МОДЕЛЬНИХ НЕОДНОРІДНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ СТЕПЕНЯМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Досліджено неоднорідну мішану задачу Діріхле для рівняння

$$u_t - \Delta u + g(x, t)|u|^{q(x, t)-2}u = f(x, t)$$

в циліндричній області. За умови $1 < q_0 \leq q(x, t) \leq q^0 < 2$ доведено існування слабого розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: нелінійне параболическе рівняння, неоднорідна задача, мішана задача, змінний показник нелінійності, узагальнені простори Лебега і Соболева, слабкий розв'язок, функція Гріна.

О РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ СТЕПЕНЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Исследовано смешанную задачу Дирихле для уравнения

$$u_t - \Delta u + g(x, t)|u|^{q(x, t)-2}u = f(x, t)$$

в цилиндрической области. При условии $1 < q_0 \leq q(x, t) \leq q^0 < 2$ доказано существование слабого решения этой задачи.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, смешанная задача, переменный степень нелинейности, обобщённые пространства Лебега и Соболева, слабое решение, функция Грина.

УДК 517.95

ГІПЕРБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМ ПОКАЗНИКОМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Олег БУГРІЙ¹, Іван ГУРНЯК¹, Петро ПУКАЧ²,
Оксана ХОЛЯВКА³

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

²Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. Степана Бандери, 12, 79013 Львів, Україна

³Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, 79060 Львів, Україна
e-mail: ol_buhrii@i.ua

В обмежених областях доведено існування розв’язків деяких задач для варіаційних нерівностей другого порядку з нелінійним молодшим доданком, степінь якого є функцією від просторових змінних.

Ключові слова: нелінійні гіперболічні варіаційні нерівності другого порядку, змінний показник нелінійності.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_{0,\tau} = \Omega \times (0, \tau)$, $\tau \in (0, T]$. Нехай $L^{q(x)}(\Omega)$ – узагальнений простір Лебега, $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, $K \subset V$ – замкнена опукла множина, $0 \in K$.

В області $Q_{0,T}$ розглядається гіперболічна варіаційна нерівність

$$\int_{Q_{0,\tau}} \left[u_{tt}(v - u_t) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i}(v_{x_j} - u_{tx_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i}(v - u_t) + c(x, t) u_t(v - u_t) + d(x, t) u(v - u_t) + h(x, t) |u|^{q(x)-2} u(v - u_t) - f(x, t)(v - u_t) \right] dx dt \geq 0, \quad (1)$$

де v – пробна функція; $v(\cdot, t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$, $\tau \in (0, T]$, з початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) цікава тим, що варіаційна нерівність (1) містить молодший доданок, степінь якого є функцією від просторових змінних. Такі задачі раніше не

розглядали. Нелінійним варіаційним нерівностям зі сталими показниками нелінійностей, зокрема, присвячена монографія [1] та статті [2], [3] (див. також бібліографію до цих праць). У праці [4] досліджено задачі для нелінійних гіперболічних варіаційних нерівностей другого порядку з нелінійностями вигляду $|u_t|^{p-2}u_t$, де показник нелінійності p – деяке число. У випадку $p > 2$ знайдено умови однозначної розв’язності таких задач у необмежених за просторовими змінними областях. Праці [5], [6], [7] присвячено вивченню варіаційних нерівностей зі змінними показниками у нелінійних доданках. Так у [5], [6] знайдено умови існування та єдиності розв’язків параболічних варіаційних нерівностей, а в праці [7] – умови єдиності розв’язку деякої гіперболічної варіаційної нерівності третього порядку в необмежених за просторовими змінними областях.

Мета нашої праці – довести теореми існування розв’язку задачі (1)–(3). Перш ніж сформулювати означення розв’язку нашої задачі та основні результати, наведемо деякі допоміжні факти.

Нехай $Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $\Omega_\tau = \{(x, t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ – кусково-гладка гіперповерхня. Норму банахового простору B позначимо $\|\cdot\|_B$, а спряжений до B простір – B^* . Скалярний добуток між B^* та B позначатимемо $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$. Для спрощення замість, наприклад, $u(\cdot, t)$ писатимемо $u(t)$.

Нехай $L_+^\infty(\Omega) = \{r \in L^\infty(\Omega) \mid \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} r(x) > 1\}$, $q \in L_+^\infty(\Omega)$. Для цієї функції q через q_0 та q^0 позначатимемо такі числа, що $q_0 \equiv \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x)$ та $q^0 \equiv \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x)$, а через q' – таку функцію, що $\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1$ майже для всіх $x \in \Omega$.

Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot, \Omega)$ рівністю $\rho_q(v, \Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)} dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v, \Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_q слабо напівніперервний знизу на $L^{q(x)}(\Omega)$ (див. [8, с. 208]). Крім того, $L^{q(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою (див. [9])

$$\|v; L^{q(x)}(\Omega)\| = \inf \{ \lambda > 0 : \rho_q(v/\lambda, \Omega) \leq 1 \}.$$

Зазначимо таке: якщо $s(x) \leq q(x)$, то $L^{q(x)}(\Omega) \subset L^{s(x)}(\Omega)$, де символ $\subset$ означає неперервне вкладення. Спряженим до $L^{q(x)}(\Omega)$ є простір $L^{q'(x)}(\Omega)$.

Аналогічно до $L^{q(x)}(\Omega)$ вводимо простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$, ввівши замість $\rho_q(\cdot, \Omega)$ функціонал $\rho_q(\cdot, Q_{0,T})$.

Припустимо, що виконуються умови:

(А): $a_{ij}, (a_{ij})_t, (a_{ij})_{tt} \in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = \overline{1, n}$), для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та майже для всіх $(x, t) \in Q_{0,T}$ виконуються оцінки

$$a_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq a^0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij,t}(x, t) \xi_i \xi_j \right| \leq a^1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2,$$

$$|a_{ij,tt}(x, t)| \leq a^2 \quad (i, j = \overline{1, n}), \text{ де } a_0, a^1, a^2 > 0;$$

(В): $b_i, b_{i,t} \in L^\infty(Q_{0,T})$;

(С): $c, c_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $|c(x, t)| \leq c^0$, $|c_t(x, t)| \leq c^1$ майже для всіх $(x, t) \in Q_{0,T}$;

(D): $d, d_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 < d_0 \leq d(x, t) \leq d^0$, $|d_t(x, t)| \leq d^1$ майже для всіх $(x, t) \in Q_{0,T}$;

(H): $h, h_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 < h_0 \leq h(x, t) \leq h^0$, $|h_t(x, t)| \leq h^1$ майже для всіх $(x, t) \in Q_{0,T}$;

(Q): $q \in L^\infty(\Omega)$, $2 < q_0 \leq q^0 < +\infty$ при $n = 1, 2$, $2 < q_0 \leq q^0 \leq 2 + \frac{2}{n-2}$ при $n \geq 3$;

(U): $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, і, крім того, або $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap \text{int } K$, або $u_1 \equiv 0$;

(F): $f, f_t \in L^2(Q_{0,T})$.

Подамо означення розв'язку нашої задачі.

Означення 1. Функцію $u \in L^\infty(0, T; V) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega))$ називаємо розв'язком задачі (1)-(3), якщо $u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $u_t(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$, u задовольняє умови (2), (3) і гіперболічну варіаційну нерівність (1) для всіх $\tau \in (0, T]$ та $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$.

Тепер перейдемо до формулювання основного результату. Для цього введемо сім'ю операторів $A_1(t) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $A_2(t) : V \rightarrow V^*$, $t \in [0, T]$, так:

$$\begin{aligned} \langle A_1(t)y, z \rangle &= \int_{\Omega} c(x, t)y(x)z(x) dx, \quad y, z \in L^2(\Omega), \\ \langle A_2(t)w, v \rangle &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)w_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)w_{x_i}v + d(x, t)wv + \right. \\ &\quad \left. + h(x, t)|w|^{q(x)-2}wv \right] dx, \quad w, v \in V, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Теорема 1. Якщо виконуються умови (A)-(F), $A_2(0)u_0 \in L^2(\Omega)$,

$$K = \{v \in V \mid v(x) \geq \varphi(x) \text{ майже для всіх } x \in \Omega\},$$

де $\varphi \in V$, $\varphi \leq 0$, то існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3).

Перш ніж перейти до доведення цієї теореми, нагадаємо кілька відомих фактів, які використовуватимемо далі.

Зауваження 1. Нехай $r \in L_+^\infty(\Omega)$,

$$S_r(l) = \begin{cases} l^{r_0}, & l \in [0, 1], \\ l^{r^0}, & l > 1, \end{cases} \quad S_{1/r}(l) = \begin{cases} l^{1/r^0}, & l \in [0, 1], \\ l^{1/r_0}, & l > 1. \end{cases}$$

Тоді (див. [10]) для довільної функції $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ виконуються такі твердження:

- 1) якщо $\rho_r(v, \Omega) < +\infty$, то $\|v; L^{r(x)}(\Omega)\| \leq S_{1/r}(\rho_r(v, \Omega))$;
- 2) якщо $\|v; L^{r(x)}(\Omega)\| < +\infty$, то $\rho_r(v, \Omega) \leq S_r(\|v; L^{r(x)}(\Omega)\|)$.

Зрозуміло, що умову $r_0 > 1$ в цьому зауваженні можна замінити на $r_0 \geq 1$.

Зауваження 2. Якщо $r \in L_+^\infty(\Omega)$, то для всіх $\varepsilon > 0$ і для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\alpha\beta \leq \varepsilon|\alpha|^{r(x)} + Y_r(\varepsilon)|\beta|^{r'(x)} \text{ майже для всіх } x \in \Omega, \quad (4)$$

де $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$, $Y_r(\varepsilon) = \frac{r^0-1}{r_0(\varepsilon r_0)^{1/(r^0-1)}}$ при $\varepsilon r_0 \leq 1$, і $Y_r(\varepsilon) = \frac{r^0-1}{r_0(\varepsilon r_0)^{1/(r^0-1)}}$ при $\varepsilon r_0 > 1$. Зазначимо, що $Y_r(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} +\infty$, $Y_r(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} +0$.

Зауваження 3. Якщо $s \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{s}$, то $H^1(\Omega) \circ L^s(\Omega)$.

Наведемо одне допоміжне твердження.

Лема 1. Розглянемо вимірні невід'ємні функції $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ і множини $A = \{x \in \Omega \mid z(x) < 1\}$, $B = \{x \in \Omega \mid s(x) < 1\}$. Якщо

$$\widehat{s}(x) = \begin{cases} s(x), & x \in \Omega \setminus (A \cup B), \\ 1, & x \in A \cup B, \end{cases} \quad (5)$$

то $\widehat{s}(x) \geq 1$ майже для всіх $x \in \Omega$ та виконується нерівність

$$\int_{\Omega} |z(x)|^{s(x)} dx \leq 2 \operatorname{mes} \Omega + \int_{\Omega} |z(x)|^{\widehat{s}(x)} dx. \quad (6)$$

Доведення. Очевидно, що $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ і $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($1 \leq i, j \leq 4$), де

$$A_1 = \Omega \setminus (A \cup B), \quad A_2 = A \setminus B, \quad A_3 = A \cap B, \quad A_4 = B \setminus A.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z(x)|^{s(x)} dx &= \int_{A_1} |z(x)|^{s(x)} dx + \int_{A_2} |z(x)|^{s(x)} dx + \int_{A_3} |z(x)|^{s(x)} dx + \int_{A_4} |z(x)|^{s(x)} dx \leq \\ &\leq \int_{A_1} |z(x)|^{s(x)} dx + \int_{A_2} dx + \int_{A_3} dx + \int_{A_4} |z(x)| dx = \\ &= \int_{A_1} |z(x)|^{\widehat{s}(x)} dx + \operatorname{mes} A_2 + \operatorname{mes} A_3 + \int_{A_4} |z(x)|^{\widehat{s}(x)} dx \leq 2 \operatorname{mes} \Omega + \int_{\Omega} |z(x)|^{\widehat{s}(x)} dx. \end{aligned}$$

Лему доведено. $\square$

Наслідок 1. Нехай $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ – вимірна невід'ємна функція, $r \in L_+^{\infty}(\Omega)$. Якщо $s(x) \leq r(x)$ майже для всіх $x \in \Omega$, то для всіх вимірних $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$\int_{\Omega} |v(x)|^{s(x)} dx \leq C_1 + C_2 \|v; L^{r(x)}(\Omega)\|^{\max\{1, s^0\}}, \quad (7)$$

де сталі $C_1, C_2 > 0$ не залежать від v , $s^0 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} s(x)$.

Доведення. Якщо $s(x) \geq 1$ майже для всіх $x \in \Omega$, то $s \in L_+^{\infty}(\Omega)$ і нерівність (7) випливає з вкладення просторів $L^{r(x)}(\Omega) \circ L^{s(x)}(\Omega)$.

Нехай $\operatorname{mes} B > 0$, де $B = \{x \in \Omega \mid s(x) < 1\}$. Тоді $s \notin L_+^{\infty}(\Omega)$. Розглянемо довільну вимірну функцію $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Нехай $z(x) = |v(x)|$ ($x \in \Omega$) і $\widehat{s}$ взяті з (5). Тоді $1 \leq \widehat{s}(x) \leq r(x)$ майже для всіх $x \in \Omega$ і $L^{r(x)}(\Omega) \circ L^{s(x)}(\Omega)$. Звідси на підставі оцінки (6) та зауваження 1 отримаємо, що

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\Omega} |v(x)|^{s(x)} dx = \int_{\Omega} |z(x)|^{s(x)} dx \leq 2 \operatorname{mes} \Omega + \int_{\Omega} |z(x)|^{\widehat{s}(x)} dx = 2 \operatorname{mes} \Omega + \rho_{\widehat{s}}(v, \Omega) \leq \\ &\leq 2 \operatorname{mes} \Omega + S_{\widehat{s}}\left(\|v; L^{\widehat{s}(x)}(\Omega)\|\right) \leq 2 \operatorname{mes} \Omega + S_{\widehat{s}}\left(\|v; L^{r(x)}(\Omega)\|\right). \end{aligned}$$

Очевидно, що $\widehat{s}_0 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \widehat{s}(x) = 1$, $\widehat{s}^0 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \widehat{s}(x) = \max\{1, s^0\}$. Якщо виконується нерівність $\|v; L^{r(x)}(\Omega)\| > 1$, то

$$I \leq 2 \operatorname{mes} \Omega + \|v; L^{r(x)}(\Omega)\|^{\widehat{s}^0} = 2 \operatorname{mes} \Omega + \|v; L^{r(x)}(\Omega)\|^{\max\{1, s^0\}}.$$

Якщо $\|v; L^{r(x)}(\Omega)\| \leq 1$ і $\max\{1, s^0\} = 1 = \widehat{s}_0$, то

$$I \leq 2 \operatorname{mes} \Omega + \|v; L^{r(x)}(\Omega)\|^{\widehat{s}_0} = 2 \operatorname{mes} \Omega + \|v; L^{r(x)}(\Omega)\|^{\max\{1, s^0\}}.$$

Якщо $\|v; L^{r(x)}(\Omega)\| \leq 1$ і $\max\{1, s^0\} > 1$, то з (4) при $\varepsilon = 1$ отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} I &\leq 2 \operatorname{mes} \Omega + \|v; L^{r(x)}(\Omega)\|^{\widehat{s}_0} = 2 \operatorname{mes} \Omega + \|v; L^{r(x)}(\Omega)\| \leq \\ &\leq 2 \operatorname{mes} \Omega + Y_{\max\{1, s^0\}}(1) + \|v; L^{r(x)}(\Omega)\|^{\max\{1, s^0\}}. \end{aligned}$$

Наслідок доведено. $\square$

Для доведення теореми існування розв'язку нашої варіаційної нерівності розглянемо допоміжну задачу зі штрафом для функції $\tilde{u}$

$$u_{tt}(t) + A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t) - m(u_t(t) - \varphi)^- = f(t), \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (9)$$

$$u_t|_{t=0} = u_1, \quad (10)$$

де $m \in \mathbb{N}$ – числовий параметр.

Означення 2. Функцію $u \in L^\infty(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ називаємо розв'язком задачі (8)-(10), якщо $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^2(0, T; V^*)$, u задовольняє умови (9), (10) та для всіх $v \in V$ і всіх $\psi \in C_0^\infty(0, T)$ задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \int_{Q_{0,T}} \left[-u_t v \psi' + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} \psi + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v \psi + c u_t v \psi + d u v \psi + h |u|^{q(x)-2} u v \psi - \right. \\ \left. - m(u_t - \varphi)^- v \psi \right] dx dt = \int_{Q_{0,T}} f v \psi dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема 2. Нехай $q \in L_+^\infty(\Omega)$, виконуються умови (A)-(H), (U), і, крім того, $\varphi \in L^2(\Omega)$, $\varphi \leq 0$, $f \in L^2(Q_{0,T})$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ задача (8)-(10) має розв'язок.

Доведення. Використаємо метод Фаєдо-Гальоркіна. Нехай $z^- = \max\{-z, 0\}$, $\{w^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ – ортонормована в $L^2(\Omega)$ база простору V ,

$$\tilde{u}^k(x, t) = \sum_{l=1}^k C_l^k(t) w^l(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (x, t) \in Q_{0,T},$$

де функції $C_1^k, \dots, C_k^k$ є розв'язками задачі Коші

$$\begin{aligned} < \tilde{u}_{tt}^k(t), w^l > + < A_1(t) \tilde{u}_t^k(t), w^l > + < A_2(t) \tilde{u}^k(t), w^l > - < m(\tilde{u}_t^k(t) - \varphi)^-, w^l > = \\ &= < f(t), w^l >, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (12)$$

$$C_l^k(0) = \alpha_l^k, \quad (C_l^k)_t(0) = \beta_l^k, \quad l = \overline{1, k}, \quad (13)$$

сталі $\alpha_1^k, \dots, \alpha_k^k, \beta_1^k, \dots, \beta_k^k$ вибрано так, щоб

$$\|\tilde{u}_0^k - u_0\|_V \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \|\tilde{u}_1^k - u_1\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (14)$$

Тут $\tilde{u}_0^k(x) \equiv \sum_{l=1}^k \alpha_l^k w^l(x)$, $\tilde{u}_1^k(x) \equiv \sum_{l=1}^k \beta_l^k w^l(x)$, $x \in \Omega$. Зрозуміло, що введені функції задовольняють умови

$$\tilde{u}^k(0) = \tilde{u}_0^k, \quad \tilde{u}_t^k(0) = \tilde{u}_1^k. \quad (15)$$

На підставі теореми Каратеодорі (див. [11, с. 54]) існує розв'язок задачі (12)-(13) на інтервалі $[0, t_0]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_0 = T$. Тому зразу вважатимемо, що функції $C_1^k, \dots, C_k^k$ визначено на $[0, T]$.

Отримаємо допоміжні оцінки. Домножимо (12), відповідно, на функції $C_{l,t}^k$, підсумуємо за l від 1 до k та зінтегруємо по проміжку $(0, \tau) \subset (0, T)$. Отримаємо таке:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{0,\tau}} \left[\tilde{u}_{tt}^k \tilde{u}_t^k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \tilde{u}_{x_i}^k \tilde{u}_{tx_j}^k + \sum_{i=1}^n b_i \tilde{u}_{x_i}^k \tilde{u}_t^k + c |\tilde{u}_t^k|^2 + d \tilde{u}^k \tilde{u}_t^k + h |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \tilde{u}^k \tilde{u}_t^k - \right. \\ \left. - m(\tilde{u}_t^k - \varphi)^{-} \tilde{u}_t^k \right] dx dt = \int_{Q_{0,\tau}} f \tilde{u}_t^k dx dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \gamma \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right) + \frac{1}{2} \gamma^2, \quad (17)$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma \in \mathbb{R}^1$, то

$$\left| \int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n b_i \tilde{u}_{x_i}^k \tilde{u}_t^k dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{0,\tau}} \left(B_1 |\nabla \tilde{u}^k|^2 + |\tilde{u}_t^k|^2 \right) dx dt.$$

Тут $B_1 = \operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n b_i^2(x, t)$. Крім того,

$$- \int_{Q_{0,\tau}} m(\tilde{u}_t^k - \varphi)^{-} \tilde{u}_t^k dx dt \geq 0.$$

Тоді, використовуючи умови **(А)**-**(Н)**, зауваження 2 при $r = 2$, $\varepsilon = 1/2$, з рівності (16) одержимо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} \left[|\tilde{u}_t^k|^2 + a_0 |\nabla \tilde{u}^k|^2 + d_0 |\tilde{u}^k|^2 + \frac{2h_0}{q^0} |\tilde{u}^k|^{q(x)} \right] dx \leq \\ \leq \int_{Q_{0,\tau}} |f|^2 dx dt + \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_1^k|^2 + a^0 |\nabla \tilde{u}_0^k|^2 + \frac{2h^0}{q_0} |\tilde{u}_0^k|^{q(x)} + d^0 |\tilde{u}_0^k|^2 \right] dx + \\ + \int_{Q_{0,\tau}} \left[(2c^0 + 2) |\tilde{u}_t^k|^2 + (B_1 + a^1) |\nabla \tilde{u}^k|^2 + d^1 |\tilde{u}^k|^2 + \frac{2h^1}{q_0} |\tilde{u}^k|^{q(x)} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (18)$$

На підставі (14) та леми Гронуолла-Белмана з (18) отримуємо оцінку

$$\int_{\Omega_\tau} \left[|\tilde{u}_t^k|^2 + |\nabla \tilde{u}^k|^2 + |\tilde{u}^k|^2 + |\tilde{u}^k|^{q(x)} \right] dx \leq C_3, \quad \tau \in (0, T], \quad (19)$$

звідки

$$\int_{Q_{0,\tau}} \left[|\tilde{u}_t^k|^2 + |\nabla \tilde{u}^k|^2 + |\tilde{u}^k|^2 + |\tilde{u}^k|^{q(x)} \right] dx dt \leq C_4, \quad \tau \in (0, T], \quad (20)$$

і сталі C_3, C_4 не залежать від k, τ . Крім того,

$$\int_{Q_{0,\tau}} \left| |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \tilde{u}^k \right|^{q'(x)} dx dt \leq \int_{Q_{0,\tau}} |\tilde{u}^k|^{q(x)} dx dt \leq C_5. \quad (21)$$

З оцінок (19)-(21) випливає, що існує підпоследовність $\{\tilde{u}^{k_s}\}_{k_s \in \mathbb{N}} \subset \{\tilde{u}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ така, що

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{k_s} &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \tilde{u} \quad * \text{—слабо в } L^\infty(0, T; V(\Omega)), \\ \tilde{u}^{k_s} &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \tilde{u} \quad \text{слабо в } H^1(Q_{0,T}) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T}), \\ \tilde{u}^{k_s} &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \tilde{u} \quad \text{сильно в } L^2(Q_{0,T}) \text{ і майже скрізь в } Q_{0,T}, \\ \tilde{u}_t^{k_s} &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \tilde{u}_t \quad * \text{—слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ і слабо в } L^2(Q_{0,T}), \\ |\tilde{u}^{k_s}|^{q(x)-2} \tilde{u}^{k_s} &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \chi \quad \text{слабо в } L^{q'(x)}(Q_{0,T}). \end{aligned} \quad (22)$$

Тому

$$(\tilde{u}_t^{k_s} - \varphi)^- \xrightarrow{s \rightarrow \infty} (\tilde{u}_t - \varphi)^- \quad \text{слабо в } L^2(Q_{0,T})$$

і $\chi = |\tilde{u}|^{q(x)-2} \tilde{u}$.

Розглянемо (12) при $k = k_s$, домножимо на функцію $\psi \in C^\infty([0, T])$ таку, що $\psi(0) = \psi(T) = 0$, та зінтегруємо за $t \in [0, T]$. Далі спрямуємо k_s до безмежності і тоді на підставі збіжностей (22) отримаємо рівність

$$\begin{aligned} - \int_{Q_{0,T}} \tilde{u}_t w^l \psi' dx dt + \int_{Q_{0,T}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \tilde{u}_{x_i} w_{x_j}^l \psi dx dt + \int_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^n b_i \tilde{u}_{x_i} + c \tilde{u}_t + d \tilde{u} + \right. \\ \left. + h |\tilde{u}|^{q(x)-2} \tilde{u} - m(\tilde{u}_t - \varphi)^- \right] w^l \psi dx dt = \int_{Q_{0,T}} f w^l \psi dx dt, \quad l = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Звідси, завдяки довільності ψ , отримаємо

$$\langle \tilde{u}_{tt}(t) + A_1(t) \tilde{u}_t(t) + A_2(t) \tilde{u}(t) - m(\tilde{u}_t(t) - \varphi)^-, w^l \rangle = \langle f(t), w^l \rangle, \quad t \in (0, T).$$

Далі стандартно доводимо, що замість w^l ($l = \overline{1, k}$) тут можна прийняти довільну функцію $v \in V$. Отже, функція $\tilde{u}$ є шуканим розв'язком задачі (8)-(10). $\square$

Зауваження 4. Якщо виконуються умови **(А)**-**(Н)**, **(Q)**, то задача (8)-(10) не може мати більше одного розв'язку.

Зауважимо також, що результати теореми 2 та попереднього зауваження можна отримати і за слабших умов, проте ми цього не робитимемо.

Теорема 3 (про гладкість розв'язку задачі зі штрафом). *Нехай виконуються умови теореми 2 і, крім того, умова (Q) та $f_t \in L^2(Q_{0,T})$. Тоді розв'язок задачі (8)-(10) додатково задовольняє включення $u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.*

Доведення. Нехай $\{\tilde{u}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – функції з теореми 2, які задовольняють (12) і для яких виконуються оцінки (19)-(21). Щоб одержати додаткові оцінки для цієї послідовності, диференціюємо (12) за змінною t , множимо, відповідно, на функції $C_{l,tt}^k$, підсумуємо за l від 1 до k та інтегруємо по проміжку $(0, \tau) \subset (0, T)$. Отримаємо рівність

$$\begin{aligned} \int_{Q_{0,\tau}} & \left[\tilde{u}_{ttt}^k \tilde{u}_{tt}^k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij,t} \tilde{u}_{x_i}^k \tilde{u}_{ttx_j}^k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \tilde{u}_{tx_i}^k \tilde{u}_{ttx_j}^k + \sum_{i=1}^n b_{i,t} \tilde{u}_{x_i}^k \tilde{u}_{tt}^k + \sum_{i=1}^n b_i \tilde{u}_{tx_i}^k \tilde{u}_{tt}^k + \right. \\ & + c_t \tilde{u}_t^k \tilde{u}_{tt}^k + c |\tilde{u}_{tt}^k|^2 + d_t \tilde{u}^k \tilde{u}_{tt}^k + d \tilde{u}_t^k \tilde{u}_{tt}^k + h_t |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \tilde{u}^k \tilde{u}_{tt}^k + h(q-1) |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \tilde{u}_t^k \tilde{u}_{tt}^k - \\ & \left. - m((\tilde{u}_t^k - \varphi)^-)_t \tilde{u}_{tt}^k \right] dx dt = \int_{Q_{0,\tau}} f_t \tilde{u}_{tt}^k dx dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Доданки з $\tilde{u}_{ttt}^k$, a_{ij} , b_i оцінимо аналогічно, як доданки з $\tilde{u}_{tt}^k$, a_{ij} , b_i у теоремі 2.

Оскільки для всіх α_{ij} , β_i , $\gamma_i \in \mathbb{R}^1$ ($i, j = \overline{1, n}$), $\delta > 0$ можемо записати нерівність

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \beta_i \gamma_j \leq n \alpha_{i^* j^*} \left(Y_2(\delta) \sum_{i=1}^n \beta_i^2 + \delta \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \right),$$

де $\alpha_{i^* j^*} = \max_{i,j=\overline{1,n}} |\alpha_{ij}|$, а Y_2 – функція з (4), то на підставі умови (A) та формули інтегрування частинами отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij,t} \tilde{u}_{x_i}^k \tilde{u}_{ttx_j}^k dx dt \right| \leq A_1 \int_{\Omega_\tau} \left(\delta |\nabla \tilde{u}_t^k|^2 + Y_2(\delta) |\nabla \tilde{u}^k|^2 \right) dx + \\ & + A_1 \int_{\Omega_0} \left(|\nabla \tilde{u}_1^k|^2 + |\nabla \tilde{u}_0^k|^2 \right) dx + \left(\frac{A_2}{2} + a^1 \right) \int_{Q_{0,\tau}} |\nabla \tilde{u}_t^k|^2 dx dt + \frac{A_2}{2} \int_{Q_{0,\tau}} |\nabla \tilde{u}^k|^2 dx dt, \end{aligned}$$

де $A_1 = n \max_{i,j=\overline{1,n}} \operatorname{ess\,sup}_{Q_{0,T}} |a_{ij,t}(x, t)|$, $A_2 = n \max_{i,j=\overline{1,n}} \operatorname{ess\,sup}_{Q_{0,T}} |a_{ij,tt}(x, t)|$.

На підставі (17)

$$\left| \int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n b_{i,t} \tilde{u}_{x_i}^k \tilde{u}_{tt}^k dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{Q_{0,\tau}} \left(B_2 |\nabla \tilde{u}^k|^2 + |\tilde{u}_{tt}^k|^2 \right) dx dt,$$

де $B_2 = \operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n b_{i,t}^2(x, t)$.

Для оцінки доданків з c_t , d , d_t , h_t , f_t використаємо (4) при $r = 2$, $\varepsilon = 1/2$. Тоді

$$\mathfrak{I}_1 := \int_{Q_{0,\tau}} h_t |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \tilde{u}^k \tilde{u}_{tt}^k dx dt \leq \frac{h^1}{2} \int_{Q_{0,\tau}} \left[|\tilde{u}^k|^{2(q(x)-1)} + |\tilde{u}_{tt}^k|^2 \right] dx dt.$$

Оцінимо інтеграл $\int_{Q_{0,\tau}} |\tilde{u}^k|^{2(q(x)-1)} dx dt$. Враховуючи умови на q^0 , зауваження 3 гарантує вкладення просторів $H_0^1(Q_{0,\tau}) \hookrightarrow L^{2(q^0-1)}(Q_{0,\tau})$, $\tau \in (0, T]$. Тоді на підставі зауваження 1 одержимо, що

$$\begin{aligned} \int_{Q_{0,\tau}} |\tilde{u}^k|^{2(q(x)-1)} dx dt &\leq S_{2(q-1)} \left(\|\tilde{u}^k\|_{L^{2(q(x)-1)}(Q_{0,\tau})} \right) \leq \\ &\leq C_6 S_{2(q-1)} \left(\|\tilde{u}^k\|_{L^{2(q^0-1)}(Q_{0,\tau})} \right) \leq C_7 S_{2(q-1)} \left(\|\nabla \tilde{u}^k\|_{L^2(Q_{0,\tau})} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\mathfrak{I}_1 \leq \frac{h^1 C_7}{2} S_{2(q-1)} \left(\|\nabla \tilde{u}^k\|_{L^2(Q_{0,\tau})} \right) + \frac{h^1}{2} \int_{Q_{0,\tau}} |\tilde{u}_{tt}^k|^2 dx dt \leq C_8 + \frac{h^1}{2} \int_{Q_{0,\tau}} |\tilde{u}_{tt}^k|^2 dx dt,$$

де стала C_8 – додатна і не залежить від k , τ .

Оскільки $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{2n}{n-2}} = 1$, то з нерівності Гельдера, зауваження 1 та оцінки

(7) запишемо перетворення:

$$\int_{\Omega} h(q-1) |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \tilde{u}_t^k \tilde{u}_{tt}^k dx \leq h^0 (q^0 - 1) \left\| |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \right\|_{L^n(\Omega)} \|\tilde{u}_t^k\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|\tilde{u}_{tt}^k\|_{L^2(\Omega)},$$

а також

$$\begin{aligned} \left\| |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \right\|_{L^n(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |\tilde{u}^k|^{n(q(x)-2)} dx \right)^{1/n} \leq \\ &\leq \left(C_9 + C_{10} \|\tilde{u}^k; L^{n(q(x)-2)}(\Omega)\|^{\max\{1, n(q^0-2)\}} \right)^{1/n} \leq \\ &\leq \left(C_9 + C_{11} \|\tilde{u}^k; L^{n(q^0-2)}(\Omega)\|^{\max\{1, n(q^0-2)\}} \right)^{1/n} \leq \\ &\leq \left(C_9 + C_{12} \|\nabla \tilde{u}^k; L^2(\Omega)\|^{\max\{1, n(q^0-2)\}} \right)^{1/n} \leq C_{13}. \end{aligned}$$

Крім того, на підставі зауваження 3 при $s = \frac{2n}{n-2}$ правильне вкладення просторів $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ і виконується нерівність

$$\|\tilde{u}_t^k\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C_{14} \|\nabla \tilde{u}_t^k\|_{L^2(\Omega)},$$

де $C_{14} > 0$. Отже,

$$\int_{Q_{0,\tau}} h(q-1) |\tilde{u}^k|^{q(x)-2} \tilde{u}_t^k \tilde{u}_{tt}^k dx dt \leq C_{15} \int_{Q_{0,\tau}} \left[|\nabla \tilde{u}_t^k|^2 + |\tilde{u}_{tt}^k|^2 \right] dx dt,$$

де стала C_{15} – додатна і не залежить від k , τ .

Можна довести, що

$$- \int_{Q_{0,\tau}} m((\tilde{u}_t^k - \varphi)^-) \tilde{u}_{tt}^k dx dt \geq 0.$$

Враховуючи одержані оцінки, рівність (23) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} \left[|\tilde{u}_{tt}^k|^2 + (a_0 - 2A_1\delta) |\nabla \tilde{u}_t^k|^2 \right] dx \leq \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_{tt}^k(0)|^2 + (a^0 + 2A_1) |\nabla \tilde{u}_1^k|^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2A_1 |\nabla \tilde{u}_0^k|^2 \right] dx + 2A_1 Y_2(\delta) \int_{\Omega_\tau} |\nabla \tilde{u}^k|^2 dx + 2C_8 + \int_{Q_{0,\tau}} |f_t|^2 dxdt + \\ & + \int_{Q_{0,\tau}} \left[(2c^0 + c^1 + d^0 + d^1 + h^1 + 2C_{15} + 3) |\tilde{u}_{tt}^k|^2 + (A_2 + 3a^1 + B_1 + 2C_{15}) |\nabla \tilde{u}_t^k|^2 \right] dxdt + \\ & + \int_{Q_{0,\tau}} \left[(c^1 + d^0) |\tilde{u}_t^k|^2 + (A_2 + B_2) |\nabla \tilde{u}^k|^2 + d^1 |\tilde{u}^k|^2 \right] dxdt. \end{aligned} \quad (24)$$

Оскільки $\tilde{u}_1 \in \text{int } K$ чи $\tilde{u}_1 = 0$, то можна вважати, що $\tilde{u}_1^k \in K$. Тоді одержимо, що $\tilde{u}_{tt}^k(0) = f(0) - A_1(0)\tilde{u}_1^k - A_2(0)\tilde{u}_0^k$. З того, що $f, f_t \in L^2(Q_{0,T})$ випливає таке: $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Тому $f(0) \in L^2(\Omega)$ і $\int_{\Omega} |\tilde{u}_{tt}^k(0)|^2 dx \leq C_{16}$, де стала C_{16} не залежить від k . Враховуючи це, оцінки (19), (20) та вибираючи в (24) $\delta > 0$ – достатньо малим, на підставі леми Гронуолла-Белмана, після нескладних перетворень, отримаємо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} \left[|\tilde{u}_{tt}^k|^2 + |\nabla \tilde{u}_t^k|^2 \right] dx + \int_{Q_{0,\tau}} \left[|\tilde{u}_{tt}^k|^2 + |\nabla \tilde{u}_t^k|^2 \right] dxdt \leq C_{17}, \quad (25)$$

де стала C_{17} не залежать від k, τ . Теорему доведено. $\square$

Перейдемо тепер до доведення основного результату.

Доведення теореми 1. Розв'язок задачі (1)-(3) отримаємо як границю розв'язків мішаних задач зі штрафом, а саме задач типу (8)-(10). Отож, для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо функцію u^m – розв'язок задачі

$$u_{tt}^m(t) + A_1(t)u_t^m(t) + A_2(t)u^m(t) - m(u_t^m(t) - \varphi)^- = f(t), \quad t \in (0, T), \quad (26)$$

$$u^m|_{t=0} = u_0, \quad (27)$$

$$u_t^m|_{t=0} = u_1. \quad (28)$$

З теореми 2 випливає існування цього розв'язку. Враховуючи умови теореми 1, отримаємо послідовність $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$, для якої так само, як при доведенні теорем 2 та 3, одержуємо аналоги оцінок (19)-(21), (25). Зокрема, отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} \left[|u_t^m|^2 + |\nabla u^m|^2 + |u^m|^2 + |u^m|^{q(x)} + |u_{tt}^m|^2 + |\nabla u_t^m|^2 \right] dx + \\ & + \int_{Q_{0,\tau}} \left[|u_t^m|^2 + |\nabla u^m|^2 + |u^m|^2 + |u^m|^{q(x)} + |u_{tt}^m|^2 + |\nabla u_t^m|^2 \right] dx \leq C_{18}, \quad \tau \in (0, T], \end{aligned} \quad (29)$$

де стала C_{18} не залежить від m, τ . Крім того,

$$\int_{Q_{0,\tau}} -(u_t^m - \varphi)^- u_t^m dxdt \leq \frac{C_{18}}{m}. \quad (30)$$

На підставі (29) існує послідовність чисел $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} m_j = +\infty$ й існує функція u така, що

$$\begin{aligned} u^{m_j} &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} u \quad * - \text{слабко в } L^\infty(0, T; V) \text{ та слабко в } H^1(Q_{0,T}) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T}), \\ u_t^{m_j} &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_t \quad * - \text{слабко в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ та слабко в } H^1(Q_{0,T}), \\ u_{tt}^{m_j} &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_{tt} \quad * - \text{слабко в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ та слабко в } L^2(Q_{0,T}). \end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} u^{m_j} &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} u \text{ сильно в } H^1(Q_{0,T}) \text{ і майже скрізь в } Q_{0,T}, \\ u_t^{m_j} &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_t \text{ сильно в } L^2(Q_{0,T}) \text{ і майже скрізь в } Q_{0,T}, \\ |u^{m_j}|^{q(x)-2} u^{m_j} &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} |u|^{q(x)-2} u \text{ слабко в } L^{q'(x)}(Q_{0,T}). \end{aligned} \quad (31)$$

Зауважимо таке: з (30) випливає, що $u_t(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$.

Перепишемо (8) для u^{m_j} , одержану рівність помножимо на $v(t) - u_t^{m_j}(t)$, де $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$, та зінтегруємо по $Q_{0,\tau}$, $\tau \in (0, T]$. Оскільки

$$\begin{aligned} m_j \int_{Q_{0,\tau}} (u_t^{m_j} - \varphi)^- (v - u_t^{m_j}) \, dx dt = \\ = m_j \int_{Q_{0,\tau}} \left(-(v - \varphi)^- - [-(u_t^{m_j} - \varphi)^-] \right) (v - u_t^{m_j}) \, dx dt \geq 0, \end{aligned}$$

то одержимо нерівність

$$\int_0^\tau \langle u_{tt}^{m_j}(t) + A_1(t)u_t^{m_j}(t) + A_2(t)u^{m_j}(t) - f(t), v(t) - u_t^{m_j}(t) \rangle \, dt \geq 0. \quad (32)$$

Після нескладних перетворень і застосування формули інтегрування частинами, спрямуємо в (32) m_j до безмежності та візьмемо нижню границю. На підставі збіжностей (31) та леми Фату отримуємо, що функція u є шуканим розв'язком задачі (1)-(3). Теорему доведено. $\square$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. / Ж.-Л. Лионс – М., 1972.
2. Глазатов С.Н. Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка. / С.Н. Глазатов – Новосибирск, 1992. – 22 с. – (Препринт № 7).
3. Глазатов С.Н. Нелинейные уравнения третьего порядка и вариационные неравенства / С.Н. Глазатов // Неклассические уравнения математической физики: международный семинар, посвященный 60-летию со дня рождения проф. В.Н. Врагова, 3-5 окт. 2005 г.: Труды семинара. – 2005. – С. 80-93.
4. Lavrenyuk S. Variational hyperbolic inequality in the domain unbounded in spatial variables / S. Lavrenyuk, P. Pukach // International Journal of Evolution Equations. – 2007. – Vol. 3, № 1. – P. 103-122.

5. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *O.M. Buhrii, R.A. Mashiyev* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, №6. – P. 2325-2331.
6. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii* // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
7. *Лавренюк С.П.* Деяка варіаційна нерівність третього порядку зі змінним степенем нелінійності у необмеженій області *С.П. Лавренюк, О.Т. Панат* // Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. Мех. – 2008. – Т. 13, Вип. 18. – С. 55-61.
8. *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen / *W. Orlicz* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
9. *Kovacic O.* On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *O. Kovacic, J. Rakosnik* // Czechoslovak Math. J. – 41 (116). – 2005. – P. 592-618.
10. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *О.М. Бугрій* // Математичні студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.
11. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. / *Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон* – М., 1958.

*Стаття: надійшла до редакції 21.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

SECOND ORDER HYPERBOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

**Oleh BUHRII¹, Ivan HURNYAK¹, Petro PUKACH², Oksana
KHOLYAVKA³**

¹*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine,*

²*Lviv Polytechnic National University,
Bandera str., 12, 79013, Lviv, Ukraine,*

³*IAPMM NASU,
Naukova str., 3b, 79060, Lviv, Ukraine,
e-mail: ol_buhrii@i.ua*

In bounded domains we proved existence of solutions to some problems for variational inequalities of the second order with variable exponent of nonlinearity in younger term.

Key words: nonlinear hyperbolic variational inequalities of the second order, variable exponent of nonlinearity.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Олег БУГРИЙ¹, Иван ГУРНЯК¹, Пётр ПУКАЧ²,
Оксана ХОЛЯВКА³

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, 79000 Львов, Украина

²Национальный университет "Львовская политехника",
ул. Степана Бандеры, 12, 79013 Львов, Украина

³Институт прикладных проблем механики и математики
имени Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Наукова, 3-б, 79060 Львов, Украина
e-mail: ol_buhrii@i.ua

В ограниченных областях доказано существование решений некоторых задач для вариационных неравенств второго порядка с нелинейным младшим членом, степень которого есть функция от пространственных переменных.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические вариационные неравенства второго порядка, переменный показатель нелинейности.

УДК 512.582

ONE-TO-ONE CORRESPONDENCES BETWEEN CLASSES OF OBJECTS OF THE CATEGORY $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ AND RADICAL FUNCTORS

Nataliya BURBAN

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: n.burban@mail.ru*

In the paper we study some properties of pretorsion and torsion classes in the category of all modules over different rings and state the relations between these classes and idempotent preradical, radical, pretorsion and torsion functors.

Key words: category, functor, preradical functor, radical functor, pretorsion functor, torsion functor, pretorsion class, torsion class.

1. Introduction. An intensive studying of hereditary torsions began due to the papers of P. Gabriel [1] and J.-M. Maranda [2], where there was stated a bijective correspondence between hereditary torsions and radical filters of rings. In 1966 S.E. Dickson established the correspondence between the classes of objects of an abelian category and the idempotent preradicals [3]. Also, the torsion theory was used in the theory of rings of quotients. All these results were summarized and unified in the monographs of A.I. Kashu [4] and B. Stenström [5].

In 1967, (on the International conference in Riga) L.A. Skorniakov posed the problem of constructing the radical in the category of all modules over different rings. In 1971, O.L. Horbachuk solved this problem and established connection between this radical and radicals in the concrete categories of modules. These investigations were continued by O.L. Horbachuk and N.Yu. Burban in 2008 [6].

In this paper we carry some theorems proved by A.I. Kashu in [4] (for a module category) over the category of all modules over different rings (which is not abelian).

2. Main result. Throughout the whole text, all rings are considered to be associative with $1 \neq 0$ and all modules are left unitary [7, 8]. Let R be a ring. The category of left R -modules will be denoted by $R\text{-Mod}$. All necessary definitions and theorems of the Torsion theory and Category theory can be found in [4, 5, 9, 10].

A pair of mappings $(\varphi, \psi): (R_1, M_1) \rightarrow (R_2, M_2)$, where $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ is an onto ring homomorphism, and $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ is a homomorphism of abelian groups, is called

a *semilinear transformation* if $\forall r \in R_1, \forall m_1 \in M_1$

$$\psi(r_1 m_1) = \varphi(r_1) \psi(m_1).$$

Let $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ be a category of all left modules over all rings. More precisely, the objects of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ are the pairs (R, M) , where R is a ring, M is a left module; the set of morphisms $\text{Hom}((R_1, M_1), (R_2, M_2))$ is defined as a quotient set of a collection of all semilinear transformations $(\varphi, \psi): (R_1, M_1) \rightarrow (R_2, M_2)$ by the equivalence relation $\sim$ such that $(\varphi, \psi) \sim (\varphi', \psi')$, if $\psi = \psi'$, and the product of morphisms is defined naturally. The class, determined by the semilinear transformation (φ, ψ) will be denoted by (φ, ψ) , or, more frequently, (φ, ψ) . It is easy to verify that $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ is a category.

A class (φ, ψ) is a monomorphism (resp., an epimorphism) in the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ if ψ is a monomorphism (resp., an epimorphism) in the category of abelian groups. The objects $(R, 0)$ and the morphisms $(\varphi, 0)$ are zero objects and zero morphisms in the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$, respectively (see [6]).

Now recall some definitions [5, 9, 10].

Definition 1. Let $\mathcal{A}$ be a category with zero object and zero morphisms, and let $\alpha: A \rightarrow B$. We will call a morphism $u: K \rightarrow A$ the *kernel* of α if $\alpha u = 0$, and if for every morphism $u': K' \rightarrow A$ such that $\alpha u' = 0$ we have a unique morphism $\gamma: K' \rightarrow K$ such that $u\gamma = u'$. The object K is denoted by $\text{Ker } \alpha$ and the morphism u is denoted by $\ker \alpha$.

A morphism $v: B \rightarrow E$ is called the *cokernel* of α if $v\alpha = 0$, and if for every morphism $v': B \rightarrow E'$ such that $v'\alpha = 0$ we have a unique morphism $\delta: E \rightarrow E'$ such that $\delta v = v'$. The object E is denoted by $\text{Coker } \alpha$ and the morphism v is denoted by $\text{coker } \alpha$.

Definition 2. If $A' \rightarrow A$ is the kernel of some morphism then we call A' a *normal subobject* of A (or an *ideal*). Dually, if $A \rightarrow A''$ is the cokernel of some morphism, then we call A'' a *conormal quotient object* of A .

Definition 3. A category $\mathcal{A}$ is *abelian* if

- A0. $\mathcal{A}$ has the zero object.
- A1. For every pair of objects there is a direct product and
- A1*. a direct sum.
- A2. Every map has the kernel and
- A2*. the cokernel.
- A3. Every monomorphism is the kernel of a map.
- A3*. Every epimorphism is the cokernel of a map.

In the paper [6] some properties of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ were be stated:

1. For arbitrary objects (R_i, M_i) , $i \in I$, of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ there exists the direct product belonging to $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$. In particular, the object (R, M) , where $R = \prod_{i \in I} R_i$, is a direct product of the rings R_i and $M = \prod_{i \in I} M_i$ is a direct product of the abelian groups M_i , and the morphisms $(s_i, \pi_i): (\prod_{i \in I} R_i, \prod_{i \in I} M_i) \rightarrow (R_i, M_i)$, where s_i is the projection of $\prod_{i \in I} R_i$ onto R_i and π_i is the projection of $\prod_{i \in I} M_i$ onto M_i determine a direct product of the objects (R_i, M_i) , $i \in I$, in the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$.

2. Every morphism of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ has the kernel. In particular, let $(\varphi, \psi): (R_1, M_1) \rightarrow (R_2, M_2)$ be a morphism of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$. Then the object $(R_1, \text{Ker}\psi)$ with a monomorphism $(1_{R_1}, i): (R_1, \text{Ker}\psi) \rightarrow (R_1, M_1)$, where i is a canonical monomorphism, is the kernel of the morphism (φ, ψ) .

3. Every morphism of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ has the cokernel. In particular, let $(\varphi, \psi): (R_1, M_1) \rightarrow (R_2, M_2)$ be a morphism of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$. Then the object $(R_2, M_2/\psi(M_1))$ with an epimorphism $(1_{R_2}, \pi): (R_2, M_2) \rightarrow (R_2, M_2/\psi(M_1))$, where π is a canonical epimorphism of R_2 -modules, is the cokernel of the morphism (φ, ψ) in the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$.

We want to verify whether the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ is abelian or not, and if it is not abelian, then what axioms are not satisfied.

We know that the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ satisfies axioms A0, A1, A2 and A2*.

Now, consider the objects $(\mathbb{Z}_2, M_1)$ and $(\mathbb{Z}_3, M_2)$ of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ (e. g. $M_1 = \mathbb{Z}_2$, $M_2 = \mathbb{Z}_3$). Suppose that (R, M) is the direct sum of these objects. In such a case we must have onto ring homomorphisms $\varphi_1: \mathbb{Z}_2 \rightarrow R$ and $\varphi_2: \mathbb{Z}_3 \rightarrow R$. Hence $R = \text{Im}\varphi_1 = \mathbb{Z}_2$ and $R = \text{Im}\varphi_2 = \mathbb{Z}_3$ ($R \neq 0$). Thus we obtain a contradiction. It means that in the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ there exist two objects for which the direct sum does not exist. Therefore, axiom A1* is not satisfied.

We want to show that no monomorphism $(\varphi, \psi): (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow (\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ is the kernel of any morphism. Let $(\alpha, \beta): (\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \rightarrow (R, M)$ be an arbitrary morphism, then $\text{Ker}(\alpha, \beta) = (\mathbb{Z}_2, \text{Ker}\beta)$. But all kernels are isomorphic. This provides a contradiction. Hence axiom A3 is not satisfied.

Similarly we can show for example that no epimorphism $(\varphi, \psi): (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4) \rightarrow (\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_2)$ is the cokernel of any morphism. Hence axiom A3* is not satisfied.

In the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ we shall state the following theorem which holds for abelian categories.

Theorem 1. Let $(\varphi, \psi): (R, M) \rightarrow (R', M')$ be a morphism in $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$. Then

- 1). $\text{ker}(\text{coker}(\text{ker}(\varphi, \psi))) = \text{ker}(\varphi, \psi)$;
- 2). $\text{coker}(\text{ker}(\text{coker}(\varphi, \psi))) = \text{coker}(\varphi, \psi)$.

$$\text{Proof. 1). } \text{ker}(\text{coker}(\text{ker}(\varphi, \psi))) = \text{ker} \left(\text{coker} \left((R, \text{Ker}\psi) \xrightarrow{(1_R, i)} (R, M) \right) \right) =$$

$$= \text{ker} \left((R, M) \xrightarrow{(1_R, \pi)} (R, M/\text{Ker}\psi) \right) = (R, \text{Ker}\psi) \xrightarrow{(1_R, i)} (R, M) = \text{ker}(\varphi, \psi).$$

$$2). \text{coker}(\text{ker}(\text{coker}(\varphi, \psi))) = \text{coker} \left(\text{ker} \left((R', M') \xrightarrow{(1_{R'}, \pi)} (R', M'/\text{Im } \psi) \right) \right) =$$

$$= \text{coker} \left((R', \text{Im } \psi) \xrightarrow{(1_{R'}, i)} (R', M') \right) = (R', M') \xrightarrow{(1_{R'}, \pi)} (R', M'/\text{Im } \psi) = \text{coker}(\varphi, \psi). \quad \square$$

Let $\mathcal{A}$ be an arbitrary concrete category with zero objects and zero morphisms. Recall that a category is called concrete if all objects are (structured) sets, morphisms from A to B are (structure preserving) mappings from A to B , the composition of morphisms is the composition of mappings, and the identities are the identity mappings [12].

Definition 4. A preradical functor (or simply a preradical) on $\mathcal{A}$ is a subfunctor of the identity functor on $\mathcal{A}$. In other words, a preradical functor T assigns to each object A a

subobject $T(A)$ in such a way that the diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ i_1 \uparrow & & \uparrow i_2 \\ T(A) & \xrightarrow{T(\alpha)} & T(B) \end{array},$$

where i_1, i_2 are monomorphisms, is commutative.

Definition 5. A preradical functor T is called idempotent if $T(T(A)) = T(A)$ for every $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

To a preradical functor T one can associate two classes of objects of $\mathcal{A}$, namely

$$\mathcal{T}_T = \{A \mid T(A) = A\},$$

$$\mathcal{F}_T = \{A \mid T(A) = 0\}.$$

Remark 1. Throughout the whole text, all preradical functors on the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ are considered to be such that their restrictions on every category $R - \text{Mod}$ are preradical functors, i. e. $T(R, M) = (R, T_R(M))$, where T_R is the restriction of the functor T on the category $R - \text{Mod}$.

Theorem 2. Let T be a preradical functor on the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$, then

- 1) The class $\mathcal{T}_T$ is closed under quotient objects and direct sums (if they exist).
- 2) The class $\mathcal{F}_T$ is closed under subobjects and direct products.
- 3) $\mathcal{T}_T \cap \mathcal{F}_T = \{(R, 0)\}$.
- 4) $\text{Hom}((R_1, M_1), (R_2, M_2)) = (\varphi, 0)$ for every $(R_1, M_1) \in \mathcal{T}_T$, $(R_2, M_2) \in \mathcal{F}_T$.

Proof. 1) Let $(R_1, M_1) \in \mathcal{T}_T$, $(\varphi, \psi): (R_1, M_1) \rightarrow (R_2, M_2)$ be an epimorphism $((R_2, M_2)$ be a quotient object of (R_1, M_1)). Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (R_1, M_1) & \xrightarrow{(\varphi, \psi)} & (R_2, M_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T(R_1, M_1) & \xrightarrow{T(\varphi, \psi)} & T(R_2, M_2) \end{array}.$$

Since (φ, ψ) is an epimorphism in the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$, it means that φ is a surjective ring homomorphism and ψ is a surjective homomorphism of abelian groups. Hence $(\varphi, \psi)(R_1, M_1) = (R_2, M_2)$. Since $(R_1, M_1) \in \mathcal{T}_T$, it follows that $T(R_1, M_1) = (R_1, M_1)$. By the definition of a preradical functor we obtain $T(R_2, M_2) = (R_2, M_2)$, i. e. $(R_2, M_2) \in \mathcal{T}_T$.

Let $(R_i, M_i), i \in I$, be an arbitrary family of objects in $\mathcal{T}_T$, for which the direct sum exists. Consider the canonical monomorphisms $(\varphi_i, \psi_i): (R_i, M_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (R_i, M_i)$ and the

$$\begin{array}{ccc} (R_i, M_i) & \xrightarrow{(\varphi_i, \psi_i)} & \bigoplus_{i \in I} (R_i, M_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T(R_i, M_i) & \xrightarrow{T(\varphi_i, \psi_i)} & T\left(\bigoplus_{i \in I} (R_i, M_i)\right) \end{array}.$$

2) Let $(\varphi, \psi): (R_1, M_1) \rightarrow (R_2, M_2)$ be a monomorphism, $(R_2, M_2) \in \mathcal{F}_T$. Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (R_1, M_1) & \xrightarrow{(\varphi, \psi)} & (R_2, M_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T(R_1, M_1) & \xrightarrow{T(\varphi, \psi)} & T(R_2, M_2) \end{array}.$$

$$(\varphi, \psi)(T(R_1, M_1)) \subseteq T(R_2, M_2),$$

Let $(R_i, M_i), i \in I$, be an arbitrary family of objects in $\mathcal{F}_T$, i. e. $T(R_i, M_i) = (R_i, 0)$ $\forall i \in I$. Consider the canonical epimorphisms $(\varphi_i, \psi_i): \prod_{i \in I} (R_i, M_i) \rightarrow (R_i, M_i)$ and the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} (R_i, M_i) & \xrightarrow{(\varphi_i, \psi_i)} & (R_i, M_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T\left(\prod_{i \in I} (R_i, M_i)\right) & \xrightarrow{T(\varphi_i, \psi_i)} & T(R_i, M_i) \equiv (R_i, 0) \end{array}.$$

3) Suppose that $(R, M) \in \mathcal{T}_T \cap \mathcal{F}_T$. It means that $T(R, M) = (R, M)$ and $T(R, M) = (R, 0)$. Therefore $\mathcal{T}_T \cap \mathcal{F}_T = (R, 0)$.

4) Let $(R_1, M_1) \in \mathcal{T}_T$, $(R_2, M_2) \in \mathcal{F}_T$, $(\varphi, \psi): (R_1, M_1) \rightarrow (R_2, M_2)$. Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (R_1, M_1) & \xrightarrow{(\varphi, \psi)} & (R_2, M_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T(R_1, M_1) & \xrightarrow{T(\varphi, \psi)} & T(R_2, M_2) \end{array}.$$

Since $T(R_1, M_1) = (R_1, M_1)$ and $T(R_2, M_2) = (R_2, 0)$, we obtain the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (R_1, M_1) & \xrightarrow{(\varphi, \psi)} & (R_2, M_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (R_1, M_1) & \xrightarrow{T(\varphi, \psi)} & (R_2, 0) \end{array}.$$

Thus $(\varphi, \psi) = (\varphi, 0)$. Hence $\text{Hom}((R_1, M_1), (R_2, M_2)) = (\varphi, 0)$ for every $(R_1, M_1) \in \mathcal{T}_T$, $(R_2, M_2) \in \mathcal{F}_T$. $\square$

Definition 6. A class $\mathcal{P}$ of objects of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ is called a pretorsion class if it is closed under quotient objects and direct sums (if they exist).

Theorem 3. There is a bijective correspondence between the idempotent preradical functors of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ and the pretorsion classes of objects of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$.

Proof. ($\implies$) Let T be an idempotent preradical functor, $\mathcal{T}_T = \{(R, M) \mid T(R, M) = (R, M)\}$. By Theorem 2, the class $\mathcal{T}_T$ is closed under quotient objects and direct sums (if they exist), hence $\mathcal{T}_T$ is a pretorsion class for the preradical functor T .

($\impliedby$) Let $\mathcal{P}$ be a pretorsion class, (R, M) be an arbitrary object of $\mathcal{P}$. Consider $t_R(R, M) = \sum_{i \in I} \{(R, M_i)\}$, where (R, M_i) are normal subobjects of (R, M) , $(R, M_i) \in \mathcal{P}$.

We know that t_R is a preradical functor on every category $R - \text{Mod}$ (see e. g. [4]). Since the pretorsion class $\mathcal{P}$ is closed under quotient objects it follows that the preradical functors t_R generate a preradical functor T on $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ (see [6]). $\square$

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be arbitrary concrete categories with zero objects and zero morphisms.

Definition 7. Let T_1 and T_2 be functors from a category $\mathcal{A}$ to a category $\mathcal{B}$. The functor T_1 is called a subfunctor of the functor T_2 (denote $T_1 \leq T_2$) if $T_1(A)$ is a subobject of $T_2(A)$ (denote $T_1(A) \subseteq T_2(A)$) for every $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ and the following diagram

$$\begin{array}{ccc} T_1(A_1) & \xrightarrow{T_1(\varphi)} & T_1(A_2) \\ i_1 \downarrow & & i_2 \downarrow \\ T_2(A_1) & \xrightarrow{T_2(\varphi)} & T_2(A_2) \end{array}$$

is commutative for every morphism $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$, $A_1, A_2 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

Definition 8. A functor T_1 is called a normal subfunctor of the functor T_2 if $T_1(A)$ is a normal subobject of $T_2(A)$ for every $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

As a rule we will consider the cases, when the categories $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ coincide.

Definition 9. Let $\mathcal{A}$ be a category, T_1 and T_2 be functors on $\mathcal{A}$ such that T_1 is a normal subfunctor of T_2 . A factor-functor T_2/T_1 is a functor such that $(T_2/T_1)(A) = T_2(A)/T_1(A) \forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ and the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} T_1(A_1) & \xrightarrow{T_1(\varphi)} & T_1(A_2) \\ i_1 \downarrow & & i_2 \downarrow \\ T_2(A_1) & \xrightarrow{T_2(\varphi)} & T_2(A_2) \\ \pi_1 \downarrow & & \pi_2 \downarrow \\ T_2(A_1)/T_1(A_1) & \longrightarrow & T_2(A_2)/T_1(A_2), \end{array}$$

where i_1, i_2 are normal monomorphisms, π_1, π_2 are conormal epimorphisms.

Definition 10. A preradical functor T on a category $\mathcal{A}$ is called a radical functor if $T(I/T) = 0$, where I is an identity functor.

Definition 11. A class $\mathcal{T}_T$ is said to be closed under extensions if for every exact sequence $(R', 0) \rightarrow (R', M') \rightarrow (R, M) \rightarrow (R'', M'') \rightarrow (R'', 0)$ with (R', M') and (R'', M'') in $\mathcal{T}_T$, also $(R, M) \in \mathcal{T}_T$. A class $\mathcal{T}_T$ is said to be closed under normal extensions if it is closed under extensions and $R' = R = R''$.

Theorem 4. Let T be an idempotent radical functor on the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$, then

1) The class $\mathcal{T}_T$ is closed under quotient objects, direct sums (if they exist) and normal extensions.

2) The class $\mathcal{F}_T$ is closed under subobjects, direct products and normal extensions.

3) $\mathcal{T}_T = \{(R, M) \in \text{Ob}(\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}) \mid \text{Hom}((R, M), (R', M')) = (\varphi, 0) \forall (R', M') \in \mathcal{F}_T\}$

4) $\mathcal{F}_T = \{(R', M') \in \text{Ob}(\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}) \mid \text{Hom}((R, M), (R', M')) = (\varphi, 0) \forall (R, M) \in \mathcal{T}_T\}$

Proof. 1) The class $\mathcal{T}_T$ is closed under quotient objects and direct sums (if they exist) (see theorem 2).

Since we want to prove that $\mathcal{T}_T$ is closed under normal extensions, it is sufficient to work in the category $R - \text{Mod}$. But in every category $R - \text{Mod}$ the class $\mathcal{T}_T$ is closed under extensions (see [4]).

2) Apply Theorem 2 (2), and the proof of the closure under normal extensions is the same as previous.

3) ($\Rightarrow$) Let $(R, M) \in \mathcal{T}_T$, then by Theorem 2 $\text{Hom}((R, M), (R', M')) = (\varphi, 0)$ for every $(R', M') \in \mathcal{F}_T$.

($\Leftarrow$) Now let (R, M) be a such object that $\text{Hom}((R, M), (R', M')) = (\varphi, 0)$ for every $(R', M') \in \mathcal{F}_T$. By the condition, T is a radical functor, so

$$T((R, M)/T(R, M)) = (R, 0),$$

i. e. $(R, M)/T(R, M) \in \mathcal{F}_T$. Consider the morphism $(\varphi, \psi): (R, M) \rightarrow (R, M)/T(R, M)$. Since $(R, M)/T(R, M) \in \mathcal{F}_T$ and (φ, ψ) is an surjective homomorphism it follows that $(R, M)/T(R, M) = (R, 0)$. Hence $T(R, M) = (R, M)$, i. e. $(R, M) \in \mathcal{T}_T$.

4) ($\implies$) Let $(R', M') \in \mathcal{F}_T$, then $\text{Hom}((R, M), (R', M')) = (\varphi, 0)$ for every $(R, M) \in \mathcal{T}_T$ (by Theorem 2).

($\impliedby$) Conversely, let (R', M') be a such object that $\text{Hom}((R, M), (R', M')) = (\varphi, 0)$ for every $(R, M) \in \mathcal{T}_T$. Assume that $T(R', M') = (R', M^*)$. Consider a morphism $(\varphi, \psi): (R, M) \rightarrow (R', M')$, and the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (R, M) & \xrightarrow{(\varphi, \psi)} & (R', M') \\ \uparrow & & \uparrow \\ T(R, M) & \xrightarrow{T(\varphi, \psi)} & T(R', M') \end{array}.$$

$T(R, M) \in \mathcal{T}_T$ because T is an idempotent, i. e. $T(T(R', M')) = T(R', M')$. Since $(\varphi, \psi)(R, M) = (R, 0)$, then there exists a nonzero monomorphism $T(R', M') \rightarrow (R', M')$. This provides a contradiction. $\square$

Definition 12. A class $\mathcal{P}$ of objects of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ is called a torsion class if it is closed under quotient objects, direct sums (if they exist), and normal extensions.

Theorem 5. There is a bijective correspondence between idempotent radical functors of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ and torsion classes of objects of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$.

Proof. ($\implies$) Let T be an idempotent radical functor,

$$\mathcal{T}_T = \{(R, M) \mid T(R, M) = (R, M)\}.$$

By Theorem 4, the class $\mathcal{T}_T$ is closed under quotient objects, direct sums (if they exist), and normal extensions, hence $\mathcal{T}_T$ is a torsion class for the radical functor T .

($\impliedby$) Let $\mathcal{P}$ be a torsion class. We know that the class $\mathcal{P}$ generates the preradical functor T on the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ (see Theorem 3). Since the torsion class $\mathcal{P}$ is closed under normal extensions it follows that on every category $R - \text{Mod}$ the restriction of T is a radical functor. But in the paper [6] it was proved that a preradical functor on $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ is a radical functor if and only if its restriction in every category $R - \text{Mod}$ is a radical functor. $\square$

Definition 13. Let T be an idempotent preradical functor of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$, $(R, M) \in \mathcal{T}_T$. If every normal subobject of (R, M) belongs to $\mathcal{T}_T$, then T is called a pretorsion functor.

Definition 14. A pretorsion functor is called a torsion functor if it is a radical one.

Theorem 6. There is a bijective correspondence between pretorsion functors of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ and pretorsion classes of objects of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$, closed under normal subobjects.

Proof. ($\implies$) Let T be a pretorsion functor, $\mathcal{T}_T = \{(R, M) \mid T(R, M) = (R, M)\}$. By Theorem 2 the class $\mathcal{T}_T$ is closed under quotient objects and direct sums (if they exist). By the definition of a pretorsion functor the class $\mathcal{T}_T$ is closed under normal subobjects, hence $\mathcal{T}_T$ is a pretorsion class, closed under normal subobjects.

($\impliedby$) Let $\mathcal{P}$ be a pretorsion class, closed under normal subobjects. In every category $R - \text{Mod}$ the class $\mathcal{P}$ generates a pretorsion functor (see e. g. [4]). By Theorem 3, if a class is closed under quotient objects and direct sums (if they exist), then it generates a preradical

functor of the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$. But if a preradical functor of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ is a pretorsion functor on every $R - \text{Mod}$, then it is a pretorsion functor of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$. $\square$

Theorem 7. *There is a bijective correspondence between the torsion functors of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ and the torsion classes of objects of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$, closed under normal subobjects.*

Proof. ($\Rightarrow$) See the proofs of Theorems 5 and 6.

($\Leftarrow$) Let $\mathcal{P}$ be a torsion class, closed under normal subobjects. We know that the class $\mathcal{P}$ generates a radical functor T on the category $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ (see the proof of the theorem 5). Since $\mathcal{P}$ is closed under normal subobjects, it follows that $\mathcal{P}$ is closed under subobjects in every category $R - \text{Mod}$. Thus, on every $R - \text{Mod}$ it generates a torsion functor. And we know that if a radical functor of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$ is a torsion functor on every $R - \text{Mod}$, then it is a torsion functor of $\bigcup \mathcal{R} - \text{Mod}$. $\square$

REFERENCES

1. *Gabriel P.* Des catégories abéliennes / *P. Gabriel* // Bull. Soc. Math. France. – 1962. – Vol. 90. – P. 323-448.
2. *Maranda J.-M.* Injective Structures / *J.-M. Maranda* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 110. – P. 98-135.
3. *Dickson S.E.* A torsion theory for abelian categories / *S.E. Dickson* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966 – Vol. 121. – P. 223-235.
4. *Kashu A.I.* Radicals and torsions in modules / *A.I. Kashu* – Kishinev: Stiinca. – 1983. – P.152 (in Russian).
5. *Stenström B.* Rings of Quotients / *B. Stenström* – Berlin: Springer. – 1975.
6. *Burban N.Yu.* Radical functors in the category of modules over different rings / *N.Yu. Burban, O.L. Horbachuk* // Algebra and Discrete Math. – 2008. – №3. – P. 30-39.
7. *Anderson F.W.* Rings and categories of modules / *F.W. Anderson, K.R. Fuller* Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
8. *Faith C.* Algebra: Rings, Modules and Categories / *C. Faith* – Moskow, 1977 (in Russian).
9. *Mitchel B.* Theory of categories / *B. Mitchel* New York, London: Acad. Press., 1965.
10. *Freyd P.* Abelian categories / *P. Freyd* – New York, Evanston, London: Harper & Row, 1966.
11. *Shulgeifer E.H.* Functor characteristic of strong radical in categories / *E.H. Shulgeifer* // Sibir. Math. J. – 1966. – Vol. VII, №6. – P. 1412-1421 (in Russian).
12. *Kilp M.* Monoids, acts and categories: with applications to wreath products and graphs; a handbook for students and researchers / *M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev* – Berlin, New York: de Gruyter, 2000.

Стаття: надійшла до редакції 16.02.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ВЗАЄМНО ОДНОЗНАЧНІ ВІДПОВІДНОСТІ МІЖ КЛАСАМИ ОБ'ЄКТІВ КАТЕГОРІЇ $\bigcup \mathcal{R} - Mod$ І РАДИКАЛЬНИМИ ФУНКТОРАМИ

Наталія БУРБАН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: n.burban@mail.ru*

Вивчено деякі властивості прерадикальних і радикальних класів у категорії всіх модулів над різними кільцями, а також є зв'язок між цими класами та ідемпотентними прерадикальними, радикальними, преперіодичними та періодичними функторами.

Ключові слова: категорія, функтор, прерадикальний функтор, радикальний функтор, преперіодичний функтор, періодичний функтор, прерадикальний клас, радикальний клас.

ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ КЛАССАМИ ОБЪЕКТОВ КАТЕГОРИИ $\bigcup \mathcal{R} - Mod$ И РАДИКАЛЬНЫМИ ФУНКТОРАМИ

Наталья БУРБАН

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: n.burban@mail.ru*

Изучено некоторые свойства предрадикальных и радикальных классов в категории всех модулей над разными кольцами, а также устанавливается связь между этими классами и предрадикальными, радикальными, предпериодическими и периодическими функторами.

Ключевые слова: категория, функтор, предрадикальный функтор, радикальный функтор, предпериодический функтор, периодический функтор, предрадикальный класс, радикальный класс.

УДК 517.946

ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ТА РЕГУЛЯРНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ З ТРЬОМА КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В КРУЗІ

Катерина БУРЯЧЕНКО

Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, Донецьк, 83001
e-mail: katarzyna_@ukr.net

У випадку одиничного круга K доведено теорему регулярності $L_{(3)}$ -сліду та теорему існування розв'язку задачі з трьома крайовими умовами для еліптичних рівнянь четвертого порядку в просторі Соболева $H^\theta(K)$, з деяким показником регулярності θ , який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння, тобто від його коефіцієнтів.

Ключові слова: еліптичні диференціальні рівняння четвертого порядку, крайові задачі, L -сліди, рекурентні рівняння, асимптотика коефіцієнтів ряду Фур'є.

1. Вступ. Розглядатимемо питання існування розв'язку задачі з трьома граничними умовами для еліптичних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами в просторі Соболева $H^\theta(K)$ з деяким показником регулярності θ , який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння.

Основний апарат досліджень – метод формули Гріна, метод L -слідів, тобто слідів, асоційованих з лінійною безтипною диференціальною операцією L зі сталими комплексними коефіцієнтами та розроблений автором метод дослідження рекурентних рівнянь зі змінними (які залежать від n) коефіцієнтами.

Умови існування розв'язку деяких граничних задач, які формулюються в термінах L -слідів, виникали ще під час дослідження задачі Неймана для рівняння Лапласа $\Delta u = f(x)$, $u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x) : \int_{\partial\Omega} \psi(x) ds_x = \int_{\Omega} f(x) dx$. Враховуючи, що для оператора $L = \Delta$ ці сліди набули вигляду $L_{(0)}u = -u|_{\partial\Omega}$, $L_{(1)}u = u'_\nu|_{\partial\Omega}$, останню умову можна переписати в термінах L -слідів: $\int_{\partial\Omega} L_{(1)}u ds_x = \int_{\Omega} f(x) dx$. Поширення цього результату на випадок деяких крайових задач для загального безтипного диференціального оператора четвертого порядку присвячена праця [7].

В [5] було розроблено метод формули Гріна для загальної безтипової лінійної диференціальної операції $\mathcal{L}$ зі сталими комплексними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

а також введено означення асоційованих з цією операцією слідів (L -слідів). Це поняття виникло в зв'язку з вивченням граничних властивостей розв'язків з простору $L_2(\Omega)$ диференціальних рівнянь з максимальним оператором $Lu = f(x) \in L_2(\Omega)$. Як показано в [5], в загальному випадку звичайні сліди $u|_{\partial\Omega}$, $u'_\nu|_{\partial\Omega}$, ..., $u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega}$ розв'язків цього рівняння з простору $L_2(K)$ не існують навіть у сенсі узагальнених функцій. У випадку $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ в одиничному крузі K функція

$$u(x, y) = \frac{1}{(1 - x^2)^{5/8}} \in L_2(K)$$

є розв'язком рівняння $Lu = 0$, але $\langle u|_{\partial K}, 1 \rangle = \infty$, позаяк

$$\lim_{|r| \rightarrow 1-0} \int_{x^2+y^2=r^2} u(x, y) ds = \infty.$$

Однак у кожного L_2 -розв'язку рівняння $Lu = 0$ існують L -сліди.

Проблемам регулярності розв'язку крайових задач для рівнянь другого порядку присвячена, зокрема, праця [6]. Існування розв'язку задачі Діріхле в просторі $C^4(K) \cap C^{1,\alpha}(\partial K)$ для деяких частинних випадків (з обмеженням на значення коренів характеристичного рівняння) еліптичних рівнянь четвертого порядку (правильно та неправильно еліптичних) довів А.О. Бабаян [1], [2].

Отож, питання існування та регулярності розв'язку крайових задач для еліптичних рівнянь четвертого порядку з довільними сталими комплексними коефіцієнтами не вивчали. Цій проблемі присвячена наша стаття: доведено теорему існування розв'язку деякої крайової задачі в просторі Соболева $H^\theta(K)$.

В [7] було доведено необхідні, а у випадку еліптичності оператора, і достатні умови існування розв'язків декількох граничних задач у довільній області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: граничної задачі типу Коші, задачі з трьома граничними умовами та задачі Діріхле для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами. Ми використовуємо результат цієї праці у випадку одиничного круга K для доведення теореми регулярності $L_{(3)}$ -сліду та теореми існування розв'язку задачі з трьома крайовими умовами для еліптичних рівнянь четвертого порядку в просторі Соболева $H^\theta(K)$, з деяким показником регулярності θ , який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння, тобто від його коефіцієнтів. Наведено приклад, який ілюструє, що розроблені автором методи допомагають досліджувати також інші крайові задачі, зокрема, задачу Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку, результати для якої отримали в [6] іншими методами.

2. Існування та регулярність розв'язку задачі. В одиничному крузі $K \subset \mathbb{R}^2$ розглянемо еліптичне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими

комплексними коефіцієнтами

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0. \quad (1)$$

Для рівняння (1) розглянемо задачу з трьома крайовими умовами

$$u|_{\partial K} = \varphi(x), \quad u'_\nu|_{\partial K} = \psi(x), \quad u''_{\nu\nu}|_{\partial K} = \sigma(x). \quad (2)$$

Вважатимемо $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial K)$, $\sigma(x) \in H^{m-5/2}(\partial K)$, $m \geq 4$, ν – вектор зовнішньої нормалі, $|\nu| = 1$, $\partial_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, 4$.

Розв'язком задачі (1), (2) з класу $H^m(K)$, $m \geq 4$, називатимемо функцію $u \in H^m(K)$, $m \geq 4$, яка задовольняє рівняння (1) та умови на межі (2).

Зауважимо, що символ оператора $L(D_x)$ допускає зображення

$$L(\xi) = a_0 \xi_1^4 + a_1 \xi_1^3 \xi_2 + a_2 \xi_1^2 \xi_2^2 + a_3 \xi_1 \xi_2^3 + a_4 \xi_2^4 = \langle \xi, a^1 \rangle \langle \xi, a^2 \rangle \langle \xi, a^3 \rangle \langle \xi, a^4 \rangle,$$

отже, рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$\langle \nabla, a^1 \rangle \langle \nabla, a^2 \rangle \langle \nabla, a^3 \rangle \langle \nabla, a^4 \rangle u = 0, \quad (1^*)$$

де $a^j \in \mathbb{C}^2$, $j = 1, \dots, 4$ – комплексні вектори, які визначають коефіцієнтами рівняння (1), $\langle a, b \rangle = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2$ – скалярний добуток. Розглядатимемо далі також вектори $\tilde{a}^j = (-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j)$, $j = 1, \dots, 4$.

2.1. Методи дослідження. Основним апаратом досліджень є метод асоційованих з оператором L слідів (L - слідів).

В обмеженій області $\Omega \in \mathbb{R}^n$ розглянемо лінійну диференціальну операцію $\mathcal{L}$ та формально спряжену до неї $\mathcal{L}^+$

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad \mathcal{L}^+(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha (\bar{a}_\alpha \cdot), \quad (3)$$

де $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Означення 1. Нехай L_0 – оператор, породжений операцією $\mathcal{L}(D_x)$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Мінімальним оператором L_0 називається розширення оператора L_0 на множину $D(L_0) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$. (Замикання відбувається за нормою графіка: $\|u\|_L^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}u\|_{L_2(\Omega)}^2$).

Означення 2. Максимальним оператором L називається звуження $\mathcal{L}(D_x)|_{D'(L)}$ на множину $D(L) := \{u \in L_2(\Omega) : Lu \in L_2(\Omega)\}$.

Визначимо розширення $\tilde{L}$ мінімального оператора, що міститься в максимальному $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$.

Означення 3. Оператором $\tilde{L}$ будемо називати розширення оператора L_0 на множину $D(\tilde{L}) := \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}$. (За нормою графіка).

Означення 4. Максимальний оператор L називається правильним, якщо $D(L) = D(\tilde{L})$.

Означення 5. Нехай для деякої функції $u \in D(\tilde{L})$ існують лінійні неперервні функціонали $L_{(p)}u$ над простором $H^{m-p-1/2}(\partial\Omega)$, $p = 0, 1, \dots, m-1$, такі, що виконується рівність

$$(Lu, v) - (u, L^+v) = \sum_{j=0}^{m-1} (L_{(m-1-j)}u, \gamma_j v), \quad (4)$$

де $\gamma_j = p_j \gamma$, $\gamma : u \in H^m(\Omega) \rightarrow (u|_{\partial\Omega}, \dots, u^{(m-1)}|_{\partial\Omega}) \in H^{(m)}$, $p_j : H^{(m)} \rightarrow H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$. Функціонал $L_{(p)}u$ називатимемо $L_{(p)}$ -слідом функції $u \in D(\tilde{L})$.

Аналогічно можна побудувати оператори L_0^+ , L^+ , $\tilde{L}^+$, пов'язані з формально спряженою операцією $\mathcal{L}^+(D_x)$.

В [7] отримали достатні умови існування розв'язку задачі з трьома граничними умовами (1), (2) у випадку довільної обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ з гладкою межею $\partial\Omega$.

Теорема 1. [7] Нехай існує функція $P(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$, яка однозначно визначається за допомогою даних задачі (1), (2): функцій $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega)$, і четвірка $(P, R, S, T) \in H^{m-\frac{7}{2}}(\partial\Omega) \times H^{m-\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $m \geq 4$, задовольняє такі умови:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \{ & P(x) \cdot Q(-\tilde{a}^j \cdot x) + R(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x) Q'(-\tilde{a}^j \cdot x) + \\ & + S(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^2 Q''(-\tilde{a}^j \cdot x) + T(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^3 Q'''(-\tilde{a}^j \cdot x) \} ds_x = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$.

Тоді в просторі Соболева $H^m(\Omega)$, $m \geq 4$, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), граничні дані якого пов'язані з функціями R, S, T за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} T(x) &= L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega), \\ S(x) &= L_{(1)}u = L(\nu)\psi(x) + \alpha_1\varphi'_s(x) + \alpha_2\varphi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega), \\ R(x) &= L_{(2)}u = -L(\nu)\sigma(x) + \beta_1\psi'_s(x) + \beta_2\psi(x) + \beta_3\varphi''_{ss}(x) + \beta_4\varphi'_s(x) + \\ & \quad + \beta_5\varphi(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega), \\ P(x) &= L_{(3)}u = L(\nu)u'''_{\nu}|_{\partial\Omega} + \delta_1\varphi'''_{sss}(x) + \delta_2\sigma(x) + \delta_3\psi''_{ss}(x) + \delta_4\psi'_s(x) + \delta_5\psi(x) + \\ & \quad + \delta_6\varphi''_{ss}(x) + \delta_7\varphi'_s(x) + \delta_8\varphi(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут s – натуральний параметр $\partial\Omega$, α_i , $i = 1, 2$, β_j , $j = 1, \dots, 5$, δ_k , $k = 1, \dots, 8$ – функції, гладкі за змінною x та які залежать від коефіцієнтів рівняння (1).

Використаємо результат теореми 1 для доведення існування розв'язку задачі (1), (2) у випадку одиничного круга K . Для цього достатньо довести, що зі співвідношення (5) можна однозначно знайти невідому функцію $P(x)$ через відомі функції R, S, T , які визначаються даними задачі за допомогою (6).

2.2. Розв'язання співвідношень (5). Як поліном $Q(-\tilde{a}^j \cdot x)$ підставимо в (5) функцію $Q(z) = \int_0^z dy \int_0^y dx \int_0^x T_n dt$ або

$$Q(z) = \frac{1}{8(n+1)(n+2)(n+3)} T_{n+3}(z) - \frac{1}{8(n-1)(n-2)(n-3)} T_{n-3}(z) - \\ - \frac{3}{8(n+1)(n-1)(n+2)} T_{n+1}(z) + \frac{3}{8(n+1)(n-1)(n-2)} T_{n-1}(z), \quad n = 4, \dots$$

де $T_n(t)$ – поліноми Чебишова першого роду n -го порядку [3] та розвинення функцій $P(x)$, $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ в ряд за тригонометричною системою $\{\cos n(\tau + \varphi_j), \sin n(\tau + \varphi_j)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}_j P_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) + {}_j P_n^U \sin n(\tau + \varphi_j) \}, \\ R(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}_j R_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) + {}_j R_n^U \sin n(\tau + \varphi_j) \}, \\ S(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}_j S_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) + {}_j S_n^U \sin n(\tau + \varphi_j) \}, \\ T(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}_j T_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) + {}_j T_n^U \sin n(\tau + \varphi_j) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут φ_j – деякий кут нахилу характеристики (розв'язок рівняння $-\operatorname{tg} \varphi_j = \lambda_j$, λ_j – корені характеристичного рівняння $L(1, \lambda) = 0$). Зауважимо, що $\varphi_j \in \mathbb{C}$, для всіх $j = 1, 2, 3, 4$, оскільки ми розглядаємо випадок еліптичних диференціальних рівнянь (1).

Зауваження 1. Зауважимо, що коефіцієнти ${}_i X_n^T, {}_i X_n^U$ розвинення деякої функції $X(\tau)$ в ряд за тригонометричною системою $\{\cos n(\tau + \varphi_i), \sin n(\tau + \varphi_i)\}_{n=0}^{\infty}$ пов'язані з коефіцієнтами ${}_j X_n^T, {}_j X_n^U$ розвинення в ряд за тригонометричною системою $\{\cos n(\tau + \varphi_j), \sin n(\tau + \varphi_j)\}_{n=0}^{\infty}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, за допомогою таких співвідношень:

$$\begin{aligned} {}_j X_n^T &= {}_i X_n^T \cos n(\varphi_i - \varphi_j) + {}_i X_n^U \sin n(\varphi_i - \varphi_j), \\ {}_j X_n^U &= -{}_i X_n^T \sin n(\varphi_i - \varphi_j) + {}_i X_n^U \cos n(\varphi_i - \varphi_j). \end{aligned}$$

Отже, отримуємо систему неоднорідних рекурентних рівнянь зі змінними коефіцієнтами стосовно невідомої послідовності $\{ {}_j P_n^T \}_{n=7}^{\infty}$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} {}_j P_{n+3}^T - \frac{3}{(n+2)(n^2-1)} {}_j P_{n+1}^T + \frac{3}{(n-2)(n^2-1)} {}_j P_{n-1}^T - \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} {}_j P_{n-3}^T = \\ &= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} {}_j R_{n+3}^T + \frac{(n+5)}{(n^2-1)(n+2)} {}_j R_{n+1}^T + \frac{(n-5)}{(n^2-1)(n-2)} {}_j R_{n-1}^T - \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)(n-2)} {}_j R_{n-3}^T - \frac{1}{n+1} {}_j S_{n+3}^T - \\ &\quad - \frac{n-3}{n^2-1} {}_j S_{n+1}^T + \frac{n+3}{n^2-1} {}_j S_{n-1}^T + \frac{1}{n-1} {}_j S_{n-3}^T - {}_j T_{n+3}^T - 3 {}_j T_{n+1}^T - 3 {}_j T_{n-1}^T - {}_j T_{n-3}^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$j = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 4$. З цієї системи можна визначити коефіцієнти ${}_j P_7^T, {}_j P_8^T, \dots$ розвинення невідомої функції $P(x)$ через відповідні коефіцієнти розвинення відомих функцій $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$. Знаходження молодших коефіцієнтів ${}_j P_0^T, {}_j P_1^T, \dots, {}_j P_6^T$ відбувається так. Спочатку підставляємо в (5) $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = \operatorname{const} \neq 0$, звідки

${}_1P_0^T = {}_2P_0^T = {}_3P_0^T = {}_4P_0^T \equiv 0$. Потім приймаємо $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)$, що призводить до ${}_jP_1^T = {}_jR_1^T$, $j = 1, 2, 3, 4$. Якщо прийняти $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^2$, то отримаємо ${}_jP_2^T = -R_0 - S_0 - 2{}_jR_2^T - 2{}_jS_2^T$, $j = 1, 2, 3, 4$. Для знаходження ${}_jP_3^T$ приймаємо $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^3$: ${}_jP_3^T = -6{}_jR_1^T - 18{}_jS_1^T - 18{}_jT_1^T - 3{}_jR_3^T - 6{}_jS_3^T - 6{}_jT_3^T$. Якщо $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^4$, то

$${}_jP_4^T = -4{}_jR_4^T - 12{}_jS_4^T - 24{}_jT_4^T - {}_jR_2^T - 10{}_jS_2^T - 24{}_jT_2^T - 2R_0 - 8S_0 - 18T_0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Нарешті, для визначення ${}_jP_5^T$ і ${}_jP_6^T$ підставляємо в (5) $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^5$ та $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^6$, відповідно.

2.3. Дослідження асимптотики послідовності ${}_jP_n^T$, $n = 0, 1, \dots$. Для визначення регулярності функції $P(x)$, поданої за допомогою ряду в (7), нам знадобиться дослідити асимптотику послідовності коефіцієнтів цього ряду.

Означення 6. Будемо казати, що деяка послідовність $X_n \in h^\theta$, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} |X_n|^2 (1+n^2)^\theta < \infty.$$

Також казатимемо, що деяка послідовність $X_n \in h_\rho^\theta$, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 |X_n|^2 (1+n^2)^\theta < \infty.$$

Значення $\rho = \rho(n) = \rho_n$ називатимемо вагою.

Правильне таке твердження.

Твердження 1. [4] Нехай функція $X(\tau)$ визначена на межі ∂K одиничного круга K і

$$X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{X_n^T \cos n\tau + X_n^U \sin n\tau\}, \tau \in [0, 2\pi].$$

Функція $X(\tau)$ належатиме простору $H^\theta(\partial K)$ тоді і лише тоді, коли $X_n^T, X_n^U \in h^\theta$, тобто

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2) (1+n^2)^\theta < \infty.$$

Функція $X(\tau)$ належатиме ваговому простору $H_\rho^\theta(\partial K)$ тоді і лише тоді, коли $X_n^T, X_n^U \in h_\rho^\theta$, тобто

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 (|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2) (1+n^2)^\theta < \infty.$$

Нехай $\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, $\psi(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K)$, $\sigma(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, тоді (див. формулу (6)) $R(x) \in H_\rho^{m-5/2}(\partial K)$, $S(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K)$, $T(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, $\rho = \rho_n = e^{nIm\varphi_j}$, $j = 1, \dots, 4$, $n = 1, \dots$, отже, $R_n^T, R_n^U \in h_\rho^{m-5/2}$, $S_n^T, S_n^U \in h_\rho^{m-3/2}$,

$T_n^T, T_n^U \in h_\rho^{m-1/2}$ з вагою $\rho = \rho_n = e^{n \operatorname{Im} \varphi_j}$, $j = 1, \dots, 4$, $n = 1, \dots$, тобто

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 (|R_n^T|^2 + |R_n^U|^2) (1+n^2)^{m-5/2} &< \infty, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 (|S_n^T|^2 + |S_n^U|^2) (1+n^2)^{m-3/2} &< \infty, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 (|T_n^T|^2 + |T_n^U|^2) (1+n^2)^{m-1/2} &< \infty, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{R_n^T \cos n\tau + R_n^U \sin n\tau\}, \\ S(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{S_n^T \cos n\tau + S_n^U \sin n\tau\}, \\ T(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{T_n^T \cos n\tau + T_n^U \sin n\tau\}, \\ P(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{P_n^T \cos n\tau + P_n^U \sin n\tau\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Лема 1. *Нехай*

$$X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}_j X_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) + {}_j X_n^U \sin n(\tau + \varphi_j) \}.$$

Тоді така оцінка правильна:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{-2} (|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2) (1+n^2)^\theta &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (|{}_j X_n^T|^2 + |{}_j X_n^U|^2) (1+n^2)^\theta \leq \\ &\leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 (|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2) (1+n^2)^\theta, \\ &\rho_n = e^{n \operatorname{Im} \varphi_j}. \end{aligned}$$

Згідно з зауваженням 1

$${}_j X_n^T = X_n^T \cos n\varphi_j - X_n^U \sin n\varphi_j, \quad {}_j X_n^U = X_n^T \sin n\varphi_j + X_n^U \cos n\varphi_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Доведення. Для доведення леми користуємося співвідношеннями

$${}_j X_n^T = X_n^T \cos n\varphi_j - X_n^U \sin n\varphi_j, \quad {}_j X_n^U = X_n^T \sin n\varphi_j + X_n^U \cos n\varphi_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

для отримання оцінки

$$|{}_j X_n^T|^2 + |{}_j X_n^U|^2 \leq C_1 (|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2) \rho_n^2, \quad \rho_n = e^{n \operatorname{Im} \varphi_j}.$$

Аналогічно з рівностей

$$X_n^T = {}_j X_n^T \cos n\varphi_j + {}_j X_n^U \sin n\varphi_j, \quad X_n^U = -{}_j X_n^T \sin n\varphi_j + {}_j X_n^U \cos n\varphi_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

отримуємо

$$|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2 \leq C_2 (|{}_j X_n^T|^2 + |{}_j X_n^U|^2) \rho_n^2, \quad \rho_n = e^{n \operatorname{Im} \varphi_j}.$$

□

Отже, враховуючи формулу (9), за допомогою цієї леми визначаємо асимптотику послідовностей – правої частини системи (8): ${}_jR_n^T \in h^{m-5/2}$, ${}_jS_n^T \in h^{m-3/2}$, ${}_jT_n^T \in h^{m-1/2}$. Визначимо показник θ регулярності розв'язку ${}_jP_n^T \in h^\theta$ цієї системи. Розглянемо нові послідовності

$$\begin{aligned} {}_j\tilde{S}_n^T &= \frac{1}{n} {}_jS_n^T, \quad {}_j\tilde{S}_n^U = \frac{1}{n} {}_jS_n^U \in h^{m-1/2}, \\ {}_j\tilde{R}_n^T &= \frac{1}{n^2} {}_jR_n^T, \quad {}_j\tilde{R}_n^U = \frac{1}{n^2} {}_jR_n^U \in h^{m-1/2}, \\ {}_j\tilde{P}_n^T &= \frac{1}{n^3} {}_jP_n^T, \quad {}_j\tilde{P}_n^U = \frac{1}{n^3} {}_jP_n^U, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (11)$$

Тоді система (8) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+1)} {}_j\tilde{P}_{n+3}^T - \frac{3(n+1)^2}{(n+2)(n-1)} {}_j\tilde{P}_{n+1}^T + \frac{3(n-1)^2}{(n+1)(n-2)} {}_j\tilde{P}_{n-1}^T - \\ &- \frac{(n-3)^2}{(n-2)(n-1)} {}_j\tilde{P}_{n-3}^T = - \frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+1)} {}_j\tilde{R}_{n+3}^T + \frac{(n+5)(n+1)}{(n+2)(n-1)} {}_j\tilde{R}_{n+1}^T - \\ &- \frac{(n-5)(n-1)}{(n+1)(n-2)} {}_j\tilde{R}_{n-1}^T - \frac{(n-3)^2}{(n-2)(n-1)} {}_j\tilde{R}_{n-3}^T - \\ &- \frac{n+3}{n+1} {}_j\tilde{S}_{n+3}^T - \frac{n-3}{n-1} {}_j\tilde{S}_{n+1}^T + \frac{n+3}{n+1} {}_j\tilde{S}_{n-1}^T + \frac{n-3}{n-1} {}_j\tilde{S}_{n-3}^T - \\ &- {}_jT_{n+3}^T - 3 {}_jT_{n+1}^T - 3 {}_jT_{n-1}^T - {}_jT_{n-3}^T, \end{aligned} \quad (8^*)$$

$n \geq 4$, $j = 1, \dots, 4$. Завдяки (11) права частина цієї системи

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+1)} {}_j\tilde{R}_{n+3}^T + \frac{(n+5)(n+1)}{(n+2)(n-1)} {}_j\tilde{R}_{n+1}^T - \frac{(n-5)(n-1)}{(n+1)(n-2)} \\ &- {}_j\tilde{R}_{n-1}^T - \frac{(n-3)^2}{(n-2)(n-1)} {}_j\tilde{R}_{n-3}^T - \\ &- \frac{n+3}{n+1} {}_j\tilde{S}_{n+3}^T - \frac{n-3}{n-1} {}_j\tilde{S}_{n+1}^T + \frac{n+3}{n+1} {}_j\tilde{S}_{n-1}^T + \frac{n-3}{n-1} {}_j\tilde{S}_{n-3}^T - \\ &- {}_jT_{n+3}^T - 3 {}_jT_{n+1}^T - 3 {}_jT_{n-1}^T - {}_jT_{n-3}^T \in h^{m-1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Досліджувати систему (8*) будемо за допомогою такого твердження.

Лема 2 (про граничний перехід). [9]. *Нехай маємо рекурентне рівняння зі змінними (які залежать від n) коефіцієнтами*

$$u_{n+3} + \alpha_n u_{n+1} + \beta_n u_{n-1} + \gamma_n u_{n-3} = \delta_n g_n, \quad (13)$$

де $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\beta_n \rightarrow \beta$, $\gamma_n \rightarrow \gamma$, $\delta_n \rightarrow \delta$, $n \rightarrow \infty$. Поряд з рівнянням (13) розглянемо

$$u_{n+3} + \alpha u_{n+1} + \beta u_{n-1} + \gamma u_{n-3} = \delta g_n. \quad (14)$$

Якщо розв'язок рівняння (14) належить простору h^θ , то і розв'язок рівняння (13) належатиме простору h^θ .

Вперше цю лему (з повним доведенням) опублікували в [9].

Зрозуміло, що кожне рекурентне рівняння системи (8*) задовольняє умови леми 2, отже, розглянемо відповідну до (8*) систему граничних рекурентних рівнянь

$$\begin{aligned} & {}_j\tilde{P}_{n+3}^T - 3 {}_j\tilde{P}_{n+1}^T + 3 {}_j\tilde{P}_{n-1}^T - {}_j\tilde{P}_{n-3}^T = \\ & - {}_j\tilde{R}_{n+3}^T + {}_j\tilde{R}_{n+1}^T + {}_j\tilde{R}_{n-1}^T - {}_j\tilde{R}_{n-3}^T - \\ & - {}_j\tilde{S}_{n+3}^T - {}_j\tilde{S}_{n+1}^T + {}_j\tilde{S}_{n-1}^T + {}_j\tilde{S}_{n-3}^T - \\ & - {}_j\tilde{T}_{n+3}^T - 3 {}_j\tilde{T}_{n+1}^T - 3 {}_j\tilde{T}_{n-1}^T - {}_j\tilde{T}_{n-3}^T \end{aligned} \quad (15)$$

або

$${}_j\tilde{P}_{n+3}^T - 3 {}_j\tilde{P}_{n+1}^T + 3 {}_j\tilde{P}_{n-1}^T - {}_j\tilde{P}_{n-3}^T = f_n \in h^{m-1/2},$$

і дослідимо регулярність розв'язку системи (15). Домножимо (15) на $\cos n\tau$ і підсумуємо за $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \sin^2 \tau \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}_n^T \sin n\tau \sin \tau &= -\sin^2 \tau \cos \tau \tilde{R}^T + \\ &+ \sin \tau \cos^2 \tau \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{S}_n^T \sin n\tau + \cos^3 \tau T^T, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\tilde{R}^T = \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{R}_n^T \cos n\tau$, $T^T = \sum_{n=0}^{\infty} {}_jT_n^T \cos n\tau$. З твердження 1 та формул (11) отримаємо, $T^T, \tilde{R}^T \in H^{m-1/2}(\partial K)$, $m \geq 4$.

Твердження 2. [8] Для гладкої функції $\varphi(x(\tau)) \in H^{m-1/2}(\partial K)$ парна частина $T^T(\tau)$ функції $T(\tau) = -L(\nu)\varphi(x(\tau))$ в точці $\tau = 0$ має нуль другого порядку.

Позначимо через $\tilde{F}^T(\tau)$ результат ділення правої частини (16) на $\sin^2 \tau$. Тоді $\tilde{F}^T(\tau) \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial K)$, отже,

$${}_j\tilde{P}_{n+1}^T - {}_j\tilde{P}_{n-1}^T = {}_j\tilde{F}_n^T, \quad (17)$$

де ${}_j\tilde{F}_n^T \in h^{m-\frac{1}{2}}$ – коефіцієнти розвинення функції $\tilde{F}^T(\tau)$ за системою $\{\cos n\tau\}_{n=0}^{\infty}$.

Домножимо тепер (17) на $\sin n\tau$ і підсумуємо за $n = 1, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}_n^T \cos n\tau = -\frac{1}{2 \sin \tau} \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{F}_n^T \sin n\tau.$$

Тобто $\tilde{P}^T(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}_n^T \cos n\tau \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial K)$ або ${}_j\tilde{P}_n^T \in h^{m-\frac{1}{2}}$. Позаяк ${}_j\tilde{P}_n^T = \frac{1}{n^3} {}_jP_n^T$, то ${}_jP_n^T \in h^{m-\frac{7}{2}}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

2.4. Асимптотика послідовності ${}_jP_n^U$, $n = 0, 1, \dots$. Визначимо тепер асимптотику послідовності ${}_jP_n^U$. Враховуючи зауваження 1,

$${}_jP_n^T = {}_iP_n^T \cos n(\varphi_j - \varphi_i) - {}_iP_n^U \sin n(\varphi_j - \varphi_i), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Отже, ${}_iP_n^U \sin n(\varphi_j - \varphi_i) \in h^{m-\frac{7}{2}}$, і за умови

$$|\sin n(\varphi_i - \varphi_j)| > C_{ij} \frac{1}{n^\ell}$$

${}_i P_n^U \in h^{m-\ell-\frac{7}{2}}$ для деякого $\ell \geq 0$. Отож, з леми 1, (див. також (10)), $P_n^T \in h_\rho^{m-\frac{7}{2}}$, $P_n^U \in h_\rho^{m-\ell-\frac{7}{2}}$, і, враховуючи твердження 1, $P(x) \in H_\rho^{m-\ell-\frac{7}{2}}(\partial K)$, для деякого $\ell \geq 0$.

2.5. Теорема регулярності $L_{(3)}$ -сліду розв'язку задачі (1), (2). З результатів попередніх підрозділів таке твердження правильне.

Теорема 2. Розглянемо крайову задачу (2) в одиничному крузі K для еліптичного рівняння (1), кути нахилу φ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, характеристик якого задовольняють умову

$$|\sin n(\varphi_i - \varphi_j)| > C_{ij} \frac{1}{n^\ell},$$

для деяких $\ell \geq 0$ та $C_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 4$. Вважатимемо, що ці задачі $\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, $\psi(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K)$, $\sigma(x) \in H_\rho^{m-5/2}(\partial K)$, $m \geq 4$, з вагою $\rho = \rho_n = e^{-n \operatorname{Im} \varphi_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, \dots$. Тоді існує функція $P(x) := L_{(3)}u$ -слід розв'язку задачі (1), (2), яка належить простору $H_\rho^{m-\ell-7/2}(\partial K)$, $m \geq 4$ та задовольняє умову

$$\int_{\partial K} \{P(x) \cdot Q(-\tilde{a}^j \cdot x) + R(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x) Q'(-\tilde{a}^j \cdot x) + \\ + S(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^2 Q''(-\tilde{a}^j \cdot x) + T(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^3 Q'''(-\tilde{a}^j \cdot x)\} ds_x = 0, \quad (18)$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$. Функції R, S, T — це L -сліди розв'язку задачі (1), (2), які визначаються граничними даними $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\sigma(x)$ за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} T(x) &= L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x), \\ S(x) &= L_{(1)}u = L(\nu)\psi(x) + \alpha_1\varphi'_s(x) + \alpha_2\varphi(x), \\ R(x) &= L_{(2)}u = -L(\nu)\sigma(x) + \beta_1\psi'_s(x) + \beta_2\psi(x) + \beta_3\varphi''_{ss}(x) + \beta_4\varphi'_s(x) + \\ &+ \beta_5\varphi(x), \\ P(x) &= L_{(3)}u = L(\nu)u''_{\nu}|_{\partial\Omega} + \delta_1\varphi'''_{sss}(x) + \delta_2\sigma(x) + \delta_3\psi''_{ss}(x) + \delta_4\psi'_s(x) + \\ &+ \delta_5\psi(x) + \delta_6\varphi''_{ss}(x) + \delta_7\varphi'_s(x) + \delta_8\varphi(x), \end{aligned} \quad (19)$$

з натуральним параметром s та гладкими за змінною x функціями α_i , $i = 1, 2$, β_j , $j = 1, \dots, 5$, δ_k , $k = 1, \dots, 8$, які залежать від коефіцієнтів рівняння (1).

Зауваження 2. У випадку, коли всі характеристики рівняння дійсні, $\varphi_j \in \mathbb{R}^1$, $\forall j = 1, 2, 3, 4$, вага $\rho = 1$ і всі простори з вагою $H_\rho^\theta(\partial K)$ перетворюються в звичайні простори Соболева $H^\theta(\partial K)$ функцій, заданих на межі ∂K одиничного круга K .

2.6. Теорема існування розв'язку задачі. Результат теореми 2 можна застосувати для розв'язності крайової задачі (1), (2) для еліптичних рівнянь четвертого порядку. Отже, враховуючи теореми 1 та 2, отримуємо теорему.

Теорема 3. Нехай дані задачі з умови (2) такі, що

$$\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K), \quad \psi(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K), \quad \sigma(x) \in H_\rho^{m-5/2}(\partial K), \quad m \geq 4,$$

з вагою $\rho = \rho_n = e^{-n \operatorname{Im} \varphi_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, \dots$, а кути φ_j нахилу характеристик рівняння (1) задовольняють умову

$$|\sin n(\varphi_i - \varphi_j)| > C_{ij} \frac{1}{n^\ell},$$

для деяких $\ell \geq 0$ та $C_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 4$. Тоді в просторі Соболева $H^{m-\ell-7/2}(K)$, $m \geq 4$, існує розв'язок $u(x)$ задачі (1), (2) такий, що $u'''|_{\partial K} \in H^{m-\ell-7/2}(\partial K)$, $m \geq 4$.

Приклад 1. Розроблені в попередніх підрозділах методи проілюструємо на прикладі знаходження L -слідів розв'язку задачі Діріхле в крузі для еліптичних рівнянь другого порядку з подальшим дослідженням їхньої регулярності.

В одиничному крузі K розглянемо задачу Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (20)$$

$$u|_{\partial K} = \varphi(x). \quad (21)$$

В [5] було доведено такий результат.

Твердження 3. [5] Нехай існує функція $P(x) \in H^{m-3/2}(\partial K)$, яка однозначно визначається за допомогою функції $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K)$, і задовольняє такі умови:

$$\int_{\partial K} \{P(x) \cdot Q(-\tilde{a}^j \cdot x) + R(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x) Q'(-\tilde{a}^j \cdot x)\} ds_x = 0, \quad (22)$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$.

Тоді в просторі Соболева $H^m(K)$, $m \geq 2$, існує єдиний розв'язок задачі Діріхле (20), (21), граничні дані якого пов'язані з функцією $R(x) := L_{(0)}u(x)$ за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} R(x) &= L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K), \\ P(x) &= L_{(1)}u = L(\nu)u'_\nu|_{\partial K} + [(\nu_1^2 - \nu_2^2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + 2\nu_1\nu_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]\varphi'_s + \\ &\quad + [(\nu_1^2 - \nu_2^2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\nu_1\nu_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\varphi(x). \end{aligned} \quad (23)$$

Тут s – натуральний параметр.

Розв'яжемо співвідношення (22) стосовно невідомої функції $P(x)$. Вважатимемо, що в (21) $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K)$, $m \geq 2$, отже, $R(x) = L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K)$. Після підстановки в (22) $Q(z) = \frac{1}{2(n+1)}T_{n+1}(z) - \frac{1}{2(n-1)}T_{n-1}(z)$ та

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}_j P_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) + {}_j P_n^U \sin n(\tau + \varphi_j) \}, \\ R(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ {}_j R_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) + {}_j R_n^U \sin n(\tau + \varphi_j) \}, \end{aligned}$$

отримаємо таку рекурентну систему:

$$\frac{1}{2(n+1)} {}_j P_{n+1}^T - \frac{1}{2(n-1)} {}_j P_{n-1}^T = {}_j R_n^T. \quad (24)$$

Прийmemo ${}_j\tilde{P}_n^T := \frac{1}{2n}{}_jP_n^T$. Тоді (24) набуде вигляду

$${}_j\tilde{P}_{n+1}^T - {}_j\tilde{P}_{n-1}^T = {}_jR_n^T. \quad (25)$$

Домножимо (25) на $\sin n\tau$ і підсумуємо за $n = 1, \dots$

$$\sin \tau \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}_n^T \cos n\tau = - \sum_{n=0}^{\infty} {}_jR_n^T \sin n\tau.$$

Тобто $\tilde{P}^T(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}_n^T \cos n\tau \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial K)$ або ${}_j\tilde{P}_n^T \in h^{m-\frac{1}{2}}$. Позаяк ${}_j\tilde{P}_n^T = \frac{1}{2n}{}_jP_n^T$, то ${}_jP_n^T \in h^{m-\frac{3}{2}}$, $j = 1, 2$.

Визначимо тепер асимптотику послідовності ${}_jP_n^U$. Враховуючи зауваження 1,

$${}_jP_n^T = {}_iP_n^T \cos n(\varphi_j - \varphi_i) - {}_iP_n^U \sin n(\varphi_j - \varphi_i), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Отже, ${}_iP_n^U \sin n(\varphi_j - \varphi_i) \in h^{m-\frac{3}{2}}$, і за умови

$$|\sin n(\varphi_1 - \varphi_2)| > C \frac{1}{n^\ell}.$$

${}_iP_n^U \in h^{m-\ell-\frac{3}{2}}$ для деякого $\ell \geq 0$. Отож, з леми 1, $P_n^T \in h_\rho^{m-\frac{3}{2}}$, $P_n^U \in h_\rho^{m-\ell-\frac{3}{2}}$, і, враховуючи твердження 1, $P(x) := L_{(1)}u(x) \in H_\rho^{m-\ell-\frac{3}{2}}(\partial K)$, для деякого $\ell \geq 0$.

Отже, доведено існування та досліджено регулярність $L_{(1)}$ -сліду розв'язку задачі Діріхле (20), (21), який задовольняє умову (22).

Теорема 4. Нехай кути нахилу φ_j , $j = 1, 2$, характеристик рівняння (20) задовольняють умову

$$|\sin n(\varphi_1 - \varphi_2)| > C \frac{1}{n^\ell},$$

для деяких $\ell \geq 0$ та $C_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 4$. Вважатимемо, що $\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$. Тоді існує функція $P(x) := L_{(1)}u(x)$ -слід розв'язку $u(x)$ задачі Діріхле (20), (21), яка належить простору $H_\rho^{m-\ell-3/2}(\partial K)$, $m \geq 2$ та задовольняє умову (22).

Зауваження 3. Враховуючи твердження 3, результат теореми 4 можна застосувати для доведення існування розв'язку задачі Діріхле (20), (21) в соболевських просторах.

3. Висновки. У випадку одиничного круга K доведено теорему регулярності $L_{(3)}$ -сліду та теорему існування розв'язку задачі з трьома крайовими умовами для еліптичних рівнянь четвертого порядку в просторі Соболева $H^\theta(K)$, з деяким показником регулярності θ , який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння, тобто від його коефіцієнтів. Наведено приклад, який ілюструє, що розроблені методи допомагають досліджувати також інші крайові задачі, зокрема, задачу Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабаян А.О. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка / А.О. Бабаян // Неклассические уравнения мат. физики. – 2007. – С. 56-68.

2. Бабян А.О. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге / А.О. Бабян // Известия НАН Армении. – 2003. – Т. 38, №6. – С. 39-48.
3. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи – М.: Наука, 1974.
4. Берс Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джонс, М. Шефтер – М.: Мир, 1966.
5. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / В.П. Бурский – К.: Наукова думка, 2002.
6. Бурский В.П. Задача Дирихле для неправильно эллиптического уравнения / В.П. Бурский, Е.В. Кириченко // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, №2. – С. 156-164.
7. Буряченко К.О. Розв'язність неоднорідних крайових задач для диференціальних рівнянь четвертого порядку / К.О. Буряченко // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, №8. – С. 1011-1020.
8. Буряченко К.О. Існування та регулярність розв'язку однієї крайової задачі для диференціальних рівнянь третього порядку / К.О. Буряченко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №3. – С. 53-62.
9. Буряченко Е.А. Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле в круге для линейных эллиптических уравнений четвертого порядка / Е.А. Буряченко // Труды ИПММ НАНУ. – 2000. – Т. 5. – С. 20-29.

*Стаття: надійшла до редакції 07.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

EXISTENCE OF SOLUTION AND REGULARITY THEOREMS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH THREE CONDITIONS ON THE BOUNDARY FOR ELLIPTIC FOURTH ORDER EQUATIONS IN A DISK

Kateryna BURYACHENKO

*Donetsk National University,
Universytetska Str., 24, Donetsk, 83001
e-mail: katarzyna_@ukr.net*

In the present paper, for the case of unit disk K , it is proved the regularity theorem of $L_{(3)}$ -trace and existence theorem for the solution of the problem with three conditions on the boundary in Sobolev space $H^\theta(K)$, where θ depends on behavior of complex characteristics or from coefficients of the equation.

Key words: elliptic fourth order differential equations, boundary value problems, L -traces, recurrence equations, asymptotic of Fourier coefficients.

**ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И РЕГУЛЯРНОСТИ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ТРЕМЯ ГРАНИЧНЫМИ
УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В КРУГЕ**

Катерина БУРЯЧЕНКО

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк, 83001
e-mail: katarzyna_@ukr.net*

В случае единичного круга K доказано теорему регулярности $L_{(3)}$ -следа и теорему существования решения задачи с тремя граничными условиями для эллиптических уравнений четвертого порядка в пространстве Соболева $H^\theta(K)$, с некоторым показателем регулярности θ , который зависит от поведения комплексных характеристик уравнения, то есть от его коэффициентов.

Ключевые слова: эллиптические уравнения четвертого порядка, краевые задачи, L -следы, рекуррентные уравнения, асимптотика коэффициентов ряда Фурье.

УДК 517.574

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗРОСТАННЯ δ -СУБГАРМОНІЙНИХ У СИМЕТРИЧНИХ КУЛЬОВИХ ПРОШАРКАХ ФУНКЦІЙ

Оксана ГНАТЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com

Введено характеристику Неванлінни $T_0(r, u)$ для δ -субгармонійних у симетричних кульових прошарках $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$ функцій. Досліджено деякі її властивості та доведено аналог першої основної теореми Неванлінни для δ -субгармонійних функцій в BL_R . Крім того, введено і вивчено поняття порядку зростання δ -субгармонійних в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ функцій.

Ключові слова: δ -субгармонійна функція, міра Ріса, характеристика Неванлінни, порядок зростання.

1. Вступ. Наша мета – вивчити функції вигляду $u := u_1 - u_2$, де u_1 і u_2 – субгармонійні функції в області $G \subset \mathbb{R}^m$; $\mathbb{R}^m$ – m -вимірний евклідовий простір. Функції такого вигляду називаються δ -субгармонійними. Різниця зі значеннями в $\mathbb{R}$ визначена поза підмножиною з G , на якій функції u_1 та u_2 одночасно дорівнюють $-\infty$. Відтак δ -субгармонійні функції утворюють лінійний простір.

Теорія δ -субгармонійних функцій тісно пов'язана з теорією потенціалу і комплексним аналізом. Досліджували властивості функцій такого класу Арсов М. (Arsove M.) [1], Брело М. (Brelot M.) [2], Привалов І. [3] та ін. Недавні публікації ([4] – [8] та інші) свідчать, що зацікавлення вивченням δ -субгармонійних функцій у різних галузях не зменшується.

У [9]–[10] ми вивчали субгармонійні функції в довільних кульових прошарках $BL = \{x : s < |x| < r\}$, $s < 1 < r$, і, зокрема, в симетричних стосовно одиничної сфери кульових прошарках $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$. Це сприяло вивченню δ -субгармонійних функцій в BL_R , що і стало об'єктом дослідження цієї статті, яку можна вважати доповненням до [9]–[10]. Зокрема, вводиться характеристика Неванлінни та досліджуються її властивості. Крім того, доводиться аналог Першої Основної Теореми Неванлінни для δ -субгармонійних функцій в BL_R . Вводиться і вивчається поняття порядку зростання δ -субгармонійних функцій у проколеному просторі $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

2. Характеристика Неванлінни δ -субгармонійних в BL_R функцій та її властивості. Нехай функція $u(x)$ – δ -субгармонійна в BL_R , і μ_u – міра Ріса

(довільного знака), визначена так:

$$\mu_u = \frac{1}{(m-2)\sigma_m} \Delta u,$$

де σ_m – площа поверхні одиничної сфери; $m \geq 3$, Δ – оператор Лапласа в сенсі узагальнених функцій.

Нехай $\mu_u = \mu_u^+ - \mu_u^-$ – розвинення Жордана міри μ_u [3], де μ_u^+ та μ_u^- – невід’ємні борелеві міри. Зображення $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ називають канонічним, якщо $\mu_{u_1} = \mu_u^+$, $\mu_{u_2} = \mu_u^-$. Таке зображення неоднозначне, функції u_1 та u_2 визначаються з точністю до гармонійного доданка.

Позначимо

$$n_0^+(t, u) = \mu_u^+ = \mu^+ \left\{ x : \frac{1}{t} < |x| \leq t \right\}, \quad 1 < t < R,$$

$$n_0^-(t, u) = \mu_u^- = \mu^- \left\{ x : \frac{1}{t} < |x| \leq t \right\}, \quad 1 < t < R,$$

$$n_0^+(1, u) = n^+(1 + 0, u), \quad n_0^-(1, u) = n^-(1 + 0, u)$$

i

$$N_0^+(r, u) := (m-2) \int_1^r \frac{n_0^+(t, u)}{t^{m-1}} dt - \frac{m-2}{r^{m-2}} \int_{\frac{1}{r}}^1 \frac{n_0^+(t, u)}{t^{m-1}} dt, \quad 1 \leq r < R,$$

$$N_0^-(r, u) := (m-2) \int_1^r \frac{n_0^-(t, u)}{t^{m-1}} dt - \frac{m-2}{r^{m-2}} \int_{\frac{1}{r}}^1 \frac{n_0^-(t, u)}{t^{m-1}} dt, \quad 1 \leq r < R,$$

$$N_0(r, u) := N_0^+(r, u) - N_0^-(r, u).$$

Теорема А (наслідок 1 [10]). Нехай $u(x)$ - субгармонійна функція в $\overline{BL_r}$, $r > 1$, u не дорівнює $-\infty$ тотожно і μ – міра Ріса функції u . Тоді

$$\begin{aligned} N_0(r, u) = N_0^+(r, u) &= \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0, r)} u(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} u(x) d\sigma(x) - \\ &- (1 + r^{2-m}) \frac{1}{c_m} \int_{S(0, 1)} u(x) d\sigma(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Формула (1) є аналогом формули Йенсена для субгармонійних функцій у симетричних кульових прошарках $\overline{BL_r}$. Зокрема, якщо функція h гармонійна в $\overline{BL_r}$, то $\mu_h = \mu_h^+ = 0$ і співвідношення (1) набуває вигляду

$$0 = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0, r)} h(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} h(x) d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m}\int_{S(0,1)}h(x)d\sigma(x).$$

Нехай $u - \delta$ – субгармонійна функція в BL_R , $u = u_1 - u_2$ – деяке її канонічне зображення. Застосовуючи теорему А до функцій u_1 та u_2 і враховуючи останнє співвідношення, одержимо

$$\begin{aligned} N_0^+(r, u) &= \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0,r)} u_1(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} u_1(x) d\sigma(x) - \\ &\quad -(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m} \int_{S(0,1)} u_1(x) d\sigma(x), \quad 1 \leq r < R, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N_0^-(r, u) &= \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0,r)} u_2(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} u_2(x) d\sigma(x) - \\ &\quad -(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m} \int_{S(0,1)} u_2(x) d\sigma(x), \quad 1 \leq r < R. \end{aligned} \quad (3)$$

Віднімаючи почленно (2) і (3), отримаємо

$$\begin{aligned} N_0(r, u) &= \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0,r)} u(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} u(x) d\sigma(x) - \\ &\quad -(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m} \int_{S(0,1)} u(x) d\sigma(x), \quad 1 \leq r < R, \end{aligned} \quad (4)$$

незалежно від канонічного зображення функції u . Співвідношення (4) – це аналог формули Йенсена для δ -субгармонійних в BL_R функцій.

Означення 1. Нехай $u - \delta$ -субгармонійна в BL_R функція, відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$, $m \geq 3$. Характеристикою Неванлінни функції u називається функція

$$\begin{aligned} T_0(r, u) &:= N_0^-(r, u) + \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0,r)} u^+(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} u^+(x) d\sigma(x) - \\ &\quad -(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m} \int_{S(0,1)} u^+(x) d\sigma(x), \quad 1 \leq r < R, \end{aligned} \quad (5)$$

де $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Зауважимо таке: коли функція u субгармонійна в $\overline{BL_r}$, то $N_0^-(r, u) = 0$ і $T_0(r, u)$ збігається з введеною в [10] характеристикою Неванлінни. Попри неоднозначність канонічного зображення δ -субгармонійної функції u одержимо таке твердження.

Теорема 1. Якщо $u = u_1 - u_2$ – канонічне зображення функції u , то

$$T_0(r, u) := \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0, r)} \max(u_1, u_2)(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} \max(u_1, u_2)(x) d\sigma(x) - \\ - (1 + r^{2-m}) \frac{1}{c_m} \int_{S(0, 1)} \max(u_1, u_2)(x) d\sigma(x). \quad (6)$$

Доведення. Застосовуючи Теорему А до функції u_2 , отримаємо

$$N_0^-(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0, r)} u_2(x) d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int_{S(0, \frac{1}{r})} u_2(x) d\sigma(x) - \\ - (1 + r^{2-m}) \frac{1}{c_m} \int_{S(0, 1)} u_2(x) d\sigma(x). \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (5) і враховуючи, що $u^+ + u_2 = \max(u_1, u_2)$, одержимо (6). $\square$

Властивості характеристики Неванлінни $T_0(r, u)$, $1 \leq r < R$, подано в такій теоремі.

Теорема 2. Нехай $u(x)$ - δ -субгармонійна функція в BL_R , відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$. Тоді правильні такі властивості:

- 1) функція $T_0(r, u)$ є невід'ємною, неспадною і опуклою стосовно r^{2-m} на $[1, R)$, $T_0(1, u) = 0$;
- 2) $T_0(r, u) = T_0(r, -u)$, $1 \leq r < R$;
- 3) якщо функція v є δ -субгармонійною в BL_R , відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$, то

$$T_0(r, \alpha u + \beta v) \leq |\alpha| T_0(r, u) + |\beta| T_0(r, v) + O(1), \quad r \rightarrow R,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що властивість 2 є аналогом Першої Основної Теорему для δ -субгармонійних функцій в BL_R ;

Доведення. Оскільки $u^*(x) = \max(u_1, u_2)(x)$ є субгармонійною функцією, то з Теорему 1 і (1) випливає, що

$$T_0(r, u) := N_0(r, u^*).$$

Функція $N_0(r, u^*)$ є невід'ємною та неспадною, що випливає з її означення. Крім того, її похідна справа

$$\frac{dN_0(r, u^*)}{dr^{2-m}} = -(n_1(r) - n_1(\frac{1}{r})) - (m-2) \int_{1/r}^1 \frac{n_1(t) - n_1(\frac{1}{t})}{t^{m-1}} dt,$$

де $n_1(t)$ – функція розподілу міри Ріса функції u^* не спадає, коли r^{2-m} зростає, тому вона опукла щодо r^{2-m} . Отож, такою є і характеристика $T_0(r, u)$.

Рівність $T_0(1, u) = 0$ є негайним наслідком співвідношення (5). Властивість 1 доведена.

Властивість 2 є безпосереднім наслідком Теорема 1.

Доведемо, що

$$T_0(r, |\alpha|u) = |\alpha|T_0(r, u). \quad (8)$$

Справді, якщо $\alpha \geq 0$, то зі співвідношення (6) одержимо $T_0(r, \alpha u) = \alpha T_0(r, u)$. Якщо ж $\alpha < 0$, то з властивості 2 отримаємо (8).

Доведемо, що

$$T_0(r, u+v) \leq T_0(r, u) + T_0(r, v) + O(1). \quad (9)$$

Оскільки $(u+v)^+ \leq u^+ + v^+$ і $N_0^-(r, u+v) \leq N_0^-(r, u) + N_0^-(r, v)$, то зі співвідношення (5) отримаємо (9). З (8) та (9) одержимо властивість 3. $\square$

3. Порядок зростання δ -субгармонійних в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ функцій.

Означення 2. Нехай $v(x)$ – δ -субгармонійна в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ функція, відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$. Порядком зростання функції v називається порядок зростання її Неванліннової характеристики, тобто

$$\rho[v] := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T_0(r, v)}{\log r}.$$

Теорема 3. Нехай v_1, v_2 – δ -субгармонійні функції в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, відмінні від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$. Тоді при $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$ виконується

$$\rho[\alpha v_1 + \beta v_2] \leq \max(\rho[v_1], \rho[v_2]). \quad (10)$$

Доведення. Приймемо $v := v_1 + v_2$. З властивості 3 Теорема 2 одержимо

$$T_0(r, v) \leq T_0(r, v_1) + T_0(r, v_2) + O(1) \leq (|\alpha| + |\beta|) \max(T_0(r, v_1), T_0(r, v_2)) + O(1), \quad r \rightarrow R.$$

З означення порядку зростання отримуємо (10). $\square$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Arsove M.G. Functions representable as differences of subharmonic / M.G. Arsove // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 327-365.
2. Brelot M. Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point / M. Brelot // Actualites Scientifiques et Industrielles. – 1934. – Vol. 139. – P. 5-55.
3. Привалов И.И. Субгармонические функции / И.И. Привалов – М.-Л.: Гостехиздат, 1937.
4. Мамютин К.Г. Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости / К.Г. Мамютин // Мат. сборн. – 2001. – Т. 192, №6. – С. 51-70.
5. Protsyk Yu.S. Growth majorants and canonical representations of δ -subharmonic functions / Yu.S. Protsyk // Mat. Studii. – 2003. – Vol. 20, №1. – P. 40-52 (in Ukrainian).
6. Malyutin K.G. Fourier series and delta-subharmonic functions of zero-type in a halfplane / K.G. Malyutin // Mat. Studii. – 2008 – Vol. 30, №2. – P. 132-138.
7. Malyutin K.G. Inverse formulae for Fourier coefficients of delta-subharmonic functions in a half-plane / K.G. Malyutin // Mat. Studii. – 2009. – Vol. 32, №2. – P. 132-138.
8. Бродяк О. Узагальнена теорема Вейерштрасса для δ -субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій / О. Бродяк, Я. Васильків // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 27-42.
9. Gnatiuk O.P. Subharmonic functions and electric fields in ball layers. I / O.P. Gnatiuk, A.A. Kondratyuk // Mat. Studii. – 2010. – Vol. 34, №2. – P. 180-192.

10. Gnatiuk O.P. Subharmonic functions and electric fields in ball layers. II / O.P. Gnatiuk, A.A. Kondratyuk // Mat. Studii. – 2011. – Vol. 35, №1. – P. 50-59.

Стаття: надійшла до редакції 30.12.2011
прийнята до друку 12.12.2012

GROWTH CHARACTERISTICS OF FUNCTIONS δ -SUBHARMONIC IN SYMMETRIC BALL LAYERS

Oksana GNATIUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com

Nevanlinna characteristic $T_0(r, u)$ for δ -subharmonic in symmetric ball layers $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$ functions is introduced. Some properties of $T_0(r, u)$ are investigated and a counterpart of the first fundamental theorem for δ -subharmonic in BL_R functions is proved. Furthermore, a growth order of δ -subharmonic functions in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ is defined and investigated.

Key words: δ -subharmonic function, Riesz measure, Nevanlinna characteristics, growth order.

ХАРАКТЕРИСТИКИ РОСТА δ -СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В СИММЕТРИЧЕСКИХ ШАРОВЫХ ПРОСЛОЙКАХ ФУНКЦИЙ

Оксана Гнатюк

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com

Введена характеристика Неванлинны $T_0(r, u)$ для δ -субгармонических в симметрических шаровых прослойках $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$ функций. Исследованы некоторые её свойства и доказан аналог первой основной теоремы для δ -субгармонических в BL_R функций. Кроме того, введено и изучено понятие порядка роста δ -субгармонических в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ функций.

Ключевые слова: δ -субгармоническая функция, мера Рисса, характеристика Неванлинны, порядок роста.

УДК 515.1, 512.46

АЛЬТЕРНАТИВА ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНИХ МОНОЇДІВ ЗІ СКОРОЧЕННЯМИ

Ігор ГУРАН, Марія КІСІЛЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: topology@franko.lviv.ua

Доведено, що локально компактний монотетичний моноїд зі скороченнями і відкритими зсувами або компактний або дискретний.

Ключові слова: монотетична півгрупа, локально компактна півгрупа, відкриті зсуви.

1. Вступ. Під *топологічною півгрупою* ми розумітимемо гаусдорфовий топологічний простір, на якому задана асоціативна сукупно неперервна операція. Якщо топологічна півгрупа містить двосторонню одиницю, то вона називається *топологічним моноїдом*. Кажуть, що топологічна півгрупа S монотетична, якщо вона містить всюди щільну циклічну підпівгрупу, тобто $S = \{a^n | n \in \omega\}$ для деякого $a \in S$, який називається генератором півгрупи S . Відомо, що компактні монотетичні топологічні групи – це компактні абелеві групи, групи характерів яких є підгрупами кола в дискретній топології. Для локально компактних монотетичних груп виконується альтернатива Понтрягіна [1]: локально компактна монотетична група або дискретна або компактна. Компактні монотетичні півгрупи описав Е. Хьюїт в [2]. Стосовно локально компактних монотетичних моноїдів залишається відкритим питання Р. Коха [3]: чи виконується альтернатива Понтрягіна для локально компактних монотетичних моноїдів? Є. Зеленюк в [4] побудував приклад зліченної локально компактної монотетичної півгрупи зі скороченням, яка не дискретна і не компактна. Легко бачити, що монотетичний локально компактний злічений моноїд – дискретний, тому приєднати одиницю до півгрупи Зеленюка неможливо.

2. Надалі моноїд S задовольняє умову: для довільних $a, x, y \in S$ з того, що $ax = ay$ випливає $x = y$ і з $xa = ya$ випливає $x = y$. Такі моноїди називаються *моноїдами зі скороченням*. Відомо, що комутативна півгрупа зі скороченнями S може бути вкладеною в групу дробів півгрупи S [5]. Нехай S така півгрупа, то множина $S \times S$ є знову такою півгрупою з покоординатним множенням, прийнятим як півгрупова операція. В $S \times S$ означимо відношення $\mathcal{R}$, прийнявши $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$, де $(a, b) \in S \times S$ і $(c, d) \in S \times S$ тоді і тільки тоді, коли $ad = bc$. Легко перевірити,

що $\mathcal{R}$ є конгруенцією на $S \times S$. Нехай G – множина класів еквівалентності за відношенням $\mathcal{R}$. Тоді G є групою, яка називається групою дробів, породженою S . Нехай $\pi : S \times S \rightarrow G$ – природне відображення, яке кожному елементу $(a, b) \in S \times S$ ставить у відповідність клас еквівалентності в G , що містить елемент (a, b) . Очевидно, що π є гомоморфізмом півгрупи $S \times S$ в групу G . Для довільного елемента $b \in S$ визначимо відображення $P : S \rightarrow G$, $P(x) = \pi(xb, b)$. Легко бачити, що P коректно визначений гомоморфізм S в G і не залежить від вибору елемента b . Відображення P є вкладенням S в групу, породжену півгрупою S .

Якщо S – топологічна півгрупа, то на $S \times S$ визначена топологія декартового добутку, стосовно якої $S \times S$ є топологічною півгрупою. На групі G можна задати фактор-топологію за відображенням π : множина $\mathcal{O}$ є відкритою в G тоді і тільки тоді, коли $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ є відкритою множиною в $S \times S$.

Означення 1. Півгрупа S вкладається в G , якщо G є гаусдорфовою топологічною групою і P є гомеоморфізмом на $P(S)$ у топології індукованій з S .

Теорема 1. Якщо S – комутативна півгрупа зі скороченням і I – ідеал в S , то група H , породжена півгрупою I і група G , породжена півгрупою S топологічно ізоморфні.

Доведення. Розглянемо діаграму

$$G_{\pi_1} S \times S_{\pi_2} I \times I_{\pi_2} H,$$

де π_1 і π_2 – природні відображення і $f(x, y) = (xt, yt)$, де t – фіксований елемент в I . Нехай $f^* : G \rightarrow H$ – відображення, означене так: $f^*(g) = \pi_2(f(\pi_1^{-1}(g)))$. Легко бачити, що f^* є алгебричним ізоморфізмом G на H .

Доведемо, що f^* – неперервний ізоморфізм. Нехай $g \in G$ і нехай U – відкрита множина в H , що містить $f^*(g)$. Оскільки π_2 – неперервне відображення за означенням, $\pi_2^{-1}(U)$ – відкрита множина в $I \times I$. Відображення f є неперервним, оскільки множення неперервне, тому $f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$ є відкрита в $S \times S$. Нехай $(x, y) \in S \times S$ така точка, що для деякої точки $(a, b) \in f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$, $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$, тобто $xb = ya$, тому $xtbt = ytbt$ і $(x, y) \in f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$, для $f(x, y)\mathcal{R}(a, b)$. Тоді $\pi_1^{-1}(\pi_1 f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))) \subset \subset f^{-1}(\pi_2^{-1}(U))$ – відкрита множина в $S \times S$, $f^*(\pi_1(f^{-1}(\pi_2^{-1}(U)))) \subset U$ і $g \in \pi_1(f^{-1}(\pi_2^{-1}(U)))$ – відкрита множина.

Для доведення неперервності $(f^*)^{-1}$ розглянемо $g = (f^*)^{-1}(h)$, де $g \in G$ і $h \in H$. Нехай V – відкрита множина, що містить g . Множина $\pi_1^{-1}(V)$ є відкритою в $S \times S$. Нехай $W = \{ \text{множина всіх точок в } I \times I, \text{ для яких існує точка } \mathcal{R}\text{-еквівалентна в } f(\pi_1^{-1}(V)) \}$. Оскільки $W = (I \times I) \cap \pi_1^{-1}(V)$, то W – відкрита множина в $I \times I$. Отож, відображення $(f^*)^{-1}$ є неперервним: $\pi_2^{-1}(\pi_2(W)) = W$, $(f^*)^{-1}(\pi_2(W)) \subset V$ і $h \in (\pi_2(W))$. $\square$

Приклад 1. Нехай $S = (0, 1]$ – інтервал числової прямої у звичайній топології. S є півгрупою зі скороченням стосовно операції множення дійсних чисел. Очевидно $G = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ – топологічна група породжена S . Для довільного $t \in (0, 1)$ позначимо ідеал в S через $I_t = (0, t)$. Тоді кожен ідеал I_t породжує групу G .

Означення 2 ([6]). *Півгрупа S має властивість $\mathcal{F}$, якщо для довільних $x, y \in S$ і довільного V – околу точки x , то існує окіл W точки y такий, що $xy \in \cap\{Vy' | y' \in W\}$ і $yx \in \cap\{y'V | y' \in W\}$*

Приклад 2. Нехай S – відкрита підпівгрупа топологічної групи G . Якщо $x, y \in S$ і $x \in V$, де V – відкрита в S , то V – також відкрита множина в G і $x = y^{-1}yx$. Існують відкриті підмножини U і W в S такі, що $yx \in W$ і $y \in U$, $U^{-1}W \subset V$. Тому $yx \in y'V$ для всіх $y' \in U$, тому S має властивість $\mathcal{F}$. Отож, будь-яка відкрита підпівгрупа топологічної групи має властивість $\mathcal{F}$.

Теорема 2. *Нехай S – комутативна півгрупа зі скороченням. Якщо S має властивість $\mathcal{F}$, тоді для довільної відкритої множини V в S і довільного елемента $y \in S$, множини Vy та yV є відкритими. Півгрупу S , що має цю властивість, називатимемо півгрупою з відкритими зсувами.*

Доведення. Нехай V – відкрита підмножина в S і $y \in S$. Для $x \in Vy$, $x = ay$ для деякого $a \in V$; тому існує відкрита множина U , що містить y така, що $ay \in Vy'$ для всіх $y' \in U$. Оскільки U – відкрита множина, що містить y , то існує відкрита множина W , що містить x така, що $xy \in x'U$ для всіх $x' \in W$. Якщо $\{x_d\}$ – напрямленість в S така, що $x_d \rightarrow x$, то існує d_0 таке, що з $d > d_0$ випливає $x_d \in W$. Тоді для $d > d_0$ існує $y_d \in U$, таке, що $xy = x_dy_d$. Отже, $x \in Vy_d$, для $d > d_0$, тому існує елемент $a_d \in V$ такий, що $x = a_dy_d$. Отож, $x_dy_d = xy = a_dy_dy$ і за законом скорочення $x_d = a_dy \in Vy$ для всіх $d > d_0$. Звідси випливає, що кожна напрямленість, що збігається до точки з Vy починаючи з d_0 міститься в Vy . Отже, Vy – відкрита множина. $\square$

Теорема 3. *Нехай S – топологічний комутативний моноїд зі скороченням, що має властивість $\mathcal{F}$, тоді максимальна група $H(e)$, що містить ідемпотент e , відкрито-замкнена топологічна група в S .*

Доведення. Оскільки $e^2 = e$, то для довільної відкритої підмножини V , що містить e за властивістю $\mathcal{F}$ існує відкрита множина W , що містить e така, що $e \in Vw$ для всіх $w \in W$. Далі з $w \in W$ випливає існування $x \in V$ такого, що $xw = e$. Тому кожен елемент з W має обернений стосовно e і $W \subset H(e)$. Інверсія неперервна в e , позаяк W є відкритою множиною, що містить e й існує окіл U ідемпотента e такий, що $U^{-1} \subset W$ за властивістю $\mathcal{F}$. Тому максимальна група $H(e)$ є топологічною групою і містить відкритую підмножину W з S , тому $H(e)$ – відкрита в S .

Нехай тепер $x \in \overline{H(e)}$. Тоді існує напрямленість $\{x_\alpha\} \subset H(e)$ така, що $\{x_\alpha\} \rightarrow x$. Оскільки $x_\alpha e = x_\alpha$ для всіх α і $x_\alpha e \rightarrow xe$, то $x = xe$. Оскільки $H(e)$ – відкритий окіл точки e , то за властивістю $\mathcal{F}$ існує окіл $V(x)$ такий, що $x \in vH(e)$, для всіх $v \in V(x)$. Однак $V(x) \cap H(e) \neq \emptyset$. Нехай $y \in V(x) \cap H(e)$, тоді $x \in yH(e) = H(e)$ і $H(e) = \overline{H(e)}$. Отже, $H(e)$ – замкнена множина. $\square$

Наслідок 1. *Нехай комутативний топологічний моноїд S зі скороченням і з одиницею 1 задовольняє умову $\mathcal{F}$. Тоді максимальна група $H(1)$, що містить 1 – відкрито-замкнена.*

Нехай S – комутативний моноїд зі скороченнями й одиницею 1. Легко бачити, що кожен такий моноїд є прямою сумою максимальної групи $H(1)$ і, можливо, максимального не порожнього ідеалу $T = S \setminus H(1)$.

Надалі нам потрібний факт з теорії комутативних топологічних напівгруп.

Теорема 4 (Росман Н. [6]). *Нехай S – комутативна топологічна півгрупа зі скороченнями. Необхідною і достатньою умовою того, що S вкладається як відкрита підмножина в топологічну групу G є те, що S має властивість $\mathcal{F}$.*

А також такі теореми.

Теорема 5 (Церпес Н.А. і Мухерджеа А. [7]). *Реверсивна справа локально компактна топологічна півгрупа S зі скороченням вкладається у топологічну групу як відкрита піднапівгрупа тоді і тільки тоді, коли S є з відкритими зсувами.*

Теорема 6 (Елліс Р. [8]). *Нехай G – група, на якій задано локально компактну півгрупову топологію. Тоді G – топологічна група.*

Теорема 7. *Нехай S – зв'язний локально компактний комутативний моноїд з відкритими зсувами та скороченнями. Тоді S – топологічна група.*

Доведення. За теоремою 5, моноїд S вкладається як відкрита підпівгрупа в деяку топологічну групу G . З прикладу 2 випливає, що тоді S має властивість $\mathcal{F}$. Тоді за наслідком 1 отримуємо, що $H(1)$ – максимальна підгрупа в S є відкрито-замкненою підгрупою в G . Із зв'язності S випливає, що $H(1) = S$ і S є локально компактним за умовою теореми. Тому S – топологічна група за теоремою Еліса. $\square$

Теорема 8. *Нехай S – монотетичний топологічний локально компактний моноїд з відкритими зсувами та скороченнями. Тоді S або дискретний моноїд, або S – компактна топологічна група.*

Доведення. Розглянемо розклад S на максимальну групу $H(1)$ і максимальний ідеал T . Припустимо, що $T \neq \emptyset$. За теоремою 5, моноїд S вкладається у топологічну групу. Тоді, з прикладу 2 випливає, що S має властивість $\mathcal{F}$. Тоді, за наслідком 1, $H(1)$ – відкрита підгрупа в S .

Нехай a – генератор моноїда S . Якщо $a \in T$, то $\overline{\{a^n | n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{T} = T = S \setminus H(1)$. Якщо ж $a \in H(1)$, то з замкненості $H(1)$ випливає, що $\overline{\{a^n | n \in \mathbb{N}\}} \subset H(1)$, тоді $T = \emptyset$. Кожен з цих випадків суперечить припущенню, що $T \neq \emptyset$. Отже, $S = H(1)$, а з локальної компактності випливає, що S – локально компактна топологічна група. Залишається застосувати альтернативу Понтрягіна. $\square$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Понтрягин Л.С. Неперывные группы / Л.С. Понтрягин – М.: Наука, 1973.
2. Hewitt E. Compact monothetic semigroups / E. Hewitt // Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23. – P. 447-457.
3. Koch R.J. On monothetic semigroup / R.J. Koch // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 397-401.
4. Зелениук Е.Г. К альтернативе Понтрягина для топологических полугрупп / Е.Г. Зелениук // Мат. заметки. – 1988. – Vol. 44, №3. – С. 402-403.
5. Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. / А. Клиффорд, Г. Престон – М.: Мир, 1973.
6. Rothman N.J. Embedding of topological semigroups / N.J. Rothman // Math. Annalen. – 1960. – Vol. 139. – P. 197-203.

7. *Mukherjea A.* A note on the embedding of topological semigroups / *A. Mukherjea, N.A. Tserpes* // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, №1. – P. 71-75.
8. *Ellis R.* Continuity and homeomorphism groups / *R. Ellis* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 969-973.

*Стаття: надійшла до редакції 27.12.2011
доопрацьована 22.03.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

THE PONTRYAGINS ALTERNATIVE FOR LOCALLY COMPACT MONOIDS WITH CANCELLATION

Igor GURAN, Mariia KISIL

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: topology@franko.lviv.ua*

We prove that a locally compact monothetic monoid with cancellation and with open shifts is compact or discrete.

Key words: monothetic semigroup, locally compact semigroup, cancellative open shift.

АЛЬТЕРНАТИВА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ МОНОИДОВ С СОКРАЩЕНИЯМИ

Игорь ГУРАН, Мария КИСИЛЬ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: topology@franko.lviv.ua*

Доказано, что локально компактный монотетический моноид, удовлетворяющий законам сокращения с открытыми сдвигами либо компактен либо дискретен.

Ключевые слова: монотетическая полугруппа, локально компактная полугруппа, открытые сдвиги.

УДК 517.956.2

КОЛИВНІ СИСТЕМИ З ВАЖКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ МАЛОЇ ЖОРСТКОСТІ: АСИМПТОТИКА СПЕКТРА

Віталій Гут

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: v.hut@ukr.net

Вивчено модель композитного середовища, яке містить скінченну кількість важких включень малої жорсткості. Відношення коефіцієнтів жорсткості компонент є порядку $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а відношення густин маси – порядку $O(\varepsilon^{\kappa})$, де $\kappa \in \mathbb{N}$. Досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій сингулярно збуреної спектральної задачі Неймана. Гранична задача містить інтегральну крайову умову, яка описує нетривіальну взаємодію усіх включень. Побудовано та обґрунтовано повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій задачі.

Ключові слова: сингулярно збурена задача, асимптотика власних значень, сильно неоднорідне середовище, важкі включення.

1. Вступ. Ми досліджували спектральні властивості крайової задачі для еліптичного оператора другого порядку зі сингулярно збуреними коефіцієнтами. Задача моделює власні коливання системи зі скінченною кількістю гнучких і одночасно важких включень довільної форми. Такі моделі виникають у різноманітних розділах фізики та техніки, їх вивчають у рамках математичної теорії сильно неоднорідних середовищ [1]–[3].

За останні чотири десятиліття з'явилося багато праць, присвячених дослідженню різноманітних моделей, в яких фізичні характеристики середовища чи його геометрія сингулярно залежать від параметрів. Задачі зі скінченною кількістю жорстких включень розглянуто в [4, 5]. Коливні системи з концентрованими масами вивчали в [6]–[9], див. також огляд результатів в [10]. Зокрема, в [7] розглянуто випадок великої кількості тонких важких включень, за припущення, що включення виконують жорсткі переміщення. В праці [11] досліджували механічні властивості систем з масами, які концентруються в околі одновимірних многовидів. Моделі середовищ складної геометричної структури з одночасним збуренням густини маси та жорсткості вивчені в [12, 13]. Припускали, що жорсткіший матеріал має більшу густину. Деякі одновимірні моделі контрастних структур, які ми досліджуємо, вивчали в [14, 15].

У [16, 17] розглянуто модель пружної коливної системи зі скінченною кількістю жорстких, водночас і легких включень. Вивчено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій сингулярно збуреної крайової задачі для еліптичного оператора другого порядку. Основні результати праць – теореми збіжності спектрів і власних підпросторів. У [18] вивчено власні коливання композитного середовища, яке містить скінченну кількість м'яких важких включень. Для такої моделі отримали аналогічні результати про асимптотичну поведінку власних елементів. Обґрунтування асимптотичних формул опирається на рівномірну резольвентну збіжність деякої сім'ї необмежених самоспряжених операторів.

Ми будемо та обґрунтуємо повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій задачі, розглянутої в [18], у випадку власного значення граничної задачі довільної кратності. Асимптотику кратних власних значень, які при збуренні розщеплюються на прості власні значення, побудовано, зокрема, в [19, 20].

2. Формулювання задачі та допоміжні факти. Нехай Ω – обмежена гладка область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, а ω – її строго внутрішня підмножина з гладкою межею $\partial\omega$. Вважатимемо, що ω має K компонент зв'язності $\omega_1, \dots, \omega_K$. Введемо позначення $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{\omega}$. В області Ω розглянемо задачу на власні значення

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad \partial_\nu u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1)$$

де ε – малий додатний параметр, а ∂_ν – зовнішня нормальна похідна. Коефіцієнти a_ε та r_ε мають вигляд

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon a(x), & \text{коли } x \in \omega, \\ \alpha(x), & \text{коли } x \in \Omega_0, \end{cases} \quad r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & \text{коли } x \in \omega, \\ \varepsilon^\varkappa \rho(x), & \text{коли } x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Тут функції a , α , r та ρ – неперервні і додатні в замиканні своїх областей визначення, $\varkappa$ – натуральне число. На межі $\partial\omega$ контакту двох середовищ потрібно, щоб виконались умови спряження

$$[u^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon \partial_\nu u^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0. \quad (2)$$

Тут $[\cdot]_{\partial\omega}$ – стрибок функції при переході через поверхню $\partial\omega$.

При кожному фіксованому $\varepsilon > 0$ спектр задачі (1), (2) складається зі зліченної кількості невід'ємних власних значень скінченної кратності. Перенумеруємо власні значення задачі з врахуванням кратності

$$0 = \lambda_0^\varepsilon < \lambda_1^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_n^\varepsilon \leq \dots \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Власні функції $\{u_n^\varepsilon\}_{n=0}^\infty$ можна вибрати так, що вони утворюватимуть ортонормований базис у ваговому просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ зі скалярним добутком

$$(u, v)_\varepsilon = \int_\Omega r_\varepsilon uv \, dx = \int_\omega ruv \, dx + \varepsilon^\varkappa \int_{\Omega_0} \rho u \bar{v} \, dx$$

та нормою $\|u\|_\varepsilon = (u, u)_\varepsilon^{1/2}$. Зрозуміло, що число $\lambda^\varepsilon = 0$ є власним значенням із сталою власною функцією при всіх $\varepsilon \in (0, 1)$. Вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ відмінних від нуля власних значень і відповідних власних функцій.

Розглянемо також спектральну задачу

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla w) = \mu r w & \text{в } \omega, \\ w - \text{стала функція на } \partial\omega_j, & j = 1, \dots, K, \quad w|_{\partial\omega_1} = \dots = w|_{\partial\omega_K}, \\ \int_{\partial\omega_1} a \partial_\nu w ds + \dots + \int_{\partial\omega_K} a \partial_\nu w ds = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Зауважимо, що значення w на межах $\partial\omega_j$ невідоме. Надалі для зручності, пишучи “ w – стала на $\partial\omega$ ”, розумітимемо, що зруження w на кожну з меж $\partial\omega_j$ дорівнює тій самій сталій c . Ця задача має дискретний невід’ємний спектр $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$, де власні значення перенумеровані в порядку зростання і з врахуванням кратності.

У [18] доведено, що власні значення λ_n^ε збуреної задачі є неперервними функціями параметра $\varepsilon \in (0, 1)$. Крім того, для кожного натурального n відношення $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до власного значення μ_n задачі (3).

Асимптотично близькими є і власні функції. Нехай μ – m -кратне власне значення задачі (3), тобто $\mu_{k-1} < \mu_k = \dots = \mu_{k+m-1} < \mu_{k+m}$. Через S_μ позначимо власний підпростір, що відповідає μ , а через S_μ^0 – підпростір в $L_2(\Omega)$, отриманий продовженням кожного елемента S_μ за неперервністю сталою на всю область Ω . Нехай також S_μ^ε – підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений такими власними функціями u_n^ε задачі (1), (2), для яких $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon \rightarrow \mu$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Зокрема, сумарна кратність таких власних значень λ_n^ε дорівнює m . В [18] також доведено, що для кожної точки μ спектра задачі (3) розхил між підпросторами S_μ^ε та S_μ^0 стає нескінченно малим при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Зауваження 1. Якщо ж μ – просте власне значення, то власна функція u^ε збуреної задачі збігається в $L_2(\Omega)$ до власної функції w граничної задачі (3), яка продовжена за неперервністю сталою в область Ω_0 . Нехай задача Діріхле

$$-\operatorname{div}(a\nabla v) = \mu r v \quad \text{в } \omega, \quad v = 0 \quad \text{на } \partial\omega,$$

має простий спектр, а відповідні власні функції задовольняють умову $\int_\omega a \partial_\nu v ds \neq 0$, тоді спектр задачі (3) також простий і спектри цих задач не перетинаються.

Вибір крайових умов Неймана в задачі (1), (2) зумовлений тим, що в цьому випадку виникає нетривіальна взаємодія включень ω_j , що виражається інтегральною умовою в граничній задачі (3). Для інших типів крайових умов можна отримати аналогічні результати про збіжність власних значень і власних підпросторів.

Мета нашої праці – побудувати повні асимптотичні розвинення власних значень λ^ε , які лежать в околі точки $\varepsilon\mu$, де μ – власне значення граничної задачі довільної скінченної кратності.

3. Формальна асимптотика. Асимптотичні розвинення власних значень λ^ε і власних функцій u^ε задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon(\mu + \mu_1\varepsilon + \dots + \mu_n\varepsilon^n + \dots), \quad (4)$$

$$u^\varepsilon(x) \sim w_0(x) + \varepsilon w_1(x) + \dots + \varepsilon^n w_n(x) + \dots, \quad x \in \omega, \quad (5)$$

$$u^\varepsilon(x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots + \varepsilon^n v_n(x) + \dots, \quad x \in \Omega_0. \quad (6)$$

Крім того, власну функцію u^ε додатково підпорядкуємо умові

$$(u^\varepsilon, w_0)_{L_2(\Gamma, \omega)} = 1. \quad (7)$$

Підставивши ряди у (1), (2) та прирівнявши члени при однакових степенях ε в кожному з розвинень, отримаємо рівняння та крайові умови для w_n і v_n

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla v_n) = \sum_{j=0}^{n-\varkappa-1} \mu_j \rho v_{n-\varkappa-j-1} \quad \text{в } \Omega_0, \quad (8)$$

$$-\operatorname{div}(a \nabla w_n) = \mu r w_n + \sum_{j=1}^n \mu_j r w_{n-j} \quad \text{в } \omega; \quad (9)$$

$$w_n = v_n \quad \text{на } \partial\omega, \quad \alpha \partial_\nu v_n = a \partial_\nu w_{n-1} \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (10)$$

Тут і надалі функції з від'ємними індексами вважаємо нульовими, а $\mu_0 = \mu$.

3.1. *Головні члени асимптотики.* Із рівностей (8) та (10) отримаємо, що

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla v_0) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \quad \partial_\nu v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_0, \quad (11)$$

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla v_1) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \quad \alpha \partial_\nu v_1 = a \partial_\nu w_0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (12)$$

Позаяк задача Неймана для оператора $\operatorname{div}(\alpha \nabla \cdot)$ має нульове власне значення, то розв'язок задачі (11) v_0 є сталим в Ω_0 . Далі, згідно з альтернативою Фредгольма, розв'язок v_1 існуватиме лише у разі виконання умови $\int_{\partial\omega} \alpha \partial_\nu w_0 ds = 0$, де ds – елемент об'єму на $\partial\omega$. Звідси та з рівностей (9) та (10) для $n = 0$ отримаємо

$$-\operatorname{div}(a \nabla w_0) = \mu r w_0 \quad \text{в } \omega, \quad w_0 - \text{стала на } \partial\omega, \quad \int_{\partial\omega} a \partial_\nu w_0 ds = 0. \quad (13)$$

Отже, μ і w_0 повинні бути власним значенням та власною функцією задачі (3), як і передбачалося. Нехай μ – власне значення задачі (13) кратності m , а S_μ – відповідний власний підпростір. Через $u_1, \dots, u_m$ позначимо ортонормований базис в S_μ . Нехай $\|w_0\|_{L_2(r, \omega)} = 1$, тоді функція w_0 , як елемент простору S_μ , має зображення

$$w_0 = c_{0,1} u_1 + \dots + c_{0,m} u_m = (\mathbf{c}_0, \mathbf{u}),$$

де $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^m$ і $\|\mathbf{c}_0\| = 1$. Тут $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$. Нехай також $v_{1,j}$ – розв'язки задач

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla v) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \quad \alpha \partial_\nu v = a \partial_\nu u_j \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_0 \quad (14)$$

такі, що $\int_{\Omega_0} \rho v_{1,j} dx = 0$. Тоді $v_1 = (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) + \beta_1$, де $\mathbf{v}_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,m})$, а β_1 – стала функція.

Розглянемо задачі на такі члени асимптотичних рядів (4)–(6). Для v_2 отримаємо

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla v_2) = \mu \rho v_{1-\varkappa} \quad \text{в } \Omega_0, \quad \alpha \partial_\nu v_2 = a \partial_\nu w_1 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (15)$$

Розв'язок v_2 існує тоді і лише тоді, коли $\int_{\partial\omega} a \partial_\nu w_1 ds = -\mu \int_{\Omega_0} \rho v_{1-\varkappa} dx$. З рівності $w_1 = v_1$ та зображення для v_1 одержимо, що $w_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) = \beta_1$, тобто ця різниця є сталою на $\partial\omega$. Тому для w_1 отримаємо задачу

$$-\operatorname{div}(a \nabla w_1) - \mu r w_1 = \mu_1 r (\mathbf{c}_0, \mathbf{u}) \quad \text{в } \omega, \quad (16)$$

$$(w_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1)) - \text{стала на } \partial\omega, \quad \int_{\partial\omega} a \partial_\nu w_1 ds = -\mu \int_{\Omega_0} \rho v_{1-\varkappa} dx. \quad (17)$$

Згідно з домовленістю про від'ємні індекси інтеграл в (17) дорівнює нулю при $\varkappa \geq 2$. Надалі через $H^p(U)$ позначатимемо простори Соболева на многовиді U .

Лема 1. Нехай μ – власне значення задачі (13) кратності m , а $u_1, \dots, u_m$ – ортонормований базис в S_μ . Неоднорідна задача

$$-\operatorname{div}(a\nabla w) = \mu r w + f \quad \text{в } \omega, \quad (w - \varphi) - \text{ стала на } \partial\omega, \quad \int_{\partial\omega} a \partial_\nu w \, ds = g, \quad (18)$$

де $f \in L_2(\omega)$, $\varphi \in H^{3/2}(\partial\omega)$, а g – задане число, має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\int_{\omega} f u_j \, dx + \int_{\partial\omega} a \varphi \partial_\nu u_j \, ds - g u_j|_{\partial\omega} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (19)$$

Цей розв'язок належить до класу $H^2(\omega)$ і визначений з точністю до довільного елемента з S_μ .

Доведення. Припустимо, що розв'язок задачі (18) існує. Щоб довести необхідність умов (19), домножимо рівняння (18) почергово на u_j і проінтегруємо частинами

$$\int_{\partial\omega} a u_j \partial_\nu w \, ds - \int_{\partial\omega} a w \partial_\nu u_j \, ds = \int_{\omega} f u_j \, dx, \quad j = 1, \dots, m.$$

Позаяк функція u_j є сталою на $\partial\omega$ і виконуються рівність $\int_{\partial\omega} a \partial_\nu u_j \, ds = 0$, отримаємо (19).

Згідно з альтернативою Фредгольма ці умови є також і достатніми для існування розв'язку, бо задачі (13) в просторі $L_2(r, \omega)$ відповідає самоспряжений оператор з компактною резольвентою [18]. $\square$

Згідно з доведеною лемою розв'язок задачі (16)–(17) при $\varkappa = 1$ існує, коли

$$\int_{\partial\omega} a(\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) \partial_\nu u_j \, ds + \mu M(\mathbf{c}_0, u_j \mathbf{u})|_{\partial\omega} = -\mu_1 \int_{\omega} r(\mathbf{c}_0, \mathbf{u}) u_j \, dx, \quad j = 1, \dots, m. \quad (20)$$

де $M = \int_{\Omega_0} \rho \, dx$. Для $\varkappa \geq 2$ одержимо

$$\int_{\partial\omega} a(\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) \partial_\nu u_j \, ds = -\mu_1 \int_{\omega} r(\mathbf{c}_0, \mathbf{u}) u_j \, dx, \quad j = 1, \dots, m, \quad (21)$$

бо в цьому випадку права частина інтегральної рівності (17) є нульовою.

Через $B(\varkappa)$ позначимо квадратну матрицю порядку m з елементами

$$b_{lj}(\varkappa) = - \int_{\partial\omega} a v_{1,l} \partial_\nu u_j \, ds - \delta_{1\varkappa} \mu M(u_l u_j)|_{\partial\omega}, \quad (22)$$

де δ_{lj} – символ Кронекера. Тоді умови (20) та (21) можна записати у вигляді задачі на власні значення для матриці $B(\varkappa)$ зі спектральним параметром μ_1 , тобто

$$B(\varkappa) \mathbf{c}_0 = \mu_1 \mathbf{c}_0.$$

Отже, розв'язок задачі (16)–(17) існуватиме лише у випадку, коли μ_1 – власне значення матриці $B(\kappa)$, а $\mathbf{c}_0$ – відповідний власний вектор.

Лема 2. *Всі власні значення матриці $B(\kappa)$ дійсні.*

Доведення. Матриця $B(\kappa)$ є симетричною, тому має дійсний спектр. Справді, домноживши рівняння (14) на $v_{1,l}$ і проінтегрувавши частинами, для $l \neq j$ отримаємо $\int_{\partial\omega} \alpha v_{1,l} \partial_\nu v_{1,j} ds = \int_{\partial\omega} \alpha v_{1,j} \partial_\nu v_{1,l} ds$. Врахувавши крайові умови $\alpha \partial_\nu v_{1,j} = a \partial_\nu u_j$ на $\partial\omega$, одержимо рівність $\int_{\partial\omega} a \partial_\nu u_j v_{1,l} ds = \int_{\partial\omega} a \partial_\nu u_l v_{1,j} ds$, тобто $b_{jl} = b_{lj}$. $\square$

Припустимо надалі, що всі власні значення μ_1^j матриці $B(\kappa)$ прості, тобто m -кратне власне значення при збуренні розпадається на m простих власних значень λ_ε^j , $j = 1, \dots, m$. Зауважимо, що такі асимптотичні розвинення можна побудувати й у випадку кратних власних значень матриці $B(\kappa)$. Такі асимптотики описуватимуть іншу біфуркаційну картину спектра в околі точки μ . Нормовані власні вектори, які відповідають власним значенням μ_1^j , позначимо через $\mathbf{c}_0^j$. Приймемо

$$w_0^j = c_{0,1}^j u_1 + \dots + c_{0,m}^j u_m, \quad j = 1, \dots, m. \quad (23)$$

Функція v_0 стала на Ω_0 , тому з (10) одержуємо

$$v_0^j = w_0^j|_{\partial\omega} \quad \text{в } \Omega_0. \quad (24)$$

Отже, ми отримали m формальних асимптотик

$$\lambda_\varepsilon^j \sim \varepsilon \mu + \varepsilon^2 \mu_1^j, \quad j = 1, \dots, m$$

таких власних значень збуреної задачі, для яких відношення $\varepsilon^{-1} \lambda_\varepsilon^j$ близьке до μ .

3.2. Перші коректори асимптотичних розвинень власних функцій. Зафіксуємо μ_1^j , відповідні функції v_0^j і w_0^j , та продовжимо побудову асимптотики, опускаючи надалі верхній індекс j . Запишемо функцію w_1 у вигляді

$$w_1 = \hat{w}_1 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u}), \quad (25)$$

де $\hat{w}_1$ – розв'язок задачі (16)–(17), ортогональний до S_μ в просторі $L_2(r, \omega)$, $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^m$. Нагадаємо, що $w_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) = \beta_1$ на поверхні $\partial\omega$, тому

$$\beta_1 = (\hat{w}_1(x) - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1(x)) + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u}(x)))|_{\partial\omega}. \quad (26)$$

Отже, визначивши вектор $\mathbf{c}_1$, ми однозначно знайдемо w_1 та v_1 . Вибір вектора $\mathbf{c}_1$ продиктовано умовами існування розв'язку w_2 .

Інтегральна умова (17) забезпечує існування розв'язку задачі (15), який має зображення $v_2 = \hat{v}_2 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{v}_1) + \beta_2$, де β_2 стала. Тут $\hat{v}_2$ є таким розв'язком задачі

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla v_2) = \mu \rho v_{1-\kappa} \quad \text{в } \Omega_0, \quad \alpha \partial_\nu v_2 = a \partial_\nu \hat{w}_1 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

що $\int_{\Omega_0} \rho \hat{v}_2 dx = 0$. Далі, задача

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla v_3) = \rho(\mu v_{2-\kappa} + \mu_1 v_{1-\kappa}) \quad \text{в } \Omega_0, \quad \alpha \partial_\nu v_3 = a \partial_\nu w_2 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_3 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega$$

має розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\int_{\partial\omega} a \partial_\nu w_2 ds = - \int_{\Omega_0} \rho(\mu v_{2-\kappa} + \mu_1 v_{1-\kappa}) dx.$$

Звідси для w_2 отримаємо

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla w_2) - \mu r w_2 = \mu_1 r w_1 + \mu_2 r w_0 & \text{в } \omega, \\ (w_2 - \hat{v}_2 - (\mathbf{c}_1, \mathbf{v}_1)) - \text{ стала на } \partial\omega, & \int_{\partial\omega} a \partial_\nu w_2 ds = \int_{\Omega_0} \rho(\mu v_{2-\kappa} + \mu_1 v_{1-\kappa}) dx. \end{cases}$$

Згідно з лемою 1 розв'язок попередньої задачі існуватиме лише тоді, коли

$$\int_{\partial\omega} a \hat{v}_2 \partial_\nu u_l ds + u_l|_{\partial\omega} \int_{\Omega_0} \rho(\mu v_{2-\kappa} + \mu_1 v_{1-\kappa}) dx = - \int_{\omega} r(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_0) u_l dx, \quad (27)$$

для всіх $l = 1, \dots, m$. Врахувавши зображення функцій w_1 , v_1 та v_2 , умови (27) можна переписати у вигляді

$$(B(\kappa) - \mu_1)\mathbf{c}_1 = \mu_2\mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_2(\kappa), \quad (28)$$

де вектор $\mathbf{b}_2(\kappa)$ має компоненти $b_{2,l}(\kappa) = - \int_{\partial\omega} a \hat{v}_2 \partial_\nu u_l ds - M g_2(\kappa) u_l|_{\partial\omega}$, а також

$$g_2(\kappa) = \begin{cases} (\mu(\hat{w}_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1)) + \mu_1 v_0)|_{\partial\omega}, & \kappa = 1, \\ \mu v_0|_{\partial\omega}, & \kappa = 2, \\ 0, & \kappa > 2. \end{cases}$$

Позаяк μ_1 – просте власне значення матриці $B(\kappa)$ з власним вектором $\mathbf{c}_0$, то умова $\mu_2 = -(\mathbf{b}_2(\kappa), \mathbf{c}_0)$ гарантує існування розв'язку системи (28). З умови нормування w_0 та (7) випливає, що $(w_k, w_0)_{L_2(r, \omega)} = 0$ для всіх $k \geq 1$. Врахувавши зображення для w_0 та w_1 , з попередньої рівності при $k = 1$ отримаємо

$$(\hat{w}_1, w_0)_{L_2(r, \omega)} + ((\mathbf{c}_1, \mathbf{u}), (\mathbf{c}_0, \mathbf{u}))_{L_2(r, \omega)} = 0.$$

З останньої рівності випливає умова $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_0) = 0$, яка однозначно визначає вектор $\mathbf{c}_1$. Далі однозначно знаходимо функцію w_1 та сталу β_1 за формулами (25) та (26), тому і функцію v_1 .

Отже, ми знайшли функції v_1 та w_1 , а також число μ_2 . Крім того, функцію v_2 знайдено з точністю до сталого доданка, а w_2 – з точністю до елемента простору S_μ .

3.3. Загальні члени асимптотичних розвинень. Аналогічно можна побудувати загальні члени асимптотичних розвинень (5), (6). Припустимо, що коректори μ_l , w_l та v_l для $l \leq n-2$ відомі. Функцію w_{n-1} знайшли з точністю до елемента простору S_μ і вона має зображення $w_{n-1} = \hat{w}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u})$, де $\hat{w}_{n-1}$ – розв'язок цієї самої задачі ортогональний до S_μ . Функція v_{n-1} визначена з точністю до сталого доданка β_{n-1} .

Для функцій v_n та w_n отримаємо такі задачі:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla v_n) = - \sum_{l=0}^{n-\kappa-2} \mu_l \rho v_{n-\kappa-2-l} & \text{в } \Omega_0, \\ a \partial_\nu v_n = a \partial_\nu (\hat{w}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u})) & \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_n = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla w_n) + \mu r w_n = -\mu_1 r w_{n-1} - \sum_{l=2}^n \mu_l r w_{n-l} & \text{в } \omega, \\ (w_n - \hat{v}_n - (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{v}_1)) - \text{ стала на } \partial\omega, & \int_{\partial\omega_k} a \partial_\nu w_n ds = \sum_{l=0}^{n-\kappa} \mu_l \int_{\Omega_0} \rho v_{n-\kappa-l} dx, \end{cases} \quad (30)$$

Розв'язок v_n задачі (29) існує, що гарантується вибором w_{n-1} на попередньому кроці. Цей розв'язок має зображення $v_n = \hat{v}_n + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{v}_1) + \beta_n$. Як і вище, $\hat{v}_n$ – розв'язок задачі (29) з крайовою умовою $\alpha \partial_\nu v_n = a \partial_\nu \hat{v}_{n-1}$ на $\partial\omega$ такий, що $\int_{\Omega_0} \rho \hat{v}_n dx = 0$.

Умови існування розв'язку задачі (30) можна записати у вигляді системи алгебричних рівнянь

$$(B(\kappa) - \mu_1) \mathbf{c}_{n-1} = \mu_n \mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_n(\kappa), \quad (31)$$

з невідомим параметром μ_n . Тут $\mathbf{b}_n(\kappa)$ – вектор з координатами

$$b_{n,l}(\kappa) = - \int_{\partial\omega} a \hat{v}_n \partial_\nu u_l ds - M g_n(\kappa) u_l|_{\partial\omega} + \sum_{j=2}^{n-1} \mu_j c_{n-j,l},$$

$$g_n(\kappa) = \begin{cases} \mu(\hat{w}_{n-1} - \hat{v}_{n-1})|_{\partial\omega} + \sum_{j=1}^{n-\kappa} \mu_j \beta_{n-\kappa-j}, & \text{коли } \kappa = 1, \\ \sum_{j=0}^{n-\kappa} \mu_j \beta_{n-\kappa-j}, & \text{коли } \kappa \geq 2. \end{cases}$$

Розв'язок системи (31) існуватиме тоді і лише тоді, коли

$$\mu_n = -(\mathbf{b}_n(\kappa), \mathbf{c}_0), \quad (32)$$

яка одночасно визначає коректор μ_n розвинення (4). Крім того, розв'язок $\mathbf{c}_{n-1}$ системи (31) вибираємо ортогональним до $\mathbf{c}_0$.

Отже, на цьому кроці ми однозначно вибрали коректори w_{n-1} та v_{n-1} , які задаються рівностями

$$w_{n-1} = \hat{w}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u}), \quad v_{n-1} = \hat{v}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-2}, \mathbf{v}_1) + \beta_{n-1}, \quad (33)$$

де стала β_{n-1} має зображення

$$\beta_{n-1} = (\hat{w}_{n-1} - \hat{v}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u}) - (\mathbf{c}_{n-2}, \mathbf{v}_1))|_{\partial\omega}. \quad (34)$$

Для розв'язків задач (29) і (30) отримали зображення

$$w_n = \hat{w}_n + (\mathbf{c}_n, \mathbf{u}), \quad v_n = \hat{v}_n + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{v}_1) + \beta_n,$$

де невідомі β_n та $\mathbf{c}_n$ знайдемо на наступному кроці побудови асимптотики. За допомогою цього алгоритму можна побудувати всі члени асимптотичних розвинень (5), (6).

Нагадаємо, що наведений алгоритм залежить від вибору власного значення μ_1^j матриці $B(\kappa)$. Тому, повертаючись до верхнього індекса j , зафіксуємо натуральне число N і введемо такі позначення:

$$\Lambda_{\varepsilon,N}^j = \mu + \mu_1^j \varepsilon + \dots + \mu_N^j \varepsilon^N, \quad (35)$$

$$W_{\varepsilon,N}^j(x) = w_0^j(x) + \varepsilon w_1^j(x) + \dots + \varepsilon^N w_N^j(x), \quad x \in \omega, \quad (36)$$

$$V_{\varepsilon,N}^j(x) = v_0^j(x) + \varepsilon v_1^j(x) + \dots + \varepsilon^N v_N^j(x), \quad x \in \Omega_0, \quad (37)$$

де $j = 1, \dots, m$, а m – кратність власного значення μ . Функції $w_0^1, \dots, w_0^m$ визначені в (23), а функції v_0^j задані рівностями (24). Для $l \geq 1$ функції v_l^j та w_l^j є розв'язками задач (29), (30), відповідно, а числа μ_l^j задані рівністю (32) для $l \geq 2$. Всі члени частинних сум (36) і (37) двічі неперервно диференційовні на відповідних областях

визначення. Через $U_{\varepsilon,N}^j$ позначимо функцію, яка збігається з $W_{\varepsilon,N}^j$ на ω та з $V_{\varepsilon,N}^j$ на Ω_0 . Для зручності надалі опускатимемо нижній індекс N , якщо це не призводитиме до непорозуміння.

4. Обґрунтування асимптотики. Нехай H – гільбертів простір з нормою $\|\cdot\|$. Нехай U та V – підпростори гільбертового простору H .

Означення 1. Розхилом між підпросторами U та V в просторі H називатимемо величину $\delta_H(U, V) = \|P_U - P_V\|$, де P_U і P_V – ортогональні проектори на ці підпростори.

Твердження 1 (лема 1.3 [6]). Нехай U та V – підпростори гільбертового простору H і $\dim U = \dim V$. Якщо для кожного $v \in V$, $\|v\|_H = 1$, існує нормований елемент $u \in U$ такий, що $\|u - v\|_H \leq \gamma$, то виконується нерівність $\delta_H(U, V) \leq M\gamma$, де стала M залежить лише від розмірності підпросторів.

У просторі розглянемо необмежений самоспряжений оператор A з областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Нехай також A має дискретний спектр.

Означення 2. Квазімоду оператора A з похибкою δ називатимемо таку пару $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(A)$, що $\|Av - \mu v\| \leq \delta$ і $\|v\| = 1$.

Твердження 2 ([21]). Якщо (μ, v) – квазімода оператора A із похибкою δ , то для довільного $d > \delta$ існує пара (λ, u) така, що

$$|\lambda - \mu| \leq \delta, \quad \|u - v\| \leq 2d^{-1}\delta,$$

де λ – власне значення оператора A , а u – нормована лінійна комбінація власних функцій оператора A , яким відповідають власні значення з інтервалу $[\mu - d, \mu + d]$.

Означення 3. Нехай $(\mu, v_1), \dots, (\mu, v_s)$ – квазімоди оператора A . Говоритимемо, що вони утворюють сім'ю квазімод з похибкою δ та відхиленням від ортогональності τ , якщо $\|Av_j - \mu v_j\| \leq \delta$ та $|(v_j, v_k) - \delta_{jk}| \leq \tau$ для всіх $j, k = 1, \dots, s$.

Твердження 3 ([22]). Нехай $\{(\mu, v_j)\}_{j=1}^s$ – сім'я квазімод оператора A з похибкою δ та відхиленням від ортогональності τ . Якщо $\delta h^{-1} + \tau < s^{-1}$, то оператор A на відрізку $[\mu - h, \mu + h]$ має власні значення сумарної кратності не менше s .

Задачі (1), (2) у просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ відповідає оператор $A_\varepsilon = -\frac{1}{r_\varepsilon} \operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla \cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \{u \in H^2(\Omega \setminus \partial\omega) : \partial_\nu u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [u]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon \partial_\nu u]_{\partial\omega} = 0\}.$$

Цей оператор самоспряжений, додатний і має компактну резольвенту.

Використовуючи формальні асимптотики (35) – (37), побудуємо сім'ю квазімод оператора A_ε , яка апроксимує спектр цього оператора, зосереджений в околі точки $\varepsilon\mu$. Загалом, функції U_ε^j не належать до $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Хоча за побудовою функції U_ε^j неперервні на $\partial\omega$, проте умова $[a_\varepsilon \partial_\nu U_\varepsilon^j]_{\partial\omega} = 0$ може і не виконуватись, бо

$$\alpha \partial_\nu V_\varepsilon^j - \varepsilon a \partial_\nu W_\varepsilon^j = -a \partial_\nu w_N^j \varepsilon^{N+1} \text{ на } \partial\omega.$$

Підкорегуємо U_ε^j до елементів з $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Введемо функції $\varphi^j \in C^2(\Omega \setminus \partial\omega) \cap C(\Omega)$ такі, що $\varphi^j = 0$ в $\overline{\omega}$, $\partial_\nu \varphi^j = 0$ на $\partial\Omega$ і $\alpha \partial_\nu \varphi^j = a \partial_\nu w_N^j$ на $\partial\omega$. Тоді $U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1} \varphi^j \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$.

Нехай $\hat{U}_\varepsilon^j = \Theta_\varepsilon^j(U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j)$, де $\Theta_\varepsilon^j = \|U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j\|_\varepsilon^{-1}$. Крім того, $\Theta_\varepsilon^j \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, бо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Theta_\varepsilon^j)^{-2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j\|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon^\kappa \|V_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j\|_{L_2(\rho, \Omega_0)}^2 + \|W_\varepsilon^j\|_{L_2(r, \omega)}^2 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_0^j + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n w_n^j\|_{L_2(r, \omega)}^2 = \|w_0^j\|_{L_2(r, \omega)}^2 = 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Надалі через $C_N, \tilde{C}_N, C_N^*$ тощо позначатимемо сталі, які не залежать від ε , проте можуть залежати від N .

Лема 3. *Пари $\{(\varepsilon \Lambda_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^j)\}_{j=1}^m$ утворюють сім'ю квазімод оператора A_ε з похибкою $O(\varepsilon^{N+1-\kappa/2})$ та відхиленням від ортогональності порядку $O(\varepsilon^{N-1-\kappa/2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Доведення. Підставимо числа $\varepsilon \Lambda_\varepsilon^j$ і функції $U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j$ в рівняння (1) та оцінимо залишки у правих частинах. В області Ω_0 отримаємо

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla (V_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j)) + \varepsilon^{1+\kappa} \Lambda_\varepsilon^j \rho (V_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j) = F_\varepsilon^j$$

з правою частиною

$$\begin{aligned} F_\varepsilon^j &= \varepsilon^{N+1} \rho \left[\sum_{n=0}^{\kappa} \varepsilon^n \sum_{l=0}^{N-\kappa+n} \mu_l^j v_{N+n-l}^j + \sum_{n=1}^N \varepsilon^{n+\kappa} \sum_{l=n}^N \mu_l^j v_{N+n-l}^j + \right. \\ &\quad \left. + \rho^{-1} \operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi^j) + \varepsilon^{1+\kappa} \Lambda_\varepsilon^j \varphi^j \right]. \end{aligned}$$

На множині ω одержимо $\varepsilon \operatorname{div}(\alpha \nabla W_\varepsilon^j) + \varepsilon r \Lambda_\varepsilon^j W_\varepsilon^j = G_\varepsilon^j$, де

$$G_\varepsilon^j = \varepsilon^{N+2} r \sum_{n=1}^N \varepsilon^{n-1} \sum_{l=n}^N \mu_l^j w_{N+n-l}^j.$$

Отже, врахувавши зображення $\hat{U}_\varepsilon^j$, отримаємо $A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j - \varepsilon \Lambda_\varepsilon^j \hat{U}_\varepsilon^j = f_\varepsilon^j$, з правою частиною $f_\varepsilon^j = -\varepsilon^{-\kappa} \Theta_\varepsilon^j \rho^{-1} F_\varepsilon^j$ в Ω_0 та $f_\varepsilon^j = -\Theta_\varepsilon^j r^{-1} G_\varepsilon^j$ в ω .

Позаяк всі члени частин сум (36) і (37) є обмеженими функціями на відповідних множинах, то $\|F_\varepsilon^j\|_{C(\Omega_0)} \leq \hat{C}_N^j \varepsilon^{N+1}$ і $\|G_\varepsilon^j\|_{C(\omega)} \leq \tilde{C}_N^j \varepsilon^{N+2}$. Тому

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j - \varepsilon \Lambda_\varepsilon^j \hat{U}_\varepsilon^j\|_\varepsilon^2 &= \varepsilon^\kappa \int_{\Omega_0} \rho (f_\varepsilon^j)^2 dx + \int_{\omega} r (f_\varepsilon^j)^2 dx \leq \\ &\leq c(\varepsilon^{-\kappa} \int_{\Omega_0} (F_\varepsilon^j)^2 dx + \int_{\omega} (G_\varepsilon^j)^2 dx) \leq C_N^j \varepsilon^{2N+2-\kappa}. \end{aligned} \quad (39)$$

Отже, $\|A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j - \varepsilon \Lambda_\varepsilon^j \hat{U}_\varepsilon^j\|_\varepsilon \leq C_N \varepsilon^{N+1-\kappa/2}$. Доведемо, що сім'я функцій $\{\hat{U}_\varepsilon^j\}_{j=1}^m$ майже ортогональна в просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$. Справді, для довільних $j, l = 1, \dots, m$ виконуються рівності

$$(A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon - \varepsilon \Lambda_\varepsilon^j (\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon = (f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon, \quad (A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon - \varepsilon \Lambda_\varepsilon^l (\hat{U}_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon = (f_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon.$$

Віднявши їх і скориставшись самоспряженістю оператора A_ε , отримаємо

$$\varepsilon (\Lambda_\varepsilon^l - \Lambda_\varepsilon^j) (\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon = (f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon - (f_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon. \quad (40)$$

Врахувавши, що $|\Lambda_\varepsilon^l - \Lambda_\varepsilon^j| \geq \varepsilon |\mu_1^l - \mu_1^j|$, а також оцінку $|(f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^j)| \leq C_N \varepsilon^{N+1-\kappa/2}$, яка випливає з (39), для $j \neq l$ одержимо

$$|(\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)| \leq C_N^* \varepsilon^{N-1-\kappa/2}.$$

Отже, набір $\{(\varepsilon \Lambda_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^j)\}_{j=1}^m$ утворює сім'ю квазімод A_ε з похибкою $C_N \varepsilon^{N+1-\kappa/2}$ та відхиленням від ортогональності $C_N^* \varepsilon^{N-1-\kappa/2}$. $\square$

Нагадаємо, що через S_μ^ε ми позначали підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений такими власними функціями u_n^ε задачі (1), (2), для яких $\varepsilon^{-1} \lambda_n^\varepsilon \rightarrow \mu$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Через $\hat{S}_\mu^\varepsilon$ позначимо підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений елементами $\hat{U}_{\varepsilon,N}^j$.

Теорема 1. *Нехай μ – власне значення задачі (13) кратності m , а всі власні значення матриці $B(\kappa)$ прості. Тоді в околі точки $\varepsilon \mu$ існує m простих власних значень збуреної задачі, які позначатимемо $\lambda^{\varepsilon,j}$ і для них виконуються оцінки*

$$|\varepsilon^{-1} \lambda^{\varepsilon,j} - \Lambda_{\varepsilon,N}^j| \leq \hat{C}_N \varepsilon^{N+1}, \quad j = 1, \dots, m,$$

де стала $\hat{C}_N$ не залежить від ε .

Розхил між підпросторами $\hat{S}_\mu^\varepsilon$ та S_μ^ε прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, а саме

$$\delta_{L_2(\Omega)}(\hat{S}_\mu^\varepsilon, S_\mu^\varepsilon) \leq \tilde{C}_N \varepsilon^{N+1},$$

зі сталою $\tilde{C}_N$ не залежною від ε .

Доведення. З доведеного в лемі 3 одержимо, що пара $(\varepsilon \Lambda_{\varepsilon,N}^j, \hat{U}_{\varepsilon,N}^j)$ є квазімодом A_ε з похибкою $C_N \varepsilon^{N+1-\kappa/2}$. З твердження 2 випливає, що для кожного $j = 1, \dots, m$ існує власне значення $\lambda^{\varepsilon,j}$ оператора A_ε , для якого $|\lambda^{\varepsilon,j} - \varepsilon \Lambda_{\varepsilon,N}^j| \leq C_N \varepsilon^{N+1-\kappa/2}$. Тоді

$$|\lambda^{\varepsilon,j} - \varepsilon \Lambda_{\varepsilon,N}^j| \leq |\lambda^{\varepsilon,j} - \varepsilon \Lambda_{\varepsilon,\tilde{N}}^j| + |\varepsilon \Lambda_{\varepsilon,\tilde{N}}^j - \varepsilon \Lambda_{\varepsilon,N}^j| \leq C_{\tilde{N}} \varepsilon^{N+2} + \sum_{k=N+1}^{\tilde{N}} |\mu_k^j| \varepsilon^{k+1} \leq \hat{C}_N \varepsilon^{N+2},$$

де $\tilde{N} = N+1 + [\kappa/2]$, а $[\cdot]$ – ціла частина від числа. Крім того, всі власні значення $\lambda^{\varepsilon,j}$ – різні. Справді, перенумеруємо власні значення матриці $B(\kappa)$ в порядку зростання, тоді для достатньо малих ε отримаємо

$$\begin{aligned} \lambda^{\varepsilon,j+1} - \lambda^{\varepsilon,j} &= (\Lambda_{\varepsilon,N}^{j+1} - \Lambda_{\varepsilon,N}^j) + (\lambda^{\varepsilon,j+1} - \varepsilon \Lambda_{\varepsilon,N}^{j+1}) + (\varepsilon \Lambda_{\varepsilon,N}^j - \lambda^{\varepsilon,j}) \geq \\ &\geq \varepsilon (\Lambda_{\varepsilon,N}^{j+1} - \Lambda_{\varepsilon,N}^j) - 2\hat{C}_N \varepsilon^{N+1} \geq \varepsilon^2 c(\mu_1^{j+1} - \mu_1^j), \quad 1 \leq j \leq m-1. \end{aligned}$$

Виберемо h таким, щоб окіл $\Delta_h(\mu) = (\mu - h, \mu + h)$ не містив інших точок спектра задачі (13), крім μ . Згідно з твердженням 3 сумарна кратність власних значень оператора A_ε в інтервалі $\varepsilon \Delta_h(\mu)$ не менша m , як тільки $C_N \varepsilon^{N+1-\kappa/2} h^{-1} + C_N^* \varepsilon^{N-1-\kappa/2} < m^{-1}$. Позаяк $\Delta_h(\mu)$ містить лише одну точку спектра μ , то всі ці власні значення, поділені на ε , збігаються до μ і їх є тільки m .

Отже, твердження першої частини теореми доведено.

З лемі 3 випливає, що $\dim \hat{S}_\mu^\varepsilon = \dim S_\mu^\varepsilon = m$ для достатньо малих ε . Згідно з твердженням 2 для всіх достатньо малих ε існує нормований вектор $u_\varepsilon^j \in S_\mu^\varepsilon$ такий, що $\|\hat{U}_{\varepsilon,N}^j - u_\varepsilon^j\|_\varepsilon \leq \frac{2C_N}{h} \varepsilon^{N+1-\kappa/2}$. Розглянувши таку оцінку для номера $\tilde{N} = N + \kappa$

та врахувавши, що для $f \in L_2(\Omega)$ виконується нерівність $\|f\|_\varepsilon \geq \varepsilon^{\kappa/2} c^{-1} \|f\|_{L_2(\Omega)}$, отримаємо

$$\|\hat{U}_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - u_\varepsilon^j\|_{L_2(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-\kappa/2} \|\hat{U}_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - u_\varepsilon^j\|_\varepsilon \leq \frac{2cC_{\tilde{N}}}{h} \varepsilon^{N+1}.$$

Введемо позначення $\psi_{\varepsilon, N}^j = U_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - U_{\varepsilon, N}^j = \sum_{k=N+1}^{N+\kappa} \varepsilon^k u_k$, де $u_k = v_k$ в Ω_0 та $u_k = w_k$ в ω . Далі, отримаємо

$$\begin{aligned} \|\hat{U}_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - \hat{U}_{\varepsilon, N}^j\|_{L_2(\Omega)} &= \|\Theta_{\varepsilon, \tilde{N}}^j (U_{\varepsilon, N}^j + \psi_{\varepsilon, N}^j + \varepsilon^{\tilde{N}+1} \varphi_{\tilde{N}}^j) - \Theta_{\varepsilon, N}^j (U_{\varepsilon, N}^j + \varepsilon^{N+1} \varphi_N^j)\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|\Theta_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - \Theta_{\varepsilon, N}^j\| \|U_{\varepsilon, N}^j\|_{L_2(\Omega)} + \|\Theta_{\varepsilon, \tilde{N}}^j\| \|\psi_{\varepsilon, N}^j + \varepsilon^{\tilde{N}+1} \varphi_{\tilde{N}}^j\|_{L_2(\Omega)} + \\ &\quad + \|\Theta_{\varepsilon, N}^j\| \varepsilon^{N+1} \|\varphi_N^j\|_{L_2(\Omega)} \leq c_N \varepsilon^{N+1}, \end{aligned}$$

бо виконується умова (38), а для різниці $\Theta_{\varepsilon, \tilde{N}}^j$ та $\Theta_{\varepsilon, N}^j$ одержимо оцінку

$$\begin{aligned} |\Theta_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - \Theta_{\varepsilon, N}^j| &\leq \tilde{c} \|\|U_{\varepsilon, N}^j + \psi_{\varepsilon, N}^j + \varepsilon^{\tilde{N}+1} \varphi_{\tilde{N}}^j\|_\varepsilon - \|U_{\varepsilon, N}^j + \varepsilon^{N+1} \varphi_N^j\|_\varepsilon\| \leq \\ &\leq \tilde{c} \|\psi_{\varepsilon, N}^j + \varepsilon^{\tilde{N}+1} \varphi_{\tilde{N}}^j - \varepsilon^{N+1} \varphi_N^j\|_\varepsilon \leq \tilde{c} \|\psi_{\varepsilon, N}^j + \varepsilon^{\tilde{N}+1} \varphi_{\tilde{N}}^j - \varepsilon^{N+1} \varphi_N^j\|_{L_2(\Omega)} \leq \tilde{c}_N \varepsilon^{N+1}. \end{aligned}$$

Врахувавши отримані оцінки, одержуємо

$$\|\hat{U}_{\varepsilon, N}^j - u_\varepsilon^j\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\hat{U}_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - u_\varepsilon^j\|_{L_2(\Omega)} + \|\hat{U}_{\varepsilon, \tilde{N}}^j - \hat{U}_{\varepsilon, N}^j\|_{L_2(\Omega)} \leq \tilde{C}_N \varepsilon^{N+1},$$

звідси згідно з твердженням 1 випливає, що $\delta_{L_2(\Omega)}(\hat{S}_\mu^\varepsilon, S_\mu^\varepsilon) \leq \tilde{C}_N \varepsilon^{N+1}$, що завершує доведення. $\square$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Марченко В.А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслев – К.: Наук. думка, 1974.
2. Sanchez Hubert J. Vibration and coupling of continuous systems. / J. Sanchez Hubert, E. Sanchez Palencia – Springer-Verlag, 1989.
3. Жиков В.В. Усреднение дифференциальных операторов. / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник – М.: Физматлит, 1993.
4. Lobo M. Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotics and uniform estimates for eigenvalues / M. Lobo, S.A. Nazarov, E. Pérez // IMA J. Appl. Math. – 2005. – P. 1-40.
5. Gómez D. Asymptotics for the spectrum of the Wentzell problem with a small parameter and other related stiff problems / D. Gómez, M. Lobo, S.A. Nazarov, E. Pérez // J. Math. Pure Appl. – 2006. – Vol. 86. – P. 369-402.
6. Головатый Ю.Д. Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальных колебаний / Ю.Д. Головатый // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1992. – Т. 54 - С. 29-72.
7. Rybalko V. Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions / V. Rybalko // Asymptotic Analysis. – 2002. – Vol. 32. – P. 27-62.
8. Mel'nyk T.A. Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses / T.A. Mel'nyk // Math. Models Methods. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 11, №6. – P.1001-1029.

9. *Chechkin G.A.* Homogenization of a model spectral problem for the Laplace operator in a domain with many closely located “heavy” and “intermediate heavy” concentrated masses / *G.A. Chechkin* // *J. Math. Sci.* – 2006. – Vol. 135, №6. – P. 3485-3521.
10. *Lobo M.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review / *M. Lobo, E. Pérez* // *C. R. Mecanique.* – 2003. – Vol. 331. – P. 303-317.
11. *Golovaty Yu.D.* On vibrating membranes with very heavy thin inclusions / *Yu.D. Golovaty, D. Gomez, M. Lobo, and E. Pérez* // *Math. Models Methods. Appl. Sci.* – 2004. – Vol. 14, №7. – P. 987-1034.
12. *Мельник Т.А.* Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями / *Т.А. Мельник, С.А. Назаров* // *Алгебра и анализ.* – 2000. – Т. 12, №2. – С. 188-238.
13. *Chechkin G.A.* Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses / *G.A. Chechkin, T.A. Mel'nyk* // *Appl. Anal.* – 2012. – P. 1-41.
14. *Babych N.* Asymptotic analysis of vibrating system containing stiff-heavy and flexible-light parts / *N. Babych, Yu. Golovaty* // *Nonlinear Boundary Value Problems.* – 2008. – Vol. 18. – P. 194-207.
15. *Babych N.* Low and high frequency approximations to eigenvibrations in a medium with double contrasts / *N. Babych, Yu.D. Golovaty* // *J. Comput. Appl. Math.* – 2010. – Vol. 234. – P. 1860-1867.
16. *Головатий Ю.Д.* Коливні системи з жорсткими легкими включеннями: асимптотика спектра та власних підпросторів / *Ю.Д. Головатий, В.М. Гут* // *Укр. мат. журн.* – 2012. – Т. 64, №10. – С. 1315-1330.
17. *Гут В.М.* Асимптотичні розвинення власних значень та власних функцій коливної системи з жорсткими легкими включеннями / *В.М. Гут* (подано до друку).
18. *Гут В.М.* Коливні системи з м'якими важкими включеннями / *В.М. Гут* // *Мат. студії.* – 2012. – Т. 38, №2. – С. 162-176.
19. *Amirat Y.* Asymptotics for eigenelements of Laplacian in domain with oscillating boundary: multiple eigenvalues / *Y. Amirat, G.A. Chechkin, R.R. Gadyl'shin* // *Appl. Anal.* – 2007. – Vol. 86 (7) – P. 873-897.
20. *Гадьльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия / *Р.Р. Гадьльшин* // *Матем. заметки.* – 1992. – Т. 52, №4. – С. 42-55.
21. *Вишик М.И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / *М.И. Вишик, А.А. Люстерник* // *Успехи мат. наук.* – 1957. – Т. 12, Вып. 5. – С. 3-122.
22. *Лазуткин В.Ф.* Квазиклассическая асимптотика собственных функций / *В.Ф. Лазуткин* // *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* – Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР, 1988. – Т. 34. – С. 135-174.

*Стаття: надійшла до редакції 27.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

**OSCILLATION SYSTEMS WITH HEAVY SOFT INCLUSIONS:
ASYMPTOTICS OF SPECTRUM****Vitalii Hut***Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: v.hut@ukr.net*

A model of a composite material with a finite number of heavy soft inclusions is studied. The ratio of stiffness of components is of order ε^{-1} as $\varepsilon \rightarrow 0$ and the ratio of densities is of order $\varepsilon^{\varkappa}$, $\varkappa \in \mathbb{N}$. We study asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions as $\varepsilon \rightarrow 0$ of the corresponding spectral Neumann problem. The limit spectral problem involves the non-local boundary condition which arises from the non trivial coupling of the inclusions. Complete asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions are constructed and justified.

Key words: singularly perturbed problem, asymptotics of eigenvalues, strongly inhomogeneous medium, heavy inclusion.

**КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ С ТЯЖЕЛЫМИ
ВКЛЮЧЕНИЯМИ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ:
АСИМПТОТИКА СПЕКТРА****Віталій Гут***Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: v.hut@ukr.net*

Изучена модель композитной среды, содержащая конечное число тяжелых включений малой жесткости. Отношение коэффициентов жесткости компонент является порядка $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а отношение плотностей массы – порядка $O(\varepsilon^{\varkappa})$, где $\varkappa \in \mathbb{N}$. Исследовано асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций сингулярно возмущенной спектральной задачи Неймана. Предельная задача содержит интегральное краевое условие, описывающее нетривиальное взаимодействие всех включений. Построены и обоснованы полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотика собственных значений, сильно неоднородные среды, тяжелые включения малой жесткости.

УДК 517.95

A NONLOCAL INVERSE PROBLEM FOR THE DIFFUSION EQUATION

Mykola IVANCHOV

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua.*

An inverse problem for nonlocal diffusion equation is considered. The existence and uniqueness conditions of the solution to the problem are obtained.

Key words: inverse problem, nonlocal diffusion equation.

1. The statement of the problem and the main results. We consider a nonlocal inverse problem for the diffusion equation with an unknown coefficient $a(s) > 0$

$$u_t = a \left(\int_0^h u(x, t) dx \right) u_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T \equiv \{(x, t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}, \quad (1)$$

subject to the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h], \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

and the additional condition

$$a \left(\int_0^h u(x, t) dx \right) u_x(0, t) = \mu_3(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

In the case where the function $a = a(s)$ is known, problem (1)-(3) may be considered as a mathematical model of the migration of a population when the velocity of migration depends on the total population in the considered domain [1], [2]. The inverse problem (1)-(4) corresponds to the situation when the velocity of migration is unknown.

Conditions for existence and uniqueness of solution for problem (1)-(4) are given in the following theorems.

Theorem 1. Suppose that the following assumptions hold:

- 1) $\varphi \in C^2[0, h]$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2$, $\mu_3 \in C[0, T]$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;
- 2) $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0, h]$; $\mu_1'(t) - f(0, t) \leq 0$, $\mu_2'(t) - f(h, t) \geq 0$, $\mu_3(t) > 0$,
 $\int_0^h f(x, t) dx - \mu_3(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$; $f_x(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \overline{Q}_T$;
- 3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$.

Then there exists a solution (a, u) for problem (1)-(4) from the space $C[0, S] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ such that $a(s) > 0$, $s \in [0, S]$, where the number $S > 0$ is determined by the problem data.

Theorem 2. Under the condition

$$\mu_3(t) \neq 0, \quad t \in [0, T],$$

problem (1)-(4) cannot have more than one solution in the space $C[0, S] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, where the number $S > 0$ is determined by the problem data.

2. Existence of solution. In order to reduce problem (1)-(4) to an equation with respect to $a(\cdot)$, we suppose, for instant, that a solution $(a(s), u(x, t)) \in C(\mathbb{R}_+) \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(s) > 0$, $s > 0$ is known. Denote

$$b(t) := a\left(\int_0^h u(x, t) dx\right), \quad \theta(t) := \int_0^t b(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Using the Green function $G_1(x, t, \xi, \tau; u)$ we find the solution of problem (1)-(3) [3]:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^h G_1(x, t, \xi, 0; u) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(x, t, 0, \tau; u) b(\tau) \mu_1(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t G_{1\xi}(x, t, h, \tau; u) b(\tau) \mu_2(\tau) d\tau + \int_0^h \int_0^t G_1(x, t, \xi, \tau; u) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad (5) \end{aligned}$$

where the Green functions are defined as follows:

$$\begin{aligned} G_k(x, t, \xi, \tau; u) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\right) + \right. \\ & \left. + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\right) \right), \quad k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

It is easy to verify the equality

$$G_{1x}(x, t, \xi, \tau; u) = -G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; u).$$

Taking it into account, we find from (5) the derivative u_x :

$$\begin{aligned} u_x(x, t) = & \int_0^h G_2(x, t, \xi, 0; u) \varphi'(\xi) d\xi - \int_0^t G_2(x, t, 0, \tau; u) (\mu'_1(\tau) - f(0, \tau)) d\tau + \\ & + \int_0^t G_2(x, t, h, \tau; u) (\mu'_2(\tau) - f(h, \tau)) d\tau + \int_0^h \int_0^t G_2(x, t, \xi, \tau; u) f_\xi(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ (x, t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned} \quad (6)$$

Since

$$\int_0^h G_2(x, t, \xi, 0; u) \varphi'(\xi) d\xi \geq \min_{[0, h]} \varphi'(x) > 0,$$

under the assumptions 2) of the Th.1 we have

$$u_x(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T.$$

Hence, we obtain from (4) the following equation with respect to $b(t)$:

$$\begin{aligned} b(t) = & \mu_3(t) \left(\int_0^h G_2(0, t, \xi, 0; u) \varphi'(\xi) d\xi - \int_0^t G_2(0, t, 0, \tau; u) (\mu'_1(\tau) - f(0, \tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^t G_2(0, t, h, \tau; u) (\mu'_2(\tau) - f(h, \tau)) d\tau + \int_0^h \int_0^t G_2(0, t, \xi, \tau; u) f_\xi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{-1}, \\ t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (7)$$

In order to prove the existence of solution of the equation (7) we apply the Schauder fixed-point theorem. Firstly we establish a priori estimates of solutions of equation (7).

It is evident that from the assumptions 2) of Th.1 we have

$$u_x(0, t) \geq \int_0^h G_2(0, t, \xi, 0; u) \varphi'(\xi) d\xi \geq \min_{[0, h]} \varphi'(x) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Thus we obtain

$$b(t) \leq B_1, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

where the constant $B_1 > 0$ is determined by the problem data.

In order to evaluate solutions of equation (7) from above, we use the inequalities [3]

$$G_2(0, t, 0, \tau; u) \leq C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad G_2(0, t, h, \tau; u) \leq C_3, \quad t \in [0, T],$$

where the constants $C_k, k \in \{1, 2, 3\}$, do not depend on $b(t)$. Taking into account these inequalities we find

$$u_x(0, t) \leq C_4 + C_5 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad t \in [0, T].$$

Thus, we obtain from (7) the following inequality:

$$b(t) \geq \frac{C_6}{C_4 + C_5 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}}, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Denote $b_{\min} := \min_{[0, T]} b(t)$. It is easy to deduce from (9) the inequality

$$b_{\min} \geq \frac{C_6}{C_4 + \frac{C_7}{\sqrt{b_{\min}}}}.$$

Solving it, we obtain

$$b_{\min} \geq B_0 > 0,$$

where the constant B_0 is determined by the given constants. It means that we have the estimation of $b(t)$ from below:

$$b(t) \geq B_0, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Rewrite equation (7) as follows

$$b(t) = Pb(t), \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

where the operator P is determined by the right-hand side of equation (7). Denote $\mathcal{N} := \{b \in C([0, T]) : B_0 \leq b(t) \leq B_1\}$. In view of estimates (8) and (10), it is evident that the operator P maps $\mathcal{N}$ into itself. It is shown in [3] that the operator P is compact on the set $\mathcal{N}$. Applying the Schauder fixed-point theorem, we deduce the existence of a solution $b = b(t)$ of equation (7) such that $b \in C([0, T])$ and $b(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Substituting into (5) the function $b(t)$, found from (11), we obtain the known function $u = u(x, t)$.

To finish the proof of the existence of solution for problem (1)-(4), we have to determine the function $a = a(s)$. Denote

$$q(t) = \int_0^h u(x, t) dx.$$

Note that the function $q = q(t)$ is known. From the definition of $b(t)$ we have

$$b(t) = a(q(t)), \quad t \in [0, T].$$

Find the derivative

$$q'(t) = \int_0^h u_t(x, t) dx.$$

Using equation (1) and taking into account the assumptions of Th.1, we find

$$q'(t) = b(t)u_x(1, t) - \mu_3(t) + \int_0^h f(x, t) dx > 0, \quad t \in [0, T].$$

It means that there exists a continuous function $q^{-1}(s)$ defined on the interval $[0, S]$ such that

$$q(q^{-1}(s)) \equiv s, \quad s \in [0, S],$$

where $S = \max_{[0, T]} q(t)$. From this we find the function $a(s)$:

$$a(s) = b(q^{-1}(s)), \quad s \in [0, S]. \quad (12)$$

Thus, the proof of Theorem 1 is complete.

3. Uniqueness of solution. Suppose that there exist two solutions (a_k, u_k) , $k \in \{1, 2\}$, of problem (1)-(4). Denote

$$b_k(t) := a_k \left(\int_0^h u_k(x, t) dx \right), \quad k \in \{1, 2\}, \quad b(t) := b_1(t) - b_2(t), \quad u(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

The functions $(b(t), u(x, t))$ verify the following system

$$u_t = b_1(t)u_{xx} + b(t)u_{2xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \quad (14)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(h, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (15)$$

$$b_1(t)u_x(0, t) = -b(t)u_{2x}(0, t), \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

Find the solution of problem (13)-(15):

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^h G_1^{(1)}(x, t, \xi, \tau) b(\tau) u_{2\xi\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad (17)$$

where $G_1^{(1)}(x, t, \xi, \tau)$ is the Green function for the equation

$$u_t = b_1(t)u_{xx}$$

with boundary conditions (15). After substituting (17) into (16) we obtain the following equation with respect to unknown $b(t)$:

$$b(t) = -\frac{b_1(t)b_2(t)}{\mu_3(t)} \int_0^t \int_0^h G_{1x}^{(1)}(0, t, \xi, \tau) b(\tau) u_{2\xi\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (18)$$

This is a second kind homogeneous Volterra integral equation with integrable kernel. Consequently, $b(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$. It follows from (17) that $u(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \overline{Q}_T$. The proof of Theorem 2 is complete.

REFERENCES

1. Chipot M. On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems / Chipot M., Lovat B. // Positivity. – 1999. – Vol. 3. – P. 65-81.
2. Chipot M. Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems / Chipot M., Molinet L. // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 80. – P. 279-315.
3. Ivanchov M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type / Ivanchov M. – Lviv: VNTL Publishers, 2003.

Стаття: надійшла до редакції 06.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ПРО НЕЛОКАЛЬНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

Микола ІВАНЧОВ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua.*

Розглянуто обернену задачу для нелокального рівняння дифузії. Отримано умови існування та єдиності її розв'язку.

Ключові слова: обернена задача, нелокальне рівняння дифузії.

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Николай ИВАНЧОВ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua.*

Рассмотрена обратная задача для нелокального уравнения диффузии. Получены условия существования и единственности её решения.

Ключевые слова: обратная задача, нелокальное уравнение диффузии.

УДК 519.21+517.37

ПРО ЗРОСТАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ

Орест КІНАШ, Марта ПАРОЛЯ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: okinasch@yahoo.com

Для аналітичних в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, характеристичних функцій φ ймовірнісних законів F у термінах узагальнених порядків знайдено зв'язок між зростанням $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$ і спаданням $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$.

Ключові слова: аналітична функція, характеристична функція, ймовірнісний закон, узагальнений порядок.

1. Вступ. Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, \infty)$ функція F називається [1, с. 10] ймовірнісним законом, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(-x) = 0$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, а характеристичною функцією закону F називається [1, с. 12] функція

$$\varphi(z) = \varphi(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x), \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

Якщо функція φ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, то вона називається аналітичною в $\mathbb{D}_R$. Надалі вважатимемо, що $\mathbb{D}_R$ є найбільшим кругом аналітичності функції φ . Відомо [1, с. 37-38] таке: для того, щоб характеристична функція φ була аналітичною в $\mathbb{D}_R$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $r \in [0, R)$

$$W_F(x) =: 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Якщо $R = +\infty$, (тобто φ – ціла характеристична функція), і $\varphi(z) \not\equiv \text{const}$, то [1, с. 45] існує скінченна чи нескінченна границя $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \ln M(r, \varphi) > 0$, де $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$. Якщо $\rho[\varphi] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r, \varphi)}{\ln r}$ – порядок функції φ і $\sigma[\varphi] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, \varphi)}{r \rho[\varphi]}$ – її тип, визначений за умови $0 < \rho[\varphi] < +\infty$, то або $\rho[\varphi] > 1$, або $\rho[\varphi] = 1$ і $\sigma[\varphi] > 0$. Б.Рамачандран [2] (див. також [1, с. 54]) довів, що за умови $1 \leq \rho[\varphi] < +\infty$ правильна формула

$$\frac{1}{\rho[\varphi]} + \frac{1}{\gamma[F]} = 1, \quad \gamma[F] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln (1/W_F(x))}{\ln x}, \quad (3)$$

а за умови $1 < \rho[\varphi] < +\infty$,

$$(\gamma[F]\delta[F])^{\rho[\varphi]-1} \sigma[\varphi]\rho[\varphi] = 1, \quad \delta[F] = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\gamma[F]} \ln \frac{1}{W_F(x)}. \quad (4)$$

Н.І.Яковлєва [3-4] узагальнила формулу (3), використовуючи узагальнені порядки М.М. Шеремети [5]. Як і в [5], через L позначимо клас неперервних додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) \equiv \alpha(x_0) > 0$ для $x \leq x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \leq x \rightarrow +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. В [4] доведено таке: якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, то для того, щоб $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(r)} \alpha\left(\frac{1}{r} \ln M(r, \varphi)\right) = \gamma > 0$, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha(x)} \beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right) = \frac{1}{\gamma}$.

Оскільки універсальної шкали зростання побудувати не можна, Б.В. Винницький [6] знайшов зв'язок між зростанням $M(r, \varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ для цілих функцій у термінах функції Φ^{-1} , оберненої до функції $\Phi(x) = \ln M(e^x, \varphi)$. Він довів таке: якщо φ має нескінченний порядок, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\ln\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{W_F(x)}\right)\right)} = 1$. М. Девес [7] замість функцій з класів L^0 і $L_{\text{ПЗ}}$ розглядала функції α і β такі, що $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(kx)}{\alpha(x)} \leq A_0 k^a$ і $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta(kx)}{\beta(x)} \leq B_0 k^b$ для $k > 1$ і, зрозуміло, замість рівностей отримала оцінки $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(r)} \alpha\left(\frac{\ln M(r, \varphi)}{r}\right)$, зверху і знизу через $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)}$.

Для аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D}_1$ функції φ порядок і тип вводяться за формулами $\rho^*[\varphi] = \overline{\lim}_{r \uparrow 1} \frac{\ln^+ \ln^+ M(r, \varphi)}{-\ln(1-r)}$ і $\sigma^*[\varphi] = \overline{\lim}_{r \uparrow 1} (1-r)^{\rho^*[\varphi]} \ln^+ M(r, \varphi)$ за умови $0 < \rho^*[\varphi] < +\infty$. В.М. Сороківський [8] довів: якщо φ – аналітична в $\mathbb{D}_1$ характеристична функція ймовірного закону F , то

$$\frac{1}{\gamma^*[F]} - \frac{1}{\rho^*[F]} = 1, \quad \gamma^*[F] = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \left(1 - \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)}{\ln x}, \quad (5)$$

і

$$(\gamma^*[F]\delta^*[F])^{\rho^*[\varphi]+1} = \sigma^*[\varphi]\rho^*[\varphi], \quad \delta^*[F] = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x^{-\gamma^*[F]} \left(x - \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)^+. \quad (6)$$

В [9] він довів: якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ такі, що $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{d \ln \beta^{-1}(c\alpha(x))}{d \ln x} < 1$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x\alpha^{-1}(c\beta(x)))}{\beta(x)} = c$ і $\beta^{-1}\left(c\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right)\right) = (1+o(1))\beta^{-1}(c\alpha(x))$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, то

$$\overline{\lim}_{r \uparrow 1} \frac{\alpha(\ln M(r, \varphi))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)^+}\right)}. \quad (7)$$

Тут ми доповнимо та узагальнимо наведені результати. Для цілих характеристичних функцій правильна така теорема.

Теорема 1. Якщо або $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, а φ – ціла характеристична функція ймовірнісного закону F , то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r} \ln M(r, \varphi)\right)}{\beta(r)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)}. \quad (8)$$

За умов $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$ теорема 1 збігається з наведеним вище результатом Н.І. Яковлевої [4], який свідчить про зв'язок між зростанням $M(r, \varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ у випадку, коли $\frac{1}{r} \ln M(r, \varphi)$ прямує до $+\infty$ досить швидко. За умов $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ теорема 1 є новим результатом і засвідчує такий зв'язок, коли $\frac{1}{r} \ln M(r, \varphi)$ прямує до $+\infty$ повільно. Якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$, для $x \geq x_0$, то з (8) отримаємо формулу (3) для знаходження порядку.

Формула (4) впливає з доведеної нижче рівності

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, \varphi)}{r^\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho^\rho} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)^{\rho-1}}, \quad \rho = \rho[\varphi]. \quad (9)$$

У випадку, коли характеристична функція φ ймовірнісного закону F аналітична у крузі $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, ситуація дещо інша, бо φ може бути обмеженою в $\mathbb{D}_R$, а для того, щоб $M(r, \varphi) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow R$, потрібна додаткова умова на $W_F(x)$. Такою є умова

$$\overline{\lim}_{r \uparrow R} W_F(x) e^{Rx} = +\infty, \quad (10)$$

що буде доведено пізніше. Швидкість зростання функції $M(r, \varphi)$ залежить від асимптотичного поведінки функції $W_F(x) e^{Rx}$, про що свідчить наступна теорема.

Теорема 2. Нехай φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10), а $\rho^*[\varphi]$ – її порядок. Тоді

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ (W_F(x) e^{Rx})}{\ln x} = \frac{\rho^*[\varphi]}{\rho^*[\varphi] + 1} \quad i \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \frac{x}{\ln^+(W_F(x) e^{Rx})}} = \rho^*[\varphi],$$

якщо $0 < \rho^*[\varphi] < +\infty$, то для типу $\sigma^*[\varphi]$ правильні формули

$$\sigma^*[\varphi] = \frac{\rho^\rho}{(\rho + 1)^{\rho+1}} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln^+ (W_F(x) e^{Rx}))^{\rho+1}}{x^\rho} = \frac{\rho^\rho}{(\rho + 1)^\rho} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\left(\frac{x}{\ln^+(W_F(x) e^{Rx})}\right)^{\rho+1}},$$

де $\rho = \rho^*[\varphi]$.

Для $R = 1$ формули з теореми 2 збігаються з формулами (5) і (6). Доцільність наведення формули для знаходження $\rho^*[\varphi]$ і $\sigma^*[\varphi]$ в теоремі 2 у двох варіантах видно з наступних трьох теорем.

Теорема 3. Нехай функції $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ такі, що $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x} \rightarrow 0$ і $\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, а φ –

аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Тоді

$$\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\alpha(\ln M(r, \varphi))}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)}. \quad (11)$$

Зауважимо, що для $R = 1$ формула (10) збігається з формулою (7), але умови на α і β слабші, ніж в [9].

Теорема 4. Нехай функції $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\beta \in L_{\Pi 3}$ такі, що $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} \rightarrow 0$, $\frac{\alpha^{-1}(c\beta(x))}{x} \rightarrow 0$ і $\beta\left(\frac{x}{\alpha^{-1}(c\beta(x))}\right) = (1 + o(1))\beta(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Тоді

$$\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\alpha(\ln M(r, \varphi))}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln^+(W_F(x)e^{Rx}))}{\beta(x)}.$$

Зауважимо, що умови на α і β в теоремі 3 засвідчують те, що функція α зростає повільніше, ніж функція β , а з умов теореми 4 випливає, що функція β зростає повільніше, ніж функція α . Цікавим є випадок, коли функції α і β мають однакове зростання, наприклад, коли $\alpha(x) \equiv \beta(x)$. Правильна така теорема.

Теорема 5. Нехай функція $\alpha \in L_{\Pi 3}$ така, що $\frac{\alpha(\ln x)}{\alpha(x)} \rightarrow 0$ і $\alpha\left(\frac{x}{\alpha^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для будь-якого $c \in (0, 1)$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Нехай $\rho_\alpha^*[\varphi] = \overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\alpha(\ln M(r, \varphi))}{\alpha\left(\frac{1}{R-r}\right)}$. Якщо $\rho_\alpha^*[\varphi] \geq 1$, то $\rho_\alpha^*[\varphi] = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha\left(\frac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)}$, якщо $\rho_\alpha^*[\varphi] < 1$, то $\rho_\alpha^*[\varphi] = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln(W_F(x)e^{Rx}))}{\alpha(x)}$.

У теоремах 3 - 4 функції α і β повільно зростають. Проте можна отримати аналоги цих теорем, коли одна з цих функцій є степеневою. Про це свідчать такі дві теореми.

Теорема 6. Нехай $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Тоді

$$\overline{\lim}_{r \uparrow R} (R-r)\alpha(\ln M(r, \varphi)) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{x} \ln^+(W_F(x)e^{Rx}).$$

Теорема 7. Нехай $\beta \in L_{\Pi 3}$, $\frac{\ln x}{\beta(x)} \rightarrow 0$ і $\beta\left(\frac{x}{\beta(x)}\right) = (1 + o(1))\beta(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Тоді

$$\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\ln M(r, \varphi)}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}{\beta(x)}.$$

Зауважимо, що в теоремах 4 і 7 усунути умову $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ не можна. Продemonструємо це на прикладі теореми 7 з $\beta(x) = \ln x$. Нехай $F(x) = 0$ для $x \leq 0$, $F(x) = 1 - e^{-R}$ для $0 < x \leq 1$, і $F(x) = 1 - xe^{-Rx}$ для $x \geq 1$. Тоді $\varphi(t) = 1 - e^{-R} + \int_1^\infty e^{itx} dF(x)$ і

$$M(r, \varphi) = |\varphi(-ir)| = 1 - e^{-R} - \int_1^\infty e^{rx} d(1 - F(x)) = 1 - e^{-R} + e^{-(R-r)} + r \int_1^\infty xe^{-(R-r)x} dx =$$

$$= 1 - e^{-R} + e^{-(R-r)} + \frac{re^{-(R-r)}}{(R-r)^2} (1 + R - r) = \frac{(1 + o(1))R}{(R-r)^2},$$

при $r \uparrow R$, тобто $\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\ln M(r, \varphi)}{\beta(\frac{1}{R-r})} = 2$. З іншого боку, $W_F(x) = xe^{-Rx}$ для $x \geq 1$, і отже,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(W_F(x)e^{Rx})}{\beta(x)} = 1.$$

Доведення теорем 1-7 ґрунтується на такій лемі.

Лема 1. Якщо φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R \leq +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , то для кожного $r \in [0, R)$ і всіх $x \geq 0$ правильні нерівності $\frac{1}{2}e^{rx}W_F(x) \leq M(r, \varphi) \leq r \int_0^\infty e^{rx}W_F(x)dx + 1 + W_F(+0)$.

Для $R = +\infty$ ця лема доведена в [1, с. 54-55]. У випадку, коли $0 < R < +\infty$, її доведення таке саме. Прийнемо $\mu(r, \varphi) = \sup \{W_F(x)e^{rx} : x \geq 0\}$, $I(r, \varphi) = \int_0^\infty W_F(x)e^{rx}dx$ і припустимо, що $M(r, \varphi) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow R$. Тоді за лемою 1

$$(1 + o(1)) \ln \mu(r, \varphi) \leq \ln M(r, \varphi) \leq (1 + o(1)) \ln I(r, \varphi), \quad r \uparrow R, \quad (12)$$

і отже, задача зводиться до знаходження асимптотики функції $\ln \mu(r, \varphi)$ і асимптотичних оцінок $\ln I(r, \varphi)$ через $\ln \mu(r, \varphi)$.

2. Асимптотичне поведіння функції $\ln \mu(r, \varphi)$. Припустимо спочатку, що $R = +\infty$, тобто φ – ціла характеристична функція, а $x_0 = \sup \{x : W_F(x) > 0\} < +\infty$. Тоді $\mu(r, \varphi) \leq e^{rx_0} \sup \{W_F(x) : x \leq x_0\}$, тобто, $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(r, \varphi)}{r} \leq x_0$. Оскільки $\mu(r, \varphi) \geq W_F(x_0)e^{rx_0}$, то $\underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(r, \varphi)}{r} \geq x_0$, тому $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(r, \varphi)}{r} = x_0$. З іншого боку, у цьому випадку $I(r, \varphi) = \int_0^{x_0} W_F(x)e^{rx}dx \leq x_0\mu(r, \varphi)$ і з огляду на лему 1 $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r, \varphi)}{r} = x_0$. Отже, доведено таке твердження.

Теорема 8. Для цілої характеристичної функції $\varphi \neq \text{const}$ першого порядку і нормального типу величина типу $\sigma[\varphi]$ обчислюється за формулою $\sigma[\varphi] = \sup \{x : W_F(x) > 0\}$.

Зауважимо, що теорема 1 уточнює твердження з [1, с. 57] про те, що існують характеристичні функції порядку $\rho[\varphi] = 1$ з величиною типу $\sigma[\varphi] \in [0, +\infty)$. Припустимо тепер, що $W_F(x) \neq 0$ для всіх $x \geq 0$. Оскільки $W_F(x) \searrow 0 (x \rightarrow +\infty)$, то $\ln \mu(r, \varphi) \geq \ln W_F(x_0) + x_0r$ для всіх $r > 0$ і кожного $x_0 > 0$, звідки випливає, що $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(r, \varphi)}{r} = +\infty$.

Для аналітичних u в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристичних функцій з (2) для кожного $r \in [0, R)$ одержуємо $W_F(x)e^{rx} \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$, а для кожного $r^* > R$ з того, що $\mathbb{D}_R$ є найбільшим кругом аналітичності, отримаємо $W_F(x_k)e^{r^*x_k} \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (x_k) додатних чисел, звідки з огляду на довільність r і r^* випливає, що $R = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}$. Ця рівність правильна і у випадку, коли $R = +\infty$.

На відміну від цілих для аналітичних в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристичних функцій функція $\ln \mu(r, \varphi)$ може бути обмеженою. Неважко довести, що для того, щоб $\mu(r, \varphi) \leq K$ для кожного $r \in [0, R)$, необхідно і достатньо, щоб $W_F(x)e^{Rx} \leq K$ для всіх $x \geq 0$. Тому правильне таке твердження.

Твердження 1. Якщо φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , то для того, щоб $\mu(r, \varphi) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow R$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (10).

З огляду на це твердження умова (10) наявна в теоремах 2-7. Зауважимо, що виконання умови (10) у випадку $R = +\infty$ є очевидним.

Надалі будемо вважати, що ця умова виконується, а для дослідження зростання функції $\ln \mu(r, \varphi)$ використовуватимемо зв'язок між зростанням функцій, спряжених за Юнгом.

Через $\Omega(0, R)$, $0 < R \leq +\infty$ позначимо клас додатних необмежених на $[0, R)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є додатною, неперервною і зростає до $+\infty$ на $[r_0, R)$ для деякого $r_0 \in [0, R)$. Для функцій $\Phi \in \Omega(0, R)$ нехай $\Psi(r) = r - \frac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном, а функція ϕ обернена до Φ' . Правильна така лема.

Лема 2. Нехай $0 < R \leq +\infty$, $\Phi \in \Omega(0, R)$, φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Для того, щоб $\ln \mu(r, \varphi) \leq \Phi(r)$ для всіх $r \in [r_0, R)$, необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leq -x\Psi(\phi(x))$ для всіх $x \geq x_0$.

Доведення. Нехай $\Omega(-\infty, R)$ – клас додатних необмежених на $(-\infty, R)$ функцій Φ , для яких похідна Φ' є додатною неперервною і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, R)$, а Ψ і ϕ визначені, як вище. Тоді [9] функція Ψ є неперервною і зростає до R на $(-\infty, R)$, а функція ϕ є неперервною і зростає до R на $(0, +\infty)$.

Припустимо, що функція P задана на $(0, +\infty)$ і відмінна від $+\infty$ (вона може набувати значення $-\infty$, але $P \not\equiv -\infty$), і нехай $Q(r) = \sup\{P(x) + rx : x > 0\}$ – функція спряжена за Юнгом. В [10] доведено таке: для того, щоб $Q(r) \leq \Phi(r) \in \Omega(-\infty, R)$, необхідно і достатньо, щоб $P(x) \leq -x\Psi(\phi(x))$ для всіх $x > 0$.

Функції $\ln \mu(r, \varphi) = \sup\{\ln W_F(x) + rx : x \geq 0\}$ і $\ln W_F(x)$ спряжені за Юнгом, оскільки $\Phi \in \Omega(0, R)$, то існує таке $r_0 \in (0, R)$, що $\Phi(r_0) > 0$ і $\Phi'(r_0) > 0$. Тому можна побудувати функцію $\Phi_1 \in \Omega(-\infty, R)$, яка б дорівнювала Φ на $[r_0, R]$. Зрозуміло, що тоді $\Psi_1(r) = \Psi(r)$ на $[r_0, R]$ і $\Phi_1(x) = \Phi(x)$ для $x \geq x_0 = x_0(r_0)$. Тому з наведеного результату з [10] випливає висновок леми 2. $\square$

Використовуючи лему 2, неважко довести таке твердження.

Твердження 2. Нехай $\rho > 1$, а φ – ціла характеристична функція ймовірнісного закону F . Тоді

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(r, \varphi)}{r^\rho} = \frac{(\rho - 1)^{\rho-1}}{\rho^\rho} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)^{\rho-1}}.$$

Справді, нехай $\Phi \in \Omega(0, R)$ така, що $\Phi(r) = Tr^\rho$ при $r \geq r_0$, де $T > 0$. Тоді для $x \geq x_0$ одержуємо $x\Psi(\phi(x)) = \frac{\rho-1}{\rho} \left(\frac{1}{T\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x^{\frac{\rho}{\rho-1}}$. Тому за лемою 2 для того, щоб $\ln \mu(r, \varphi) \leq Tr^\rho$ для всіх $r \geq r_0$ необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leq -(\rho - 1) \times \times \rho^{\frac{\rho}{\rho-1}} T^{\frac{-1}{\rho-1}} x^{\rho(\rho-1)}$ для всіх $x \geq x_0$, тобто $\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)^{\rho-1} \geq \frac{1}{T}(\rho - 1)^{\rho-1} \rho^{-\rho} x$ при $x \geq x_0$, звідки неважко отримати потрібну рівність.

Припустимо тепер, що $\Phi \in \Omega(0, R)$ така, що $\Phi(r) = \int_{r_0}^r \omega(t)dt + const$, де ω – неперервна, додатна і зростаюча до $+\infty$ на $[r_0, R)$ функція. Тоді $\Phi'(r) = \omega(r)$ для $r \geq r_0$ і $\phi(x) = \omega^{-1}(x)$ для $x \geq x_0$, а отже,

$$\int_{x_0}^x \phi(t)dt = \int_{x_0}^x \omega^{-1}(t)dt = \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} t d\omega(t) =$$

$$= x\phi(x) - x_0\phi(x_0) - \Phi(\phi(x)) + \Phi(\phi(x_0)) = x\Psi(\phi(x)) - x_0\Psi(\phi(x_0)).$$

Тому з леми 2 випливає така лема.

Лема 3. Нехай $0 < r_0 < R \leq +\infty$ і виконується умова (10), а ω – неперервна, додатна і зростаюча до $+\infty$ на $[r_0, R)$ функція. Для того, щоб $\ln \mu(r, \varphi) \leq \leq \int_{r_0}^r \omega(t)dt + const$, необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leq - \int_{x_0}^x \omega^{-1}(t)dt + const$.

Використовуючи цю лему, доведемо таке твердження.

Твердження 3. Нехай або $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\Pi 3}$, а φ – ціла характеристична функція. Для того, щоб

$$\alpha \left(\frac{\ln \mu(r, \varphi)}{r} \right) \leq (1 + o(1))\beta(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (13)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\alpha(x) \leq (1 + o(1))\beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} \right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

Доведення. З (13) випливає, що $\ln \mu(r, \varphi) \leq r\alpha^{-1}(\delta\beta(r))$ для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $r \geq r_0(\delta)$, тобто $\ln W_F(x) \leq r(\alpha^{-1}(\delta\beta(r)) - x)$ для всіх $r \geq r_0(\delta)$ і $x > 0$. Виберемо $r = r(x) = \beta^{-1} \left(\frac{\alpha(\varepsilon x)}{\delta} \right)$, де $\varepsilon \in (0, 1)$ – довільне число. Тоді $r(x) \geq r_0(\delta)$ для всіх $x \geq x_0(\delta, \varepsilon)$, і отже, $\ln W_F(x) \leq -(1 - \varepsilon)x\beta^{-1} \left(\frac{\alpha(\varepsilon x)}{\delta} \right)$ для всіх $x \geq x_0(\delta, \varepsilon)$, звідки випливає, що $\frac{\alpha(\varepsilon x)}{\beta \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)x} \ln \frac{1}{W_F(x)} \right)} \leq \delta$ для всіх $x \geq x_0(\delta, \varepsilon)$. Якщо $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\beta \in L^0$, то

$\alpha(\varepsilon x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а [11] $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta(x)}{\beta(\frac{x}{1-\varepsilon})} = A(\varepsilon) \searrow 1$ ($\varepsilon \downarrow 0$). Тому з останньої нерівності отримуємо

$$\delta \geq \frac{\alpha(x)(1 + o(1))}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)} \frac{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)} \geq \frac{1 + o(1)}{A(\varepsilon)} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

звідки, спрямовуючи $\varepsilon \rightarrow 0$ і $\delta \rightarrow 1$, одержимо (14). Якщо ж $\beta \in L_{\Pi 3}$ і $\alpha \in L^0$, то $\beta\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right) = (1 + o(1))\beta(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а $\overline{\lim}_{x \leftarrow -\infty} \frac{\alpha(\varepsilon x)}{\alpha(x)} = \overline{\lim}_{x \leftarrow -\infty} \frac{\alpha((1-(1-\varepsilon))x)}{\alpha(x)} = A_1(\varepsilon) \searrow 1$ ($\varepsilon \uparrow 1$). Тому знову отримуємо (14).

Навіпаки, з умови (14) для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $x \geq x_0 = x_0(\delta) > 0$ одержуємо $\ln W_F(x) \leq -x\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right) \leq -\int_{x_0}^x \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\delta}\right) dt$, тобто за лемою 3 з $\omega(t) = \alpha^{-1}(\delta\beta(t))$ отримуємо нерівність

$$\ln \mu(r, \varphi) \leq \int_{r_0}^r \alpha^{-1}(\delta\beta(r)) dt + const \leq r\alpha^{-1}(\delta\beta(r)) + const,$$

звідки випливає (13). Твердження 2 доведено. $\square$

Наслідок 1. За умов твердження 3 для того, щоб $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\frac{1}{r} \ln \mu(r, \varphi))}{\beta(r)} = 1$, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right)} = 1$.

Перейдемо до характеристичних функцій, аналітичних в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, і спочатку зауважимо, що з рівності $R = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}$ випливає, що $\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$, звідки з огляду на (10) випливає, що зростання функції $\ln \mu(r, \varphi) \uparrow \infty$ при $r \uparrow R$ можна вивчати або в термінах зростання функції $\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}$, або в термінах зростання функції $W_F(x)e^{Rx}$. Продемонструємо це на прикладі аналітичних характеристичних в $\mathbb{D}_R$ функцій скінченного порядку.

Нехай $\Phi(r) = a\left(\frac{1}{R-r}\right)^b$, де $a > 0$ і $b > 0$. Зрозуміло, що $\Phi \in \Omega(0, R)$, і неважко перевірити, що $x\Psi(\phi(x)) = Rx - \frac{b+1}{b}(ab)^{\frac{1}{b+1}}x^{\frac{b}{b+1}}$. Тому за лемою 2 для того, щоб $\ln \mu(r, \varphi) \leq a\left(\frac{1}{R-r}\right)^b$ для всіх $r \in [r_0, R)$, необхідно і достатньо, щоб $\ln W_F(x) \leq -Rx + \frac{b+1}{b}(ab)^{\frac{1}{b+1}}x^{\frac{b}{b+1}}$ для всіх $x \geq x_0$, звідки для належного вибору a і b отримуємо таке твердження.

Твердження 4. Нехай φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10), і $\rho = \overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\ln \ln \mu(r, \varphi)}{\ln \frac{1}{R-r}}$.

Тоді $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln(W_F(x)e^{Rx})}{\ln x} = \frac{\rho}{\rho+1}$ і $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})} = \rho + 1$, якщо $0 < \rho < +\infty$, то

$$\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\ln \mu(r, \varphi)}{\left(\frac{1}{R-r}\right)^\rho} = \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{\rho+1}(W_F(x)e^{Rx})}{x^\rho} =$$

$$= \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})} \right)^{\rho+1}}.$$

Аналогом твердження 3 є таке твердження.

Твердження 5. Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x} \rightarrow 0$ і $\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для деякого $c \in (0,1)$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Для того, щоб

$$\alpha(\ln \mu(r, \varphi)) \leq (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{R-r}\right), \quad r \uparrow R, \quad (15)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\alpha(x) \leq (1+o(1))\beta\left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Доведення. З (15) для кожного $\delta \in (1, \frac{1}{c})$ і всіх $r \in [r_0(\delta), R)$ отримаємо $\ln \mu(r, \varphi) \leq \alpha^{-1}\left(\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)\right)$, тобто

$$\ln W_F(x) \leq \alpha^{-1}\left(\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)\right) - rx \quad (17)$$

для всіх $x \geq 0$ і всіх $r \in [r_0(\delta), R)$. Виберемо

$$r = r(x) = R - \frac{1}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right)\right)}.$$

Тоді $r_0(\delta) \leq r(x) < R$ для всіх $x \geq x_0(\delta)$, а з (17) отримуємо

$$\ln W_F(x) \leq \frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)} - Rx + \frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right)\right)},$$

звідки $\ln(W_F(x)e^{Rx}) \leq \frac{2x}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right)\right)}$, і отже, з огляду на умови твердження

$$(1+o(1))\delta\beta\left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}\right) \geq \alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)}\right) = (1+o(1))\alpha(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

звідки на підставі довільності δ отримуємо (16).

Навпаки, якщо виконується умова (16), то для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $x \geq x_0(\delta)$ правильна нерівність

$$\ln W_F(x) \leq -Rx + \frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\delta}\right)} \leq -\int_{x_0}^x \left(R - \frac{1}{\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\delta}\right)}\right) dt + const.$$

Тому за лемою 3 з $\omega(t) = \alpha^{-1} \left(\delta \beta \left(\frac{1}{R-t} \right) \right)$ одержуємо

$$\ln \mu(r, \varphi) \leq \int_{r_0}^r \alpha^{-1} \left(\delta \beta \left(\frac{1}{R-t} \right) \right) dt \leq (R - r_0) \alpha^{-1} \left(\delta \beta \left(\frac{1}{R-r} \right) \right),$$

звідки з погляду на умову $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і довільність δ випливає оцінка (15). Твердження 5 повністю доведено. $\square$

Наслідок 2. За умов твердження 5 для того, щоб $\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\alpha(\ln \mu(r, \varphi))}{\beta \left(\frac{1}{R-r} \right)} = 1$, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta \left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})} \right)} = 1$.

Умови $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x} \rightarrow 0$ і $\alpha \left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))} \right) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ означають, що функція α зростає повільніше, ніж функція β . У випадку, коли α зростає швидше, ніж β , правильне таке твердження.

Твердження 6. Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, $\frac{\alpha^{-1}(c\beta(x))}{x} \rightarrow 0$ і $\beta \left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\beta(x))} \right) = (1 + o(1))\beta(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для деякого $c \in (1, +\infty)$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Для того, щоб виконувалась асимптотична нерівність (15), необхідно і достатньо, щоб

$$\alpha(\ln(W_F(x)e^{Rx})) \leq (1 + o(1))\beta(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Доведення. З (15) як вище, для кожного $\delta \in (1, c)$ всіх $x \geq 0$ і всіх $r \in [r_0(\delta), R)$ одержимо (17). Виберемо тепер $r = R - \frac{1}{x}$. Зрозуміло, що тоді для всіх $x \geq x_0(\delta)$ з (17) одержимо нерівність $\ln W_F(x) \leq \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - Rx + 1$, звідки легко випливає (18).

Навпаки, з (18) отримаємо $\ln W_F(x) \leq \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - Rx$ для кожного $\delta > 1$ і всіх $x \geq x_0$. Тому, прийнявши максимум окремо на $[0, x_0]$ та $[x_0, +\infty]$, отримуємо

$$\begin{aligned} \ln \mu(r, \varphi) &\leq \max \left\{ \max \left\{ \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - (R-r)x : x \leq x_0 \right\}, \right. \\ &\quad \left. \max \left\{ \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - (R-r)x : x \geq x_0 \right\} \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - (R-r)x : x \geq 0 \right\} + \alpha^{-1}(\rho\beta(x_0)). \end{aligned}$$

Але

$$\max \left\{ \alpha^{-1}(\delta\beta(x)) - (R-r)x : x \geq 0 \right\} = \max \left\{ x \left(\frac{\alpha^{-1}(\delta\beta(x))}{x} - (R-r) \right) : x \geq 0 \right\}.$$

Тому точка цього максимуму $x = x(r)$ є такою, що $\frac{\alpha^{-1}(\delta\beta(x(r)))}{x(r)} \geq R - r$ (бо у протилежному випадку ми мали б співвідношення $\ln \mu(r, \varphi) = O(1)$, при $r \uparrow R$). Отже, $\frac{x(r)}{\alpha^{-1}(\delta\beta(x(r)))} \leq \frac{1}{R-r}$, а $\ln \mu(r, \varphi) \leq \alpha^{-1}(\delta\beta(x(r))) + \alpha^{-1}(\rho\beta(x_0))$, звідки з огляду на умови твердження

$$(1 + o(1))\alpha(\ln \mu(r, \varphi)) \leq \delta\beta(x(r)) = (1 + o(1))\delta\beta \left(\frac{x(r)}{\alpha^{-1}(\delta\beta(x(r)))} \right) \leq$$

$$\leq (1 + o(1))\delta\beta\left(\frac{1}{R-r}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

тобто на підставі довільності δ отримаємо асимптотичну нерівність (15). Твердження 6 доведено. $\square$

Наслідок 3. За умов твердження 6 для того, щоб $\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\alpha \ln \mu(r, \varphi)}{\beta\left(\frac{1}{R-r}\right)} = 1$, необхідно і

достатньо, щоб $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln(W_F(x)e^{Rx}))}{\beta(x)} = 1$.

Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta(x) = \rho_\alpha \alpha(x)$, де $\rho_\alpha = \overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\alpha(\ln \mu(r, \varphi))}{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)}$. Якщо $\rho_\alpha \geq 1$, то $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{x} = \frac{1}{x} \alpha^{-1}\left(\frac{c}{\rho_\alpha} \alpha(x)\right) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0, 1)$, і ми можемо використовувати висновок наслідку 3. Якщо ж $\rho_\alpha < 1$, то $\frac{\alpha^{-1}(c\beta(x))}{x} = \frac{\alpha^{-1}(c\rho_\alpha \alpha(x))}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ для кожного $c \in (1, 1/\rho_\alpha)$, і можна використовувати наслідок 4 звідки впливає таке твердження.

Наслідок 4. Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для будь-якого $c \in (0, 1)$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < \infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Якщо $\rho_\alpha \geq 1$, то $\rho_\alpha = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha\left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}\right)}$, якщо $\rho_\alpha < 1$, то $\rho_\alpha = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln W_F(x)e^{Rx})}{\alpha(x)}$.

Перейдемо до розгляду випадків, коли або $\beta(x) \equiv x$, або $\alpha(x) \equiv x$. Почнемо з такого твердження.

Твердження 7. Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Для того, щоб

$$\alpha(\ln \mu(r, \varphi)) \leq \frac{1 + o(1)}{R-r}, \quad r \uparrow R, \quad (19)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\alpha(x) \leq \frac{(1 + o(1))x}{\ln(W_F(x)e^{Rx})}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Доведення. Неважко довести, що з умов $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow \infty$ одержимо $\alpha(x) = (1 + o(1))\alpha\left(\frac{x}{\alpha^2(x)}\right)$, при $x \rightarrow \infty$.

Припустимо, що виконується умова (19), тобто $\ln \mu(r, \varphi) \leq \alpha^{-1}\left(\frac{\delta}{R-r}\right)$ для кожного $\delta > 1$ і всіх $r \in [r_0(\delta), R)$, звідки випливає, що $\ln W_F(x) \leq \alpha^{-1}\left(\frac{\delta}{R-r}\right) - xr$ для всіх $x \geq 0$ і $r \in [r_0(\delta), R)$. Якщо виберемо $r = R - \frac{\delta}{\alpha\left(\frac{x}{\alpha^2(x)}\right)}$, то $r \in [r_0(\delta), R)$ для всіх $x \geq x_0(\delta)$ і

$$\ln W_F(x) \leq \frac{x}{\alpha^2(x)} - Rx + \frac{\delta x}{\alpha\left(\frac{x}{\alpha^2(x)}\right)} = \frac{\delta(1 + o(1))x}{\alpha(x)} - Rx, \quad x \rightarrow +\infty,$$

звідки випливає (20). Навпаки з (20) для кожного $\delta > 1$ і всіх $x \geq x_0(\delta)$ випливає нерівність $\ln W_F(x) \leq \frac{\delta x}{\alpha(x)} - Rx$, тобто

$$\ln \mu(r, \varphi) \leq \max \left\{ x \left(\frac{\delta}{\alpha(x)} - (R - r) \right) : x \geq 0 \right\} + O(1),$$

при $r \uparrow R$. Цей максимум досягається в точці $x = x^*(R)$ такій, що $\frac{\delta}{\alpha(x)} > R - r$, тобто $\alpha(x^*(R)) \leq \frac{\delta}{R-r}$. Оскільки $\ln \mu(r, \varphi) \leq \frac{x^*(r)\delta}{\alpha(x^*(R))} \leq x^*(r) \leq \alpha^{-1} \left(\frac{\delta}{R-r} \right)$, то з огляду на довільність δ отримуємо (19). Твердження 7 доведено. $\square$

Наслідок 5. За умов твердження 7 для того, щоб $\overline{\lim}_{r \uparrow R} (R - r) \alpha(\ln \mu(r, \varphi)) = 1$, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{x} \ln(W_F(x)e^{Rx}) = 1$.

Твердження 8. Нехай $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \left(\frac{x}{\beta(x)} \right) = (1 + o(1))\beta(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F , який задовольняє умову (10). Для того, щоб

$$\ln \mu(r, \varphi) \leq (1 + o(1))\beta \left(\frac{1}{R - r} \right), \quad r \uparrow R, \quad (21)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\ln(W_F(x)e^{Rx}) \leq (1 + o(1))\beta(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (22)$$

Доведення. З (21) для будь-якого $\delta > 1$ і всіх $r \in [r_0(\delta), R)$ одержуємо $\ln \mu(r, \varphi) \leq \delta \beta \left(\frac{1}{R-r} \right)$, і отже, $\ln W_F(x) \leq \delta \beta \left(\frac{1}{R-r} \right) - rx$ для всіх $r \in [r_0(\delta), R)$ і $x \geq 0$, звідки для $r = R - \frac{1}{x}$ отримуємо $\ln W_F(x) \leq \delta \beta(x) - Rx + 1$, тобто правильна асимптотична нерівність (22). Навпаки, з (22) випливає, що $\ln W_F(x) \leq \delta \beta(x) - Rx$ для всіх $x \geq x_0(\delta)$, тому

$$\ln \mu(r, \varphi) \leq \max \left\{ x \left(\frac{\delta \beta(x)}{x} - (R - r) \right) : x \geq 0 \right\} + \text{const.}$$

Оскільки $\frac{\beta(x)}{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$), то останній максимум досягаємо в точці $x^*(r)$ такої, що $\frac{\delta \beta(x^*(r))}{x^*(r)} \geq R - r$, тобто $\frac{x^*(r)}{\beta(x^*(r))} \leq \frac{\delta}{R-r}$. Тому

$$\begin{aligned} \ln \mu(r, \varphi) &\leq \beta(x^*(r)) = \delta(1 + o(1))\beta \left(\frac{x^*(r)}{\beta(x^*(r))} \right) = \\ &= (1 + o(1))\delta \beta \left(\frac{\delta}{R-r} \right) = (1 + o(1))\delta \beta \left(\frac{1}{R-r} \right) \end{aligned}$$

при $r \uparrow R$, тобто одержуємо нерівність (21).

Твердження 8 доведено. $\square$

Наслідок 6. За умов твердження 8 для того, щоб $\overline{\lim}_{r \uparrow R} \frac{\ln \mu(r, \varphi)}{\beta \left(\frac{1}{1-r} \right)} = 1$, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(W_F(x)e^{Rx})}{\beta(x)} = 1$.

3. Оцінки інтеграла $I(r, \varphi)$ і доведення теорем. Нехай $0 < R \leq +\infty$, а $\eta(r)$ – додатна неперервна на $[0, R)$ функція така, що $r + \eta(r) \uparrow R$ при $r \uparrow R$. Тоді

$$I(r, \varphi) = \int_0^\infty W_F(x) \exp\{(r + \eta(r))x\} \exp\{-\eta(r)x\} dx \leq \frac{\mu(r + \eta(r), \varphi)}{\eta(r)},$$

тобто

$$\ln I(r, \varphi) \leq \ln \mu(r + \eta(r), \varphi) + \ln \frac{1}{\eta(r)}. \quad (23)$$

Якщо $R = +\infty$, то можемо вибрати $\eta(r) = 1$ і (23) отримаємо нерівність $\ln I(r, \varphi) \leq \ln \mu(r + 1, \varphi)$, звідки з огляду на (12) з твердження 2 отримуємо формулу (9), а з наслідку 1 – теорему 1. Якщо $0 < R < +\infty$, а функції $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$ такі, що $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то виберемо $\eta(r) = \exp\left\{-\alpha^{-1}\left(2\alpha\left(\ln \frac{1}{R-r}\right)\right)\right\}$. Оскільки $\ln \frac{1}{R-r} < \alpha^{-1}\left(2\alpha\left(\ln \frac{1}{R-r}\right)\right)$, то $r + \eta(r) < R$ і з нерівності (23) одержуємо

$$\ln I(r, \varphi) \leq \ln \mu(r + \eta(r), \varphi) + \alpha^{-1}\left(2\alpha\left(\ln \frac{1}{R-r}\right)\right). \quad (24)$$

Якщо тепер $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = x^\rho$, то

$$\begin{aligned} (R-r)^\rho \ln I(r, \varphi) &\leq (R-r)^\rho \ln \mu(r + \eta(r)) + (R-r)^\rho 2 \ln \frac{1}{R-r} = \\ &= \frac{(R-r)^\rho}{(R-r - (R-r)^2)^\rho} (R-r - \eta(r))^\rho \ln \mu(r + \eta(r), \varphi) + o(1) = \\ &= (1 + o(1)) (R - (r + \eta(r)))^\rho \ln \mu(r + \eta(r), \varphi), \quad r \uparrow R, \end{aligned} \quad (25)$$

якщо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$, то $\eta(r) = \exp\left\{-\ln^2 \frac{1}{R-r}\right\}$ і з (24) випливає, що

$$\frac{\ln \ln I(r, \varphi)}{\ln \frac{1}{R-r}} \leq \frac{\ln \ln \mu(r + \eta(r), \varphi)}{\ln \frac{1}{R-r - \eta(r)}} \frac{\ln \frac{1}{R-r - \eta(r)}}{\ln \frac{1}{R-r}}.$$

Неважко довести, що $\frac{\ln(R - \ln r - \eta(r))}{\ln(R-r)} \rightarrow 1$ ($r \uparrow 1$), тому

$$\frac{\ln \ln I(r, \varphi)}{\ln \frac{1}{R-r}} \leq (1 + o(1)) \frac{\ln \ln \mu(r + \eta(r), \varphi)}{\ln \frac{1}{R-r - \eta(r)}}, \quad r \uparrow \infty. \quad (26)$$

З огляду на (12), (25) і (26) з твердження 4 отримуємо теорему 2. Припустимо тепер, що $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$. Тоді

$$\begin{aligned} \alpha(\ln I(r, \varphi)) &\leq \alpha\left(2 \max\left\{\ln \mu(r + \eta(r), \varphi), \ln \frac{1}{\eta(r)}\right\}\right) \leq \\ &\leq (1 + o(1)) \left(\alpha(\ln \mu(r + \eta(r), \varphi)) + 2\alpha\left(\ln \frac{1}{R-r}\right)\right), \quad r \uparrow R, \end{aligned}$$

а

$$\beta\left(\frac{1}{R-r - \eta(r)}\right) = (1 + o(1))\beta\left(\frac{1}{R-r}\right), \quad r \uparrow R,$$

то з огляду на умову $\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ отримуємо асимптотичну нерівність

$$\alpha(\ln I(r, \varphi)) / \beta \left(\frac{1}{R-r} \right) \leq \frac{\alpha(\ln \mu(r + \eta(r), \varphi))}{\beta \left(\frac{1}{R-r-\eta(r)} \right)}, \quad r \uparrow \infty,$$

звідки з огляду на наслідок 2 і співвідношення (12) отримуємо теорему 3.

Використовуючи (12) і наслідки 3, 4, 5 і 6, подібно доводимо теореми 5, 6, 7, 8.

Автори висловлюють подяку Шереметі М.М. за формулюванням задачі та слушні зауваження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Линник Ю.В.* Разложение случайных величин и векторов / *Ю.В. Линник, Н.В. Островський* – М.: Наука, 1972.
2. *Ramachandran B.* On the order and the type of entire characteristic functions / *B. Ramachandran* // Ann. Math. – 1962. – Vol. 33, №4. – P. 1238-1255.
3. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Теория функций и их приложения. – 1971. – Вып. 15. – С. 43-49.
4. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Вопросы мат. физики и функц. анализа. – К.: Наукова думка, 1976. – С. 43-54.
5. *Шеремета М.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения / *М. Шеремета* // Изв. вузов. Матем. – 1967. – №2. – С. 100-108.
6. *Виницкий Б.В.* Об одном свойстве целых характеристических функций вероятностных законов / *Б.В. Виницкий* // Изв. вузов. Матем. – 1975. – №4. – С. 95-97.
7. *Dewess M.* The tail behaviour of a distribution function and its connection to the growth of its entire characteristic function / *M. Dewess* // Math. Nachr. – 1978. – Vol. 81. – P. 217-231.
8. *Сорокинский В.М.* О росте характеристических функций вероятностных законов / *В.М. Сорокинский* // Изв. вузов. Матем. – 1979. – №9. – С. 48-52.
9. *Шеремета М.Н.* О производной ряда Дирихле / *М.Н. Шеремета, С.И. Федыняк* // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-233.
10. *Шеремета М.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / *М.М. Шеремета, О.М. Сумик* // Мат. Студії. – 1999. – Т. 11, №1. – С. 41-47.
11. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entire functions / *M.M. Sheremeta* // Mat. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1 – P. 74-82.

Стаття: надійшла до редакції 14.05.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ABOUT THE GROWTH OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS

Orest KINASH, Marta PAROLYA

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: okinasch@yahoo.com*

For analytic in $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, characteristic functions φ of probability laws F in terms of generalized orders a relations between the growth of $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$ and decrease of $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$ are established.

Key words: anacletic function, characteristic function, probability laws generalized order.

О ВОЗРОСТАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Орест КИНАШ, Марта ПАРОЛЯ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: okinasch@yahoo.com*

Для аналитических в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, характеристических функций φ вероятностных законов F в терминах обобщённых порядков установлена связь между ростом $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$ и убыванием $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$.

Ключевые слова: аналитическая функция, характеристическая функция, вероятностный закон, обобщённый порядок.

УДК 517.53+519.213

ПРО МОДИФІКОВАНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ТА ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ ЙМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ

Любов КУЛЯВЕЦЬ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com, m_m_sheremeta@list.ru

Для цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp\{s\lambda_k\}$ у термінах модифікованих узагальнених порядків доведено зв'язок між зростанням $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і спаданням a_n . Отримані результати застосовано до вивчення зростання цілих характеристичних функцій ймовірнісних законів.

Ключові слова: ряд Діріхле, ймовірнісний закон, характеристична функція, узагальнений порядок.

1. Вступ. Нехай (λ_k) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

– цілий ряд Діріхле. Прийmemo $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай

$$\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 0\}$$

– максимальний член ряду (1), а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – його центральний індекс.

Через L позначимо клас неперервних на $(-\infty; +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) \equiv \alpha(x_0) > 0$ для $x \leq x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ для $x_0 \leq x \rightarrow +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, і $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{ПЗ}} \subset L^0$.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком цілого ряду Діріхле (1) називається [2] величина $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}$. В [2] доведено таке: якщо

$$\ln k = o(\lambda_k \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k))), \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

для кожного $c \in (0; +\infty)$, а функції $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\beta \in L^0$ такі, що $x \frac{d}{dx} \beta^{-1}(c\alpha(x)) = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, то $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_k|}\right)}$.

Умову $x \frac{d}{dx} \beta^{-1}(c\alpha(x)) = O(1)$, $x \rightarrow +\infty$ у цьому твердженні можна знати [3], якщо модифікувати означення узагальненого порядку.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ модифікованими узагальненими порядком і нижнім порядком називаються, відповідно, величини $\bar{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma}\right)$ і $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma}\right)$.

В [3] доведено таке: якщо $\alpha \in L_{\Pi 3}$ і $\beta \in L^0$, то за умови (2) правильна рівність

$$\bar{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = p_{\alpha\beta}[F], \quad p_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}. \quad (3)$$

Мета нашої праці – узагальнити наведений результат з [3].

Теорема 1. *Нехай показники цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову (2) і або $\alpha \in L_{\Pi 3}$ та $\beta \in L^0$, або $\beta \in L_{\Pi 3}$ та $\alpha \in L^0$. Тоді правильна рівність (3). Якщо, крім того, $\bar{\varrho}_{\alpha\beta}[F] < +\infty$, $\varkappa_k[F] = \frac{\ln |a_k| - \ln |a_{k+1}|}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \nearrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$) і $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{k+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k))} \rightarrow 1$, при $k \rightarrow \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$, то*

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = q_{\alpha\beta}[F], \quad q_{\alpha\beta}[F] = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}. \quad (4)$$

Теорему 1 буде застосовано до дослідження зростання одного класу цілих характеристичних функцій ймовірнісних законів.

2. Доведення теореми 1. Приймемо

$$\bar{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma}\right), \quad \bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma}\right)$$

і припустимо, що $\bar{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu] < +\infty$. Тоді для кожного $\varrho > \bar{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu]$, всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varrho)$ і всіх $k \geq 0$ отримаємо $\ln |a_k| + \sigma \lambda_k \leq \ln \mu(\sigma) \leq \sigma \alpha^{-1}(\varrho \beta(\sigma))$, тобто $\ln |a_k| \leq (\alpha^{-1}(\varrho \beta(\sigma)) - \lambda_k) \sigma$. Виберемо $\sigma = \sigma_k = \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho} \alpha(\delta \lambda_k)\right)$, де $\delta \in (0; 1)$ – довільне число. Тоді $\sigma_k \geq \sigma_0(\varrho)$ для $k \geq k_0(\varrho, \delta)$, тому $\ln |a_k| \leq -(1 - \delta) \lambda_k \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho} \alpha(\delta \lambda_k)\right)$, тобто

$$\frac{\alpha(\delta \lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_k|}\right)} \leq \varrho. \quad (5)$$

Оскільки для цілих рядів Діріхле $\frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_n|} \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$), то з (5) отримаємо

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta}[F] &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\delta \lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)} \frac{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\alpha(\delta \lambda_k)} \leq \\ &\leq \varrho \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta\left(\frac{x}{1-\delta}\right)}{\beta(x)} \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Якщо $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha \in L^0$, то з (6) отримаємо $p_{\alpha\beta}[F] \leq \varrho \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)}$. Але в [4] доведено таке: якщо $\alpha \in L^0$, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha((1+\varepsilon)x)}{\alpha(x)} = A(\varepsilon) \searrow 1$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Тому, спрямовуючи $\delta \uparrow 1$, з останньої нерівності з огляду на довільність $\varrho > \varrho_{\alpha\beta}[\ln \mu]$ випливає, що

$$\varkappa_{\alpha\beta}[F] \leq \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu]. \quad (7)$$

Якщо ж $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, то з (6) подібно випливає нерівність $p_{\alpha\beta}[F] \leq \varrho \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta((1+\delta)x)}{\beta(x)}$, і, спрямовуючи тепер $\delta \downarrow 0$, знову приходимо до нерівності (7), яка є очевидною, коли $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = +\infty$.

Доведення протилежної до (7) нерівності проведемо від супротивного. Припустимо, що $\varkappa_{\alpha\beta}[F] < \rho_{\alpha\beta}[\ln \mu]$. Тоді для кожного $\varrho \in (\varkappa_{\alpha\beta}[F]; \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu])$ і всіх $k \geq k_0(\varrho)$ одержуємо $\ln |a_k| \leq -\lambda_k \beta^{-1} \left(\frac{1}{\varrho} \alpha(\lambda_k) \right)$, тобто

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F) &\leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq k_0(\varrho)} \ln |a_n| + \sigma \lambda_k; \max_{k \geq k_0(\varrho)} \lambda_k \left(\sigma - \beta^{-1} \left(\frac{1}{\varrho} \alpha(\lambda_k) \right) \right) \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \lambda_k \left(\sigma - \beta^{-1} \left(\frac{1}{\varrho} \alpha(\lambda_k) \right) \right) : k \geq 0 \right\} + O(\sigma), \quad \sigma \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Оскільки $\ln \mu(\sigma, F) \rightarrow +\infty$ ($\sigma \rightarrow +\infty$), то звідси випливає, що

$$\sigma \geq \beta^{-1} \left(\frac{1}{\varrho} \alpha(\lambda_{\nu(\sigma, F)}) \right)$$

для $\sigma \geq \sigma_0$, тобто $\lambda_{\nu(\sigma, F)} \leq \alpha^{-1}(\varrho \beta(\sigma))$ для $\sigma \geq \sigma_0$, і отже, [5, с. 17]

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F) &= \ln \mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t, F)} dt \leq \ln \mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\varrho \beta(t)) dt \leq \\ &\leq \ln \mu(\sigma_0, F) + \alpha^{-1}(\varrho \beta(\sigma))(\sigma - \sigma_0) = (1 + o(1)) \alpha^{-1}(\varrho \beta(\sigma)), \quad \sigma \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Звідси за умови $\alpha \in L^0$ (і тим паче $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$) випливає, що $\varrho_{\alpha\beta}[\ln \mu] < \varrho$, що неможливо. Отже, правильна рівність $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \varkappa_{\alpha\beta}[F]$ і нам залишилось довести, що $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu]$.

За нерівністю Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ отримаємо $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu] \leq \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] \leq \overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F]$. Якщо $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu] < +\infty$, то для кожного $\varrho > \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu]$ і всіх $k \geq k_0(\varrho)$ правильна оцінка $\ln |a_k| \leq -\lambda_k \beta^{-1} \left(\frac{1}{\varrho} \alpha(\lambda_k) \right)$, а з огляду на умову (2) $\ln k = o(\ln |a_k|)$ при $k \rightarrow \infty$. Тому [5, с. 23] $M(\sigma, F) \leq A_0(\varepsilon) \mu \left(\frac{\sigma}{1-\varepsilon}, F \right)$ для кожного $\varepsilon \in (0; 1)$, де $A_0(\varepsilon)$ – додатна стала, звідки випливає, що $\ln M(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \ln \mu \left((1 + o(1)) \sigma, F \right)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Тому, якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$, то $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leq \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu]$ і $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] \leq \overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu]$. Якщо $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = +\infty$, то нерівність $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leq \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln \mu]$ є очевидною, і першу частину теореми 1 доведено.

Доведемо другу частину. Оскільки за умови $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] < +\infty$ правильна рівність $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu]$, то залишилось довести, що $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = q_{\alpha\beta}[F]$.

Припустимо спочатку, що $q_{\alpha\beta}[F] < +\infty$. Тоді існують число $q > q_{\alpha\beta}[F]$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (k_j) натуральних чисел такі, що

$$\ln |a_{k_j}| \leq -\lambda_{k_j} \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_{k_j}) \right).$$

Оскільки $\varkappa_k[F] \nearrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$), то [5, с. 19] $\mu(\varkappa_k(F), F) = |a_k| \exp\{\lambda_k \varkappa_k(F)\}$ для всіх k .

Тому для $\sigma_j = \mu(\varkappa_{k_j}(F), F)$ отримаємо

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma_j, F) &= \ln |a_{k_j}| + \lambda_{k_j} \sigma_j \leq -\lambda_{k_j} \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_{k_j}) \right) + \sigma_j \lambda_{k_j} \leq \\ &\leq \max \left\{ \lambda_k \left(\sigma_j - \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_k) \right) \right) : k \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Звідси, застосовуючи отриману у доведенні першої частини теореми оцінку цього максимуму, одержуємо асимптотичну нерівність $\ln \mu(\sigma_j, F) \leq (1+o(1))\alpha^{-1}(q\beta(\sigma_j))\sigma_j$ при $j \rightarrow \infty$. З цієї оцінки випливає нерівність $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] \leq q_{\alpha\beta}[F]$, яка є очевидною, якщо $\bar{q}_{\alpha\beta}[F] = +\infty$.

Для доведення протилежної нерівності припустимо, що $q_{\alpha\beta}[F] > 0$. Тоді для кожного $q \in (0; q_{\alpha\beta}[F])$ і всіх $k \geq k_0(q)$ одержуємо $\ln |a_k| \geq -\lambda_k \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_k) \right)$, тобто $\ln \mu(\sigma, F) \geq \lambda_k \left(\sigma - \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_k) \right) \right)$ для всіх σ і $k \geq k_0(q)$. Виберемо $\sigma_k = \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_k) \right) (1 + \delta)$, де $\delta > 0$ – довільне число. Тоді

$$\ln \mu(\sigma_k, F) \geq \lambda_k \delta \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_k) \right), \quad k \geq k_0(q). \quad (7)$$

Оскільки $\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{k+1})) = \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k))(1 + o(1))$ при $k \rightarrow \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$, то $\sigma_k/\sigma_{k+1} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Зауважимо також, що $\alpha(\lambda_{k+1})/\alpha(\lambda_k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Справді, якщо $\alpha(\lambda_{k_j}) \leq (1 - \xi)\alpha(\lambda_{k_j+1})$ для деякого $\xi \in (0; 1)$ і всіх j , то

$$\frac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{k_j}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{k_j+1}))} \leq \frac{\beta^{-1}(c(1 - \xi)\alpha(\lambda_{k_j+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{k_j+1}))} = \frac{\beta^{-1}((1 - \xi)t_j)}{\beta^{-1}(t_j)} = B(t_j, \xi),$$

де $t_j = c\alpha(\lambda_{k_j+1})$. Тому треба довести, що $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} B(t, \xi) < 1$. Цю нерівність будемо доводити від супротивного. Припустимо, що $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} B(t, \xi) = 1$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (t_n) отримаємо $\beta^{-1}((1 - \xi)t_n) \geq (1 - \varepsilon)\beta^{-1}(t_n)$, тобто за умови $\beta \in L^0$

$$\frac{1}{(1 - \xi)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\beta^{-1}(t_n))}{\beta((1 - \varepsilon)\beta^{-1}(t_n))} = A(\varepsilon) \searrow 1, \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

що неможливо, тобто $\alpha(\lambda_{n+1}) \sim \alpha(\lambda_n)$ при $k \rightarrow \infty$.

Нехай тепер $\sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_{k+1}$. Тоді з огляду на (7), якщо $\alpha \in L^0$, то

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha \left(\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma} \right) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(\sigma_{k+1})} \alpha \left(\frac{\ln \mu(\sigma_k, F)}{\sigma_{k+1}} \right) \geq$$

$$\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha \left(\frac{\lambda_k \delta (\beta^{-1} (\frac{1}{q} \alpha(\lambda_k)))}{\beta^{-1} (\frac{1}{q} \alpha(\lambda_k)) (1+\delta)} \right)}{\beta \left((1+\delta) \beta^{-1} \left(\frac{1}{q} \alpha(\lambda_{k+1}) \right) \right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha \left(\frac{\delta}{1+\delta} \lambda_k \right)}{\frac{1}{q} \alpha(\lambda_{k+1}) A(\delta)} = \frac{q}{A(\delta)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha \left(\frac{\delta \lambda_k}{1+\delta} \right)}{\alpha(\lambda_{k+1})}, \quad (8)$$

де $A(\delta) \equiv 1$, коли $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $A(\delta) \searrow 1$, коли $\beta \in L^0$.

Якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L_0$, то з (8) одержимо

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] \geq \frac{q}{A(\delta)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\alpha(\lambda_{k+1})} = \frac{q}{A(\delta)},$$

звідки випливає нерівність $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] \geq q_{\alpha\beta}[F]$. Якщо ж $\alpha \in L_0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, то $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] \geq q \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\frac{\delta}{1+\delta} \lambda_k)}{\alpha(\lambda_k)}$. Оскільки $\frac{\delta}{1+\delta} \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow +\infty$, то звідси знову отримуємо нерівність $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] \geq q_{\alpha\beta}[F]$, яка є очевидною, коли $q_{\alpha\beta}[F] = 0$. Отже, $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln \mu] = q_{\alpha\beta}[F]$ і теорему 1 доведено повністю.

3. Застосування. Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, \infty)$ функція F називається [6, с. 10] ймовірнісним законом, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(-x) = 0$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, а характеристичною функцією закону F називається [6, с. 12] функція

$$\varphi(z) = \varphi(z; F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x), \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (9)$$

Якщо функція φ допускає аналітичне продовження на всю комплексну площину, то вона називається цілою характеристичною функцією. Відомо [6, с. 37-38], що для того, щоб характеристична функція була цілою, необхідно і достатньо, щоб $W_F(x) = O(e^{-rx})$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $r > 0$, де $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, $x > 0$. Прийmemo $M_\varphi(r) = \max \{|\varphi(z)| : |z| = r\}$. Тоді [6, с. 43] $M_\varphi(r) = \max \{|\varphi(ir)|, |\varphi(-ir)|\}$. Н.І. Яковлева [7-8], узагальнюючи формулу Рамачандрана [9], для знаходження порядку функції φ довела таке: якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, то для того, щоб $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\frac{1}{r} \ln M_\varphi(r))}{\beta(r)} = \gamma > 0$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} \right)}{\alpha(x)} = \frac{1}{\gamma}.$$
 Використовуючи теорему 1, дослідимо зростання цілої

характеристичної функції зрізаного зліва східчастого ймовірнісного закону. Ймовірнісний закон F називається зрізаним зліва [10, с. 27], якщо $F(x) \equiv 0$ для всіх $x \leq 0$ і називається східчастим або дискретним, [10, с. 26], якщо $F(x) = \sum_n p_n E(x - x_n)$, де

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}, \text{ а } \{x_n\} - \text{зліченна множина дійсних чисел, } p_n > 0 \text{ і } \sum_n p_n = 1.$$

Припустимо, що послідовність $X = (x_k)$ така, що $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n \rightarrow +\infty$, а ймовірносний закон F задовольняє умови $F(x) \equiv 0$ для $x \leq 0$, $F(x) = F(x_{k+1})$ для $x_k < x \leq x_{k+1}$ і $F(x_k) \uparrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Клас таких ймовірносних законів позначимо через $\Pi(X)$. Якщо $F \in \Pi(X)$, то

$$\varphi(z) = \int_0^{+\infty} e^{izx} dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{izx_k} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) e^{izx_k}. \quad (10)$$

Зауважимо, що $W_F(x_k) = 1 - F(x_k)$ і

$$W_F(x) = 1 - F(x) = 1 - F(x_{k+1}) = W_F(x_{k+1})$$

для $x_k < x \leq x_{k+1}$. Для того, щоб φ була цілою функцією, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} = +\infty$, а

$$\min \left\{ \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} : x_k < x \leq x_{k+1} \right\} = \frac{1}{x_{k+1}} \ln \frac{1}{W_F(x_{k+1})},$$

то для того, щоб φ була цілою характеристичною функцією ймовірностного закону $F \in \Pi(X)$, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k} \ln \frac{1}{W_F(x_k)} = +\infty$. Звідси випливає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k} \ln \frac{1}{W_F(x_k) - W_F(x_{k+1})} = +\infty$, тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k} \ln \frac{1}{F(x_{k+1}) - F(x_k)} = +\infty$.

Якщо $a_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k} \ln \frac{1}{a_k} = +\infty$. Оскільки з (10) випливає, що $|\varphi(ir)| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-rx_k}$ і $|\varphi(-ir)| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{rx_k}$, то $M_{\varphi}(r) = F(r) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{rx_k}$. Застосовуючи до цього ряду Діріхле теорему 1, приходимо до теореми 2.

Теорема 2. Нехай $\alpha \in L_{\Pi Z}$ та $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ та $\beta \in L_{\Pi Z}$, а φ – ціла характеристична функція ймовірностного закону $F \in \Pi(X)$, де послідовність $X = (x_k)$ задовольняє умову $\ln k = o(x_k \beta^{-1} c \alpha(x_k))$ при $k \rightarrow \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$. Тоді

$$\varrho_{\alpha\beta}[\varphi] =: \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(r)} \alpha \left(\frac{\ln M_{\varphi}(r)}{r} \right) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x_k)}{\beta \left(\frac{1}{x_k} \ln \frac{1}{F(x_{k+1}) - F(x_k)} \right)}.$$

Якщо, крім того, $\varrho_{\alpha\beta}[\varphi] < +\infty$, $\frac{1}{x_{k+1} - x_n} \ln \frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{F(x_{k+2}) - F(x_{k+1})} \nearrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) і $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x_{k+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(x_k))} \rightarrow 1$, при $k \rightarrow \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(r)} \alpha \left(\frac{\ln M_{\varphi}(r)}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x_n)}{\beta \left(\frac{1}{x_n} \ln \frac{1}{F(x_{n+1}) - F(x_n)} \right)}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шеремета М. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения / М. Шеремета // Изв. вузов. Матем. – 1967. – №2. – С. 100-108.
2. Пьяныло Я.Д. О росте целых функций представленных рядами Дирихле / Я.Д. Пьяныло, М.М. Шеремета // Изв. вузов. Матем. – 1975. – №10. – С. 91-93.
3. Зеліско М.М. Модифікація узагальненого порядку цілого ряду Діріхле та її застосування / М.М. Зеліско // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 143-147.
4. Sheremeta M.M. On two classes of positive functions and belonging to them of main characterivhes of entire functions / M.M. Sheremeta // Mat. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 74-83.
5. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле / М.М. Шеремета – К.: ІСДО, 1993.
6. Линник Ю.В. Разложение случайных величин и векторов / Ю.В. Линник, Н.В. Островський – М.: Наука, 1972.

7. Яковлева Н.И. О росте целых характеристических функций вероятностных законов / Н.И. Яковлева // Теория функций и их приложения. – 1971. – Вып. 15. – С. 43-49.
8. Яковлева Н.И. О росте целых характеристических функций вероятностных законов / Н.И. Яковлева // Вопросы математической физики и функц. анализа. – Киев: Наукова думка, 1976.
9. Ramaschhandran B. On the order and the type of entire characteristic functions / B. Ramaschhandran // Ann. Math. – 1962. – Vol. 33, №4. – P. 1238-1255.
10. Рамачандрани Б. Теория характеристических функций / Б. Рамачандрани – М.: Наука, 1975.

*Стаття: надійшла до редакції 27.07.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

ON MODIFIED GENERALIZED ORDERS OF ENTIRE DIRICHLET AND CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS

Lyubov KULYAVEC', Myroslav SHEREMETA

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com, m_m_sheremeta@list.ru*

For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp\{s\lambda_k\}$ a connection between the growth of $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and the decrease of a_n is established in the terms of modified generalized orders. The obtained results are applied to the investigation of the growth of entire characteristic functions of probable laws.

Key words: Dirichlet series, probable law, characteristic function, generalized order.

О МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПОРЯДКАХ ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Любовь КУЛЯВЕЦ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000,
e-mail: ljubasik26@gmail.com, m_m_sheremeta@list.ru*

Для целого ряда Дирихле $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp\{s\lambda_k\}$ в терминах модифицированных обобщённых порядков установлено связь между ростом $M(\sigma) = \sup \{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ и убыванием a_n . Полученные результаты применены к изучению роста целых характеристических функций вероятностных законов.

Ключевые слова: ряд Дирихле, вероятностный закон, характеристическая функция, обобщённый порядок.

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ В ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Інститут математики, Ряшівський університет,
ал. Рейтана, 16 А, Ряшів, 35-959, Польща
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Доведено теорему існування та єдиності, одержано зображення за допомогою вектор-функції Гріна розв'язку задачі Коші

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad a = \text{const},$$
$$u^{(j)}(x, 0) = F_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2,$$

з похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (1, 2)$ та F, F_1, F_2 із просторів узагальнених функцій D' . Тут $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначено за допомогою перетворення Фур'є $\mathfrak{F}((-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)) = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

Ключові слова: похідна дробового порядку, узагальнена функція, задача Коші, вектор-функція Гріна.

1. Вступ. В [1]-[4] було доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівняння

$$D_t^\beta u(x, t) = A(x, D)u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T],$$

з регуляризованою похідною ([4], [5]) функції u порядку $\beta \in (m-1; m)$, $m = 1, 2, \dots$

$$D_t^\beta u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t \frac{u_\tau^{(m)}(x, \tau)}{(t-\tau)^{\beta-m+1}} d\tau, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad m = 1, 2, \dots,$$

де $A(x, D) = \Delta$ у [4], $A(x, D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з гладкими коефіцієнтами, залежними від просторової змінної $x \in \mathbb{R}^n$ та $\beta \in (0, 1)$ у [1], [2], $A(x, D) = -(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$, $\beta \in (0, 1)$ у [3]. Крайові задачі для рівнянь із декількома дробовими похідними вивчали у [6]-[8] та інших працях.

У праці [9] було показано однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - u_{xx} = F(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \mathbb{R} \times (0, T],$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (0, 1)$ у випадку даних – узагальнених функцій повільного зростання.

Наша мета – довести однозначну розв'язність задачі Копі з даними – узагальненими функціями з просторів типу D' для рівняння

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad (1)$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (1, 2)$, де оператор $\mathfrak{J}_{-\alpha} = (-\Delta)^{\alpha/2}$ є оберненим до згорткового оператора $\mathfrak{J}_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$:

$$(\mathfrak{J}_\alpha g)(x) = J_\alpha(x) * g(x) \quad \forall g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n),$$

$J_\alpha(x) = 2^{-\alpha} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} |x|^{\alpha-n}$, $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функція, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних швидкоспадаючих на безмежності функцій.

Оскільки $\mathfrak{J}_{-\alpha}\psi = g \Leftrightarrow \psi = \mathfrak{J}_\alpha g$, то за властивістю перетворення Фур'є $\mathfrak{F}$ згортки $\mathfrak{F}[\psi] = \mathfrak{F}[\mathfrak{J}_\alpha] \mathfrak{F}[g]$, а за формулою

$$\mathfrak{F}[|x|^p] = 2^{p+n} \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+n}{2})}{\Gamma(-\frac{p}{2})} |\lambda|^{-p-n} \quad ([10, \text{с. 156}])$$

одержуємо $\mathfrak{F}[\mathfrak{J}_\alpha] = |\lambda|^{-\alpha}$. Тоді

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{J}_{-\alpha}\psi] = \mathfrak{F}[g] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi], \quad \text{а отже,} \quad \mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}g(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[g(x)].$$

2. Основні позначення. Надалі використовуємо такі позначення:

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – мультиіндекс, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, $D_x^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}$,

$D^{\bar{\gamma}} = D_{x,t}^{\bar{\gamma}} = D_x^\gamma D_t^{\gamma_0}$, $|\bar{\gamma}| = |\gamma| + [\frac{\alpha}{\beta}] \gamma_0$, де p – ціла частина числа p ,

$Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T]$, $n = 1, 2, \dots$,

$\mathfrak{E}(R^n) = C^\infty(R^n)$,

$C^{\infty, (0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l \varphi|_{t=T} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots\}$,

$D(R^n) = C_0^\infty(R^n)$ та $D(Q_T)$ – простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в R^n та Q_T ([10, с. 13]),

$D(\bar{Q}_T) = C_0^{\infty, (0)}(\bar{Q}_T)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{Q}_T$, $\tau < T$;

$\mathfrak{E}'(R^n)$, $D'(\mathbb{R}^n)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій), відповідно, на $\mathfrak{E}(R^n)$, $D(\mathbb{R}^n)$, (f, φ) – значення $f \in \mathfrak{E}'(R^n)$ ($f \in D'(\mathbb{R}^n)$) на основній функції $\varphi \in \mathfrak{E}(R^n)$ (відповідно $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$);

$D'(\bar{Q}_T)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $D(\bar{Q}_T)$, $(f, \varphi)_{Q_T}$ – значення $f \in D'(\bar{Q}_T)$ на $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Позначаємо через $\hat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ ([10], с. 111): $(g \hat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi))$, через $*$ позначаємо операцію згортки узагальнених функцій f і g , тобто узагальнену функцію $f * g$

$$(f * g, \varphi) = (f, g \hat{*} \varphi) \quad \text{для кожної основної функції } \varphi.$$

Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(R) = \{f \in D'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \quad \text{при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \quad \text{при } \lambda \leq 0,$$

де $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Правильні такі співвідношення:

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu},$$

$$f_{-\beta}(t) \hat{*} v(x, t) = f'_{1-\beta}(t) \hat{*} v(x, t) = -f_{1-\beta}(t) \hat{*} v_t(x, t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{v(x, \eta)}{(\eta-t)^\beta} d\eta,$$

$$(x, t) \in Q_T, \quad \beta \in (0; 1), \quad v \in D(\bar{Q}_T).$$

Нагадаємо, що похідна Рімана-Ліувілья функції $v(x, t)$ порядку $\beta > 0$ визначається формулою

$$v_t^{(\beta)}(x, t) = f_{-\beta}(t) * v(x, t),$$

похідна Капуто (регуляризована дробова похідна) порядку $\beta \in (1, 2)$ визначена так:

$$D_t^\beta v(x, t) = f_{2-\beta}(t) * v_{tt}(x, t).$$

Позначаємо через $C^{\alpha, \beta}(Q_T) = C_{x, t}^{\alpha, \beta}(Q_T)$ клас неперервних обмежених функцій $v(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}_T$, які дорівнюють нулю при $t \geq T$ та з неперервними функціями $(-\Delta)^{\alpha/2} v$, $D_t^\beta v$ в Q_T .

Введемо оператори

$$\hat{L}: \quad (\hat{L}v)(x, t) \equiv f_{-\beta}(t) \hat{*} v(x, t) + (-\Delta)^{\alpha/2} v(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad v \in D(\bar{Q}_T),$$

$$L: \quad (Lv)(x, t) \equiv f_{-\beta}(t) * v(x, t) + (-\Delta)^{\alpha/2} v(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad v \in D'(\bar{Q}_T),$$

$$L^{reg}: \quad (L^{reg}v)(x, t) \equiv D_t^\beta v(x, t) + (-\Delta)^{\alpha/2} v(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad v \in C^{\alpha, \beta} x, t(Q_T)$$

та функційний простір

$$X(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^{\infty, (0)}(\bar{Q}_T) : \hat{L}\varphi \in D(\bar{Q}_T)\}.$$

За аналогією з результатами праці [9] можна довести, що $X(\bar{Q}_T)$ непорожній.

3. Формула Гріна.

Лема 1. Для $v \in C^{\alpha, \beta}(Q_T)$, $\psi \in D(\bar{Q}_T)$ правильна формула Гріна

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} v(x, t) (\hat{L}\psi)(x, t) dx dt &= \int_{Q_T} (L^{reg}v)(x, t) \psi(x, t) dx dt + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) dx \int_0^T f_{1-\beta}(t) \psi(x, t) dt + \int_{\mathbb{R}^n} v_t(x, 0) dx \int_0^T f_{2-\beta}(t) \psi(x, t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Доведення. Перетворимо $\int_{Q_T} (L^{reg}v)(x, t) \psi(x, t) dx dt$, інтегруючи частинами. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} D_t^\beta v(x, t) \psi(x, t) dx dt &= \int_{Q_T} (f_{2-\beta}(t) * v_{tt}(x, t)) \psi(x, t) dx dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_{Q_T} \left(\int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} v_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau \right) \psi(x, t) dx dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^T \left(\int_\tau^T (t-\tau)^{1-\beta} \psi(x, t) dt \right) v_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^T \left(\int_0^{T-\tau} \eta^{1-\beta} \psi(x, \eta + \tau) d\eta \right) v_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^T (f_{2-\beta}(\tau) \hat{*} \psi(x, \tau)) v_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(v_\tau(x, \tau)(f_{2-\beta}(\tau) \hat{*} \psi(x, \tau)) \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=T} dx - \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^T \left(v_\tau(x, \tau)(f_{2-\beta}(\tau) \hat{*} \psi(x, \tau))_\tau d\tau \right) dt = \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^n} v_\tau(x, 0)(f_{2-\beta} \hat{*} \psi)(x, 0) dx + \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0)(f_{2-\beta} \hat{*} \psi)_\tau(x, 0) dx + \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^T \left(v(x, \tau)(f_{2-\beta}(\tau) \hat{*} \psi(x, \tau))_{\tau\tau} d\tau \right) dt = \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^n} v_\tau(x, 0)(f_{2-\beta} \hat{*} \psi)(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0)(f_{1-\beta} \hat{*} \psi)(x, 0) dx + \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^T \left(v(x, \tau)(f_{-\beta}(\tau) \hat{*} \psi(x, \tau)) d\tau \right) dt, \\
 &\int_{Q_T} (-\Delta)^{\alpha/2} v(x, t) \psi(x, t) dx dt = \int_{Q_T} v(x, t) (-\Delta)^{\alpha/2} \psi(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

звідки й випливає потрібна формула. $\square$

4. Формулювання задачі. Вважатимемо надалі, що справджується припущення.

Припущення (L): $\beta \in (1, 2)$, $\alpha \neq \beta$, $F_1, F_2 \in \mathfrak{E}'(\mathbb{R}^n)$, $F \in X'(\bar{Q}_T)$.

За припущення (L) вивчаємо задачу Коші

$$(Lu)(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad u(x, 0) = F_1(x), \quad u_t(x, 0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Означення 1. Функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність

$$(u(x, t), (\hat{L}\psi)(x, t))_{Q_T} = (F, \psi)_{Q_T} + \sum_{j=1}^2 (F_j(x), \int_0^T f_{j-\beta}(t) \psi(x, t) dt), \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T), \quad (4)$$

називається розв'язком задачі (3).

Враховуючи формулу Гріна, задачу (3) можна вважати узагальненням задачі Коші

$$L^{reg} u = g_0(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

з регулярними даними g_0, g_1, g_2 . З одержаної нижче теореми 1 можна вивести, що при достатньо гладких і фінітних $F = g_0$, $F_1 = g_1$, $F_2 = g_2$ розв'язки задач (3) та (5), (6) збігаються.

5. Вектор-функція Гріна.

Означення 2. Вектор-функцією Гріна задачі Коші (3) називається така трійка функцій $(G_0(x, t), G_1(x, t), G_2(x, t))$, що при достатньо гладких і фінітних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) g_0(y, \tau) dy + \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y, t) g_j(y) dy, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (7)$$

є класичним (класу $C^{\alpha, \beta}(Q_T)$) розв'язком задачі (5), (6).

З означення вектор-функції Гріна випливає, що

$$LG_0(x, t) = \delta(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad L^{reg}G_j(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad j = 1, 2,$$

$$G_1(x, 0) = \delta(x), \quad (G_2)_t(x, 0) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тут δ – дельта-функція Дірака.

Лема 2. Для кожної функції $\psi \in X(\bar{Q}_T)$

$$\int_{\tau}^T \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau)(\hat{L}\psi)(x, t)dx = \psi(y, t), \quad (y, t) \in \bar{Q}_T, \quad (8)$$

$$\int_{Q_T} G_j(x - y, t)(\hat{L}\psi)(x, t)dxdt = \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y, t)dt, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$G_j(x, t) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x, t) \quad \text{майже всюди в } Q_T, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Доведення. Якщо підставимо розв'язок (7) класичної задачі Коші (5), (6) в формулу (2) (замість функції v), то при довільній $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau)g_0(y, \tau)dy \right) (\hat{L}\psi)(x, t)dxdt + \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_{Q_T} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G_j(x - y, t)g_j(y)dy \right) (\hat{L}\psi)(x, t)dxdt = \\ & = \int_{Q_T} g_0(x, t)\psi(x, t)dxdt + \sum_{j=1}^2 \int_{Q_T} g_j(x)f_{j-\beta}(t)\psi(x, t)dxdt, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\int_{\tau}^T dt \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau)(\hat{L}\psi)(x, t)dx \right) g_0(y, \tau)dyd\tau + \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{Q_T} G_j(x - y, t)(\hat{L}\psi)(x, t)dxdt \right) g_j(y)dy = \\ & = \int_{Q_T} \psi(y, \tau)g_0(y, \tau)dyd\tau + \sum_{j=1}^2 \int_{Q_T} \left(\int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y, t)dt \right) g_j(y)dy. \end{aligned}$$

За довільністю g_0, g_1, g_2 отримуємо правильність формул (8), (9).

Для виведення формули (10) домножимо обидві частини (8) на $f_{j-\beta}$ та проінтегруємо за Q_T . Одержимо

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_{j-\beta}(t)\psi(y, t)dt = \int_0^T f_{j-\beta}(\tau) \left(\int_{\tau}^T \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau)(\hat{L}\psi)(x, t)dxdt \right) d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t f_{j-\beta}(\tau)G_0(x - y, t - \tau)d\tau \right) (\hat{L}\psi)(x, t)dxdt = \\ & = \int_{Q_T} (f_{j-\beta}(t) * G_0(x - y, t))(\hat{L}\psi)(x, t)dxdt. \end{aligned}$$

Замінивши $\int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(y, t)dt$ за формулою (9), отримаємо

$$\int_{Q_T} G_j(x-y, t)(\hat{L}\psi)(x, t)dxdt = \int_{Q_T} (f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y, t))(\hat{L}\psi)(x, t)dxdt.$$

За лемою 3 з [9] для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $\hat{L}\psi = \varphi$ в $\bar{Q}_T$.
Тоді з попередньої рівності

$$\int_{Q_T} (G_j(x-y, t) - f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y, t))\varphi(x, t)dxdt = 0 \quad \forall \varphi \in D(\bar{Q}_T), \quad j = 1, 2,$$

а звідси за лемою Дюбуа-Реймона ([11], с. 95) одержуємо формулу (10).

$$\begin{aligned} \text{Нехай} \quad (\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y, \tau) &= \int_{\tau}^T \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau)\varphi(x, t)dx, \\ (\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y, \tau) &= \int_{Q_T} G_j(x-y, t)\varphi(x, t)dxdt, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad \square$$

Лема 3. При $\beta \in (1, 2)$, $\alpha \neq \beta$

$$\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \rightarrow C^{\infty, (0)}(\bar{Q}_T), \quad \hat{\mathfrak{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \rightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad j = 1, 2.$$

Доведення. У [12] побудовано фундаментальний розв'язок $G_0(x, t)$ рівняння (1). Він набув вигляду

$$G_0(x, t) = \frac{\pi^{n/2} t^{\beta-1}}{|x|^n} H_{2,3}^{2,1} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1, 1) & (\beta, \beta) \\ (1, 1) & (n/2, \alpha/2) \end{matrix} \right), \quad (11)$$

де $H_{p,q}^{m,n} \left(z \middle| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right)$ — H -функція Фокса ([13]).

Використовуємо позначення з [13] для $H_{p,q}^{m,n}$:

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{i=m+1}^q \beta_i, \quad \Delta^* = \sum_{i=1}^q \beta_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i.$$

Для функції G_0 одержимо $a^* = 2 - \beta$, $\Delta^* = \alpha - \beta$. Тому за теоремою 1.1 [13] при $\beta \neq \alpha$ ($\Delta^* \neq 0$) функція G_0 існує для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

Функції $G_j(x, t)$, $j = 1, 2$ знаходимо, враховуючи лему 2 (формули (10)) та властивості H -функцій Фокса з [13].

Властивість 2.1. H -функція симетрична на кожній із множин пар: $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n); (a_{n+1}, \alpha_{n+1}), \dots, (a_p, \alpha_p); (b_1, \beta_1), \dots, (b_m, \beta_m); (b_{m+1}, \beta_{m+1}), \dots, (b_q, \beta_q)$.

Властивість 2.2. При $n \geq 1$, $q \geq m$

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} \left(z \middle| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_{q-1}, \beta_{q-1}) \end{matrix} \right) &= \\ &= H_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left(z \middle| \begin{matrix} (a_2, \alpha_2) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_{q-1}, \beta_{q-1}) \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Властивість 2.3.

$$H_{p,q}^{m,n} \left(\frac{1}{z} \middle| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right) = H_{q,p}^{n,m} \left(z \middle| \begin{matrix} (1-b_1, \beta_1) & \dots & (1-b_q, \beta_q) \\ (1-a_1, \alpha_1) & \dots & (1-a_p, \alpha_p) \end{matrix} \right).$$

Властивість 2.8. Для $\omega, c \in C$, $\sigma > 0$, $k = 0, 1, \dots$

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^k \left[z^\omega H_{p,q}^{m,n} \left(cz^\sigma \middle| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= z^{\omega-k} H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(cz^\sigma \begin{vmatrix} (-\omega, \sigma) & (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) & (k-\omega, \sigma) \end{vmatrix} \right) = \\
 &= (-1)^k z^{\omega-k} H_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(cz^\sigma \begin{vmatrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) & (-\omega, \sigma) \\ (k-\omega, \sigma) & (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

За теоремою 2.1 із [13] для довільних $\lambda \in C$, $m > 0$ та у разі виконання умови (1.1.6)

$$\begin{aligned}
 &H_{p,q}^{m,n} \left(\lambda z \begin{vmatrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{vmatrix} \right) = \\
 &= \lambda^{\frac{b_1}{\beta_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (1 - \lambda^{\frac{1}{\beta_1}})^k H_{p,q}^{m,n} \left(z \begin{vmatrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1 + k\beta_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Перетворимо функцію G_0 за властивістю 2.3 та теоремою 2.1 із [13]

$$\begin{aligned}
 G_0(x, t) &= \frac{\pi^{n/2} t^{\beta-1}}{|x|^n} H_{3,2}^{1,2} \left(\frac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \begin{vmatrix} (0, 1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (0, 1) & (1-\beta, \beta) & \end{vmatrix} \right) = \\
 &= \frac{\pi^{n/2} t^{\beta-1}}{|x|^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (1 - \frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k H_{3,2}^{1,2} \left(t^\beta \begin{vmatrix} (0, 1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (k, 1) & (1-\beta, \beta) & \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

За теоремою 2.7 із [13] про дробове диференціювання Н-функцій при $a^* > 0$, $\sigma \min_{1 \leq j \leq m} [\frac{Re b_j}{\beta_j}] + Re \omega > -1$, $\varrho > 0$

$$\begin{aligned}
 &f_\varrho(z) * \left[z^\omega H_{p,q}^{m,n} \left(z^\sigma \begin{vmatrix} (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) \end{vmatrix} \right) \right] = \\
 &= z^{\omega+\varrho} H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(z^\sigma \begin{vmatrix} (-\omega, \sigma) & (a_1, \alpha_1) & \dots & (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1) & \dots & (b_q, \beta_q) & (-\omega-\varrho, \sigma) \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Оскільки $2-\beta > 0$, то, використовуючи цей факт та формулу (10), отримаємо

$$\begin{aligned}
 &G_2(x, t) = f_{2-\beta}(t) * G_0(x, t) = \\
 &= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (1 - \frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k f_{2-\beta}(t) * \left[t^{\beta-1} H_{3,2}^{1,2} \left(t^\beta \begin{vmatrix} (0, 1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (k, 1) & (1-\beta, \beta) & \end{vmatrix} \right) \right] = \\
 &= \frac{\pi^{n/2} t}{|x|^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (1 - \frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k H_{4,3}^{1,3} \left(t^\beta \begin{vmatrix} (1-\beta, \beta) & (0, 1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (k, 1) & (1-\beta, \beta) & (-1, \beta) & \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Використовуючи властивість 2.2 і знову теорему 2.1 [13], одержуємо

$$\begin{aligned}
 G_2(x, t) &= \frac{\pi^{n/2} t}{|x|^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (1 - \frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k H_{3,2}^{1,2} \left(t^\beta \begin{vmatrix} (0, 1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (k, 1) & (-1, \beta) & \end{vmatrix} \right) = \\
 &= \frac{\pi^{n/2} t}{|x|^n} H_{3,2}^{1,2} \left(\frac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \begin{vmatrix} (0, 1) & (1-n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (0, 1) & (-1, \beta) & \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

За властивістю 2.3 остаточно отримаємо

$$G_2(x, t) = \frac{\pi^{n/2} t}{|x|^n} H_{2,3}^{2,1} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \begin{vmatrix} (1, 1) & (2, \beta) \\ (1, 1) & (n/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{vmatrix} \right).$$

Оскільки

$$G_1(x, t) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x, t) = f'_{2-\beta}(t) * G_0(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(f_{2-\beta}(t) * G_0(x, t)) = \frac{\partial}{\partial t}G_2(x, t),$$

то подібно до попередніх перетворень, але використовуючи властивість 2.8 із [13] про диференціювання H -функцій замість теореми 2.7 із [13], одержуємо

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} \frac{\partial}{\partial t} \left[t H_{2,3}^{2,1} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1, 1) & (2, \beta) \\ (1, 1) & (n/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{matrix} \right) \right] = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} \frac{\partial}{\partial t} \left[t H_{3,2}^{1,2} \left(\frac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \middle| \begin{matrix} (0, 1) & (1 - n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (0, 1) & (-1, \beta) \end{matrix} \right) \right] = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H_{4,3}^{1,3} \left(\frac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \middle| \begin{matrix} (-1, \beta) & (0, 1) & (1 - n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (0, 1) & (-1, \beta) & (0, \beta) \end{matrix} \right) = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H_{3,2}^{1,2} \left(\frac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha} \middle| \begin{matrix} (0, 1) & (1 - n/2, \alpha/2) & (0, \alpha/2) \\ (0, 1) & (0, \beta) \end{matrix} \right) = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H_{2,3}^{2,1} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1, 1) & (1, \beta) \\ (1, 1) & (n/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$G_j(x, t) = \frac{\pi^{n/2} t^{j-1}}{|x|^n} H_{2,3}^{2,1} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1, 1) & (j, \beta) \\ (1, 1) & (n/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{matrix} \right), \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Зауважимо, що вигляд функції $G_1(x, t)$ збігається з одержаним у [3] для випадку $\beta \in (0, 1)$.

Для функцій G_1, G_2 отримаємо $a^* = 2 - \beta$, $\Delta^* = \alpha - \beta$. Тому за теоремою 1.1 [13] при $\beta \neq \alpha$ ($\Delta^* \neq 0$) функції G_1, G_2 існують для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

У [13] побудована асимптотика для H -функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.1.6) та (1.3.2) із [13], за теоремою 1.7 із [13] одержуємо оцінки

$$|G_0(x, t)| \leq \frac{C_0 t^{\beta-1}}{|x|^n}, \quad |G_j(x, t)| \leq \frac{C_j t^{j-1}}{|x|^n}, \quad j = 1, 2 \quad \text{при} \quad |x|^\alpha > t^\beta. \quad (13)$$

За наслідком з теореми 1.12 [13] отримуємо оцінки при $|x|^\alpha < t^\beta$:

$$|G_0(x, t)| \leq \frac{C_0^*}{t|x|^{n-\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \quad \text{якщо} \quad \alpha < n, \quad (14)$$

$$|G_0(x, t)| \leq \frac{C_0^*}{t^{1-\beta+n\beta/\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \quad \text{для} \quad \alpha \geq n, \quad (15)$$

$$|G_j(x, t)| \leq \frac{C_j^* t^{j-1-\beta}}{|x|^{n-\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \quad \text{якщо} \quad \alpha < n, \quad j = 1, 2 \quad (16)$$

$$|G_j(x, t)| \leq \frac{C_j^*}{t^{1-j+n\beta/\alpha}} \ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha} \quad \text{для} \quad \alpha \geq n, \quad j = 1, 2. \quad (17)$$

Тут $C_j, C_j^*, j = 0, 1, 2$ – певні додатні сталі. У випадку

$$\alpha \neq \frac{n+2l}{\sigma}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad \sigma = 1, 2, \dots \quad (18)$$

правильні такі самі оцінки без логарифмів.

З одержаних вище оцінок випливає інтегровність функцій G_j в Q_T , $j = 0, 1, 2$, а звідси – неперервність функцій $(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y, \tau)$ в Q_T та $(\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y)$ в $\mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$.

Оскільки $\frac{\partial}{\partial y_i} G_j(x - y, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} G_j(x - y, t)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, 1, 2$ і подібно для похідних вищих порядків, функція $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, то для всіх γ

$$D^\gamma(\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi)(y) = \int_{Q_T} G_j(x - y, t) D^\gamma\varphi(x, t) dx dt$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$w_{j,\gamma}(y) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x - y, t) D^\gamma\varphi(x, t) dx dt, \quad j = 0, 1, 2, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T).$$

За цих умов з попередньої рівності одержимо, що $D^\gamma(\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi) \in C(\mathbb{R}^n)$ для довільного мультиіндексу γ , а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_j\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Доведемо рівномірну збіжність інтегралів $w_{j,\gamma}(y)$ для кожного γ . Розглядатимемо для простоти випадок (18).

Враховуючи оцінки (13), (16) функцій $G_j(x - y, t)$, $j = 1, 2$, фінітність та обмеженість функцій $D^\gamma\varphi(x, t)$ в Q_T , у випадку $\alpha < n$ отримаємо

$$\begin{aligned} |w_{j,\gamma}(y)| &\leq \left| \int_0^T dt \int_{x:|x-y|^\alpha < t^\beta} G_j(x - y, t) D^\gamma\varphi(x, t) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T dt \int_{x:|x-y|^\alpha > t^\beta} G_j(x - y, t) D^\gamma\varphi(x, t) dx \right| \leq \\ &\leq d_{j,\gamma,0} \int_0^T \left[t^{j-1-\beta} \int_{x:|x-y|^\alpha < t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x, t)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dx + t^{j-1} \int_{x:|x-y|^\alpha > t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x, t)|}{|x-y|^n} dx \right] dt \leq \\ &\leq d_{j,\gamma,1} \left[\int_0^T t^{j-1-\beta} dt \int_0^{t^{\beta/\alpha}} r^{\alpha-1} dr + \int_0^T t^{j-1} dt \int_{t^{\beta/\alpha}}^{+\infty} |D^\gamma\varphi(x, t)| r^{-1} dr \right] \leq \\ &\leq d_{j,\gamma,2} \int_0^T t^{j-1} [1 + |\ln t^{\beta/\alpha}|] dt < +\infty. \end{aligned}$$

Тут і далі $d_{j,\gamma,k}$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \dots$ – додатні сталі.

У випадку $\alpha \geq n$ з врахуванням оцінок (13), (17) одержуємо

$$\begin{aligned} |w_{j,\gamma}(y)| &\leq d_{j,\gamma,3} \int_0^T t^{j-1} \left[\int_{x:|x-y|^\alpha < t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x, t)|}{t^{n\beta/\alpha}} dx + \int_{x:|x-y|^\alpha > t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x, t)|}{|x-y|^n} dx \right] dt \leq \\ &\leq d_{j,\gamma,4} \int_0^T t^{j-1} [1 + |\ln t^{\beta/\alpha}|] dt < +\infty, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Ми довели, що $\hat{\mathfrak{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$.

Оскільки $\frac{\partial}{\partial \tau} G_0(x - y, t - \tau) = -\frac{\partial}{\partial t} G_0(x - y, t - \tau)$ і подібно для похідних вищих порядків, функція $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, то для всіх $\bar{\gamma}$

$$D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y, \tau) = \int_{Q_T} G_0(x - y, t - \tau) D^{\bar{\gamma}}\varphi(x, t) dx dt \quad \text{та} \quad D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y, T) = 0$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$w_{0,\bar{\gamma}}(y, \tau) = \int_{\tau}^T \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t) dx dt, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T).$$

За цієї умови з попередньої рівності одержимо, що $D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0 \varphi) \in C(Q_T)$ для довільного мультиіндексу $\bar{\gamma}$, а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_0 \varphi \in C^{\infty, (0)}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Доведемо рівномірну збіжність інтегралів $w_{0,\bar{\gamma}}(y, \tau)$ для кожного $\bar{\gamma}$. Розглядаємо для простоти випадок (18).

Враховуючи оцінки (13), (14) функції $G_0(x-y, t-\tau)$, фінітність та обмеженість функцій $D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)$ в Q_T , у випадку $\alpha < n$ отримаємо

$$\begin{aligned} |w_{0,\bar{\gamma}}(y, \tau)| &\leq \int_{\tau}^T \left[\int_{x: |x-y|^{\alpha} < (t-\tau)^{\beta}} |G_0(x-y, t-\tau)| \cdot |D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)| dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x: |x-y|^{\alpha} > (t-\tau)^{\beta}} |G_0(x-y, t-\tau)| \cdot |D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)| dx \right] dt \leq \\ &\leq d_{0,\bar{\gamma},0} \int_{\tau}^T \left[\int_{x: |x-y|^{\alpha} < (t-\tau)^{\beta}} \frac{|D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)|}{(t-\tau)^{|x-y|^{n-\alpha}}} dx + \int_{x: |x-y|^{\alpha} > (t-\tau)^{\beta}} \frac{|D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)|}{(t-\tau)^{1-\beta} |x-y|^n} dx \right] dt \leq \\ &\leq d_{0,\bar{\gamma},1} \left[\int_{\tau}^T \frac{dt}{t-\tau} \int_0^{(t-\tau)^{\beta/\alpha}} r^{\alpha-1} dr + \int_{\tau}^T \frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}} dt \int_{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}^{+\infty} |D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)| r^{-1} dr \right] \leq \\ &\leq d_{0,\bar{\gamma},2} \int_{\tau}^T (t-\tau)^{\beta-1} [1 + |\ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|] dt < +\infty. \end{aligned}$$

Тут і далі $d_{0,\bar{\gamma},i}$, $i = 0, 1, \dots$ – додатні сталі.

У випадку $\alpha \geq n$, враховуючи оцінки (13), (15), подібно одержуємо

$$\begin{aligned} |w_{0,\bar{\gamma}}(y, \tau)| &\leq \\ &\leq d_{0,\bar{\gamma},3} \int_{\tau}^T \left[\int_{x: |x-y|^{\alpha} < (t-\tau)^{\beta}} \frac{|D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)|}{(t-\tau)^{1-\beta(1-\frac{n}{\alpha})}} dx + \int_{x: |x-y|^{\alpha} > (t-\tau)^{\beta}} \frac{|D^{\bar{\gamma}} \varphi(x, t)|}{(t-\tau)^{1-\beta} |x-y|^n} dx \right] dt \leq \\ &\leq d_{0,\bar{\gamma},4} \int_{\tau}^T (t-\tau)^{\beta-1} [1 + |\ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|] dt < +\infty. \end{aligned}$$

Ми довели, що $\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \rightarrow C^{\infty, (0)}(\bar{Q}_T)$. Лема доведена.

□

6. Теорема існування та єдиності.

Теорема 1. За припущення (L) існує єдиний розв'язок $u \in D'(\bar{Q}_T)$ задачі (3). Він визначений формулою

$$(u, \varphi)_{Q_T} = (F, \hat{\mathfrak{G}}_0 \varphi)_{Q_T} + \sum_{j=1}^2 (F_j, \hat{\mathfrak{G}}_j \varphi) \quad \forall \varphi \in D(\bar{Q}_T). \quad (19)$$

Доведення. За лемою 3 $\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \rightarrow C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$, $\hat{\mathfrak{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$. За лемою 3 із [9] для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $(\hat{L}\psi)(x, t) = \varphi(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$. Такою є функція

$$\psi(y, \tau) = \int_{\tau}^T dt \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau) \varphi(x, t) dx.$$

Отож, $\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \rightarrow X(\bar{Q}_T)$, права частина в формулі (19) має сенс і формулою (19) визначено $u \in D'(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (19) у тотожність (4), використовуючи лему 2, доводимо, що функція (19) є розв'язком задачі (3)

$$\begin{aligned} (u, \hat{L}\psi)_{Q_T} &= (F, \hat{\mathfrak{G}}_0(\hat{L}\psi))_{Q_T} + \sum_{j=1}^2 (F_j, \hat{\mathfrak{G}}_j(\hat{L}\psi)) = \\ &= (F, \psi)_{Q_T} + \sum_{j=1}^2 (F_j(x), \int_0^T f_{j-\beta}(t) \psi(x, t) dt) \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T). \end{aligned}$$

Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі (3), то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє умову

$$(u, \hat{L}\psi)_{Q_T} = 0 \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T),$$

а тоді з використанням леми 3 із [9], $(u, \varphi)_{Q_T} = 0$ для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, тобто $u = 0$ в $D'(\bar{Q}_T)$. Теорема доведена. $\square$

Зауваження 1. Результат теореми 1 можна поліпшити: визначити залежність характеру особливостей розв'язку задачі при $t = 0$ від особливостей правої частини рівняння та порядків сингулярностей узагальнених функцій у початкових умовах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка / А.Н. Кочубей // Дифф. уравн. – 1990. – Т. 26, №4. – С. 660-670.
2. Eidelman S.D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.
3. Anh V.V. Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas / V.V. Anh, N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics. – 2001. – Vol. 104(5/6). – P. 1349-1387.
4. Ворошилов А.А. Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // ДАН. – 2007. – Т. 414, №4. – С. 1-4.
5. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян – М.: Наука, 1999.
6. Городецкий В.В. Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций / В.В. Городецкий, Я.М. Дринь // Львов. – 1991. – №4-91. – С.57. (Препр./АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат.; №4-91.).
7. Лопушанська Г.П. Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних / Г.П. Лопушанська // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 48-59.
8. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху – М.: Наука, 2005.

9. Лопушанская Г.П. Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, О.В. Пасичник // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, №6. – С. 1288-1299.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов – М.: Наука, 1965.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров – М.: Наука, 1981.
12. Jun Sheng Duan. Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phys. – 2005. – Vol. 46 (013504).
13. Kilbas A.A. H-Transforms / A.A. Kilbas, M. Saigo – Boca-Raton: Chapman and Hall / CRC, 2004.

*Стаття: надійшла до редакції 30.03.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

THE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR FRACTIONAL DERIVATIVE EQUATIONS IN SPACES OF DISTRIBUTIONS

Andrii LOPUSHANSKYJ

*Institute of Mathematics, Rzeszów University,
Al. Rejtana, 16 A, Rzeszo'w, 35-959, Poland
e-mail: alopushanskyj@gmail.com*

We prove the existence and uniqueness theorem and get the representation by means of the Green's vector-function of the solution of the Cauchy problem

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad a = \text{const},$$

$$u^{(j)}(x, 0) = F_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2,$$

with Riemann-Liouville fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (1, 2)$ and F, F_1, F_2 from some spaces of generalized functions D' . Here the fractional n -dimensional Laplace operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$ is defined by its Fourier transform: $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

Key words: fractional derivative, generalized function, Cauchy problem, Green vector-function.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С
ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ
ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ****Андрей ЛОПУШАНСКИЙ***Институт математики, Жешовский университет,
ал. Рейтана, 16 А, Жешов, 35-959, Польша
e-mail: alopushanskyj@gmail.com*

Доказана теорема о существовании и единственности, получено представление с помощью вектор-функции Грина решение задачи Коши

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad a = \text{const},$$

$$u(j)(x, 0) = F_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2,$$

с производной Римана-Лиувилля $u_t^{(\beta)}$ порядка $\beta \in (1, 2)$ и F, F_1, F_2 из пространств обобщенных функций D' . Здесь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определено с помощью преобразования Фурье $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

Ключевые слова: производная дробного порядка, обобщенная функция, задача Коши, вектор-функция Грина.

УДК 517.95

ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION

Yashar MEHRALIYEV

*Baku State University,
Ac. Zahid Khalilov Str., 23, Baku, AZ 1148, Azerbaijan Republic
e-mail: yashar_aze@mail.ru*

In the paper, an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation is investigated. At first the initial problem is reduced to the equivalent problem for which the existence and uniqueness theorem of the solution is proved. Further, using these facts, the existence and uniqueness of the classic solution of the initial problem is proved.

Key words: inverse boundary value problem, elliptic equation, Fourier method, classic solution.

1. Introduction. The inverse problems are favorably developing section of up-to-date mathematics. Recently, the inverse problems are widely applied in various fields of science.

Different inverse problems for various types of partial differential equations have been studied in many papers. First of all we note the papers of A.N. Tikhonov [1], M.M. Lavrentyev [2,3], A.M. Denisov [4], M.I. Ivanchov [5] and their followers.

The goal our paper to prove the uniqueness and existence of the solution of a boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition.

The inverse problems with an integral predetermination condition for parabolic equations were investigated in [6-10].

In the papers [11-15] the inverse boundary value problems were investigated for a second order elliptic equation in a rectangular domain.

2. Problem statement and its reduction to equivalent problem. Consider the equation

$$u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) = a(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

and substitute for it in the domain $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ an inverse boundary value problem with boundary conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

with integral condition

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

and additional condition

$$u(0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

where $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ are the given functions, and $u(x, t)$, $a(t)$ are the desired functions.

Definition 1. A classic solution of problem (1)-(5) is a pair $\{u(x, t), a(t)\}$ of functions $u(x, t)$ and $a(t)$ possessing the following properties:

- 1) the function $u(x, t)$ is continuous in D_T together with all its derivatives contained in equation (1);
- 2) the function $a(t)$ is continuous on $[0, T]$;
- 3) all the conditions (1)-(5) are satisfied in the ordinary sense.

For investigating problem (1)-(5), at first consider the following problem:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(T) = 0, \quad (7)$$

where $a(t) \in C[0, T]$ is a given function, $y = y(t)$ is a desired function, and under the solution of problem (6),(7) we understand a function $y(t) \in C^2[0, T]$ satisfying in $[0, T]$ equation (6) and conditions (7).

The following lemma is valid.

Lemma 1 ([14]). Let a function $a(t) \in C[0, T]$ be such that

$$\|a(t)\|_{C[0, T]} \leq R = \text{const.}$$

Furthermore,

$$\frac{1}{2}T^2R < 1 \quad (8)$$

Then problem (6),(7) has only a trivial solution.

Alongside with inverse boundary value problem consider the following auxiliary inverse boundary value problem. It is required to determine a pair $\{u(x, t), a(t)\}$ of functions $u(x, t)$ and $a(t)$ possessing the properties 1) and 2) of the definition of the classic solution of problem (1)-(5) from relations (1)-(3), and

$$u_x(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (9)$$

$$h''(t) + u_{xx}(0, t) = a(t)h(t) + f(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (10)$$

The following lemma is valid.

Lemma 2. Let $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0, 1]$, $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$), $f(x, t) \in C(D_T)$, $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$), and the following consistency conditions be fulfilled:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (11)$$

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(T). \quad (12)$$

Then the following statements are true:

- 1) each classic solution $u(x, t)$, $a(t)$ of problem (1)-(5) is the solution of problem (1)-(3), (9), (10) as well;
- 2) each solution $u(x, t)$, $a(t)$ of problem (1)-(3), (9), (10) is such that

$$\frac{1}{2}T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} < 1, \quad (13)$$

is the classic solution of problem (1)-(5).

Proof. Let $u(x, t)$, $a(t)$ be a solution of problem (1)-(5). Integrating equation (1) with respect to x from 0 to 1, we have:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx + u_x(1, t) - u_x(0, t) = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx + \int_0^1 f(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (14)$$

Hence, by means of $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) and (3) we obtain (9).

Substituting $x = 0$ in equation (1), we find:

$$u_{tt}(0, t) + u_{xx}(0, t) = a(t)u(0, t) + f(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (15)$$

Further assuming that $h(t) \in C^2[0, T]$, and differentiating (5) twice, we have:

$$u_{tt}(0, t) = h''(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Taking into account the last relation and condition (5) in (15) we obtain (10).

Now suppose that $u(x, t)$, $a(t)$ is a solution of problem (1)-(3), (9), (10), moreover, (13) is fulfilled. Then from (14), allowing for (3) and (9), we find:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx - a(t) \int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (16)$$

By (2), and (11), it is obvious that

$$\int_0^1 u(x, 0) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 u_t(x, T) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \quad (17)$$

Since by Lemma 1, problem (16), (17) has only a trivial solution, then $\int_0^1 u(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) i.e. condition (4) is satisfied.

Further, from (10) and (15) we get:

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(0, t) - h(t)) = a(t)(u(0, t) - h(t)) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (18)$$

By (2) and agreement conditions (12) we have:

$$u(0, 0) - h(0) = \varphi(0) - h(0) = 0, \quad u_t(0, T) - h'(T) = \psi(0) - h'(T) = 0. \quad (19)$$

From (18) and (19), by Lemma 2 we conclude that condition (5) is satisfied. The lemma is proved.

3. Investigation of the existence and uniqueness of the classic solution of the inverse boundary value problem.

Let us look for the first component $u(x, t)$ of the solution $u(x, t)$, $a(t)$ of problem (1)-(3), (9), (10) in the form:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \quad (20)$$

where

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

moreover,

$$m_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Then applying the formal scheme of the Fourier method, from (1), (2) we get

$$u_k''(t) - \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, a) \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 \leq t \leq T), \quad (21)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(T) = \psi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (22)$$

where

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t), \quad f_k(t) = m_k \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx$$

$$\varphi_k = m_k \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = m_k \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

From (21), (22) we obtain:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^T G_0(t, \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau, \quad (23)$$

$$u_k(t) = \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)} \varphi_k + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)} \psi_k + \int_0^T G_k(t, \tau) F_k(\tau; u, a) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (24)$$

where

$$G_0(t, \tau) = \begin{cases} -t, & t \in [0, \tau], \\ -\tau, & t \in [\tau, T], \end{cases} \quad (25)$$

$$G_k(t, \tau) = \begin{cases} \frac{-1}{2\lambda_k ch(\lambda_k T)} [sh(\lambda_k(T+t-\tau)) - sh(\lambda_k(T-(t+\tau)))], & t \in [0, \tau], \\ \frac{1}{2\lambda_k ch(\lambda_k T)} [sh(\lambda_k(T-(t+\tau))) - sh(\lambda_k(T-(t-\tau)))], & t \in [\tau, T]. \end{cases} \quad (26)$$

After substituting the expressions from (23), (24) into (20), for determining the component of the solution of problem (1)-(3), (9), (10) we get

$$u(x, t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^T G_0(t, \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)} \varphi_k + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)} \psi_k + \int_0^T G_k(t, \tau) F_k(\tau; u, a) d\tau \right\} \cos \lambda_k x, \quad (27)$$

where

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t) = m_k \int_0^1 (f(x, t) + a(t)u(x, t)) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Now, from (10), allowing for (20) we have:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_k(t) \right\}. \quad (28)$$

For obtaining an equation for the second component $a(t)$ of the solution $\{u(x, t), a(t)\}$ of problem (1)-(3), (9), (10), substitute expression (24) into (28):

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)} \varphi_k + \frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)} \psi_k + \int_0^T G_k(t, \tau) F_k(\tau; u, a) d\tau \right] \right\}. \quad (29)$$

where

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t) = 2 \int_0^1 (f(x, t) + a(t)u(x, t)) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Thus, problem (1)-(3), (9), (10) was reduced to system (27), (29) with respect to the unknown functions $u(x, t)$ and $a(t)$.

The following lemma is important for studying the uniqueness of the solution of problem (1)-(3), (9), (10).

Lemma 3. *If $\{u(x, t), a(t)\}$ is any solution of problem (1)-(3), (9), (10), then the functions*

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

satisfy system (23), (24) in $[0, T]$.

Proof. Let $\{u(x, t), a(t)\}$ be any solution of problem (1)-(3), (9), (10). Then, having multiplied the both sides of equation (1) by the function $m_k \cos \lambda_k x$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), integrating the obtained equality with respect to x from 0 to 1, and using the relations

$$m_k \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx = \frac{d^2}{dt^2} \left(m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = u_k''(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$m_k \int_0^1 u_{xx}(x, t) \cos \lambda_k x dx = -\lambda_k^2 \left(m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

we get that equation (21) is satisfied.

Similarly, from (2) we get that condition (22) is fulfilled.

Thus, $u_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) is a solution of problem (21), (22). Hence it directly follows that the functions $u_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) satisfy on $[0, T]$ system (23), (24). The lemma is proved.

Remark 1. From Lemma 3 it follows that for proving the uniqueness of the solution of problem (1)-(3), (9), (10), it suffices to prove the uniqueness of the solution of system (27), (29).

In order to investigate problem (1)-(3), (9), (10), consider the following spaces:
Denote by $B_{2,T}^3$ the set of all the functions of the form

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = \pi k)$$

considered in D_T , where each of the functions $u_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) is continuous on $[0, T]$, and

$$J_T(u) \equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

In this set, we determine the operation of addition and multiplication by the number (real) in the usual way: under the zero element of this set we understand the function $u(x, t) \equiv 0$ on D_T , and determine the norm in this set by the formula

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J_T(u).$$

Prove that all these spaces are Banach spaces. Indeed, the validity of the first two axioms of the norms is obvious, and validity of the third axiom of the norm is easily established by means of the summator inequality of Minkowsky; consequently, $B_{2,T}^3$ is a linear normalized space. Now prove its completeness. Let

$$u_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,n}(t) \cos \lambda_k x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

be any sequence which is fundamental in $B_{2,T}^3$. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists a number n_ε such that

$$\begin{aligned} \|u_n(x, t) - u_m(x, t)\|_{B_{2,T}^3} &= \|u_{0,n}(t) - u_{0,m}(t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{k,n}(t) - u_{k,m}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \end{aligned} \quad (30)$$

$\forall n, m \geq n_\varepsilon$

Consequently, for any fixed k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \|u_{0,n}(t) - u_{0,m}(t)\|_{C[0,T]} &< \varepsilon, \\ \|u_{k,n}(t) - u_{k,m}(t)\|_{C[0,T]} &< \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \end{aligned} \quad (31)$$

This means that the sequences $\{u_{0,n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ and for any fixed k ($k = 1, 2, \dots$) : the sequences $\{u_{0,n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ are fundamental in $C[0, T]$ and consequently by the completeness of $C[0, T]$ they converge in the space $C[0, T]$:

$$\begin{aligned} u_{0,n}(t) &\xrightarrow{C[0,T]} u_{0,0}(t) \in C[0, T] \text{ as } n \rightarrow \infty, \\ u_{k,n}(t) &\xrightarrow{C[0,T]} u_{k,0}(t) \in C[0, T] \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (32)$$

Further, by (30), for any fixed number N :

$$\|u_{0,n}(t) - u_{0,m}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k^3 \|u_{k,n}(t) - u_{k,m}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_{\varepsilon}. \quad (33)$$

Using relations (32) and passing to limit as $m \rightarrow \infty$ in (33), we obtain

$$\|u_{0,n}(t) - u_{0,0}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k^3 \|u_{k,n}(t) - u_{k,0}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon}. \quad (34)$$

Hence, by arbitrariness of N (or equivalently, passing to limit as $N \rightarrow \infty$), we obtain

$$\|u_{0,n}(t) - u_{0,0}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_{k,n}(t) - u_{k,0}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon}. \quad (35)$$

Accept the denotation

$$u_0(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,0}(t) \cos \lambda_k x. \quad (36)$$

Since $u_0(x, t) = [u_0(x, t) - u_{n_{\varepsilon}}(x, t)] + u_{n_{\varepsilon}}(x, t)$, and by (35) $u_0(x, t) - u_{n_{\varepsilon}}(x, t) \in B_{2,T}^3$, and also $u_{n_{\varepsilon}}(x, t) \in B_{2,T}^3$, we get that

$$u_0(x, t) \in B_{2,T}^3.$$

Then, by (35) for any $\varepsilon > 0$ there exists a number n_{ε} such that

$$\|u_n(x, t) - u_0(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon}.$$

And this means that the sequence $u_n(x, t)$ converges in $B_{2,T}^3$ to the element $u_0(x, t) \in B_{2,T}^3$. This proves the completeness and consequently the Banach property of the space $B_{2,T}^3$.

Denote by E_T^3 the space $B_{2,T}^3 \times C[0, T]$ of the vector-functions $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$ with the norm

$$\|z(x, t)\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

It is known that $B_{2,T}^3$ and E_T^3 are Banach spaces.

Now, in the space E_T^3 consider the operator

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

where

$$\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u, a) = \tilde{a}(t),$$

$\tilde{u}_0(t), \tilde{u}_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) and $\tilde{a}(t)$ equal the right sides of (23), (24) and (29), respectively.

It is easy to see that

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k t)}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} &< 1 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} \leq 1 \quad (0 \leq t \leq T), \\ \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T+t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} &\leq 1 \quad (0 \leq t \leq \tau \leq T), \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-(t+\tau)))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} \leq 1 \quad (0 \leq t \leq \tau \leq T), \\ \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-(t+\tau)))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} &\leq 1 \quad (0 \leq \tau \leq t \leq T), \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-(t-\tau)))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} \leq 1 \quad (0 \leq \tau \leq t \leq T). \end{aligned}$$

Taking into account these relations, by means of simple transformations we find

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_0(t)| &\leq |\varphi_0| + T|\psi_0| + 2T \int_0^T |f_0(\tau)| d\tau + 2T \int_0^T |a(\tau)| |u_0(\tau)| d\tau, \\ |\tilde{u}_k(t)| &\leq |\varphi_k| + \frac{1}{\lambda_k} |\psi_k| + \frac{1}{\lambda_k} \sqrt{T} \left(\int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda_k} T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_k(t)\|_{C[0,T]}, \\ |\tilde{a}(t)| &\leq |h^{-1}(t)| \left\{ |h''(t) - f(0, t)| \right. \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{T} \left(\int_0^T (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} &\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ &\leq |\varphi_0| + T|\psi_0| + 2T\sqrt{T} \left(\int_0^t |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + 2T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]}, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + 2T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0, t)\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

Suppose that the data of problem (1)-(3), (9), (10) satisfy the following conditions:

- 1) $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi'''(x) \in L_2(0, 1)$ and $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$;
- 2) $\psi(x) \in C^1[0, 1]$, $\psi''(x) \in L_2(0, 1)$ and $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$;
- 3) $f(x, t)$, $f_x(x, t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$ and $f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$);
- 4) $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Then from (37)-(39), we obtain:

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (40)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (41)$$

where

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + 2T\sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &\quad + 2 \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2 \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\ B_1(T) &= 2T(T+1); \\ A_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0, t)\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{6}} \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} \|\psi''(x)\|_{L_2(D_T)} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right\}; \\ B_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot T. \end{aligned}$$

From inequalities (40), (41) we obtain:

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (42)$$

where

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

So, we can prove the following theorem.

Theorem 1. *Let conditions 1-4 be satisfied, and*

$$(A(T) + 2)^2 B(T) < 1. \quad (43)$$

Then problem (1)-(3), (9), (10) has a unique solution in the ball $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2)$ of the space E_T^3 .

Proof. In the space E_T^3 consider the equation

$$z = \Phi z, \quad (44)$$

where the components $\Phi_i(u, a)$ ($i = 1, 2$) of the operator $\Phi(u, a)$ are defined from the right sides of equations (27) and (29).

Consider the operator $\Phi(u, a)$ in the ball $K = K_R$ from E_T^3 . Similar to (42), we get that for any $z, z_1, z_2 \in K_R$ the following estimates are valid:

$$\begin{aligned} \|\Phi z\|_{E_T^3} &\leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \leq \\ &\leq A(T) + B(T) R^2 \leq A(T) + B(T) (A(T) + 2)^2, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} &\leq B(T)R \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \right) \leq \\ &\leq B(T) (A(T) + 2) \|z_1 - z_2\|_{E_T^3}. \end{aligned} \quad (46)$$

Then allowing for (43), from estimations (45) and (46) it follows that the operator Φ acts in the ball $K = K_R$ and is contractive. Therefore, in the ball $K = K_R$ the operator Φ has a unique fixed point $\{u, a\}$ that is a unique solution of equation (44) in the ball $K = K_R$, i.e. it is a unique solution of system (27), (29) in the ball $K = K_R$.

The function $u(x, t)$ as an element of the space $B_{2,T}^3$ is continuous and has continuous derivatives $u_x(x, t), u_{xx}(x, t)$ in D_T .

From (21) it is easy to see that

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \sqrt{2} \left\| \|a(t)u_x(x, t) + f_x(x, t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

Hence it follows that $u_{tt}(x, t)$ is continuous in D_T .

It is easy to verify that equation (1) and conditions (2), (3), (9), (10) are satisfied in the ordinary sense.

Consequently, $u(x, t), a(t)$ is a solution of problem (1)-(3), (9), (10), and by Lemma 3 it is unique in the ball $K = K_R$. The theorem is proved.

By means of Lemma 2, a unique solvability of initial problem (1)-(5) follows from the last theorem.

Theorem 2. *Let all the conditions of Theorem 1 be satisfied*

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, t) dx &= 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\ \varphi(0) &= h(0), \quad \psi(0) = h'(T), \quad \frac{1}{2}(A(T) + 2)T^2 < 1. \end{aligned}$$

Then problem (1)-(5) has a unique classic solution in the ball $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2)$ of the space E_T^3 .

REFERENCES

1. *Tikhonov A.I.* On stability of inverse problems / *A.I. Tikhonov* // Dokl. AN SSSR. – 1943. – Vol. 39, №5. – P. 195-198.
2. *Lavrent'ev M.M.* On an inverse problem for a wave equation / *M.M. Lavrent'ev* // Dokl. AN SSSR. – 1964. – Vol. 157, №3. – P. 520-521.
3. *Lavrent'ev M.M.* Ill-posed problems of mathematical physics and analysis / *M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, S.T. Shishatsky* M.: Nauka, 1980.
4. *Denisov A.M.* Introduction to theory of inverse problems / *A.M. Denisov* – M: MSU, 1994.
5. *Ivanchov M.I.* Inverse problems for equation of parabolic type / *M.I. Ivanchov* – Lviv, 2003.
6. *Ivanchov M.I.* Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions / *M.I. Ivanchov, N.V. Pabyriv's'ka* // Ukr. Math. J. – 2001. – Vol. 53, №5. – P. 674-684.

7. *Ivanchov M.I.* Inverse problem with free boundary for heat equation / *M.I. Ivanchov* // Ukr. Math. J. – 2003. – Vol. 55, №7. – P. 1086-1098.
8. *Prilepko A.I.* On some inverse problems for parabolic equations with final and integral observation / *A.I. Prilepko, A.B. Kostin* // Mat. Sbornik. – 1992. – Vol. 183, №4 – P. 49-68.
9. *Prilepko A.I.* Properties of solution of parabolic equation and uniqueness of the solution of inverse problem on the source with integral predetermination / *A.I. Prilepko, D.S. Tkachenko* // Zhurnal vychislitelnoi mat. and mat. fiziki. – 2003. – Vol. 43, №4. – P. 562-570. (in Russian)
10. *Kamynin V.L.* On inverse problem on definition of right side in parabolic equation with integral predetermination condition / *V.L. Kamynin* // Mat. Zametki. – 2005. – Vol. 77, №4. – P. 522-534 (in Russian).
11. *Solov'ev V.V.* Inverse problems on determination of the source for Poisson equation on a plane / *V.V. Solov'ev* // Zhurnal vychislitelnoi mat. and mat. fiziki. – 2004. – Vol. 44, №5. – P. 862-871 (in Russian).
12. *Solov'ev V.V.* Inverse problems for elliptic equations on a plane / *V.V. Solov'ev* // Diff. Uravn. – 2006. – Vol. 42, №8. – P. 1106-1114. (in Russian)
13. *Hajiyev M.M.* Inverse problem for a degenerate elliptic equation / *M.M. Hajiyev* // Application of func. anal. methods in math. physics equations. – Novosibirsk, 1987. – P. 66-71 (in Russian).
14. *Mehrliyeve Ya.T.* Inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with additional integral condition / *Ya.T. Mehrliyeve* // Vestnik of Udmurtskogo Univ. Math. Mech. Komp. Nauki. – 2012. – Issue 1. – P.32-40 (in Russian).
15. *Mehrliyeve Ya.T.* On solvability of an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation / *Ya.T. Mehrliyeve* // Vestnik Tverskogo Gos. Univ. Serie Prikl. Mat. – 2011. – №23. – P. 25-38 (in Russian).
16. *Khudaverdiyev K.I.* Investigation of one-dimensional mixed problem for a class of pseudo-hyperbolic equations of third order with nonlinear operator right side / *K.I. Khudaverdiyev, A.A. Veliyev* – Baku: Chashyoglu, 2010. – P. 168 (in Russian).

*Стаття: надійшла до редакції 16.01.2012
доопрацьована 20.11.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

ПРО ОБЕРНЕНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ

Яшар МЕГРАЛІЄВ

*Бакинський державний університет,
вул. ак. Захід Халілова, 23, Баку, AZ 1148, Азербайджанська Республіка
e-mail: yashar_aze@mail.ru*

Розглянуто обернену крайову задачу для еліптичного рівняння другого порядку. Спочатку вихідна задача зводиться до еквівалентної задачі, для

якої доведено теореми існування та єдиності її розв'язку. Використовуючи цей факт, доведено існування та єдиність розв'язку вихідної задачі.

Ключові слова: обернена крайова задача, еліптичне рівняння, метод Фур'є, класичний розв'язок.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЕЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Яшар МЕГРАЛИЕВ

*Бакинский государственный университет,
ул. ак. Захид Халилова, 23, Баку, AZ 1148, Азербайджанская Республика
e-mail: yashar_aze@mail.ru*

Рассмотрено обратную граничную задачу для эллиптического уравнения второго порядка. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказано теоремы существования и единственности её решения. Используя этот факт, доказано существование и единственность решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная граничная задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

УДК 517.37.72

ВЛАСТИВОСТІ АДАМАРОВИХ КОМПОЗИЦІЙ ПОХІДНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Оксана МУЛЯВА¹, Мирослав ШЕРЕМЕТА²

¹Київський національний університет харчових технологій,
вул. Володимирівська, 68, Київ, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Досліджено збіжність і зростання адамарових композицій рядів Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками та довільною абсцисою абсолютної збіжності. Знайдено зв'язок між зростанням максимального члена похідної адамарової композиції та зростанням максимального члена адамарової композиції похідних.

Ключові слова: адамарова композиція, ряди Діріхле, максимальний член.

1. Вступ. Для степеневих рядів $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ і $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ з радіусами збіжності $R[f]$ і $R[g]$ ряд $(f*g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k$ називається адамаровою композицією. Добре відомо [1-2], що $R[f*g] \geq R[f]R[g]$. Отримані Ж. Адамаром властивості цієї композиції знайшли застосування [2-3] в теорії аналітичного продовження функцій, зображених степеневими рядами. За умови $R[f] > 0$ і $0 \leq r < R[f]$ нехай $\mu_f(r) = \max\{|f_k| r^k : k \geq 0\}$ – максимальний член степеневого розвинення функції f . Дослідженню асимптотичного поведінки функцій $\mu_{f^{(n)}*g^{(n)}}(r)$ і $\mu_{(f*g)^{(n)}}(r)$ у випадку, коли f і g – цілі функції, присвятив свої праці М. Сен [4-5]. Зокрема він довів [5] таке: якщо функція $(f*g)$ має порядок ϱ і нижній порядок λ , то для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$\mu_{(f*g)^{(n)}}(r) r^{(n+2)\lambda-1-\varepsilon} \leq \mu_{f^{(n+1)}*g^{(n+1)}}(r) \leq \mu_{(f*g)^{(n)}}(r) r^{(n+2)\varrho-1+\varepsilon}.$$

Безпосереднім узагальненням степеневих рядів є ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками. Тому задача про властивості адамарової композиції таких рядів Діріхле є природною і їй ми присвячуємо нашу статтю.

2. Збіжність адамарової композиції. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід’ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), а ряди Діріхле

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

і

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$$

мають абсциси абсолютної збіжності $\sigma_a[F]$ і $\sigma_a[G]$. Адамаровою композицією цих рядів будемо називати ряд Діріхле

$$(F * G)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}. \quad (2)$$

Твердження 1. Якщо $\sigma_a[F] > -\infty$ і $\sigma_a[G] > -\infty$, то $\sigma_a[F * G] \geq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$.

Доведення. Справді, $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| \exp\{\sigma^* \lambda_k\} < +\infty$ для довільного $\sigma^* < \sigma_a[G]$, а

$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \exp\{(\sigma - \sigma^*) \lambda_k\} < +\infty$ для довільного $\sigma < \sigma_a[F] + \sigma^*$. Тому

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| |g_k| e^{\sigma \lambda_k} = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| e^{(\sigma - \sigma^*) \lambda_k} |g_k| e^{\sigma^* \lambda_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| e^{(\sigma - \sigma^*) \lambda_k} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| e^{\sigma^* \lambda_k} < +\infty,$$

для довільного $\sigma < \sigma_a[F] + \sigma^*$, тобто $\sigma_a[F * G] \geq \sigma_a[F] + \sigma^*$, а з огляду на довільність σ^* отримуємо потрібну нерівність. $\square$

Зауважимо, що нерівність $\sigma_a[F * G] \geq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$ правильна також, коли $\sigma_a[F] = -\infty$ і $\sigma_a[G] < +\infty$, якщо $\sigma_a[F] = -\infty$ і $\sigma_a[G] = +\infty$, то $\sigma_a[F * G]$ може дорівнювати будь-якому $c \in [-\infty, +\infty]$. Зауважимо ще, що обернена нерівність $\sigma_a[F * G] \leq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$ загалом не є правильною.

Твердження 2. Рівності $\sigma_a[F * G] = \sigma_a[(F * G)^{(n)}] = \sigma_a[F^{(n)} * G^{(n)}]$ правильні для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Оскільки

$$(F * G)^{(n)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n f_k g_k \exp\{s\lambda_k\} \quad (3)$$

і

$$(F^{(n)} * G^{(n)})(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2n} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad (4)$$

то

$$(F^{(n)} * G^{(n)})(s) = (F * G)^{(2n)}(s). \quad (5)$$

Звідси випливає, що достатньо довести рівність $\sigma_a[F * G] = \sigma_a[(F * G)']$, тобто, що для кожного ряду Діріхле (1) $\sigma_a[F] = \sigma_a[F']$.

Оскільки $F'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \exp\{s\lambda_k\}$, то зрозуміло, що $\sigma_a[F'] \leq \sigma_a[F]$ і $\sigma_a[F] = \sigma_a[F']$, якщо $\sigma_a[F] = -\infty$. Якщо ж $\sigma_a[F] > -\infty$, то для довільного числа $\sigma < \sigma_a[F]$ існує таке натуральне число $k_0(\sigma)$, що $\frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} \leq \frac{\sigma_a[F] - \sigma}{2}$ для $k \geq k_0(\sigma)$, і отже,

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} \lambda_k |f_k| \exp\{\sigma \lambda_k\} &= \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} |f_k| \exp\left\{\lambda_k \left(\sigma + \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k}\right)\right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} |f_k| \exp\left\{\lambda_k \frac{\sigma_a[F] + \sigma}{2}\right\} < +\infty. \end{aligned}$$

З огляду на довільність σ звідси випливає, що $\sigma_a[F'] \geq \sigma_a[F]$, і отже, $\sigma_a[F'] = \sigma_a[F]$. $\square$

3. Нижній R -порядок і R -порядок адамарової композиції рядів Діріхле. Для цілого ($\sigma_a[F] = +\infty$) ряду Діріхле (1) величини

$$\lambda_R[F] = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma}, \quad \varrho_R[F] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma},$$

де $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, називаються [6] відповідно нижнім R -порядком і R -порядком. Добре відомо (див., наприклад, [7, с. 176-178], [8, с. 30]) таке: якщо

$$\ln k = o(\lambda_k \ln \lambda_k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (6)$$

то правильна формула Рітта $\varrho_R[F] = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{- \ln |f_k|}$, причому для кожної зростаючої до $+\infty$ послідовності (λ_k) додатних чисел, для якої умова (6) не виконується, існує [9] цілий ряд Діріхле з цією послідовністю показників, для якого формула Рітта неправильна. Якщо F і G – цілі ряди Діріхле, то за твердженням 1 їхня композиція $F * G$ – також цілий ряд Діріхле. Неважко довести, що за умови (6) $\frac{1}{\varrho_R[F * G]} \geq \frac{1}{\varrho_R[F]} + \frac{1}{\varrho_G[F]}$ і, зрозуміло, обернена нерівність не завжди правильна.

Твердження 3. Рівності $\lambda_R[F * G] = \lambda_R[(F * G)^{(n)}] = \lambda_R[F^{(n)} * G^{(n)}]$ і $\varrho_R[F * G] = \varrho_R[(F * G)^{(n)}] = \varrho_R[F^{(n)} * G^{(n)}]$ правильні для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. З огляду на (5), як у доведенні твердження 2, достатньо довести, що для цілого ряду Діріхле (1) $\lambda_R[F] = \lambda_R[F']$ і $\varrho_R[F] = \varrho_R[F']$. Для цього розглянемо спочатку ряд (1) з $\sigma_a[F] > -\infty$. За формулою Коші для $\sigma < \sigma_a[F]$ і $\delta(\sigma) \in (0, \sigma_a[F] - \sigma)$ – отримаємо

$$|F'(\sigma + it)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau - \sigma - it| = \delta(\sigma)} \frac{F(\tau) d\tau}{(\tau - \sigma - it)^2} \right| \leq \frac{\max\{|F(\tau)| : |\tau - \sigma - it| = \delta(\sigma)\}}{\delta(\sigma)},$$

звідки

$$M(\sigma, F') \leq \frac{M(\sigma + \delta(\sigma), F)}{\delta(\sigma)}. \quad (7)$$

З іншого боку, якщо $s = \sigma + it$, $s_0 = \sigma_0 + it$ і $\sigma_0 < \sigma$, то

$$|F(s)| \leq |F(s_0)| + \left| \int_{s_0}^s F'(\tau) d\tau \right| \leq |s - s_0| \max\{|F'(\tau)| : \tau \in [s_0, s]\},$$

звідки

$$M(\sigma, F) \leq (\sigma - \sigma_0)M(\sigma, F') + M(\sigma_0, F). \quad (8)$$

Якщо $\sigma_a[F] = +\infty$, то виберемо $\delta(\sigma) = 1$ і $\sigma_0 = 0$. Тоді для $\sigma > 0$ отримаємо нерівності $M(\sigma, F') \leq M(\sigma + 1, F)$ і $M(\sigma, F) \leq \sigma M(\sigma, F') + M(0, F)$, з яких випливають потрібні рівності.

Для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності нижній R -порядок і R -порядок вводяться [10] за формулами

$$\lambda_R^0[F] = \lim_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \ln M(\sigma, F), \quad \varrho_R^0[F] = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \ln M(\sigma, F).$$

Відомо [10] таке: якщо

$$\ln k = o(\lambda_k / \ln \lambda_k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (9)$$

то правильна формула $\varrho_R^0[F] = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} \ln^+ |f_k|$. $\square$

За твердженням 1 з рівностей $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$ випливає тільки, що $\sigma_a[F * G] \geq 0$. Рівність $\sigma_a[F * G] = 0$ може не виконуватись. Легко довести також, що за умови (9) $\varrho_R^0[F * G] \leq \varrho_R^0[F] + \varrho_R^0[G]$, обернена нерівність не завжди правильна.

Твердження 4. Якщо $\sigma_a[F * G] = 0$, то рівності $\lambda_R^0[F * G] = \lambda_R^0[(F * G)^{(n)}] = \lambda_R^0[F^{(n)} * G^{(n)}]$ і $\varrho_R^0[F * G] = \varrho_R^0[(F * G)^{(n)}] = \varrho_R^0[F^{(n)} * G^{(n)}]$ правильні для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Як у доведенні твердження 3, достатньо довести, що для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності $\lambda_R^0[F] = \lambda_R^0[F']$ і $\varrho_R^0[F] = \varrho_R^0[F']$.

Виберемо $\delta(\sigma) = |\sigma|/2$ і $\sigma_0 = -1$. Тоді з (7) і (8) отримуємо нерівності $M(\sigma, F') \leq \frac{2}{|\sigma|} M\left(\frac{\sigma}{2}, F\right)$ і $M(\sigma, F) \leq M(\sigma, F') + M(-1, F)$, звідки легко випливають потрібні рівності. $\square$

Для ряду Діріхле (1) з $\sigma_a[F] > -\infty$ і для $\sigma < \sigma_a[F]$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|f_n| \times \exp\{\sigma \lambda_n\} : n \geq 0\}$ – максимальний член, $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |f_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс, а $\Lambda(\sigma, F) = \lambda_{\nu(\sigma, F)}$ – центральний показник. Відомо ([7, с. 182], [8, с. 17]), що за умови зростання $\mu(\sigma, F)$

$$\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \Lambda(x, F) dx. \quad (10)$$

Якщо в означеннях R -порядку $\varrho_R[F]$ і нижнього R -порядку $\lambda_R[F]$ цілого ряду Діріхле (1) замість $\ln M(\sigma, F)$ поставимо $\ln \mu(\sigma, F)$, то отримаємо величини, які позначимо відповідно через $\varrho_R[\ln \mu]$ і $\lambda_R[\ln \mu]$. Заміною $\ln M(\sigma, F)$ на $\Lambda(\sigma, F)$ подібно визначаємо $\varrho_R[\Lambda]$ і $\lambda_R[\Lambda]$.

Лема 1. За умови (6) для цілого ряду Діріхле (1) правильні рівності $\varrho_R[F] = \varrho_R[\ln \mu] = \varrho_R[\Lambda]$, якщо, крім того, $\varrho_R[F] < +\infty$, то $\lambda_R[F] = \lambda_R[\ln \mu] = \lambda_R[\Lambda]$.

Доведення. З нерівності Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ випливає, що $\varrho_R[\ln \mu] \leq \varrho_R[F]$ і $\lambda_R[\ln \mu] \leq \lambda_R[F]$.

Для доведення протилежних нерівностей через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ нехай ϕ – функція, обернена до Φ' , а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [11], якщо $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для $\sigma \geq \sigma_0$ і $\ln k = o(\lambda_k \Psi(\phi(\lambda_k)))$ при $k \rightarrow \infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$

$$M(\sigma, F) \leq \mu((1 + \varepsilon)\sigma, F), \quad \sigma \geq \sigma_1(\varepsilon). \quad (11)$$

Якщо тепер $\varrho_R[\ln \mu] < +\infty$, то для кожного $\varrho > \varrho_R[\ln \mu]$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varrho)$ правильна нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \leq \exp\{\varrho\sigma\}$. Якщо виберемо $\Phi(\sigma) = \exp\{\varrho\sigma\}$, то $\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{1}{\varrho}$,

$\phi(x) = \frac{1}{\varrho} \ln \frac{x}{\varrho}$ і $\lambda_k \Psi(\phi(\lambda_k)) = \frac{\lambda_k}{\varrho} \ln \frac{\lambda_k}{e\varrho}$, а з наведеного вище твердження з [11] випливає, що за умови (6) правильна нерівність (11), звідки з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ легко отримуємо нерівності $\varrho_R[F] \leq \varrho_R[\ln \mu]$ і $\lambda_R[F] \leq \lambda_R[\ln \mu]$. Якщо $\varrho_R[\ln \mu] = +\infty$, то нерівність $\varrho_R[F] \leq \varrho_R[\ln \mu]$ очевидна. Рівності $\varrho_R[F] = \varrho_R[\ln \mu]$ і $\lambda_R[F] = \lambda_R[\ln \mu]$ доведено.

Рівності $\varrho_R[\ln \mu] = \varrho_R[\Lambda]$ і $\lambda_R[\ln \mu] = \lambda_R[\Lambda]$ легко випливають з таких отриманих з (10) оцінок $\ln \mu(\sigma, F) \leq \sigma \Lambda(\sigma, F) + \ln \mu(0, F)$ і

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \frac{\varepsilon\sigma}{1 + \varepsilon} \Lambda\left(\frac{\sigma}{1 + \varepsilon}, F\right) + \ln \mu(0, F).$$

Лемі 1 доведено. $\square$

З твердження 3 і леми 1 випливає таке твердження.

Твердження 5. Нехай $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$. Тоді за умови (6) для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\sigma} = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, (F * G)^{(n)})}{\sigma} = \varrho_R[F * G],$$

якщо, крім того, $\varrho_R[F * G] < +\infty$, то

$$\underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\sigma} = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, (F * G)^{(n)})}{\sigma} = \lambda_R[F * G].$$

Перейдемо до рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. На відміну від цілих рядів Діріхле у випадку, коли $\sigma_a[F] = 0$, максимальний член може бути обмеженою функцією, а центральний показник може прямувати до $+\infty$. У цьому випадку послідовність коефіцієнтів обмежена, тому з огляду на тривіальність ми його не розглядатимемо. Отже, надалі будемо вважати, що

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_k| = +\infty. \quad (12)$$

Величини $\varrho_R^0[\ln \mu]$, $\lambda_R^0[\ln \mu]$, $\varrho_R^0[\Lambda]$ і $\lambda_R^0[\Lambda]$ визначимо, як вище, замінивши в означеннях R -порядку $\varrho_R^0[F]$ і нижнього R -порядку $\lambda_R^0[F]$ ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності $\ln M(\sigma, F)$, відповідно, на $\ln \mu(\sigma, F)$ і $\Lambda(\sigma, F)$.

Лема 2. За умов (9) і (12) для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності правильні рівності $\varrho_R^0[F] = \varrho_R^0[\ln \mu] = \varrho_R^0[\Lambda]$ і $\lambda_R^0[F] = \lambda_R^0[\ln \mu] = \lambda_R^0[\Lambda]$.

Доведення. З нерівності Коші випливає, що $\varrho_R^0[\ln \mu] \leq \varrho_R^0[F]$ і $\lambda_R^0[\ln \mu] \leq \lambda_R^0[F]$. Для доведення протилежних нерівностей використаємо такий результат з [12]: якщо $\ln k = o(\lambda_k \gamma(\lambda_k))$ при $k \rightarrow \infty$, де γ – додатна, неперервна і спадна до 0 на $[0, +\infty)$ функція, то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma < 0$

$$\ln M(\sigma, F) \leq \ln \mu \left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F \right) + \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \gamma^{-1} \left(\frac{|\sigma|}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2} \right) + K(\varepsilon),$$

де $K(\varepsilon)$ – додатна стала, залежна тільки від $\varepsilon > 0$. Вибравши $\gamma(x) = 1/\ln x$ ($x \geq 2$), звідси за умови (9) отримуємо оцінку

$$\ln M(\sigma, F) \leq \ln \mu \left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F \right) + \exp \left\{ \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^2}{\sigma} \right\} + K(\varepsilon),$$

тобто

$$|\sigma| \ln \ln M(\sigma, F) \leq \max \left\{ |\sigma| \ln \ln \mu \left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F \right), \quad \varepsilon(1+\varepsilon)^2, \quad |\sigma| K(\varepsilon) \right\},$$

звідки з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ легко отримуємо нерівності $\varrho_R^0[F] \leq \varrho_R^0[\ln \mu]$ і $\lambda_R^0[F] \leq \lambda_R^0[\ln \mu]$. Рівності $\varrho_R^0[F] = \varrho_R^0[\ln \mu]$ і $\lambda_R^0[F] = \lambda_R^0[\ln \mu]$ доведено.

З умови (12) випливає зростання функції $\ln \mu(\sigma, F)$, а з (10) легко отримуємо оцінки

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \ln \mu(-1, F) + (1 - |\sigma|)\Lambda(\sigma, F) \quad \text{і} \quad \ln \mu(\sigma, F) \geq |\sigma|\Lambda(2\sigma, F) + \ln \mu(-1, F),$$

з яких випливають рівності $\varrho_R^0[\ln \mu] = \varrho_R^0[\Lambda]$ і $\lambda_R^0[\ln \mu] = \lambda_R^0[\Lambda]$. Лему 2 доведено. $\square$

Аналогом твердження 5 є таке твердження.

Твердження 6. Нехай $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$ і $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_k| |g_k| = +\infty$. Тоді за умови (9) для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \Lambda(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)}) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \Lambda(\sigma, (F * G)^{(n)}) = \varrho_R^0[F * G],$$

і

$$\underline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \Lambda(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)}) = \underline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \Lambda(\sigma, (F * G)^{(n)}) = \lambda_R^0[F * G].$$

Це твердження випливає з твердження 4 і леми 2, якщо зауважити, що з умов $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$ і $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_k| |g_k| = +\infty$ випливає, що $\sigma_a[F * G] = 0$.

4. Зв'язок між зростанням максимальних членів адамарової композиції похідних і похідної адамарової композиції. Цей результат є основним у нашій статті.

Теорема 1. Нехай $n \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ і $m > n$. Якщо $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$ і виконується умова (6), то

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m - n) \varrho_R[F * G]$$

і (за умови $\varrho_R[F * G] < +\infty$)

$$\underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m - n) \lambda_R[F * G].$$

Якщо ж $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_k| |g_k| = +\infty$ і виконується умова (9), то

$$\overline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m - n) \varrho_R^0[F * G]$$

і

$$\underline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m - n) \lambda_R^0[F * G].$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned} \mu(\sigma, (F * G)^{(m)}) &= \lambda_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}^m |f_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}| |g_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}| \exp\{\sigma \lambda_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}\} = \\ &= \lambda_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}^{m-n} \lambda_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}^n |f_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}| |g_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}| \exp\{\sigma \lambda_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}\} \leq \\ &\leq \lambda_{\nu(\sigma, (F * G)^{(m)})}^{m-n} \mu(\sigma, (F * G)^{(n)}) \end{aligned}$$

і, подібно,

$$\mu(\sigma, (F * G)^{(n)}) \leq \lambda_{\nu(\sigma, (F * G)^{(n)})}^{n-m} \mu(\sigma, (F * G)^{(m)}),$$

то

$$\Lambda^{m-n}(\sigma, (F * G)^{(n)}) \leq \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} \leq \Lambda^{m-n}(\sigma, (F * G)^{(m)}),$$

тобто

$$(m - n) \ln \Lambda(\sigma, (F * G)^{(n)}) \leq \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} \leq (m - n) \ln \Lambda(\sigma, (F * G)^{(m)}).$$

Звідси, використовуючи твердження 5, отримуємо першу частину теореми. Другу її частину отримаємо, якщо використаємо твердження 6. Теорему доведено. $\square$

З огляду на (5) з теореми для $m = 2n$ випливає такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$ і виконується умова (6), то

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = n \varrho_R[F * G]$$

і (за умови $\varrho_R[F * G] < +\infty$)

$$\underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = n \lambda_R[F * G].$$

Якщо ж $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_k| |g_k| = +\infty$ і виконується умова (9), то

$$\overline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = n \varrho_R^0[F * G], \quad \underline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = n \lambda_R^0[F * G].$$

Якщо ж виберемо $m = 2(n+1)$, то отримаємо такий наслідок, який є аналогом наведеного результату М. Сена.

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$ і виконується умова (6), то

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n+1)} * G^{(n+1)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (n+2) \varrho_R[F * G]$$

і (за умови $\varrho_R[F * G] < +\infty$)

$$\underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n+1)} * G^{(n+1)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (n+2) \lambda_R[F * G].$$

Якщо ж $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_k| |g_k| = +\infty$ і виконується умова (9), то

$$\overline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n+1)} * G^{(n+1)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (n+2) \varrho_R^0[F * G],$$

і

$$\underline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, F^{(n+1)} * G^{(n+1)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (n+2) \lambda_R^0[F * G].$$

5. Властивості адамарових композицій похідних Салагена аналітичних в одиничному крузі функцій. Нехай S – клас аналітичних в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій вигляду

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k, \quad z = re^{i\theta}. \quad (13)$$

Для $f \in A$ похідні Салагена визначаються [13] рівностями $D^{(1)}f(z) = zf'(z)$ і $D^{(n)}f(z) = D^{(1)}D^{(n-1)}f(z)$, тобто

$$D^{(n)}f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n f_k z^k, \quad (14)$$

і отже, $D^{(n)}f \in A$. Якщо в ряді (13) зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо ряд Діріхле

$$F(s) = f(e^s) = e^s + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{sk\}, \quad (15)$$

показники $\lambda_k = k$ якого задовольняють умову (9). Зрозуміло, що

$$F^{(n)}(s) = f(e^s) = e^s + \sum_{k=2}^{\infty} k^n f_k \exp\{sk\} = D^{(n)}f(z)|_{z=e^s}. \quad (16)$$

Тому з теореми можемо одержати відповідний результат для адамарових композицій похідних Салагена аналітичних в одиничному крузі функцій.

Для функції (13) прийmemo $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $0 \leq r < 1$, і нехай $\mu_f(r)$ – максимальний член ряду (13). За умови (12) $M_f(r) \geq \mu_f(r) \rightarrow +\infty$ при $r \uparrow 1$. Порядок $\varrho^0[f]$ і нижній порядок $\lambda^0[f]$ визначимо формулами

$$\lambda^0[f] = \varliminf_{r \uparrow 1} (1-r) \ln \ln M_f(r), \quad \varrho^0[f] = \overline{\lim}_{r \uparrow 1} (1-r) \ln \ln M_f(r).$$

Оскільки $1-r = (1+o(1))|\ln r|$ при $r \uparrow 1$, то в цих формулах замість $1-r$ можна поставити $|\ln r|$, оскільки $F(s) = f(e^s)$ і $r = e^\sigma$, то $|\sigma| = |\ln r|$, $M_f(r) = M(\ln r, F)$, $\mu_f(r) = \mu(\ln r, F)$, $\lambda^0[f] = \lambda_R^0[F]$ і $\varrho^0[f] = \varrho_R^0[F]$. Тому з теореми з огляду на (16) впливає такий наслідок.

Наслідок 3. Нехай $n \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ і $m > n$. Якщо $f \in A$, $g \in A$ і $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_k||g_k| = +\infty$, то

$$\varliminf_{r \uparrow 1} (1-r) \ln \frac{\mu_{D^{(m)}}(f * g)(r)}{\mu_{D^{(n)}}(f * g)(r)} = (m-n)\lambda^0[f * g]$$

і

$$\overline{\lim}_{r \uparrow 1} (1-r) \ln \frac{\mu_{D^{(m)}}(f * g)(r)}{\mu_{D^{(n)}}(f * g)(r)} = (m-n)\varrho^0[f * g].$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hadamard J. Theoreme sur le series entieres / J. Hadamard // Acta math. – 1899. – Bd. 22. – P. 55-63.
2. Hadamard J. La serie de Taylor et son prolongement analitique / J. Hadamard // Scientia phys.-math. – 1901. – №12. – P. 1-100.
3. Биберах Л. Аналитическое продолжение / Л. Биберах – М.: Наука, 1967.
4. Sen M.K. On some properties of an integral function $f * g$ / M.K. Sen // Riv. Math. Univ. Parma (2). – 1967. – Vol. 8. – P. 317-328.
5. Sen M.K. On the maximum term of a class of integral functions and its derivatives / M.K. Sen // Ann. Pol. Math. – 1970. – Vol. 22. – P. 291-298.
6. Ritt J. On certain points in the theory of Dirichlet series / J. Ritt // Amer. J. of Math. – 1928. – Vol. 50, №1. – P. 73-86.
7. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев – М.: Наука, 1976.
8. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле / М.М. Шеремета – К.: ІСДО, 1993.
9. Гече Ф.И. Замечания о формулах для определения линейного порядка целой функции, представленной рядом Дирихле / Ф.И. Гече // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, №5. – С. 7-12.
10. Гайсин А.М. Оценки роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости / А.М. Гайсин // Матем. сб. – 1982. – Т. 117, №3. – С. 412-424.
11. Мулява О.М. Оцінки максимуму модуля цілого ряду Діріхле / О.М. Мулява, Я.Я. При-тула // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С. 65-70.
12. Мулява О.М. Про класи збіжності рядів Діріхле / О.М. Мулява // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №11. – С. 1485-1494.
13. Salăgean G.St. Subclasses of univalent functions / G.St. Salăgean // Lecture Notes in Math. – 1983. – Vol. 1013. – P. 362-372.

Стаття: надійшла до редакції 30.05.2012
прийнята до друку 12.12.2012

**PROPERTIES OF HADAMARD COMPOSITIONS
OF THE DERIVATIVES OF DIRICHLET SERIES****Oksana MULYAVA¹, Myroslav SHEREMETA²**¹*Kyiv National University of Food Technologies,
Volodymyrska Str., 68, Kyiv, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua*²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru*

The convergence and the growth of Hadamard's compositions of Dirichlet series with nonnegative and increasing to $+\infty$ exponents and arbitrary abscissa of absolute convergence are investigated. A connection between the growth of the maximal term of the derivative of Hadamard's composition and the growth of the maximal term of Hadamard's composition of the derivatives is established.

Key words: Hadamard's composition, Dirichlet series, maximal term.

**СВОЙСТВА АДАМАРОВСКИХ КОМПОЗИЦИЙ
ПРОИЗВОДНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ****Оксана МУЛЯВА¹, Мирослав ШЕРЕМЕТА²**¹*Киевский национальный университет пищевых технологий,
ул. Владимирская, 68, Киев, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua*²*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru*

Исследованы сходимость и рост адамаровских композиций рядов Дирихле с неотрицательными возрастающими к $+\infty$ показателями и произвольной абсциссой абсолютной сходимости. Установлена связь между ростом максимального члена производной адамаровской композиции и ростом максимального члена адамаровской композиции производных.

Ключевые слова: адамаровская композиция, ряды Дирихле, максимальный член.

УДК 513.6

КВАТЕРНІОННІ АЛГЕБРИ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМ ПОЛЕМ

Оксана НОВОСАД

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: oksana.novosad@gmail.com

Нехай $Q = (a, b/F)$ – кватерніонна алгебра над псевдоглобальним полем (тобто полем алгебричних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [1] полем констант), $\text{char}(F) \neq 2$. Нехай $K = F(x, \sqrt{ax^2 + b}) = F(Q)$. Отримано рівності, які зв'язують плейси поля K та кватерніонні алгебри над F , аналогічні рівностям, які отримав І. Ган в [2].

Ключові слова: кватерніонна алгебра, група Брауера, плейс, псевдоглобальне поле, поле функцій роду 0, принцип Гассе.

1. Вступ. Нехай F – псевдоглобальне поле з $\text{char}(F) \neq 2$ (тобто поле алгебричних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [1] полем констант). Під плейсом розуміємо клас еквівалентності дискретних нормувань поля F . Позначимо

$$P(F) = \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} - \text{плейс поля } F \}.$$

Нехай $\hat{F}_{\mathfrak{p}}$ – відповідне поповнення поля F , що відповідає плейсу $\mathfrak{p} \in P(F)$. Нехай K – поле алгебричних функцій від однієї змінної над полем F . Під плейсом поля K/F розуміємо нормалізоване дискретне нормування поля K , яке тривіальне на множині $F^* = F \setminus \{0\}$. Визначимо

$$\mathbb{P}(K/F) = \{ P \mid P - \text{плейс поля } K/F \}.$$

Далі $\hat{K}_P$ позначатиме поповнення поля K , що відповідає плейсу $P \in \mathbb{P}(K/F)$. Розглянемо випадок, коли поле K є роду нуль. Тоді відомо, що $K = F(x, \sqrt{ax^2 + b})$, де $a, b \in F^*$ та x – трансцендентний над F . Таке поле K визначене з точністю до ізоморфізму алгеброю кватерніонів $Q = (a, b/F)$, тому далі пишемо $F(Q)$ замість K .

2. Групи Брауера полів роду 0. В цьому параграфі ми коротко нагадаємо основні властивості полів алгебричних функцій роду 0, що пов'язані з алгебрами кватерніонів над їхніми полями констант.

Нехай F – поле і $\text{char}(F) \neq 2$. Нехай K – поле алгебричних функцій від однієї змінної роду 0 над полем F . Відомо [6], що поле K є роду 0 тоді і лише тоді, коли поле K набуло вигляду $K = F(x, \sqrt{ax^2 + b})$, де $a, b \in F^* = F \setminus \{0\}$ та x –

трансцендентний над F . Нехай $(a, b/F)$ – 4-вимірна алгебра кватерніонів над F з базою $\{1, i, j, k : i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji = k\}$. Тоді $K = F(x, \sqrt{ax^2 + b})$, де $a, b \in F^*$ та x – трансцендентний над F . Таке поле K визначене з точністю до ізоморфізму алгеброю кватерніонів $Q = (a, b/F)$, тому далі пишемо $F(Q)$ замість K . Нагадаємо [6], що дві алгебри кватерніонів Q та Q' ізоморфні як алгебри ($Q \cong Q'$) тоді і лише тоді, коли $F(Q)$ та $F(Q')$ ізоморфні як поля ($F(Q) \cong F(Q')$).

Нехай V_P – кільце дискретного нормування плейса $P \in \mathbb{P}(K/F)$. Пригадаємо, що відображення $\text{Br}(V_P) \rightarrow \text{Br}(K)$, породжене вкладенням $V_P \hookrightarrow K$, ін'єктивне. Коли $\overline{V}_P$ – поле лишків кільця V_P , то $\overline{V}_P$ – скінченне розширення поля F . Степінь P визначається так: $\deg(P) = [\overline{V}_P : F]$.

Нехай F – довільне поле, тоді $\text{Br}(F)$ – його група Брауера, що складається з класів подібних (еквівалентних) центральних простих скінченновимірних алгебр над полем F . Елемент $\alpha \in \text{Br}(F)$, що містить алгебру A , позначаємо $[A]$. Дві центральні прості F -алгебри A і B подібні (еквівалентні), якщо існують такі натуральні числа $m, n \geq 1$, що алгебри $A \otimes_F M_n(F)$ і $B \otimes_F M_m(F)$ ізоморфні. Всі матричні алгебри над полем F еквівалентні між собою і становлять нульовий клас – нейтральний елемент групи Брауера. Клас алгебри A^o , інверсної до алгебри A (тобто A^o складається з таких самих елементів, що і A , але з множенням в оберненому порядку), є оберненим до класу алгебри A . Розширення K поля F називають полем розкладу алгебри A , якщо алгебра $A \otimes_F K$ ізоморфна матричній алгебрі $M_m(K)$. Еквівалентні алгебри мають спільні поля розкладу. Підмножина $\text{Br}(K/F)$ групи $\text{Br}(F)$, яка складається з усіх елементів групи $\text{Br}(F)$, що розкладаються в полі K , є підгрупою групи $\text{Br}(F)$.

Для локального поля F (поповнення скінченного розширення поля $\mathbb{Q}$ або поповнення скінченного розширення поля $\mathbb{F}_q(x)$) відомо, що $\text{Br}(F) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

У випадку глобального поля F (скінченного розширення $\mathbb{Q}$ або скінченного розширення $\mathbb{F}_q(x)$) існує точна послідовність

$$0 \rightarrow \text{Br}(F) \rightarrow \bigoplus_{P \in P(F)} \text{Br}(\hat{F}_P) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Наступна відома лема знадобиться нам у випадку, коли поле алгебричних функцій роду нуль є полем раціональних функцій.

Лема 1. Нехай F – довільне поле. Нехай $K = F(Q)$ для довільної алгебри кватерніонів Q над полем F . Такі твердження еквівалентні:

- (i) Q – розкладна над F ;
- (ii) існує таке $P \in \mathbb{P}(K/F)$, що $\deg(P) = 1$;
- (iii) K – чисто трансцендентне над F .

Доведення можна знайти у [6] чи у [7]. З цієї леми випливає такий наслідок (щодо доведення див. [7]).

Наслідок 1. Нехай F – довільне поле. Нехай Q – алгебра кватерніонів над полем F , тоді $K = F(Q)$. Для довільного поля $E \supseteq F$ такого, що $[E : F] < \infty$, E розкладає Q тоді і лише тоді, коли $E \supseteq \overline{V}_P$ для деякого $P \in \mathbb{P}(K/F)$.

Нехай F – псевдоглобальне поле, тобто поле алгебричних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [1] полем констант. Якщо Q – алгебра кватерніонів над полем F , тоді ми позначимо носій алгебри Q так:

$$\text{supp}(Q) = \left\{ \mathfrak{p} \in P(F) \mid Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}} \text{ - нерозкладна} \right\}.$$

Далі ми використовуємо аналоги локальної та глобальної теорії полів класів для загальних локальних полів (тобто повних дискретно нормованих полів з квазі-скінченними полями лишків і псевдоглобальних полів), зокрема, такі факти.

Теорема 1 ([3], [4]). 1. Якщо F – загальне локальне поле, то існує ізоморфізм $\text{inv}_{\mathfrak{p}}: \text{Br}(\hat{F}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

2. Для псевдоглобального поля F існує точна послідовність:

$$0 \longrightarrow \text{Br}(F) \xrightarrow{i} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P(F)} \text{Br}(\hat{F}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sum \text{inv}_{\mathfrak{p}}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad (1)$$

$$\text{де } i([A]) = [A \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}] = A_{\mathfrak{p}}, \sum \text{inv}_{\mathfrak{p}}(A) = \sum_{\mathfrak{p}} \text{inv}_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}).$$

Лема 2. Нехай Q та Q' – алгебри кватерніонів над псевдоглобальним полем F , а E – розширення скінченного степеня поля F . Якщо $\text{supp}(Q') \subseteq \text{supp}(Q)$, тоді $\text{supp}(Q' \otimes_F E) \subseteq \text{supp}(Q \otimes_F E)$.

Доведення. Нехай $P \in \text{supp}(Q' \otimes_F E)$, а $\mathfrak{p}$ – обмеження P на F . Тоді $\mathfrak{p} \in \text{supp}(Q')$, тому $\mathfrak{p} \in \text{supp}(Q)$. $\hat{F}_{\mathfrak{p}}$ має єдину кватерніонну алгебру за твердженням (1) попередньої теореми 1, то $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}} \simeq Q' \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}$, тому і $Q \otimes_F \hat{E}_{\mathfrak{p}} \simeq Q' \otimes_F \hat{E}_{\mathfrak{p}}$, яка нерозкладна. Отже, $P \in \text{supp}(Q \otimes_F E)$. $\square$

З точної послідовності (1) теореми 1 отримуємо як наслідки такі два важливі факти.

Принцип Гассе (частковий випадок). Нехай F – псевдоглобальне поле, Q та Q' – алгебри кватерніонів над F . Тоді $Q \cong Q'$ тоді і лише тоді, коли $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}} \cong Q' \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}$ для всіх плейсів $\mathfrak{p} \in P(F)$. Зокрема, Q – розкладна тоді і лише тоді, коли $\text{supp}(Q)$ – порожня множина.

Закон взаємності Гільберта. Нехай F – псевдоглобальне поле. Для кватерніонної алгебри Q над F множина $\text{supp}(Q)$ скінченна і складається з парної кількості точок. Для довільної парної кількості точок S існує єдина (з точністю до ізоморфізму) кватерніонна алгебра Q така, що $\text{supp}(Q) = S$.

Доведення. Це випливає з точної послідовності (1) у члені $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in P(F)} \text{Br}(\hat{F}_{\mathfrak{p}})$. $\square$

Твердження 1. Нехай F – довільне поле. Припустимо, що Q – кватерніонна алгебра з діленням над F . Нехай $K = F(Q)$. Для елемента $r \in F^* \setminus F^{*2}$ такі твердження еквівалентні:

- (i) $F(\sqrt{r})$ – поле розкладу Q .
- (ii) $F(\sqrt{r})$ – поле лишків плейсів K/F . Якщо F – псевдоглобальне поле і $\text{supp}(Q) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$, тоді (i) та (ii) також еквівалентні такому твердженню:
- (iii) $r \notin \hat{F}_{\mathfrak{p}_1}^{*2} \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_2}^{*2} \cup \dots \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_n}^{*2}$.

Доведення. Еквівалентність (i) та (ii) добре відома. Залишається довести, що умова (i) еквівалентна умові (iii). Всі міркування, проведені в [2] для класичного випадку глобального поля, придатні і в нашій ситуації. Відтворимо їх для зручності читача.

Розглядаючи імплікацію (i) $\Rightarrow$ (iii), для кожного $\mathfrak{p} \in \text{supp}(Q)$ алгебра $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}$ – нерозкладна, але $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}(\sqrt{r})$ – розкладна, оскільки $Q \otimes_F F(\sqrt{r})$ – розкладна. Звідси $\hat{F}_{\mathfrak{p}}(\sqrt{r}) \neq \hat{F}_{\mathfrak{p}}$, інакше кажучи, $r \notin \hat{F}_{\mathfrak{p}_1}^{*2} \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_2}^{*2} \cup \dots \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_n}^{*2}$, де $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\} = \text{supp}(Q)$.

Доведення імплікації (iii) $\Rightarrow$ (i) ґрунтується на принципі Гассе (факт 1) для псевдоглобального поля. Достатньо перевірити, що $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}(\sqrt{r})$ розкладається для кожного плейса $\mathfrak{P}$ поля $F(\sqrt{r})$. Нехай $\mathfrak{p}$ – обмеження $\mathfrak{P}$ на F . Якщо $\mathfrak{p} \notin \text{supp}(Q)$, то $Q \otimes_F \widehat{F(\sqrt{r})}_{\mathfrak{P}}$ очевидно розкладається, оскільки розкладається $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}$. Якщо $\mathfrak{p} \in \text{supp}(Q)$, то $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}$ нерозкладна. За умовою (iii) $\hat{F}_{\mathfrak{p}}(\sqrt{r})$ – квадратичне розширення поля $\hat{F}_{\mathfrak{p}}$. Згідно з фактом 1 над полем $\hat{F}_{\mathfrak{p}}$ існує єдина алгебра з діленням, яка розкладається над кожним квадратичним розширенням поля $\hat{F}_{\mathfrak{p}}$. Тому $Q \otimes_F \hat{F}_{\mathfrak{p}}(\sqrt{r})$ розкладається, отже, $Q \otimes_F \widehat{F(\sqrt{r})}_{\mathfrak{P}}$ розкладається в кожному плейсі $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(F(\sqrt{r}))$. $\square$

3. Обчислення $\bigcap_{P \in \mathbb{P}(K/F)} \text{Br}(\overline{V}_P/F)$. Теорема 2 є першим кроком у нашому вивченні групи Брауера $\text{Br}(F)$ поля алгебричних функцій роду нуль над псевдоглобальним полем. Зауважимо, що у випадку глобального поля аналогічні результати отримані І. Ган у [2].

Найперше сформулюємо просту лему.

Лема 3. Нехай $\mathcal{T}$ – множина потужності $|\mathcal{T}| = n$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді кількість підмножин множини $\mathcal{T}$ з парною кількістю елементів дорівнює 2^{n-1} .

Нехай $\text{supp}(Q) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ – носій алгебри Q . Введемо множини

$$\mathcal{F}_Q = \left\{ r \in F \mid r \notin \hat{F}_{\mathfrak{p}_1}^{*2} \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_2}^{*2} \cup \dots \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_n}^{*2} \right\} \quad (2)$$

та

$$\mathcal{I}_Q = \left\{ [Q'] \mid \begin{array}{l} Q' - \text{алгебра кватерніонів над } F \\ \text{і } \text{supp}(Q') \subseteq \text{supp}(Q). \end{array} \right\} \quad (3)$$

Теорема 2. Нехай F – псевдоглобальне поле. Припустимо, що Q – алгебра кватерніонів з діленням над F . Нехай $K = F(Q)$. Тоді

$$\bigcap_{P \in \mathbb{P}(K/F)} \text{Br}(\overline{V}_P/F) = \bigcap_{\deg(P)=2} \text{Br}(\overline{V}_P/F) = \bigcap_{r \in \mathcal{F}_Q} \text{Br}(F(\sqrt{r})/F) = \mathcal{I}_Q. \quad (4)$$

Потужність такої множини дорівнює 2^{n-1} , де $n = |\text{supp}(Q)|$, $\text{supp}(Q)$ – носій алгебри Q , тобто множина тих плейсів, в яких Q не розкладається.

Доведення. Доведення знову ґрунтується на міркуваннях, застосованих у [2] для випадку глобального поля F , і на принципі Гассе для групи Брауера псевдоглобального поля F .

Доведемо спочатку, що $\bigcap_{r \in \mathcal{F}_Q} \text{Br}(F(\sqrt{r})/F) = \mathcal{I}_Q$. Відомо [8], що кожен елемент відносної групи Брауера $\text{Br}(F(\sqrt{r})/F)$ розширення $F(\sqrt{r})/F$ є класом кватерніонної алгебри над полем F . Звідси випливає, що кожен елемент з перетину

$\bigcap_{r \in \mathcal{F}_Q} \text{Br}(F(\sqrt{r})/F) \in$ класом кватерніонної алгебри над полем F . Якщо Q' – нерозкладна кватерніонна алгебра, для якої $\text{supp}(Q') \subseteq \text{supp}(Q)$, то $\mathcal{F}_Q \subseteq \mathcal{F}_{Q'}$ і за твердженням 1, застосованим до Q , поле $F(\sqrt{r})$ розкладає Q' для кожного $r \in \mathcal{F}_Q$. Звідси випливає, що $[Q'] \in \bigcap_{r \in \mathcal{F}_Q} \text{Br}(F(\sqrt{r})/F)$.

Для доведення оберненого включення, нехай $\mathfrak{p} \in \text{supp}(Q') \setminus \text{supp}(Q)$. Припустимо, що $\text{supp}(Q) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$. З теореми про слабку апроксимацію [9] отримаємо існування $r \in F$, для якого $r \in \hat{F}_{\mathfrak{p}_1}^{*2}, r \notin \hat{F}_{\mathfrak{p}_1}^{*2} \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_2}^{*2} \cup \dots \cup \hat{F}_{\mathfrak{p}_n}^{*2}$, тобто $r \in \mathcal{F}_Q \setminus \mathcal{F}_{Q'}$. Тому $[Q'] \notin \text{Br}(F(\sqrt{r})/F)$.

Середня рівність у (4) випливає з явного обчислення $\bigcap_{\deg(P)=2} \text{Br}(\overline{V}_P/F)$. Якщо $\text{supp}(Q) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$, то з твердження 1 випливає, що

$$\mathcal{F}_Q = \{r \in F : r \in F^* \setminus F^{*2} \mid F(\sqrt{r}) - \text{поле лишків плейса поля } K/F\}.$$

Звідси отримуємо

$$\bigcap_{\deg(P)=2} \text{Br}(\overline{V}_P/F) = \bigcap_{r \in \mathcal{F}_Q} \text{Br}(F(\sqrt{r})/F), \quad (5)$$

тобто середню рівність в (4).

Нарешті, для доведення першої рівності в (4) зауважимо, що включення $\subseteq$ випливає з (5).

Для доведення протилежного включення розглянемо кватерніонну алгебру $[Q'] \in \bigcap_{r \in \mathcal{F}_Q} \text{Br}(F(\sqrt{r})/F)$ над F з носієм $\text{supp}(Q') \subseteq \text{supp}(Q)$. Якщо $P \in \mathbb{P}(K/F)$, то $[\overline{V}_P : F] < \infty$ і $\overline{V}_P$ розкладає Q . За лемою 2 $\text{supp}(Q' \otimes_F \overline{V}_P) \subseteq \text{supp}(Q \otimes_F \overline{V}_P) = \emptyset$. Отже, $\overline{V}_P$ розкладає Q' .

Тепер, застосувавши факт 2 (закон взаємності Гільберта) та лему 3, отримуємо, що потужність множини $\mathcal{I}_Q$ дорівнює потужності множини всіх підмножин (з парною кількістю елементів) множини з n елементів, тобто 2^{n-1} . $\square$

Розглянемо природне відображення обмеження

$$h: \text{Br}(K) \rightarrow \prod_{P \in \mathbb{P}(K/F)} \text{Br}(K\overline{V}_P),$$

де $\overline{V}_P$ – поле лишків плейса $P \in \mathbb{P}(K/F)$.

У наступній праці застосуємо отриманий результат для знаходження перешкод до виконання принципу Гассе для поля $K = F(Q)$, де $Q = (a, b/F)$ – кватерніонна алгебра над полем F . А саме для алгебри кватерніонів Q з діленням над псевдоглобальним полем F . Цей результат дає змогу описати ядро відображення обмеження h .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Fried M.D.* Field Arithmetic / *M.D. Fried, M. Jarden* – Springer-Verlag, 2008.
2. *Han I.* Hasse principles for the Brauer group of algebraic function fields of genus zero over global fields / *I. Han* // Pacific J. of Math. – 2003. – Vol. 208, №2. – P. 255-282.
3. *Serre J.-P.* Local fields / *J.-P. Serre* – Springer-Verlag, 1979.
4. *Andriychuk V.* On the Brauer group and the Hasse principle for pseudoglobal fields / *V. Andriychuk* // Вісн. Львів. ун-ту вип. – 2003. – Т. 61, №2. – P. 3-12.
5. *Scharlau W.* Über die Brauer-gruppe eines algebraischen funktionenkörpers in einer variablen / *W. Scharlau* // J. Reine Angew. Math. – 1969. – Vol. 239/240. – P. 1-6.

6. Gille P. Central simple algebras and Galois cohomology / P. Gille, T. Szamuely – Cambridge Univ. Press, 2006.
7. Han I. Tractability of algebraic function fields in one variable of genus zero over global fields / I. Han // J. Algebra. – 2001. – №244. – P. 217-235.
8. Draxl P. K. Skew fields / P.K. Draxl // Cambridge Univ. Press, 1983. – №81. – P. 182.
9. Алгебраическая теория чисел [под ред. Дж. Касселса и Фрелиха] – М.: Мир, 1969.

*Стаття: надійшла до редакції 20.02.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

QUATERNION ALGEBRAS OVER PSEUDOGLOBAL FIELD

Oksana NOVOSAD

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: oksana.novosad@gmail.com*

Let $Q = (a, b/F)$ be a quaternion algebra over a pseudoglobal field F (i.e., an algebraic function field in one variable with pseudofinite [1] constant field), $\text{char}(F) \neq 2$, $K = F(x, \sqrt{ax^2 + b}) = F(Q)$. We obtain the equalities relating the places of K and the quaternion algebra over F . The similar equalities were obtained by I. Han in [2] in the case of a global field F .

Key words: quaternion algebra, Brauer group, place, pseudoglobal field, function field of genus zero, Hasse principle.

КВАТЕРНИОННЫЕ АЛГЕБРЫ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

Оксана НОВОСАД

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: oksana.novosad@gmail.com*

Допустим, что $Q = (a, b/F)$ – кватернионная алгебра над псевдоглобальным полем (то есть полем алгебраических функций с одной переменной с псевдоконечным [1] полем констант), $\text{char}(F) \neq 2$. Допустим, что $K = F(x, \sqrt{ax^2 + b}) = F(Q)$. Получено равенства, которые связывают плейсы поля K и кватернионные алгебры над F , аналогичны равенствам, полученным И. Хан в [2].

Ключевые слова: кватернионная алгебра, группа Брауэра, плейс, псевдоглобальное поле, поле функций рода 0, принцип Гассе.

УДК 519.41.47

СТРУКТУРНІ ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕННИХ DM -ГРУП

Тетяна САВОЧКІНА

Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди,
вул. Блюхера, 2, Харків, 61000
e-mail: savochkinat@rambler.ru

Досліджено скінченні 2-групи, в яких усяка максимально циклічна підгрупа має доповнення (DM -групи). Знайдено низку структурних властивостей таких груп. Отримано повну характеристику скінченних DM -груп експоненти 4.

Ключові слова: скінченні 2-групи, доповнювальні підгрупи, максимально циклічні підгрупи.

1. Вступ. Нехай G – скінченна 2-група і $S(G)$ – система усіх її максимально циклічних підгруп. Якщо усяка підгрупа $A \in S(G)$ має в G доповнення, то згідно з [1] група G називається DM -групою. Суттєві результати з опису скінченних DM -груп отримано в [1-3]. Зокрема, в [2] знайдено необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G експоненти 2^n , $n \geq 4$, була DM -групою. Зауважимо, що характеристику DM -груп в [1] подаємо на підставі поняття базисної системи циклічних підгруп, яке фактично є частинним випадком поняття рівномірного добутку циклічних підгруп ([4, с. 159-179]). Однак будову скінченних DM -груп ще не повністю з'ясовано. Зокрема, відкритим залишається питання про будову DM -груп експоненти 4 і 8.

Ми отримали низку важливих тверджень стосовно скінченних DM -груп, а також знайшли повний опис DM -груп експоненти 4. Крім того, започатковано дослідження DK -груп, тобто скінченних DM -груп, у яких усякий гомоморфний образ є DM -групою.

Результати досліджень доповідали на 7-й Міжнародній алгебричній конференції в Україні [5].

Усі невизначені поняття та позначення можна знайти в [1], [2] і [4].

2. Основна частина. Розглядатимемо два класи скінченних 2-груп: L і H , де L – клас усіх скінченних DM -груп, H – множина усіх груп із L , для яких усякий гомоморфний образ є DM -групою.

2.1. Загальні твердження про скінченні DM -групи. Нехай G – довільна скінченна 2-група. Циклічна підгрупа $A = \langle a \rangle$ називається максимально циклічною в G , якщо з умови $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle \leq G$ випливає, що $\langle a \rangle = \langle b \rangle$. Підгрупа M називається

доповнювальною в групі G (має доповнення в G), якщо існує така підгрупа T , що $G = M \cdot T$ і $M \cap T = 1$ ([1]). Якщо група G є добутком попарно переставних підгруп M_i , тобто $G = M_1 \cdot M_2 \cdots M_k$, то кажуть ([4]), що група G факторизується попарно переставними підгрупами M_i . Згідно з [4] факторизація $G = M_1 \cdot M_2 \cdots M_k$ називається точною, якщо перетин кожної підгрупи M_i з добутком усіх інших підгруп M_j є одиничною підгрупою.

Відомо [1], що усяка група G із L має точну факторизацію циклічними підгрупами. Вагомі результати про групи, які факторизуються своїми попарно переставними циклічними підгрупами, можна знайти у монографії М.С. Чернікова [4]. Оскільки клас L не замкнений стосовно гомоморфних образів [1], то доцільно провести дослідження DK -груп, тобто груп із класу H .

Теорема 1. *Нехай G – скінченна 2-DM-група, яка містить власну циклічну нормальну підгрупу T , що збігається зі своїм централізатором. Тоді G є групою дієдра і T – максимальна в G .*

Доведення. Нехай $T = \langle t \rangle$, $|t| = 2^n$, де $n > 1$. Зрозуміло, що T – максимально циклічна в G , тому $G = T\lambda A$. Розглянемо довільну інволюцію $u \in G \setminus T$ і доведемо, що $utu = t^\alpha$, де $\alpha = -1$ або $\alpha = 1 + 2^{n-1}$, де $n \geq 3$. Оскільки підгрупа $T \triangleleft G$, то $utu = t^\alpha$, де α – непарне число. Для $n = 2$ отримаємо $|t| = 4$, тому $utu = t^3 = t^{-1}$. Припустимо тепер, що $n \geq 3$. Приймемо $\alpha = 1 + 2^l \cdot m$, де m – непарне, а $1 \leq l < n$, оскільки за умовою $C_G(T) = T$.

За умовою $t = u^2 \cdot t \cdot u^2 = t^{\alpha^2}$, тоді $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$. Отже, одержимо $2^{l+1} \cdot m(1 + 2^{l-1} \cdot m) \equiv 0 \pmod{2^n}$. Припустимо $l > 1$, тоді $n = l + 1$, а тому $utu = t^{1+2^{n-1}}$. Нехай тепер $l = 1$. У цьому випадку $\alpha = 1 + 2m$, тому $\alpha^2 = 1 + 4m + 4m^2$, звідси $4m(1 + m) \equiv 0 \pmod{2^n}$. Отже, $m = -1 + 2^{n-2}\theta$, для деякого числа θ . Якщо θ – парне, то $\alpha = 1 + 2m \equiv -1 \pmod{2^n}$, тому $utu^{-1} = t^{-1}$. Нехай тепер θ – непарне число, тоді $\alpha = 1 + 2m \equiv -1 + 2^{n-1} \pmod{2^n}$, тому $utu = t^{-1+2^{n-1}}$, де $n \geq 3$.

Доведемо, що для групи G остання рівність приводить до суперечності. Нехай для групи G ця рівність виконується. Розглянемо підгрупу $\langle ut \rangle = M$. Припустимо, що $ut = z^2$, для деякого $z \in G$. Із розвинення $G = T\lambda A$ отримаємо $z = at^\alpha$, де $a \in A$. Оскільки u не належить T , то $a \neq 1$. Далі знаходимо $ut = at^\alpha at^\alpha = a^2(a^{-1}t^\alpha a)t^\alpha = a^2t^{\alpha s}t^\alpha = a^2t^{\alpha(s+1)}$, де s – непарне число. Звідси випливає $u = a^2$ і $t = t^{\alpha(s+1)}$, що неможливо, оскільки $s + 1$ парне число. Отож, доведено, що M – максимально циклічна підгрупа в G . Отримали рівність $(ut)^2 = t^{2^{n-1}}$, тому $|ut| = 4$. З іншого боку, максимально циклічні підгрупи M і T мають нетривіальний перетин, тому вони мають однаковий порядок ([1], лема 1.2). Оскільки $|ut| = 4$, а $|t| = 2^n$, $n \geq 3$, то отримали суперечність. Отже, рівність $utu = t^{-1+2^{n-1}}$ для групи G неможлива. Отож, доведено, що для усякої інволюції u , яка не належить T , одержуємо одну з рівностей $utu = t^{-1}$ або $utu = t^{1+2^{n-1}}$.

Доведемо тепер, що A – циклічна підгрупа. За умовою $G = T\lambda A$ і $C_G(T) = T$, тому A ізоморфна деякій підгрупі з групи автоморфізмів $L = \text{Aut } T$. Оскільки L – абелева група, то і підгрупа A – абелева. Припустимо, що A – нециклічна підгрупа. У цьому випадку в A є три різні інволюції. Нехай це інволюції u , v і w , які визначають автоморфізми $\varphi(t) = utu = t^\alpha$, $\psi(t) = vtv = t^\beta$ і $f(t) = wtw = t^\gamma$. Звідси випливає, що числа $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1; 1 + 2^{n-1}\}$, тому отримаємо суперечність, оскільки φ, ψ і f –

попарно різні автоморфізми. Отож, доведено, що A – циклічна підгрупа. Прийнемо $A = \langle a \rangle$, $|a| = 2^m$, де $m \geq 1$. Оскільки $T \triangleleft G$, то $a^{-1}ta = t^\lambda$, де λ – непарне число. Нехай v – інволюція з A .

Припустимо $m = 1$, тоді $a = v$. Якщо $\lambda = -1$, то $at = t^{-1}a$, тому $G = T\lambda A$ – група діедр, і все доведено. Нехай тепер $ata = t^{1+2^{n-1}}$. Підгрупа $K = \langle at^2 \rangle$ є максимально циклічною в G . Оскільки $(at^2)^2 = (ata)^2 \cdot t^2 = t^{2+2^n} \cdot t^2 = t^4 \neq 1$, то $\langle at^2 \rangle \cap T \neq \{1\}$. З одного боку, $|at^2| = 2^{n-1}$, а з іншого – $|at^2| = 2^n$. Отримали суперечність, тому випадок $\lambda = 1 + 2^{n-1}$ неможливий.

Припустимо тепер $m \geq 2$ і інволюція $v = a^{2^{m-1}}$. Одержали $vtv = t^\lambda$, де $\lambda = 1 + 2^l w$, w – непарне і $1 \leq l < n$. Розглянемо випадок, коли $l = 1$, тоді $\lambda = 1 + 2w$. Оскільки елемент $a^2 \cdot t^2 \in \Phi(G)$, то для деякого елемента $z \in G$ отримаємо $a^2 \cdot t^2 = z^2$. Із рівності $G = T\lambda A$ одержимо $h = a^i \cdot t^j$, тому $z^2 = a^i \cdot t^j \cdot a^i \cdot t^j = a^{2i} \cdot (a^{-i} \cdot t \cdot a^i)^j \cdot t^j = a^{2i} \cdot t^\theta$, де $\theta = (1 + 2w)^i \cdot j + j = 2j(1 + wi + 2h)$, для деякого цілого h . Оскільки $T \cap A = \{1\}$, то $a^2 = a^{2i}$, $t^2 = t^\theta$. Звідси випливає, що i – непарне, тому число $\theta = 4\rho$. Отримали суперечність. Отож, доведено, що $\lambda = 1 + 2^l \cdot w$, де $l \geq 2$, $(2, w) = 1$.

Доведемо рівність $|a| = 2^{n-l}$. Індукцією по $k \geq 1$ отримуємо рівність $a^{-2^k} t a^{2^k} = t^{1+2^{l+k} \cdot \theta_k}$, де θ_k – непарне число, $l + k \leq n$.

Якщо $l + k < n$, то $a^{2^k} \neq 1$. Далі, для $\theta = n - l$ одержуємо $a^{-2^\theta} \cdot t \cdot a^{2^\theta} = t$, тому $a^{2^\theta} \in C_G(T) \cap A = \{1\}$. Отже, $a^{2^{n-l}} = 1$ і $|a| = 2^{n-l}$, $n - l \geq 2$, $a^2 \neq 1$, оскільки $a^{2^{n-l-1}} \neq 1$.

Індукцією по k доводимо рівність $(at^2)^{2^k} = a^{2^k} \cdot t^{2^{k+1} \cdot \theta_k}$, де θ_k – непарне число. Оскільки $l \geq 2$, то для $k = n - l$ отримаємо $(at^2)^{2^{n-l}} = t^{2^{n-l+1} \cdot \theta_k} \neq 1$. Отримали, що дві максимально циклічні підгрупи T і $K = \langle at^2 \rangle$ мають нетривіальний перетин, але мають різні порядки $|T| = 2^n$, $|K| \leq 2^{n-1}$. Одержали суперечність. Отож, випадок $m \geq 2$ неможливий.

Отже, доведено, що $A = \langle a \rangle$ і $ata = t^{-1}$, $|a| = 2$, тому $G = T\lambda \langle a \rangle$ – група діедр. $\square$

Означення 1. Нехай G – довільна скінченна 2-група. Згідно з [1] система її не-одиночних підгруп $S = \{M_1, \dots, M_k\}$ називається базисною системою підгруп для групи G , якщо виконуються такі умови:

- 1) підгрупи M_i попарно переставні;
- 2) справджується факторизація $G = M_1 \cdot \dots \cdot M_k$;
- 3) факторизація є точною, тобто для довільного $i \in \{1, \dots, k\}$ отримаємо $M_i \cap \prod_{j \neq i} M_j = \{1\}$.

В [1] доведено, що для всякої скінченної DM -групи G експоненти 2^n , де $n \geq 2$, знайдеться базисна система циклічних підгруп узгоджених порядків. А для експоненти 2^n , $n \geq 4$, знайдено необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G була DM -групою. Однак для експоненти 4 і 8 питання про будову DM -груп залишалося відкритим.

Позначимо через $\mathfrak{R}$ клас усіх скінченних 2-груп G , які мають базисні системи циклічних підгруп. Отже, правильні вclusions $H \subset L \subset \mathfrak{R}$. У зв'язку з цим, доцільно розглянути такі приклади груп.

Приклад 1. Групи 16-го порядку: $G_1 = \langle a, b | |a| = |b| = 4; [a, b] = a^2 \cdot b^2, [a^2, b] = 1, [b^2, a] = 1 \rangle$, $G_2 = \langle a, b | |a| = 8; |b| = 2; [a, b] = a^4 \rangle$ мають базисні системи циклічних підгруп, однак вони не є DM -групами. Отже, клас $L \neq \mathfrak{R}$, оскільки $G_1, G_2 \in \mathfrak{R} \setminus L$.

Приклад 2. (Приклад скінченної DM -групи G експоненти 8, в якій усяка максимальна циклічна підгрупа не є нормальною в G). Розглянемо групу $R_1 = \langle a, b, c \rangle$, яка визначається такою системою співвідношень: $\Sigma = \{|a| = |b| = |c| = 8, [a, b] = a^4, [b, c] = b^4, [c, a] = c^4\}$. Безпосередньо перевіряється, що така група R_1 існує і $|R_1| = 512$. Крім того, $R_1 \in DM$ -групою, але не є DK -групою.

Теорема 2. Нехай G – довільна скінченна 2- DM -група і T – максимально циклічна підгрупа із G . Прийmemo $N = N_G(T) = T\lambda E$ і $M = C_E(T)$. Тоді виконуються твердження:

- а) централізатор $C_G(T) = T \times M$;
- б) підгрупа $M \triangleleft N$;
- в) якщо підгрупа N є DK -групою, то фактор-група $\overline{N} = N/M = \overline{T}\lambda\overline{E}$ – група діедра, де $|\overline{T}| = 2^m$, $\overline{E} = \langle \overline{b} \rangle$, $|\overline{b}| = 2$ і $\overline{b}\overline{t}\overline{b} = \overline{t}^{-1}$, $m \geq 2$.

Доведення. Оскільки за умовою $G \in DM$ -групою і T – максимально циклічна в G , то у підгрупі N є доповнення E до T , тому $N = T\lambda E$. Для доведення рівності а достатньо довести, що $C_G(T) \leq T \times M$. Розглянемо елемент $v \in C_G(T)$. Тоді $v \in N$, тому $v = t^\alpha u$, де $u \in E$. Звідси випливає, що $u = t^{-\alpha} v \in C_G(T) \cap E = M$, отже, елемент $v \in T \times M$. Рівність а доведено.

Розглянемо елементи $a \in N$ і $b \in M$. Тоді $[a^{-1}ba, t] = a^{-1}[b, t]a = 1$. Доведемо, що елемент $a^{-1}ba \in E$. Справді, $a \in N = T\lambda E$, тому $a = t_1 h$, де $t_1 \in T$, $h \in E$. Отже, $a^{-1}ba = h^{-1}t_1^{-1}bt_1h = h^{-1}bh \in E$, оскільки елемент b централізує T . Звідси випливає, що $a^{-1}ba \in M$, тому підгрупа $M \triangleleft N$. Доведемо, що підгрупа $\overline{T}$ збігається зі своїм централізатором у фактор-групі $\overline{N} = N/M = \overline{T}\lambda\overline{E}$. Для елементів $\overline{u} \in \overline{E}$ і $\overline{t} \in \overline{T}$ з рівності $[\overline{u}, \overline{t}] = \overline{1}$ одержимо $[u, t] \in M$, тому $[u, t] \in E \cap T = \{1\}$. Звідси випливає, що $u \in M$, отже, $\overline{u} = \overline{1}$. Отримали $C_{\overline{N}}(\overline{T}) = \overline{T}$. Група $\overline{N}$ задовольняє усі умови теореми 1, тому $\overline{N} = \overline{T}\lambda\overline{E}$ – група діедра, де $|\overline{E}| = 2$, $|\overline{t}| = 2^m$, $\overline{E} = \langle \overline{b} \rangle$, $\overline{b}\overline{t}\overline{b} = \overline{t}^{-1}$. $\square$

У зв'язку з доведеними теоремами 1,2 доцільно зауважити, що не у всякій скінченній DM -групі існує максимально циклічна підгрупа T , для якої $C_G(T) = T$. Група R_1 (приклад 2) за доведеним не містить нормальної максимально циклічної підгрупи T . Звідси випливає, що комутант $R'_1 \not\subseteq T$. Оскільки $R'_1 \leq Z(G)$, то існує центральний елемент $w \in R'_1 \setminus T$, тому $C_{R_1}(T) \neq T$ для всякої максимально циклічної T із R_1 .

Розглянемо скінченну 2-групу G . Згідно з [1] базисна система циклічних підгруп $S = \{\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_k \rangle\}$ є системою підгруп узгоджених порядків, якщо існує натуральне число $n \geq 2$, що $|a_i| \in \{2^{n-1}, 2^n\}$, для усіх $i = \overline{1, n}$ (надалі S називається U -системою). Зауважимо, що наявність U -системи не є необхідною умовою для DM -групи G . Наприклад, група діедра 16-го порядку $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, де $|a| = 8$, $|b| = 2$ і $ab = ba^{-1}$, є DM -групою, однак G не містить жодної U -системи S .

Теорема 3. Нехай G – скінченна 2-група і $G = D \times \langle w \rangle$, де $|w| = 2$. Група $G \in \mathfrak{R}$ тоді і тільки тоді, коли підгрупа $D \in \mathfrak{R}$.

Доведення. 1. Нехай для підгрупи D отримаємо базисну систему циклічних підгруп $\Sigma = \{\langle d_1 \rangle, \dots, \langle d_s \rangle\}$. Доведемо, що $\Sigma_1 = \{\langle d_1 \rangle, \dots, \langle d_s \rangle, \langle w \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп для групи G . Рівності $G = \langle d_1 \rangle \cdots \langle d_s \rangle \cdot \langle w \rangle = D \cdot \langle w \rangle$ і $D \cap \langle w \rangle = \{1\}$ виконуються за умовою. Очевидно, що для довільних $A, B \in \Sigma_1$ одержуємо $A \cdot B = B \cdot A$. Залишається довести, що факторизація групи G є точною.

Розглянемо дві підгрупи $\langle d_1 \rangle$ і $T = \langle d_2 \rangle \cdots \langle d_s \rangle \cdot \langle w \rangle$. Припустимо, що $\langle d_1 \rangle \cap T \neq \{1\}$. Якщо $|d_1| = 2$, то $d_1 \in T$, тому $d_1 = d_2^{\alpha_2} \cdots d_s^{\alpha_s} \cdot w^\varepsilon$, де $\varepsilon \in \{0, 1\}$. У випадку $\varepsilon = 0$ отримуємо суперечність з умовою для підгрупи D . Нехай $\varepsilon = 1$, тоді $w \in D$, що неможливо. Отже, $\langle d_1 \rangle \cap T = \{1\}$. Аналогічно доводимо, що для довільного індексу $1 \leq m \leq s$ одержимо $\langle d_m \rangle \cap K = \{1\}$, де $K = \langle d_1 \rangle \cdots \langle d_{m-1} \rangle \cdot \langle d_{m+1} \rangle \cdots \langle d_s \rangle \cdot \langle w \rangle$. Отже, доведено, що Σ_1 – базисна система циклічних підгруп для групи G .

2. Нехай тепер група G має базисну систему циклічних підгруп $\sigma = \{\langle g_1 \rangle, \dots, \langle g_n \rangle\}$. За умовою $G = D \times \langle w \rangle = \langle g_1 \rangle \cdot \langle g_2 \rangle \cdots \langle g_n \rangle$. Прийmemo $g_i = d_i \cdot w_i$, де $d_i \in D$, $w_i \in \langle w \rangle$, $i = \overline{1, n}$. Розглянемо множину σ_1 усіх неединичних підгруп $\langle d_i \rangle$ із множини $\{\langle d_1 \rangle, \dots, \langle d_n \rangle\}$. Очевидно, можна вважати, що $\sigma_1 = \{\langle d_1 \rangle, \langle d_2 \rangle, \dots, \langle d_s \rangle\}$, де $1 \leq s \leq n$. Доведемо, що $\langle d_i \rangle \cdot \langle d_j \rangle = \langle d_j \rangle \cdot \langle d_i \rangle$. За умовою $\langle g_i \rangle \cdot \langle g_j \rangle = \langle g_j \rangle \cdot \langle g_i \rangle$, звідси $g_i \cdot g_j = g_j^\alpha \cdot g_i^\gamma$, для деяких чисел α, γ . Звідси $d_i \cdot w_i \cdot d_j \cdot w_j = d_j^\alpha \cdot w_j^\alpha \cdot d_i^\gamma \cdot w_i^\gamma$, тому $d_i \cdot d_j = d_j^\alpha \cdot d_i^\gamma \cdot w_i^{\gamma+1} \cdot w_j^{\alpha+1}$. Оскільки $D \cap \langle w \rangle = \{1\}$, то $w_i^{\gamma+1} \cdot w_j^{\alpha+1} \in D \cap \langle w \rangle = \{1\}$, тому отримали $d_i \cdot d_j = d_j^\alpha \cdot d_i^\gamma$. Отож, $\langle d_i \rangle \cdot \langle d_j \rangle \leq \langle d_j \rangle \cdot \langle d_i \rangle$. Звідси випливає рівність $\langle d_i \rangle \cdot \langle d_j \rangle = \langle d_j \rangle \cdot \langle d_i \rangle$.

Для довільного елемента $d \in D$ одержимо, що

$$d = g_1^{\gamma_1} \cdots g_n^{\gamma_n} = d_1^{\gamma_1} \cdots d_n^{\gamma_n} \cdot w_1^{\gamma_1} \cdots w_n^{\gamma_n} \in D,$$

тому $w_1^{\gamma_1} \cdots w_n^{\gamma_n} = 1$. Звідси випливає, що $d = d_1^{\gamma_1} \cdots d_n^{\gamma_n}$, отже, $D = \langle d_1 \rangle \cdots \langle d_s \rangle$. Якщо $s = n$, то $|G| = |g_1| \cdots |g_n| = |d_1| \cdots |d_n| = |D|$, що неможливо. Отже, обов'язково $s < n$. Можна вважати, що $d_n = 1$, тому $g_n = w$. Отримаємо: $|G| = |g_1| \cdots |g_{n-1}| \cdot |w| = 2 \cdot |D|$, звідси $|g_1| \cdots |g_{n-1}| = |D| = |\langle g_1 \rangle \cdots \langle g_s \rangle| = |d_1| \cdots |d_{n-1}| = |\langle d_1 \rangle \cdots \langle d_s \rangle|$. Оскільки $s \leq n-1$, то $|d_1| \cdots |d_s| = |\langle d_1 \rangle \cdots \langle d_s \rangle|$. Звідси випливає, що факторизація підгрупи $D = \langle d_1 \rangle \cdots \langle d_s \rangle$ є точною. $\square$

Із доведення теореми 3 безпосередньо випливає наслідок.

Наслідок 1. Нехай G – довільна скінченна 2-група і $G = D \times \langle w \rangle$, де $|w| = 2$. Тоді:

1) якщо $\Sigma = \{\langle d_1 \rangle, \dots, \langle d_n \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп для підгрупи D , то $\sigma = \Sigma \cup \{\langle w \rangle\}$ є базисною системою циклічних підгруп групи G ;

2) нехай $\sigma_1 = \{\langle g_1 \rangle, \dots, \langle g_k \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп групи G і $g_i = d_i w_i$, де $d_i \in D$, $w_i \in \langle w \rangle$, $i = \overline{1, k}$, тоді $\Sigma_1 = \{\langle b_1 \rangle, \dots, \langle b_s \rangle\}$, де $\langle b_j \rangle$ усі неединичні підгрупи з системи $\{\langle d_1 \rangle, \dots, \langle d_k \rangle\}$ є базисною системою циклічних підгруп для підгрупи D .

2.2. Будова ДМ-груп експоненти 4.

Позначимо через L_4 клас усіх скінченних ДМ-груп експоненти 4. Як відомо [1], скінченна 2-група $G \in L_4$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

- а) усяка циклічна підгрупа 4-го порядку $\langle g \rangle$ має доповнення в групі G ;
- б) усяка інволюція $f \in \Phi(G)$ є квадратом деякого елемента $z \in G$.

Зауважимо, що умови a і b незалежні. Наприклад, група 16-го порядку $G_3 = \langle a, b | a^4 = b^4, ab = ba^{-1} \rangle$ задовольняє умову a і не задовольняє умову b , оскільки $\langle a^2 b^2 \rangle$ – максимально циклічна в G і не має в G доповнення. З іншого боку, група кватерніонів 8-го порядку Q , очевидно, задовольняє умову b і не задовольняє умову a . Клас L_4 достатньо широкий. Зокрема, до класу L_4 належать такі групи:

- 1) усяка скінченна абелева 2-група R_2 експоненти 4;
- 2) група $R_3 = D \times B$, де B – абелева група експоненти ≤ 4 , а D – група дієдра 8-го порядку;
- 3) група 32-го порядку

$$R_4 = \langle g, a, b | |g| = |a| = 4, |b| = 2, [g, a] = g^2 a^2, [g, b] = g^2, [a, b] = a^2 \rangle;$$

- 4) група типу $R_5 = A\lambda\langle w \rangle$, де $A = R_2$, $|w| = 2$ і комутатор $[a, w] = a^2$, для всякого $a \in A$.

Правильна така теорема.

Теорема 4. Клас груп L_4 замкнений стосовно прямих добутків скінченної кількості груп і не замкнений стосовно гомоморфних образів.

Доведення. Розглянемо дві групи A, B із L_4 і доведемо, що група $G = A \times B \in DM$ -групою. Нехай $\langle g \rangle$ довільна максимально циклічна підгрупа з G . За умовою $g = a_1 \cdot b_1$, де $a_1 \in A$ і $b_1 \in B$. Обов'язково $|a_1| = 4$ або $|b_1| = 4$. Можна вважати $|a_1| = 4$. У цьому випадку для підгрупи $\langle a_1 \rangle$ існує доповнення M у групі A . Очевидно, $M \cdot B$ – підгрупа групи G , яка не містить інволюцію a_1^2 , тому $\langle a_1 \rangle \cap (M \cdot B) = \{1\}$. Звідси випливає, що $G = \langle a_1 \rangle \cdot (M \cdot B)$, тобто $M \cdot B$ – доповнення до $\langle a_1 \rangle$ у групі G , тому $G = \langle g \rangle \cdot (M \cdot B)$. Залишилось довести, що $\langle g \rangle \cap (M \cdot B) = \{1\}$. Справді, нехай $h \in \langle g \rangle \cap (M \cdot B)$ тоді $h = g^l = u \cdot b_2$, де $u \in M$, $b_2 \in B$, тому $(a_1 \cdot b_1)^l = u \cdot b_2$, отже, $a_1^l \cdot b_1^l = u \cdot b_2$. Отож, $u^{-1} \cdot a_1^l = b_2 \cdot b_1^{-l} \in A \cap B = \{1\}$ звідси випливає, що $u = a_1^l = 1$, тому $l:4$, і отже, $h = 1$.

Нехай інволюція $f \in \Phi(G)$. Одержимо $f = f_1 \cdot f_2$, де $f_1 \in \Phi(A)$, $f_2 \in \Phi(B)$, тому $f_1 = a^2$, $f_2 = b^2$, де $a \in A$, $b \in B$. Звідси $f = (ab)^2$. Отже, доведено, що G – DM -група.

Розглянемо групу 32-го порядку $G = \langle g \rangle \cdot \langle a \rangle \cdot \langle w \rangle$, де $|g| = |a| = 4$, $|w| = 2$, $[a, w] = 1$, $[g, a] = [g, w] = g^2$. Безпосередньо перевіряється, що $G \in DM$ -групою і для інволюції $z = g^2 \cdot a^2$ фактор-група $\overline{G} = G/\langle z \rangle$ не є DM -групою. □

Безпосередньо з доведених теорем 2-4 випливають такі твердження.

Наслідок 2. Нехай G – скінченна група експоненти 4 і $G = A \times B$. Для того, щоб G була DM -групою необхідно і достатньо, щоб підгрупи A, B були DM -групами.

Наслідок 3. Нехай G – скінченна DM -група експоненти 4. Якщо у групі G існує циклічна підгрупа $T = \langle t \rangle$ 4-го порядку, яка збігається зі своїм централізатором, то G – група дієдра 8-го порядку.

Теорема 5. Усяка скінченна DM -група G експоненти 4, яка має базисну систему циклічних підгруп 4-го порядку, є абелевою групою.

Доведення. Нехай G задовольняє умови теореми і $\Sigma = \{A_1, \dots, A_k\}$ – базисна система циклічних підгруп $A_i = \langle a_i \rangle$ 4-го порядку. Доведемо, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \langle a_1^2 \rangle \cdots \langle a_k^2 \rangle$. Оскільки $\exp G = 4$ і для довільного елемента $f \neq 1$ із $\Phi(G)$ одержимо $f = z^2$, для деякого $z \in G$, то $f^2 = 1$. Отже, $\Phi(G)$ – елементарна абелева підгрупа групи G . Звідси випливає, що $M = \langle a_1^2 \rangle \cdots \langle a_k^2 \rangle$ нормальна підгрупа в G і на групі G виконується тотожність $[x^2, y^2] = 1$. Комутатор $[a_i, a_j] \in \langle a_i^2 \rangle \cdot \langle a_j^2 \rangle$, тому комутант $G' \leq M \triangleleft G$. Оскільки фактор-група $\overline{G} = G/M$ – елементарна абелева, то $M = \Phi(G) = \Phi$.

Із доведеного випливає, що $|\Phi(G)| = 2^k$ і $|G/\Phi(G)| = 2^k$, оскільки для групи G система елементів $\{a_1, \dots, a_k\}$ – мінімальна система твірних. Розглянемо відображення $\psi : \overline{G} \rightarrow \Phi$, яке визначається так: для класу суміжності $g\Phi$ прийнемо $\psi(g\Phi) = g^2$. Очевидно, що ψ не залежить від елемента $z \in g\Phi$. Справді, якщо $z = gf$, то $z^2 = g^2$. Із доведеного випливає, що ψ – взаємно однозначне відображення G/Φ на Φ . Звідси випливає, що з рівності $x^2 = y^2$ отримаємо $x\Phi = y\Phi$, для $x, y \in G$.

Припустимо тепер, що G – неабелева група. Існують елементи a_i, a_j такі, що комутатор $[a_i, a_j] \neq 1$. Одержуємо $[a_i, a_j] = b_i \cdot b_j$, де $b_i \in \langle a_i^2 \rangle$, $b_j \in \langle a_j^2 \rangle$. Крім того, $b_i \neq 1$ або $b_j \neq 1$. Розглянемо такі випадки.

Нехай $b_i = 1$, $b_j = a_j^2$. Тоді $(a_i a_j)^2 = a_i^2 a_j^2 \cdot [a_i, a_j] = a_i^2$. Звідси отримаємо $\psi(a_i a_j \Phi) = \psi(a_i \Phi)$, тому $a_i a_j \Phi = a_i \Phi$. Із останньої рівності випливає $a_j \in \Phi$, що неможливо, оскільки за умовою a_j – твірний елемент групи G . Аналогічно отримуємо суперечність і у випадку $b_i = a_i^2$, $b_j = 1$.

Нехай тепер $b_i = a_i^2$, $b_j = a_j^2$. Тоді $(a_i a_j)^2 = 1$, тому $a_i a_j \Phi = \Phi$, звідси $a_i a_j \in \Phi$, що неможливо, оскільки $a_i a_j \neq 1$.

Отже, доведено, що $[a_i, a_j] = 1$. Отже, доведено, що G – абелева група. $\square$

Теорема 6. Для довільної скінченної ДМ-групи G експоненти 4 виконуються такі твердження:

1) якщо $|g| = 4$ і B – доповнення до підгрупи $\langle g \rangle$ у групі G , то $\Phi(G) = \langle g^2 \rangle \cdot (\Phi(G) \cap B)$ і підгрупа $\Phi(G) \cap B \triangleleft G$;

2) підгрупа Фраттіні $\Phi = \Phi(G)$ елементарна абелева і міститься в центрі групи G ;

3) якщо група G – неабелева, то система $\Sigma = \{x^4 = 1, [x, y, z] = 1, [x^2, y] = 1\}$ задає базис тотожностей на групі G ;

4) нехай $S = \{\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_l \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп, де $|a_i| = 4$, $|v_j| = 2$, тоді підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \langle a_1^2 \rangle \times \dots \times \langle a_m^2 \rangle$. Крім того, для всякого $i \in \{1, \dots, m\}$ підгрупа $M_i = \langle a_i \rangle \cdot E$, де $E = \langle v_1 \rangle \times \dots \times \langle v_l \rangle \in \text{DM-групою}$.

Доведення. 1. За умовою $\exp G = 4$ і $|g| = 4$, тому $\langle g \rangle$ – максимально циклічна в G . Отже, існує доповнення B до підгрупи $\langle g \rangle$, тобто $G = \langle g \rangle B$, $\langle g \rangle \cap B = \{1\}$. За теоремою Віланда [4] (лема 1.26) підгрупа Фраттіні $\Phi = \Phi(G)$ факторизується стосовно розкладу $G = \langle g \rangle \cdot B$, тобто одержуємо рівність

$$\Phi = (\Phi \cap \langle g \rangle) \cdot (\Phi \cap B) = \langle g^2 \rangle \cdot (\Phi \cap B).$$

Доведемо, що підгрупа $\Phi \cap B \triangleleft G$. Нехай $M = \bigcap_{z \in G} z^{-1} B z$, тобто M – найбільша нормальна підгрупа з G , яка міститься в B . Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/M =$

$= \langle \bar{g} \rangle \cdot \bar{B}$, де $\langle \bar{g} \rangle \cap \bar{B} = \{\bar{1}\}$, $\bar{B} = B/M$ і $|\bar{g}| = |g|$. Якщо $\bar{G}$ – абелева, то комутант $G' \leq M \leq B$, тому $\Phi \cap B \triangleleft G$.

Припустимо, що $\bar{G}$ – неабелева група. Доведемо, що підгрупа $\langle \bar{g} \rangle$ збігається зі своїм централізатором у групі $\bar{G}$. Припустимо, що існує елемент $\bar{c} \neq \bar{1}$ із $\bar{B}$ такий, що $[\bar{g}, \bar{c}] = \bar{1}$, де $c \in B \setminus M$. Розглянемо підгрупу $B_1 = \langle b^{-1}cb | b \in B \rangle$. Очевидно, $M_1 = M \cdot B_1 \triangleleft G$. Оскільки $M < M_1 \leq B$, то отримали суперечність. Отже, $C_{\bar{G}}(\langle \bar{g} \rangle) = \langle \bar{g} \rangle$. Очевидно, $\exp \bar{G} = 4$, оскільки $|g| = |\bar{g}| = 4$. Одержимо центр $Z(\bar{G}) \leq \langle \bar{g} \rangle$. За наслідком 3, $\bar{G} = \langle \bar{g} \rangle \lambda \bar{B}$ – група діеда 8-го порядку. Припустимо, що інволюція $f \in (\Phi \cap B) \setminus M$, тоді для деякого елемента h 4-го порядку із G , отримаємо $f = h^2$, тому $\langle h \rangle \cap M = \{1\}$. Оскільки $|\bar{f}| = 2$, то $|\bar{h}| = 4$. Звідси випливає, що $\langle \bar{g} \rangle = \langle \bar{h} \rangle$, тому $\bar{f} \in \langle \bar{g} \rangle \cap \bar{B}$, що суперечить умові. Отже, $\Phi \cap B \leq M$, тому $\Phi \cap B = \Phi \cap M \triangleleft G$.

Доведемо тепер, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) \leq Z(G)$. Розглянемо елемент $f \in \Phi(G) \setminus Z(G)$. Існує такий елемент $u \in G$, що $[f, u] = v \neq 1$. Оскільки $v \in \Phi(G)$, то існує елемент 4-го порядку $g \in G$ такий, що $v = g^2$. Нехай $G = \langle g \rangle \cdot B$, $\langle g \rangle \cap B = \{1\}$. За доведеним, підгрупа $\Phi(G) = \langle v \rangle \times (B \cap \Phi)$, оскільки $\Phi = \Phi(G)$ елементарна абелева підгрупа та елемент v не належить B . Очевидно, $M = \langle v \rangle \cdot B$ – підгрупа групи G . Оскільки $\langle v \rangle \cap B = \{1\}$ і $v^2 = 1$, то $B \triangleleft M$. Для елементів f, u одержуємо: $f = v^\gamma \cdot b$, $u = g^\alpha \cdot t$, де $b \in \Phi \cap B$, $t \in B$. Тоді $v = [f, u] = [v^\gamma, t] \cdot w$, для деякого $w \in B \cap \Phi$, тому елемент $v \in B$, що суперечить умові $\langle g \rangle \cap B = \{1\}$.

Із доведеного випливає, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) \leq Z(G)$.

Оскільки, за доведеним, комутант $G' \leq \Phi(G) \leq Z(G)$, то на всякій скінченній DM -групі G виконуються тотожності з системи $\Sigma = \{x^4 = 1, [x, y, z] = 1, [x^2, y] = 1\}$. Нехай G – неабелева група і $w(x_1, \dots, x_l) = 1$ – довільна тотожність, яка виконується на групі G . За відомою теоремою Х.Неймана ([8], теорема 12.12) тотожність $w(x_1, \dots, x_l) = 1$ рівносильна системі тотожностей $\sigma = \{x^m = 1, t(x_1, \dots, x_k) = 1\}$, де $m \geq 0$, а $t(x_1, \dots, x_k)$ – деяке комутаторне слово ([8], с.16). Очевидно, з системи Σ випливають тотожності: $[x, y]^2 = 1$; $[xy, z] = [x, z][y, z]$, тому на групі G слово $t(x_1, \dots, x_k)$ рівносильне 1 або $[x_1, x_2]$. Оскільки $G' \neq \{1\}$, то на G отримаємо рівність $t(x_1, \dots, x_k) = 1$. Зрозуміло також, що показник $m:4$.

Отже, доведено, що Σ – базис тотожностей на групі G .

Доведення твердження 4. Нехай $S = \{\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_l \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп DM -групи G . За лемою 3.2 із [1] одержуємо $\Phi(G) = \langle a_1^2 \rangle \times \dots \times \langle a_m^2 \rangle$. Доведемо тепер, що $M_i = \langle a_i \rangle E \in DM$ -групою.

Очевидно, усяка підгрупа $\langle h \rangle$ 4-го порядку з M_i має доповнення у підгрупі M_i . Розглянемо інволюцію $f \in \Phi(M_i)$ і доведемо, що існує елемент $z \in M_i$ такий, що $f = z^2$. Оскільки $\Phi(M_i) \leq \Phi(G)$, то інволюція $f \in \Phi(G) \cap M_i \leq \langle a_i^2 \rangle$. Отже, отримали $f = a_i^2$. $\square$

Зауваження 1. 1. Із теореми 6 випливає, що усяка скінченна неабелева DM -група G експоненти 4 породжує многовид груп γ , який визначається системою тотожностей $\Sigma = \{x^4 = 1, [x, y, z] = 1, [x^2, y] = 1\}$.

2. Надалі будемо вважати, що група $G \in \gamma \cap L_4$ і не містить центральних твірних елементів (теорема 4).

Правильне таке твердження.

Теорема 7. Нехай скінченна група $G \in \gamma$ і $G = \langle g \rangle \lambda D$. Група G є DM -групою тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

- 1) підгрупа D є DM -групою;
- 2) для всякого елемента $d \in D$ існує такий елемент $d_1 \in D$, що $d^2 = d_1^2$ і $[g, d_1] = 1$.

Доведення. Нехай скінченна група G є DM -групою і $G = \langle g \rangle \lambda D$. Якщо $|g| = 2$, то $G = \langle g \rangle \times D$. Звідси випливає, що D є DM -групою. Припустимо тепер, що $|g| = 4$. Очевидно, що всяка циклічна підгрупа $\langle d \rangle$ 4-го порядку з D має в D доповнення. Нехай інволюція $f \in \Phi(D) \leq \Phi(G)$. За умовою існує елемент $z \in G$ такий, що $z^2 = f$. Далі, нехай $z = g^\alpha \cdot d$, де $d \in D$. Звідси, $f = z^2 = g^{2\alpha} \cdot d^2 \cdot [g^\alpha, d]$, тому $f \cdot d^2 \in \langle g \rangle \cap D = 1$. Отже, $f = d^2$ і все доведено.

Розглянемо тепер елемент $d \in D$. Для інволюції $w = g^2 d^2$ існує елемент $z \in G$ такий, що $w = z^2$. Прийнемо $z = g^\gamma d_1$, де $d_1 \in D$. Тоді $w = z^2 = (g^\gamma d_1)^2 = g^{2\gamma} d_1^2 [g^\gamma, d_1] = g^2 d^2$, звідси одержуємо рівності $d_1^2 = d^2$ і $g^2 = g^{2\gamma} [g^\gamma, d_1]$. Оскільки $g^2 \neq 1$, то γ – непарне, тому $[g, d_1] = 1$. Отже, необхідність умов 1 і 2 доведено.

Доведемо тепер обернене твердження. Нехай група G задовольняє умови 1 і 2. Доведемо, що G є DM -групою. Розглянемо циклічну підгрупу 4-го порядку $\langle z \rangle$ із групи $G = \langle g \rangle \lambda D$. Отримали $z = g^\alpha d$, де $d \in D$. Якщо z^2 не належить D , то доповненням до $\langle z \rangle$ є підгрупа D .

Припустимо, що $z^2 \in D$. У цьому випадку $d \neq 1$ і $z^2 = g^{2\alpha} d^{2\alpha} [g^{2\alpha}, d]$, тому $z^2 = d^2$ і $|d| = 4$. За умовою до підгрупи $\langle d \rangle$ існує доповнення D_1 у підгрупі D . Оскільки $\langle g \rangle \triangleleft G$, то $M = \langle g \rangle D_1$ – підгрупа групи G і $|D| = |M|$. Якщо $z^2 = d^2 \in M$, то $d^2 = g^\varepsilon d_1$, де $d_1 \in D_1$. Звідси одержуємо $g^\varepsilon = 1$ і $d^2 = d_1 \in D_1$, що неможливо. Отже, $\langle z \rangle \cap M = \{1\}$, тому $G = \langle z \rangle M$. Отже, доведено, що для $\langle z \rangle$ існує доповнення M у групі G .

Розглянемо тепер інволюцію $f \in \Phi(G)$. За умовою $f = g^\gamma d$, де $d \in D$. Якщо γ – непарне, то $g \in D \cdot \Phi(G) = G$, тому $D = G$, що неможливо. Отже, доведено $\gamma \in \{0, 2\}$. Якщо $\gamma = 0$, то $f = d \in D$. За умовою D є DM -групою, отже, $f = h^2$ для деякого $h \in D$.

Припустимо, що $\gamma = 2$, тобто $f = g^2 d$. Оскільки елемент $d \in \Phi(G)$, то $d = y_1^2 \cdots y_k^2$, для деяких $y_i \in G$, $i = \overline{1, k}$. За умовою $y_i = g_i \theta_i$, де $g_i \in \langle g \rangle$, $\theta_i \in D$. Звідси $d = (g_1 \theta_1)^2 \cdots (g_k \theta_k)^2 = g^m \theta_1^2 \theta_2^2 \cdots \theta_k^2$, для деякого $m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Оскільки $\langle g \rangle \cap D = \{1\}$, то $g^m = 1$, тому $d = \theta_1^2 \cdots \theta_k^2 = h^2$, де $h \in D$. Отримали інволюцію $f = g^2 h^2$. За умовою існує елемент $d_1 \in D$ такий, що $h^2 = d_1^2$, $[g, d_1] = 1$. Звідси отримаємо $f = g^2 d_1^2 = (g d_1)^2$. Отже, доведено, що G є DM -групою. $\square$

Наслідок 4. Усяка скінченна група $G \in \gamma$ вигляду $G = \langle g \rangle \lambda E$, де $|g| = 4$, а E – елементарна абелева, є DM -групою.

Теорема 8. Для того, щоб скінченна неабелева група експоненти 4 була DM -групою, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

- 1) для групи G існує базисна система циклічних підгруп $S = \{\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_l \rangle\}$, де $|a_i| = 4$, $|v_j| = 2$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$;
- 2) для довільних елементів $b_1, \dots, b_s \in \{a_1, \dots, a_m\}$ існує елемент $v \in E = \langle v_1 \rangle \times \cdots \times \langle v_l \rangle$ такий, що $b_1^2 \cdots b_s^2 = (b_1 \cdots b_s \cdot v)^2$;
- 3) група $G \in \gamma$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – довільна скінченна група експоненти 4 і $|G| = 2^n$. За теоремою 6, група G належить многовиду γ . Існування базисної системи циклічних підгруп для групи G доведено в [1] (теорема 4.1). За умовою група G – неабелева. Зрозуміло, що у цьому випадку базисна система S містить циклічні підгрупи $\langle a_i \rangle$ 4-го порядку та підгрупи $\langle v_i \rangle$ 2-го порядку. Розглянемо випадки.

а) Для $n = 3; 4$ або 5 твердження перевіряється безпосередньо. Справді, якщо $n = 3$ або 4, то група $G = D_8$ або $G = D_8 \times \langle u \rangle$, де $u^2 = 1$, D_8 – група дієдра 8-го порядку. Оскільки для такої групи G підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \{1, a^2\}$, то твердження очевидне.

Нехай $n = 5$, тобто G – неабелева група 32-го порядку. У цьому випадку група $G \in \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, де

$$G_1 = D_8 \times \langle b \rangle, |b| = 4;$$

$$G_2 = (\langle g \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle u \rangle, \text{ де } |g| = |a| = 4, |u| = 2, [g, u] = g^2, [a, u] = a^2;$$

$$G_3 = D_8 \times A_4^*, \text{ де } A_4^* \text{ – група Клейна 4-го порядку};$$

$$G_4 = R = \langle g \rangle \langle a \rangle \langle v \rangle, \text{ де } |g| = |a| = 4, |v| = 2, [g, a] = g^2 a^2, [g, v] = g^2, [a, v] = a^2.$$

Для груп G_1, G_2 і G_3 усе очевидно.

Нехай $G = G_4 = R$. Підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \{1, g^2, a^2, g^2 a^2\}$. Одержуємо, що $g^2 a^2 = (gav)^2$, тому для $n = 5$ твердження доведено.

б) Припустимо тепер, що твердження правильне для фіксованого числа $n \geq 5$. Розглянемо довільну неабелеву групу G порядку $|G| = 2^{n+1}$ і нехай $S = \{\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_l \rangle\}$, де $|a_i| = 4, |v_j| = 2, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, l}$.

Прийmemo $\langle w \rangle = \langle a_m^2 \rangle$ і розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\langle w \rangle = \langle \overline{a_1}, \dots, \overline{a_{m-1}}, \overline{a_m}, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_l} \rangle$, де $|\overline{a_1}| = \dots = |\overline{a_{m-1}}| = 4; |\overline{a_m}| = |\overline{v_1}| = \dots = |\overline{v_l}| = 2$. Оскільки $\overline{G} \in DM$ -група і $|G| = 2^n$, то твердження виконується для групи $\overline{G}$.

Розглянемо інволюцію $f = b_1 \cdot \dots \cdot b_s$, де $1 \leq s < m, b_1, \dots, b_s \in \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$, тоді $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_s} \in \{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{m-1}}\}$ і $\overline{b_1}^2 \cdot \dots \cdot \overline{b_s}^2 = (\overline{b_1} \cdot \dots \cdot \overline{b_s} \overline{v})^2$, звідси отримаємо рівність $b_1^2 \cdot \dots \cdot b_s^2 = (b_1 \cdot \dots \cdot b_s v)^2 w^\gamma$, де $\gamma \in \{0, 1\}$ і $v \in E$. Якщо $\gamma = 1$, то інволюція w міститься у підгрупі $D_m = \langle a_1 \rangle \cdot \dots \cdot \langle a_{m-1} \rangle \cdot E$, що суперечить умові. Отож, $\gamma = 0$, тому одержуємо необхідну рівність $b_1^2 \cdot \dots \cdot b_s^2 = (b_1 \cdot \dots \cdot b_s v)^2$.

Нехай тепер $s = m$. У цьому випадку отримаємо, що $f = a_1^2 \cdot \dots \cdot a_m^2$. Оскільки $G \in DM$ -групою, то $f = (a_1 \cdot \dots \cdot a_m v)^2$, де $v \in E$ і все доведено. Отже, необхідність доведено.

Достатність. За умовою для скінченної неабелевої групи G справджуються твердження 1, 2 і 3. Оскільки $G \in \gamma$, то підгрупа $M = \langle a_1^2 \rangle \times \dots \times \langle a_m^2 \rangle \leq Z(G)$ і фактор-група G/M – елементарна абелева. Звідси випливає, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = M$.

Розглянемо циклічну підгрупу $\langle z \rangle$ 4-го порядку з групи G . Тоді $z^2 \in \Phi(G)$ і нехай $z^2 = b_1^2 \cdot \dots \cdot b_s^2$, для деяких $b_1, \dots, b_s \in \{a_1, \dots, a_m\}$. Можна вважати, що $b_1 = a_1$. Приймемо $D_1 = \langle a_2 \rangle \cdot \dots \cdot \langle a_m \rangle \cdot E$. Тоді $\langle z \rangle \cap D_1 = \{1\}$ і $\langle z \rangle D_1 = G$, тобто D_1 – доповнення до підгрупи $\langle z \rangle$. Для довільної інволюції $f \in \Phi(G)$ одержуємо $f = d_1^2 \cdot \dots \cdot d_r^2$, де $d_1, \dots, d_r \in \{a_1, \dots, a_m\}$. За умовою 2 існує елемент $v \in E = \langle v_1 \rangle \times \dots \times \langle v_l \rangle$ такий, що $f = (d_1 \cdot \dots \cdot d_r \cdot v)^2$. Отож, доведено, що G – DM -група. $\square$

Наслідок 5. Нехай G – скінченна ДМ-група експоненти 4 і $S = \{\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_l \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп групи G . Для усякого $i \in \{1, \dots, m\}$ підгрупа $G_i = \langle a_i \rangle \cdots \langle a_m \rangle \cdot E$ є ДМ-групою.

Наслідок 6. Нехай G – скінченна ДМ-група експоненти 4 і $S = \{\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_l \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп групи G . Розглянемо довільну інволюцію $v \in E$ і нехай $[a_1, v] = 1$. Тоді для $a_1^* = a_1 v$ система $S_1 = \{\langle a_1^* \rangle, \langle a_2 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle, E\}$ – є базисною системою циклічних підгруп.

Сформулюємо проблеми подальших досліджень.

Проблема 1. Знайти необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G експоненти 8 була ДМ-групою.

Проблема 2. Нехай G – мінімальна неабелева ДМ-група експоненти 8. Знайти базис тотожностей групи G .

3. Висновки. 1. Доведено твердження, які стосуються будови скінченних ДМ-груп довільної експоненти (теореми 1, 2, 3).

2. Проведено детальне дослідження скінченних ДМ-груп експоненти 4 (теореми 6, 7). Знайдено необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G експоненти 4 була ДМ-групою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крекнин В.А. Конечные 2-группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами / В.А. Крекнин, В.Ф. Малик, И.И. Мельник, О.К. Шиловская – Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1992.
2. Крекнин В.А. Достаточное условие дополняемости максимальных циклических подгрупп в конечной группе / В.А. Крекнин, И.И. Мельник // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, №11. – С. 1572-1575.
3. Крекнин В.А. Конечные группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами / В.А. Крекнин, И.И. Мельник // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, №7. – С. 918-926.
4. Черников Н.С. Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп / Н.С. Черников – К.: Наук. думка, 1987.
5. Savochkina T. Frattini series and involutions of finite L-group / T. Savochkina 7-th International algebraic conference in Ukraine. Kharkov. – 2009. – P. 122.
6. Aschbacher M. Finite group theory / M. Aschbacher Cambridge University Press, 2000.
7. Савочкіна Т.І. Про існування максимального нормалізатора у періодичній FC-групі / Т.І. Савочкіна // Вісн. Харк. нац. ун-ту. ім. В.Н. Каразіна. Сер. Мат., прикл. мат. і мех. – 2007. – Т. 790. – С. 125-131.
8. Нейман Х. Многообразия групп / Х. Нейман – М.: Мир, 1969.

Стаття: надійшла до редакції 18.11.2011
доопрацьована 24.05.2012
прийнята до друку 12.12.2012

STRUCTURAL PROPERTIES OF FINITE DM -GROUPS

Tetiana SAVOCHKINA

*G.S. Skovoroda National Pedagogical University of Kharkiv,
Blukhera Str., 2, Kharkiv, 61000
e-mail: savochkinat@rambler.ru*

We investigate finite groups with complemented maximal cyclic subgroups (DM -groups). We have established the structural properties of such groups. We have a complete characterization of finite DM -groups of exponent 4.

Key words: finite 2-groups, supplemented by group, maximum cyclic subgroups.

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ DM -ГРУПП

Татьяна САВОЧКИНА

*Харьковский национальный педагогический университет им. Г.С. Сковороды,
ул. Блюхера, 2, Харьков, 61000
e-mail: savochkinat@rambler.ru*

Исследовано конечные 2-группы, у которых всякая максимальная циклическая подгруппа имеет дополнение (DM -группы). Установлено ряд структурных свойств таких групп. Получено полную характеристику конечных DM -групп экспоненты 4.

Ключевые слова: конечные 2-группы, дополняемые подгруппы, максимально циклические подгруппы.

УДК 517.9

ФАКТОРИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ І НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРОВНІ МОДЕЛІ, I

Юрій СИДОРЕНКО, Олександр ЧВАРТАЦЬКИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua*

Отримано факторизацію вольтеррівського інтегрального оператора бінарних перетворень елементарними операторами Вольтерра. Профакторизовано оператори Фредгольма скінченного рангу фредгольмівськими операторами рангу 1. Наведено застосування в теорії нелінійних інтегровних систем.

Ключові слова: інтегральні перетворення, факторизація операторів Вольтерра та Фредгольма з виродженим ядром.

1. Вступ. Для побудови точних розв'язків солітонних систем важливу роль відіграють “алгебризовані” методи, найбільш відомими серед яких є метод одягання Захарова-Шабата [1]-[3], метод В.О. Марченка [4], теорія Сато-Вільсона (див. наприклад, [5, 6]), а також метод перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва [7]-[11]. Побудова широких класів точних розв'язків нелінійних інтегровних моделей теорії солітонів та їхні $(2+1)$ -вимірні узагальнення, які отримують внаслідок накладання нелокальних редукцій в ієрархії рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі, розглядали в багатьох працях (див. наприклад, [12]-[22]). Як одягаючого оператора використовували класичний диференціальний оператор перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва. Проблема факторизації диференціального оператора Дарбу-Матвєєва (матричного диференціального оператора першого порядку) за допомогою найпростіших диференціальних операторів типу Дарбу розглядали в [23]. Найцікавіші з погляду фізичних застосувань нелінійні інтегровні системи (нелінійні рівняння Шредінгера, модифіковані рівняння Кортевега-де Вріза, модель Яджими-Ойкави та інші) не підпадають, безпосередньо, під метод одягання за допомогою диференціальних операторів. Ці рівняння отримують після накладання додаткових редукцій типу ермітового спряження. Усунення цієї прогалини досягається використанням як одягаючого оператора бінарного перетворення типу Дарбу [24]-[26]. В [27]-[29] продемонстровано зв'язок інтегрального оператора бінарних перетворень з операторами перетворень оберненої задачі для деяких гіперболічних систем. Мета нашої праці – дослідити факторизацію вольтеррівського інтегрального оператора бінарних перетворень за допомогою інтегральних

операторів Вольтерра першого порядку. Частково цю мету реалізували в алгебрі формальних символів псевдодиференціальних операторів в [23]. Структура така. У Розділі 1 подано деякі відомі теореми про диференціальні оператори перетворень Дарбу-Крама для рівняння Штурма-Ліувілля. В Розділі 2 розглянуто факторизацію операторів бінарних перетворень за допомогою елементарних вольтеррівських інтегральних операторів. У Розділі 3 досліджено фредгольмівські оператори, які утворюються як композиції вольтеррівських операторів з різними полярностями, введеними в Розділі 2. Такі оператори цікаві також тісним зв'язком з операторами розсіяння для деяких нестационарних систем диференціальних рівнянь з виродженими даними розсіяння (див., наприклад, [29]-[32]). В цьому ж розділі запропоновано метод факторизації операторів Фредгольма скінченного рангу фредгольмівськими операторами першого рангу. Застосування операторів бінарних перетворень, введених у Розділі 2, для побудови розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля та деяких нелінійних інтегровних моделей математичної фізики розглянуто у Розділі 4.

2. Теореми Дарбу-Крама та побудова розв'язків рівнянь Штурма-Ліувілля. Розглянемо рівняння Штурма-Ліувілля (одновимірне рівняння Шредінгера)

$$L\{f\} = \lambda f, \quad (1)$$

де $L := -\mathcal{D}^2 + u(x)$, $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathcal{D}\{f\} = \frac{\partial f}{\partial x} := f_x$, $\mathcal{D}f := f\mathcal{D} + f_x$.

Для подальшої зручності введемо позначення $u(x) := u[1]$, $f = f(x, \lambda) := f[1]$, $L := L[1]$.

Позначимо фіксований розв'язок рівняння (1) при $\lambda = \lambda_1$ через $\varphi_1[1]$, $\varphi_1[1] = \varphi_1[1](x, \lambda_1)$ і визначимо оператор $W_e[\varphi_1[1]]$ так:

$$W_e[\varphi_1[1]] := \varphi_1[1]\mathcal{D}\varphi_1^{-1}[1] = \mathcal{D} - \varphi_{1x}[1]\varphi_1^{-1}[1]. \quad (2)$$

Тоді перетворення Дарбу (DT) $f := f[1] \rightarrow f[2]$ довільного розв'язку (1) набуде такого вигляду:

$$f[2] = W_e[\varphi_1[1]]\{f[1]\} = f_x[1] - \frac{\varphi_{1x}[1]}{\varphi_1[1]}f[1] = \frac{\mathcal{W}(\varphi_1[1], f[1])}{\varphi_1[1]}, \quad (3)$$

де $\mathcal{W}(\varphi_1[1], f[1]) = \varphi_1[1]f_x[1] - \varphi_{1x}[1]f[1]$ - звичайні визначники Вронського.

Теорема 1 (Дарбу, 1882). *Функція $f[2]$ задовольняє диференціальне рівняння*

$$L[2]\{f[2]\} = \lambda f[2], \quad (4)$$

де

$$L[2] := -\mathcal{D}^2 + u[2], \quad u[2] = u[1] - 2(\ln \varphi_1[1])_{xx}. \quad (5)$$

Розглянемо деякі застосування теореми Дарбу. Прийемо в рівнянні Штурма-Ліувілля (1) $u[1] = 0$. Нехай $\lambda_1 = -\chi_1^2$, $\chi_1 > 0$. Тоді розв'язки рівняння (1) набудуть вигляду

$$\varphi_1[1] = \cosh(\chi_1 x), \quad \varphi_2[1] = \sinh(\chi_1 x). \quad (6)$$

Подіавши перетворенням Дарбу (2), побудованим за розв'язком $\varphi_1[1]$ (6), на функції

$$f_1[1] := e^{ikx} \quad (\lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{R}); \quad f_2[1] := \varphi_2[1] \quad (\lambda = -\chi_1^2), \quad (7)$$

отримаємо розв'язки рівняння Штурма-Ліувілля (4)

$$f_1[2] := W_e[\varphi_1[1]]\{f_1[1]\} = (ik - \chi_1 \tanh(\chi_1 x))e^{ikx} \sim (ik \mp \chi_1)e^{ikx}, \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$$f_2[2] := W_e[\varphi_1[1]]\{f_3[1]\} = \chi_1 \cosh^{-1}(\chi_1 x) \in L_2(\mathbb{R}),$$

при $\lambda = k^2$, $\lambda = -\chi_1^2$, відповідно, з експоненційно спадним на обох нескінченностях потенціалом $u[2]$ (5)

$$u[2] = -2 \ln(\varphi_1[1])_{xx} = -\frac{2\chi_1^2}{\cosh^2 \chi_1 x}. \quad (8)$$

Теорему Дарбу можна узагальнити для диференціальних перетворень N -го порядку. Нехай лінійно незалежні функції $\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1]$ є розв'язками рівняння (1) з власними значеннями $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N$, відповідно. Визначимо функції

$$\varphi_j[2] = W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = \overline{2, N}. \quad (9)$$

Тепер, використовуючи функції $\varphi_1[1]$, $\varphi_2[2]$, визначимо функції $\varphi_j[3]$, $j = \overline{3, N}$

$$\varphi_j[3] := W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = \overline{3, N}. \quad (10)$$

На k -му кроці отримаємо функції

$$\varphi_j[k] := W_e[\varphi_{k-1}[k-1]] \dots W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = \overline{k, N}.$$

Правильна така теорема.

Теорема 2 (Крам, 1955). *Нехай*

$$\varphi_j[j] := W_e[\varphi_{j-1}[j-1]]W_e[\varphi_{j-2}[j-2]] \dots W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = 1, N. \quad (11)$$

Тоді функція

$$\begin{aligned} f[N+1] &:= W[\varphi]\{f[1]\} := \left(\mathcal{D} - \frac{\varphi_{Nx}[N]}{\varphi_N[N]}\right) \dots \left(\mathcal{D} - \frac{\varphi_{2x}[2]}{\varphi_2[2]}\right) \left(\mathcal{D} - \frac{\varphi_{1x}[1]}{\varphi_1[1]}\right) \{f[1]\} = \\ &= W_e[\varphi_N[N]] \dots W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{f[1]\} = \frac{\mathcal{W}(\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1], f[1])}{\mathcal{W}(\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1])}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\mathcal{W}(\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1], f[1])$ та $\mathcal{W}(\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1])$ є визначниками Вронського, побудованими за функціями $\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1], f[1]$ та $\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1]$, відповідно, задовольняє диференціальне рівняння

$$L[N+1]\{f\} := -f_{xx}[N+1] + u[N+1]f[N+1] = \lambda f[N+1], \quad (13)$$

з потенціалом

$$u[N+1] = u[1] - 2(\ln \mathcal{W}(\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1]))_{xx}. \quad (14)$$

Для довільного натурального N зафіксуємо дійсні сталі χ_j , $j = \overline{1, N}$:
 $0 < \chi_1 < \dots < \chi_N$. Тоді функції

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1} &= \cosh(\chi_{2k-1}(x - x_{2k-1})), \quad k = 1, \dots, \left[\frac{N+1}{2}\right], \\ \varphi_{2k} &= \sinh(\chi_{2k}(x - x_{2k})), \quad k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f_{2k-1} &= \sinh(\chi_{2k-1}(x - x_{2k-1})), \quad k = 1, \dots, \left[\frac{N+1}{2}\right]; \\ f_{2k} &= \cosh(\chi_{2k}(x - x_{2k})), \quad k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right], \end{aligned} \quad (16)$$

де $\mathbb{R} \ni x_{2k}, x_{2k-1}$ — фіксовані сталі (початкові фази), будуть розв'язками (лінійно незалежними) задачі Штурма-Ліувілля (1) з $u = 0$ та власними значеннями $\lambda = -\chi_j^2$.

За теоремою Крама (при $u[1] = 0$) рівняння (13) з регулярним потенціалом $u[N+1] = -2(\ln \mathcal{W}(\varphi_1[1], \dots, \varphi_N[1]))_{xx}$ при $\lambda = \lambda_j = -\chi_j^2$, $j = 1, \dots, N$ отримуємо такі розв'язки:

$$f_{2k}[N+1] = \frac{\mathcal{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_N, \cosh \chi_{2k}(x - x_{2k}))}{\mathcal{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)} \sim$$

$$\sim \frac{B_1}{B_2} e^{-\chi_{2k}x} = (-1)^N e^{-\chi_{2k}x} \prod_{i=1}^N (\chi_i + \chi_{2k}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f_{2k-1}[N+1] = \frac{\mathcal{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_N, \sinh \chi_{2k-1}(x - x_{2k-1}))}{\mathcal{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)} \sim$$

$$\sim -\frac{B_1}{B_2} e^{-\chi_{2k-1}x} = (-1)^{N-1} e^{-\chi_{2k-1}x} \prod_{i=1}^N (\chi_i + \chi_{2k-1}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\text{де } B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_N & \chi_j \\ \chi_1^N & \chi_2^N & \dots & \chi_N^N & (-1)^{N-1} \chi_j^N \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \chi_1 & \dots & \chi_N \\ \chi_1^{N-1} & \dots & \chi_N^{N-1} \end{vmatrix}.$$

$$f_{2k}[N+1] \sim \frac{\tilde{B}_1}{\tilde{B}_2} e^{\chi_{2k}x} \sim (-1)^N e^{\chi_{2k}x} \prod_{i=1}^N (\chi_i + \chi_{2k}), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$f_{2k-1}[N+1] \sim -\frac{\tilde{B}_1}{\tilde{B}_2} e^{\chi_{2k-1}x} \sim (-1)^{N-1} e^{\chi_{2k-1}x} \prod_{i=1}^N (\chi_i + \chi_{2k-1}), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$\text{де } \tilde{B}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -\chi_1 & -\chi_2 & \dots & -\chi_N & -\chi_j \\ (-1)^N \chi_1^N & (-1)^N \chi_2^N & \dots & (-1)^N \chi_N^N & (-1)^N \chi_j^N \end{vmatrix},$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -\chi_1 & \dots & -\chi_N \\ (-1)^{N-1} \chi_1^{N-1} & \dots & (-1)^{N-1} \chi_N^{N-1} \end{vmatrix}.$$

3. Факторизація вольтеррівських операторів. Введемо деякі поняття та означення, які використовуватимемо надалі. Зафіксуємо довільний інтервал (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ і точку $x_0 \in [a, b]$. Розглянемо оператори Вольєрра і Фредгольма

$$A = \int_{x_0}^x A(x, s) \cdot ds, \quad F = \int_a^b F(x, s) \cdot ds, \quad (17)$$

які діють на довільну функцію $f(x)$ так:

$$A\{f\} = \int_{x_0}^x A(x, s) f(s) ds, \quad F\{f\} = \int_a^b F(x, s) f(s) ds. \quad (18)$$

Означення 1. Оператор Вольтерра A (17) називатимемо оператором Вольтерра порядку $K \in \mathbb{N}$, якщо його ядро можна подати у вигляді

$$A(x, s) = \sum_{i=1}^K p_i(x) q_i(s) =: p(x) q^\top(s), \quad (19)$$

де $p(x) = (p_1(x), \dots, p_K(x))$, $q(s) = (q_1(s), \dots, q_K(s))$ – $(1 \times K)$ -вектор-функції, кожна з яких складається з лінійно незалежних компонент $p_j(x)$, $j = \overline{1, K}$ та $q_l(s)$, $l = \overline{1, K}$.

Оператор Вольтерра A (17) з ядром (19) надалі позначатимемо так:

$$A := p \int_{x_0}^x q^\top \cdot ds. \quad (20)$$

Означення 2. Оператор Фредгольма F (17) називатимемо оператором Фредгольма рангу $K \in \mathbb{N}$, якщо його ядро можна подати у вигляді

$$F(x, s) = \sum_{i=1}^K p_i(x) q_i(s) = p(x) q^\top(s), \quad (21)$$

де $p(x) = (p_1(x), \dots, p_K(x))$, $q(s) = (q_1(s), \dots, q_K(s))$ – $(1 \times K)$ -вектор-функції, кожна з яких складається з лінійно незалежних компонент $p_j(x)$, $j = \overline{1, K}$ та $q_l(s)$, $l = \overline{1, K}$.

Оператор Фредгольма F (17) з ядром (21) надалі позначатимемо аналогічно до формули (20)

$$F := p \int_a^b q^\top \cdot ds. \quad (22)$$

Означення 3. Оператори $W = I + A$ і $S = I + F$, де A , F є вольтеррівським і фредгольмівським операторами з ядрами вигляду (19), (21), ми називатимемо операторами перетворень порядку K і рангу K , відповідно.

В Означенні 3 символом I позначено одиничний оператор (перетворення тотожності).

Нехай функції $\varphi_1 = \varphi_1(x) := \varphi_1[1]$, $\dots$, $\varphi_K = \varphi_K(x) := \varphi_K[1]$, $\psi_1 = \psi_1(x) := \psi_1[1]$, $\dots$, $\psi_K = \psi_K(x) := \psi_K[1]$ – неперервні та інтегровні з квадратом модуля на інтервалі (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) (тобто, належать простору $C(a, b) \cap L_2(a, b)$). Позначимо простір таких функцій через $\mathfrak{L}$. Припустимо також, що функції $\varphi_1, \dots, \varphi_K$ та $\psi_1, \dots, \psi_K$ лінійно незалежні. $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$. Розглянемо такі інтегральні оператори:

$$\begin{aligned} W_{11} &= W[c_1, \varphi_1[1], \psi_1[1]] := I - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1[1](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{11} &= \widetilde{W}[c_1, \varphi_1[1], \psi_1[1]] := I - \psi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \varphi_1[1](s) \cdot ds, \\ \Delta_{11} &:= c_1 + \int_{x_0}^x \psi_1[1] \varphi_1[1] ds, \quad x_0 \in [a, b]. \end{aligned} \quad (23)$$

Подіємо перетвореннями (23) на функції $\varphi_1[1], \dots, \varphi_K[1]$ та $\psi_1[1], \dots, \psi_K[1]$, відповідно

$$\begin{aligned}\varphi_j[2] &:= W_{11}\{\varphi_j[1]\} = \varphi_j[1] - \varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1[1](s)\varphi_j[1](s)ds, \\ \psi_j[2] &:= \widetilde{W}_{11}\{\psi_j[1]\} = \psi_j[1] - \psi_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \varphi_1[1](s)\psi_j[1](s)ds, \quad j = \overline{1, K}.\end{aligned}\quad (24)$$

Далі будемо перетворення за допомогою функцій $\varphi_2[2], \psi_2[2]$

$$\begin{aligned}W_{22} &= W[c_2, \varphi_2[2], \psi_2[2]] := I - \varphi_2[2]\Delta_{22}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_2[2](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{22} &= \widetilde{W}[c_2, \varphi_2[2], \psi_2[2]] := I - \psi_2[2]\Delta_{22}^{-1} \int_{x_0}^x \varphi_2[2](s) \cdot ds, \\ \Delta_{22} &:= c_2 + \int_{x_0}^x \psi_2[2]\varphi_2[2]ds.\end{aligned}\quad (25)$$

На наступному кроці за допомогою перетворень (25) отримуємо функції $\varphi_j[3], \psi_j[3]$

$$\varphi_j[3] := W_{22}\{\varphi_j[2]\}, \quad \psi_j[3] := \widetilde{W}_{22}\{\psi_j[2]\}, \quad j = \overline{1, K}.\quad (26)$$

Зрозуміло, що попередні міркування можна повторювати K разів. На k -му кроці, де $1 \leq k < K$, отримаємо функції $\varphi_j[k], \psi_j[k]$, $j = \overline{1, K}$. За допомогою $\varphi_k[k], \psi_k[k]$ будемо перетворення

$$\begin{aligned}W_{kk} &= W[c_k, \varphi_k[k], \psi_k[k]] := I - \varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_k[k](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{kk} &= \widetilde{W}[c_k, \varphi_k[k], \psi_k[k]] = I - \psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1} \int_{x_0}^x \varphi_k[k](s) \cdot ds, \quad k = \overline{1, K}, \\ \Delta_{kk} &:= c_k + \int_{x_0}^x \psi_k[k](s)\varphi_k[k](s)ds.\end{aligned}\quad (27)$$

На наступному кроці будемо функції $\varphi_j[k+1]$ та $\psi_j[k+1]$

$$\begin{aligned}\varphi_j[k+1] &= W_{kk}\{\varphi_j[k]\} = \varphi_j[k] - \varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_k[k](s)\varphi_j[k](s)ds, \\ \psi_j[k+1] &= \widetilde{W}_{kk}\{\psi_j[k]\} := \psi_j[k] - \psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1} \int_{x_0}^x \varphi_k[k](s)\psi_j[k](s)ds, \quad j = \overline{1, K}.\end{aligned}\quad (28)$$

Позначимо

$$W_k := W_{kk} \circ W_{k-1 \ k-1} \circ \dots \circ W_{11},\quad (29)$$

$$\widetilde{W}_k := \widetilde{W}_{kk} \circ \widetilde{W}_{k-1 \ k-1} \circ \dots \circ \widetilde{W}_{11}.\quad (30)$$

Оператори W_k та $\widetilde{W}_k$ діють на довільну скалярну функцію $f = f(x) \in \mathfrak{L}$ так:

$$W_k\{f\} = W_{kk}\{\dots\{W_{11}\{f\}\}\}, \quad \widetilde{W}_k\{f\} = \widetilde{W}_{kk}\{\dots\{\widetilde{W}_{11}\{f\}\}\}.\quad (31)$$

Твердження 1. Оператори W_k (29) та $\widetilde{W}_k$ (30) можна подати у такому вигляді ($1 \leq k \leq K$):

$$W_k = I - \hat{\varphi}_k \Delta_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds,\quad (32)$$

$$\widetilde{W}_k = I - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad \Delta_k = C_k + \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \hat{\varphi}_k(s) ds, \quad \Delta_k^\top = \widetilde{\Delta}_k. \quad (33)$$

де $\hat{\varphi}_k = (\varphi_1[1], \dots, \varphi_k[1])$, $\hat{\psi}_k = (\psi_1[1], \dots, \psi_k[1])$, $C_k = \text{diag}(c_1, \dots, c_k)$. Оператори W_k (32) та $\widetilde{W}_k$ (33) діють на скалярну функцію $f = f(x)$ так:

$$W_k\{f\} = f - \hat{\varphi}_k \Delta_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) f(s) ds, \quad (34)$$

$$\widetilde{W}_k\{f\} = f - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) f(s) ds. \quad (35)$$

Доведення. Доведемо спочатку, що оператор W_2 (29) можна зобразити у вигляді (32). За означенням

$$W_{22} = I - \varphi_2[2] \Delta_{22}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_2[2](s) \cdot ds. \quad (36)$$

Розглянемо добуток $\psi_2[2] \varphi_2[2]$

$$\begin{aligned} \psi_2[2] \varphi_2[2] &= \left(\psi_2[1] - \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \psi_1[1] \right) \times \\ &\times \left(\varphi_2[1] - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1[1](s) \varphi_2[1](s) ds \right) = \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1] \varphi_2[1](s) ds - \right. \\ &\left. - \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_1[1](s) \varphi_2[1](s) ds \right) \right) \Big|_x. \end{aligned} \quad (37)$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Delta_{22} &= c_2 + \int_{x_0}^x \psi_2[2](s) \varphi_2[2](s) ds = c_2 + \int_{x_0}^x \psi_2[1](s) \varphi_2[1](s) ds - \\ &- \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_1[1](s) \varphi_2[1](s) ds \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Подіємо оператором W_{11} на функцію f

$$f[2] := W_{11}\{f\} = f - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1[1] f(s) ds. \quad (39)$$

Використавши рівність

$$\int_{x_0}^x \psi_2[2]f[2](s)ds = \int_{x_0}^x \psi_2[1]f(s)ds - \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1](s)\varphi_1[1](s)ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_1[1](s)f(s)ds \right), \quad (40)$$

яку отримуємо аналогічно до формул (37), (38), одержуємо

$$\begin{aligned} W_{22}\{f[2]\} &= W_{22}\{W_{11}\{f\}\} = f[2] - \varphi_2[2]\Delta_{22}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_2[2](s)f[2](s)ds = \\ &= f - \varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1[1]f(s)ds - \left(\varphi_2[1] - \varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1[1](s)\varphi_2[1](s)ds \right) \Delta_{22}^{-1} \times \\ &\times \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1]f(s)ds - \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1](s)\varphi_1[1](s)ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_1[1](s)f(s)ds \right) \right) = \\ &= f - (\psi_1[1], \psi_2[1]) A_2(x) \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} \varphi_1[1](s) \\ \varphi_2[1](s) \end{pmatrix} f(s)ds. \end{aligned} \quad (41)$$

Залишається зауважити, що для (2×2) -матричної функції $A_2(x)$, де

$$\begin{aligned} A_{11}(x) &= \Delta_{11}^{-1} + \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_1[1](s)\varphi_2[1](s)ds \right) \Delta_{22}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1](s)\varphi_1[1](s)ds \right) \Delta_{11}^{-1}, \\ A_{12}(x) &= -\Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_1[1](s)\varphi_2[1](s)ds \right) \Delta_{22}^{-1}, \\ A_{21}(x) &= -\Delta_{22}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \psi_2[1](s)\varphi_1[1](s)ds \right) \Delta_{11}^{-1}, \\ A_{22}(x) &= \Delta_{22}^{-1}, \end{aligned} \quad (42)$$

виконується рівність

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \int_{x_0}^x \psi_1[1]\varphi_1[1](s)ds & \int_{x_0}^x \psi_1[1]\varphi_2[1](s)ds \\ \int_{x_0}^x \psi_2[1]\varphi_1[1](s)ds & c_2 + \int_{x_0}^x \psi_2[1]\varphi_2[1](s)ds \end{pmatrix}^{-1} = \Delta_2^{-1}. \quad (43)$$

Отже,

$$W_2 := W_{22} \circ W_{11} = I - \hat{\varphi}_2(x) \Delta_2^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_2^\top(s) \cdot ds, \quad (44)$$

де $\hat{\varphi}_2 = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\hat{\psi}_2 = (\psi_1, \psi_2)$, $C_2 = \text{diag}(c_1, c_2)$.

Аналогічно можна довести, що

$$\widetilde{W}_2 := \widetilde{W}_{22} \circ \widetilde{W}_{11} = I - \hat{\psi}_2(x) \widetilde{\Delta}_2^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_2^\top(s) \cdot ds. \quad (45)$$

Тепер припустимо, що твердження виконується для деякого натурального k . Доведемо, що тоді воно буде виконуватись для $k+1$. За припущенням, одержимо

$$W_k := W_{kk} \circ W_{k-1 \ k-1} \circ \dots \circ W_{11} = I - \hat{\varphi}_k(x) \Delta_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad (46)$$

$$\widetilde{W}_k := \widetilde{W}_{kk} \circ \widetilde{W}_{k-1 \ k-1} \circ \dots \circ \widetilde{W}_{11} = I - \hat{\psi}_k(x) \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \cdot ds. \quad (47)$$

Розглянемо оператори

$$W_{k+1} := W_{k+1 \ k+1} \circ W_{kk} \circ W_{k-1 \ k-1} \circ \dots \circ W_{11} = W_{k+1 \ k+1} W_k \quad (48)$$

$$\widetilde{W}_{k+1} := \widetilde{W}_{k+1 \ k+1} \circ \widetilde{W}_{kk} \circ \widetilde{W}_{k-1 \ k-1} \circ \dots \circ \widetilde{W}_{11} = \widetilde{W}_{k+1 \ k+1} \widetilde{W}_k. \quad (49)$$

Перевіримо припущення індукції для оператора $\widetilde{W}_{k+1}$. Для W_{k+1} перевірка проводиться аналогічно.

Введемо позначення

$$f[k+1] := \widetilde{W}_k \{f\} = f - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) f ds, \quad f \in \mathfrak{L}. \quad (50)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{k+1} \{f\} &= \widetilde{W}_{k+1 \ k+1} \{f[k+1]\} = \\ &= f[k+1] - \psi_{k+1}[k+1] \widetilde{\Delta}_{k+1 \ k+1}^{-1} \int_{x_0}^x \varphi_{k+1}[k+1](s) f[k+1](s) ds. \end{aligned} \quad (51)$$

Використавши те, що $\varphi_{k+1}[k+1] = W_k \{\varphi_{k+1}\}$, а також формулу (50), отримаємо рівність

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \varphi_{k+1}[k+1](s) f[k+1](s) ds &= \int_{x_0}^x \varphi_{k+1}(s) f(s) ds - \\ &- \left(\int_{x_0}^x \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) f(s) ds \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Відповідно, з рівностей (51), (52) отримуємо, що

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{k+1}\{f\} &= f - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) f ds - \left(\psi_{k+1} - \hat{\psi}_k(x) \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \psi_{k+1}(s) ds \right) \times \\ &\times \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \varphi_{k+1}(s) f(s) ds - \left(\int_{x_0}^x \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) f(s) ds \right) \right) = \\ &= f - \left(\hat{\psi}_k, \psi_{k+1} \right) A_{k+1}(x) \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_k^\top(s) \\ \varphi_{k+1}(s) \end{pmatrix} f(s) ds, \quad (53)\end{aligned}$$

де $A_{k+1}(x) - (k+1) \times (k+1)$ -матрична функція, яка виглядає так:

$$A_{k+1}(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad (54)$$

де $A_{11}(x)$, $A_{12}(x)$, $A_{21}(x)$, $A_{22}(x) - (k \times k)$, $(k \times 1)$, $(1 \times k)$, (1×1) -блоки вигляду:

$$A_{11}(x) = \widetilde{\Delta}_k^{-1} + \widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \psi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1},$$

$$A_{12}(x) = -\widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \psi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1},$$

$$A_{21}(x) = -\widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1} \left(\int_{x_0}^x \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1}, \quad A_{22}(x) = \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1}.$$

Зрештою, залишається зауважити, що

$$A_{k+1}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\Delta}_k & \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \psi_{k+1}(s) ds \\ \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds & c_{k+1} + \int_{x_0}^x \psi_{k+1}(s) \varphi_{k+1}(s) ds \end{pmatrix}^{-1} = \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1}. \quad (55)$$

Отже,

$$\widetilde{W}_{k+1} := I - \hat{\psi}_{k+1}(x) \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_{k+1}^\top(s) \cdot ds.$$

Аналогічно перевіряємо вигляд оператора W_{k+1} . $\square$

Отже, довівши Твердження 1 при $k = K$ ми отримали факторизацію операторів перетворень Вольтерра W_K , $\widetilde{W}_K$ (32)-(33) порядку K з діагональною матрицею C_K у вигляді

$$W_K := W_{KK} \circ W_{K-1 \ K-1} \circ \dots \circ W_{11}, \quad \widetilde{W}_K := \widetilde{W}_{KK} \circ \widetilde{W}_{K-1 \ K-1} \circ \dots \circ \widetilde{W}_{11}, \quad (56)$$

де оператори перетворень Вольтерра першого порядку W_{kk} , $\widetilde{W}_{kk}$ визначають формулами (27)-(28).

Нехай $C = (c_{ij})_{i,j=1}^K$ – $(K \times K)$ -матриця рангу $r \leq K$, головні мінори якої до порядку r включно відмінні від нуля. Розглянемо тепер факторизацію операторів

$$W'_k = I - \hat{\varphi}_k(x) \left(C_k + \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \hat{\varphi}_k(s) \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad (57)$$

$$\widetilde{W}'_k = I - \hat{\psi}_k(x) \left(C_k^\top + \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \hat{\psi}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad (58)$$

де $\hat{\varphi}_k = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $\hat{\psi}_k = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ – вектор-функції, компоненти яких лінійно незалежні, $C_k = (c_{ij})_{i,j=1}^k$ – матриця, що відповідає головному мінору D_k порядку k . Тобто, $D_k := \det(C_k)$. Позначимо

$$C \left(\begin{array}{c} i_1, i_2, \dots, i_p \\ k_1, k_2, \dots, k_p \end{array} \right) := \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \dots & c_{i_1 k_p} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \dots & c_{i_2 k_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i_p k_1} & c_{i_p k_2} & \dots & c_{i_p k_p} \end{vmatrix}, \quad (59)$$

де $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k$, $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq k$. Для подальшого застосування потрібна буде теорема.

Теорема 3 ([33], с. 53). Для довільної $(K \times K)$ -матриці C рангу $r \leq K$, в якій всі головні мінори до порядку r включно відмінні від нуля

$$D_j = \det(C_j) \neq 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad (60)$$

правильна така факторизація за допомогою трьох $(K \times K)$ -матриць $F = (f_{sj})_{s,j=1}^K$, U та $L = (l_{sj})_{s,j=1}^K$

$$C = FUL = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{K1} & f_{K2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{diag} \left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_r}{D_{r-1}}, 0, \dots, 0 \right) \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \dots & l_{1K} \\ 0 & 1 & \dots & l_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

де

$$f_{sj} = \frac{C \left(\begin{array}{c} 1, 2, \dots, j-1, s \\ 1, 2, \dots, j-1, j \end{array} \right)}{C \left(\begin{array}{c} 1, 2, \dots, j \\ 1, 2, \dots, j \end{array} \right)}, \quad l_{js} = \frac{C \left(\begin{array}{c} 1, 2, \dots, j-1, j \\ 1, 2, \dots, j-1, s \end{array} \right)}{C \left(\begin{array}{c} 1, 2, \dots, j \\ 1, 2, \dots, j \end{array} \right)}, \quad (62)$$

$j = 1, 2, \dots, r$, $s = j+1, \dots, K$, а f_{sj} , l_{js} – довільні комплексні числа при $j = r+1, \dots, K$, $s = j+1, \dots, K$.

Позначатимемо через f_{sj}^- елементи матриці F^{-1} , а через l_{js}^- – елементи матриці L^{-1} . Тобто,

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21}^- & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{K1}^- & f_{K2}^- & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & l_{12}^- & \dots & l_{1K}^- \\ 0 & 1 & \dots & l_{2K}^- \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Зауваження 1. Безпосередньо з вигляду матриць F, L, U випливає, що для матриці $C_k = (c_{ij})_{i,j=1}^k$ ($1 \leq k \leq K$) правильна формула

$$C_k = F_k U_k L_k, \quad (64)$$

де U_k, F_k, L_k – блоки розмірності $k \times k$, що стоять у лівому верхньому куті відповідних матриць U, F, L теореми 1.

Використовуючи теорему 1 та твердження 1, ми маємо на меті отримати алгоритм для факторизації операторів W'_k (57) та $\widetilde{W}'_k$ (58). Згідно з теоремою 1 матрицю C , що входить в оператори $W'_k, \widetilde{W}'_k$, можна профакторизувати: $C = FUL$ (див. формулу (61)). Обернені матриці F^{-1} та L^{-1} набудуть вигляду (63).

На першому кроці введемо позначення $\tilde{\varphi}_1[1] := \varphi_1[1]$ та $\tilde{\psi}_1[1] := \psi_1[1]$ і приймемо

$$\begin{aligned} W_{11} &:= I - \tilde{\varphi}_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_1[1](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{11} &:= I - \tilde{\psi}_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\varphi}_1[1](s) \cdot ds, \\ \Delta_{11} &:= c_1 + \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_1[1] \tilde{\varphi}_1[1] ds, \end{aligned} \quad (65)$$

де $c_1 := D_1 = c_{11}$. Тепер введемо дві нові функції $\tilde{\varphi}_2[1] := l_{12}^- \varphi_1[1] + \varphi_2[1]$, $\tilde{\psi}_2[1] := f_{21}^- \psi_1[1] + \psi_2[1]$, де коефіцієнти l_{12}^-, f_{21}^- визначають з формул (62) та (63).

Подіємо перетвореннями (65) на функції $\tilde{\varphi}_1[1], \tilde{\varphi}_2[1]$ та $\tilde{\psi}_1[1], \tilde{\psi}_2[1]$, відповідно

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j[2] &:= W_{11} \{ \tilde{\varphi}_j[1] \} = \tilde{\varphi}_j[1] - \tilde{\varphi}_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_1[1](s) \tilde{\varphi}_j[1](s) ds, \\ \tilde{\psi}_j[2] &:= \widetilde{W}_{11} \{ \tilde{\psi}_j[1] \} = \tilde{\psi}_j[1] - \tilde{\psi}_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\varphi}_1[1](s) \tilde{\psi}_j[1](s) ds, \quad j = \overline{1, 2}, \end{aligned} \quad (66)$$

де $\Delta_{11} = c_1 + \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_1[1](s) \tilde{\varphi}_1[1](s) ds$.

Будуємо перетворення за допомогою функцій $\tilde{\varphi}_2[2], \tilde{\psi}_2[2]$

$$\begin{aligned} W_{22} &= W[c_2, \tilde{\varphi}_2[2], \tilde{\psi}_2[2]] := I - \tilde{\varphi}_2[2] \tilde{\Delta}_{22}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_2[2](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{22} &= \widetilde{W}[c_2, \tilde{\varphi}_2[2], \tilde{\psi}_2[2]] := I - \tilde{\psi}_2[2] \tilde{\Delta}_{22}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\varphi}_2[2](s) \cdot ds, \\ \tilde{\Delta}_{22} &:= c_2 + \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_2[2] \tilde{\varphi}_2[2] ds, \end{aligned} \quad (67)$$

де

$$c_2 := \frac{D_2}{D_1} = \frac{\det(C_2)}{c_{11}}. \quad (68)$$

Використовуємо дві нові функції $\tilde{\varphi}_3[1] := l_{13}^-\varphi_1[1] + l_{23}^-\varphi_2[1] + \varphi_3[1]$, $\tilde{\psi}_3[1] := f_{31}^-\psi_1[1] + f_{32}^-\psi_2[1] + \psi_3[1]$ (коефіцієнти l_{13}^- , l_{23}^- , f_{31}^- , f_{32}^- визначаються з формул (62) та (63)) та будуємо функції $\tilde{\varphi}_3[2]$, $\tilde{\psi}_3[2]$ за допомогою операторів W_{11} , $\tilde{W}_{11}$

$$\tilde{\varphi}_3[2] := W_{11}\{\tilde{\varphi}_3[1]\}, \quad \tilde{\psi}_3[2] := \tilde{W}_{11}\{\tilde{\psi}_3[1]\}. \quad (69)$$

Одержавши функції $\tilde{\varphi}_j[2]$, $\tilde{\psi}_j[2]$, $j = \overline{1, 3}$, будуємо $\tilde{\varphi}_j[3]$, $\tilde{\psi}_j[3]$, $j = \overline{1, 3}$

$$\tilde{\varphi}_j[3] := W_{22}\{\tilde{\varphi}_j[2]\} = W_{22}\{W_{11}\{\tilde{\varphi}_j[1]\}\},$$

$$\tilde{\psi}_j[3] := \tilde{W}_{22}\{\tilde{\psi}_j[2]\} = \tilde{W}_{22}\{\tilde{W}_{11}\{\tilde{\psi}_j[1]\}\}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (70)$$

Зрозуміло, що попередні міркування можна повторювати K разів. На k -му кроці, де $1 \leq k < K$, отримаємо функції $\tilde{\varphi}_j[k]$, $\tilde{\psi}_j[k]$, $j = \overline{1, k}$. За допомогою $\tilde{\varphi}_k[k]$, $\tilde{\psi}_k[k]$ будуємо перетворення

$$\begin{aligned} W_{kk} &= W[c_k, \tilde{\varphi}_k[k], \tilde{\psi}_k[k]] := I - \tilde{\varphi}_k[k] \tilde{\Delta}_{kk}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_k[k](s) \cdot ds, \\ \tilde{W}_{kk} &= \tilde{W}[c_k, \tilde{\varphi}_k[k], \tilde{\psi}_k[k]] = I - \tilde{\psi}_k[k] \tilde{\Delta}_{kk}^{-1} \int_{x_0}^x \tilde{\varphi}_k[k](s) \cdot ds, \\ \tilde{\Delta}_{kk} &:= c_k + \int_{x_0}^x \tilde{\psi}_k[k](s) \tilde{\varphi}_k[k](s) ds, \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (71)$$

де

$$c_k = \frac{\det(C_k)}{\det(C_{k-1})} = \frac{D_k}{D_{k-1}}, \quad (72)$$

або $c_k = 0$, якщо $\det(C_{k-1}) = 0$. На наступному кроці вводимо дві додаткові функції $\tilde{\varphi}_{k+1}[1] := l_{1k}^-\varphi_1[1] + \dots + l_{k-1, k}^-\varphi_{k-1}[1] + \varphi_k[1]$ та $\tilde{\psi}_{k+1}[1] := f_{k1}^-\psi_1[1] + \dots + f_{k, k-1}^-\psi_{k-1}[1] + \psi_k[1]$. Використовуючи послідовно оператори W_{11} , $\dots$, $W_{k-1, k-1}$ та $\tilde{W}_{11}$, $\dots$, $\tilde{W}_{k-1, k-1}$, вводимо функції

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{k+1}[2] &:= W_{11}\{\tilde{\varphi}_{k+1}[1]\}, \quad \tilde{\varphi}_{k+1}[3] := W_{22}\{\tilde{\varphi}_{k+1}[2]\}, \quad \dots, \\ \tilde{\varphi}_{k+1}[k] &:= W_{k-1, k-1}\{\tilde{\varphi}_{k+1}[k-1]\}; \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{k+1}[2] &:= \tilde{W}_{11}\{\tilde{\psi}_{k+1}[1]\}, \quad \tilde{\psi}_{k+1}[3] := \tilde{W}_{22}\{\tilde{\psi}_{k+1}[2]\}, \quad \dots, \\ \tilde{\psi}_{k+1}[k] &:= W_{k-1, k-1}\{\tilde{\psi}_{k+1}[k-1]\}. \end{aligned} \quad (74)$$

Після цього за допомогою операторів (71) будуємо функції $\tilde{\varphi}_j[k+1]$, $\tilde{\psi}_j[k+1]$

$$\tilde{\varphi}_j[k+1] := W_{kk}\{\tilde{\varphi}_j[k]\} = W_{kk} \circ W_{k-1, k-1} \circ \dots \circ W_{11}\{\tilde{\varphi}_j[1]\},$$

$$\tilde{\psi}_j[k+1] := \tilde{W}_{kk}\{\tilde{\psi}_j[k]\} = \tilde{W}_{kk} \circ \tilde{W}_{k-1, k-1} \circ \dots \circ \tilde{W}_{11}\{\tilde{\psi}_j[1]\}, \quad j = \overline{1, k+1}. \quad (75)$$

Далі будуємо оператори $W_{k+1, k+1}$ та $\tilde{W}_{k+1, k+1}$. Повторюємо такі міркування K разів. Введемо позначення

$$W_k := W_{kk} \circ \dots \circ W_{11}, \quad \tilde{W}_k := \tilde{W}_{kk} \circ \dots \circ \tilde{W}_{11}. \quad (76)$$

Тепер доведемо, що оператори W_k та $\widetilde{W}_k$ (76) збігаються з відповідними операторами $W'_k, \widetilde{W}'_k$ (57), (58). Тобто, ми хочемо довести, що

$$W_k = I - \hat{\varphi}_k \left(C_k + \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \hat{\varphi}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds = \widetilde{W}_k, \quad (77)$$

$$\widetilde{W}_k = I - \hat{\psi}_k(x) \left(C_k^\top + \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \hat{\psi}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \cdot ds = \widetilde{W}'_k. \quad (78)$$

За побудовою для вектор-функцій $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_K)$, $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_K)$ виконуються рівності

$$\tilde{\varphi} := \varphi L^{-1}, \quad \tilde{\psi}^\top := F^{-1} \psi^\top. \quad (79)$$

Застосувавши твердження 1 до операторів (76), отримаємо, що

$$\begin{aligned} W_k &= I - \tilde{\varphi}_k \left(U_k + \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \tilde{\varphi}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_k &= I - \tilde{\psi}_k(x) \left(U_k + \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \tilde{\psi}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\varphi}_k^\top(s) \cdot ds. \\ W_k &= I - \tilde{\varphi}_k \left(U_k + \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \tilde{\varphi}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds = \\ &= \hat{\varphi}_k L_k^{-1} \left(U_k + \int_{x_0}^x F_k^{-1} \hat{\psi}_k^\top(s) \hat{\varphi}_k(s) ds L_k^{-1} \right)^{-1} F_k^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds = \\ &= I - \hat{\varphi}_k \left(C_k + \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \hat{\varphi}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{x_0}^x \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds = W'_k. \end{aligned} \quad (80)$$

Аналогічно доводимо, що $\widetilde{W}'_k = \widetilde{W}_k$. Отож, ми отримали факторизацію операторів W'_k (57), $\widetilde{W}'_k$ (58). Тобто,

$$W'_k = W_k = W_{kk} \circ \dots \circ W_{11}, \quad \widetilde{W}'_k = \widetilde{W}_k = \widetilde{W}_{kk} \circ \dots \circ \widetilde{W}_{11}. \quad (81)$$

Зауваження 2. Отже, ми довели, що оператори перетворень Вольтерра порядку K $W'_K, \widetilde{W}'_K$ з матрицею C_K рангу $r \leq K$ (див. формули (57)-(58) при $k = K$) можна профакторизувати у вигляді

$$W'_K = W_{KK} \circ \dots \circ W_{11}, \quad \widetilde{W}'_K = \widetilde{W}_{KK} \circ \dots \circ \widetilde{W}_{11}, \quad (82)$$

де оператори $W_{kk}, \widetilde{W}_{kk}$ є операторами порядку 1 та визначаються формулами (71)-(74). Факторизація (83) є аналогом факторизаційної формули (56).

4. Факторизація фредгольмівських операторів. Досліджуватимемо різні факторизації операторів перетворень Фредгольма скінченного рангу. Розглянемо оператори такого вигляду:

$$W^+ = I - \varphi(x)(\Delta^-(x))^{-1} \int_{-\infty}^x \psi^\top(s) \cdot ds, \quad (84)$$

$$W^- = I - \varphi(x)(\Delta^+(x))^{-1} \int_{+\infty}^x \psi^\top(s) \cdot ds. \quad (85)$$

де $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x) - (1 \times K)$ -векторні функції, кожна компонента яких є неперервною та інтегрованою з квадратом на інтервалі (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$;

$$\Delta^\pm(x) = C^\pm + \int_{\pm\infty}^x \psi^\top(s)\varphi(s)ds, \quad (86)$$

$C^\pm - (K \times K)$ -сталі матриці.

Обернені оператори до W^+ (84), W^- (85) набувають вигляду

$$(W^+)^{-1} = I + \varphi(x) \int_{-\infty}^x (\Delta^-(s))^{-1} \psi^\top(s) \cdot ds. \quad (87)$$

$$(W^-)^{-1} = I + \varphi(x) \int_{+\infty}^x (\Delta^+(s))^{-1} \psi^\top(s) \cdot ds. \quad (88)$$

Надалі вважатимемо, що матриці $C^\pm$ задовольняють рівність

$$C^+ := C^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s)\varphi(s)ds, \quad (89)$$

наслідком якої є рівність потенціалів: $\Delta^+ = \Delta^- =: \Delta$.

Твердження 2. Нехай матриці $C^\pm$ – невідроджені. Тоді композиції операторів (84)-(88) набудуть такого вигляду:

$$S_1 := W^+ \circ (W^-)^{-1} = I - H_1 = I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} C^- \Delta^{-1}(s) \psi^\top(s) \cdot ds,$$

$$S_2 := (W^-)^{-1} \circ W^+ = I - H_2 = I - \varphi(x)(C^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s) \cdot ds,$$

$$S_3 := (W^+)^{-1} \circ W^- = I + H_3 = I + \varphi(x)(C^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s) \cdot ds,$$

$$S_4 := W^- \circ (W^+)^{-1} = I + H_4 = I + \varphi(x)\Delta^{-1}(x)C^+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(s)\psi^\top(s) \cdot ds. \quad (90)$$

Доведення. Перевіримо першу композицію (90)

$$\begin{aligned} W^+ \circ (W^-)^{-1} &= \left(I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int_{-\infty}^x \psi^\top(s) \cdot ds \right) \circ \left(I + \varphi(x) \int_{+\infty}^x \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz \right) = \\ &= I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int_{-\infty}^x \psi^\top(s) \cdot ds + \varphi(x) \int_{+\infty}^x \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz - \\ &\quad - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int_{-\infty}^x \psi^\top(s)\varphi(s) \left(\int_{+\infty}^s \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz \right) \cdot ds = \\ &= I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int_{-\infty}^x \psi^\top(s) \cdot ds + \varphi(x) \int_{+\infty}^x \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz - \\ &\quad - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int_{+\infty}^x (\Delta(x) - C^-) \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz + \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int_{-\infty}^x (\Delta(z) - C^-) \times \\ &\quad \times \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz = I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x)C^- \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z)dz. \end{aligned}$$

Подібно перевіряємо решту композицій (90). $\square$

Тепер дослідимо можливість факторизації фредгольмівського оператора S_2 перетворення (90) рангу K

$$S_2 = I - H_2 = I - \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} (C^+)^{-1}\psi^\top(s) \cdot ds, \quad (91)$$

за допомогою фредгольмівських операторів перетворень рангу 1. Вважатимемо, що матриці $C^\pm$ – невідроджені і матриця $C^- = \text{diag}(c_1^-, c_2^-, \dots, c_K^-)$ – діагональна. Позначимо $\varphi_1[1] := \varphi_1, \dots, \varphi_K[1] := \varphi_K$. Далі розглянемо такий оператор перетворень Фредгольма:

$$S_{11} := I - \varphi_1[1](x)(c_1^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s) \cdot ds, \quad c_1^+ := c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s)\varphi_1[1](s)ds. \quad (92)$$

Введемо функції $\varphi_1[2], \dots, \varphi_K[2]$ так:

$$\varphi_j[2] := S_{11}\{\varphi_j[1]\} = \varphi_j[1](x) - \varphi_1[1](x)(c_1^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s)\varphi_j[1](s)ds, \quad j = \overline{1, K}. \quad (93)$$

Побудуємо новий оператор S_{22}

$$S_{22} := I - \varphi_2[2](x)(c_2^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[1](s) \cdot ds, \quad c_2^+ = c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[1](s)\varphi_2[2](s)ds. \quad (94)$$

Далі будуємо функції $\varphi_j[3]$, $j = \overline{1, K}$

$$\varphi_j[3] := S_{22}\{\varphi_j[2]\} = \varphi_j[2](x) - \varphi_2[2](x)(c_2^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[1](s)\varphi_j[2](s)ds, \quad j = \overline{1, K}. \quad (95)$$

На k -му кроці ($1 \leq k < K$) одержуємо функції $\varphi_1[k], \dots, \varphi_K[k]$. Будуємо перетворення S_{kk}

$$S_{kk} := I - \varphi_k[k](x)(c_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[1](s) \cdot ds, \quad c_k^+ = c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[1](s)\varphi_k[k](s)ds. \quad (96)$$

Далі будуємо нові функції

$$\varphi_j[k+1] := S_{kk}\{\varphi_j[k]\} = \varphi_j[k](x) - \varphi_k[k](x)(c_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[1](s)\varphi_j[k](s)ds, \quad (97)$$

$j = \overline{1, K}$. Через K кроків отримаємо оператори $S_{11}, \dots, S_{KK}$. Для композиції $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1\ k-1} \circ S_{22} \circ S_{11}$ правильне твердження.

Твердження 3. Оператор $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1\ k-1} \circ S_{22} \circ S_{11}$, де оператори S_{kk} , $k = \overline{1, K}$ визначаються формулами (96)-(97), можна зобразити так:

$$\hat{S}_k = I - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad (98)$$

де $\hat{\varphi}_k := (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $\hat{\psi}_k := (\psi_1, \dots, \psi_k)$, $C_k^+ = \text{diag}(c_1^-, \dots, c_k^-) + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s)\hat{\varphi}_k(s)ds$.

Зокрема, при $k = K$ отримаємо: $\hat{S}_K = S_2$, де оператор S_2 визначений формулою (91).

Доведення. Припустимо, що твердження правильне для деякого $k < K$. Тобто,

$$\hat{S}_k = I - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad (99)$$

де $C_k^+ = \text{diag}(c_1^-, \dots, c_k^-) + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s)\hat{\varphi}_k(s)ds$. Тепер знайдемо композицію оператора

$$S_{k+1\ k+1} = I - \varphi_{k+1}[k+1](c_{k+1}^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[1](s) \cdot ds, \quad (100)$$

де $\varphi_{k+1}[k+1] = \hat{S}_k\{\varphi_{k+1}[1]\} = \varphi_{k+1}[1] - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \varphi_{k+1}[1](s) ds$, та оператора $\hat{S}_k$ (99):

$$\begin{aligned} S_{k+1\ k+1} \circ \hat{S}_k &= I - \varphi_{k+1}[k+1](c_{k+1}^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[1](s) \cdot ds - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds + \\ &+ \varphi_{k+1}[k+1](c_{k+1}^+)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}(z) \hat{\varphi}_k(z) dz \right) (C_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds = \\ &= I - (\hat{\varphi}_k, \varphi_{k+1}[1]) B_{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_k^\top(s) \\ \psi_{k+1}[1](s) \end{pmatrix} \cdot ds. \end{aligned} \quad (101)$$

Тут B_{k+1} – стала $(k+1) \times (k+1)$ -матриця вигляду:

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad (102)$$

де B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{22} – $(k \times k)$, $(k \times 1)$, $(1 \times k)$, (1×1) -блоки такого вигляду:

$$\begin{aligned} B_{11} &= (C_k^+)^{-1} + (C_k^+)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(z) \varphi_{k+1}[1](z) dz \right) (c_{k+1}^+)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[1](z) \hat{\varphi}_k(z) dz \right) (C_k^+)^{-1}, \\ B_{12} &= -(C_k^+)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k(z) \varphi_{k+1}[1](z) dz \right) (c_{k+1}^+)^{-1}, \\ B_{21} &= -(c_{k+1}^+)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}(z) \hat{\varphi}_k(z) dz \right) (C_k^+)^{-1}, \\ B_{22} &= (c_{k+1}^+)^{-1}. \end{aligned}$$

Залишається зауважити, що

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \begin{pmatrix} (C_k^+) & \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \varphi_{k+1}[1](s) ds \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_k(s) \psi_{k+1}[1](s) ds & c_{k+1}^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[1](s) \varphi_{k+1}[1](s) ds \end{pmatrix} = \\ &= \text{diag}(c_1^-, \dots, c_k^-, c_{k+1}^-) + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_{k+1}^\top(s) \hat{\varphi}_{k+1}(s) ds = C_{k+1}^+. \end{aligned} \quad (103)$$

Відповідно,

$$\hat{S}_{k+1} = S_{k+1\ k+1} \circ \hat{S}_k = I - \hat{\varphi}_{k+1}(C_{k+1}^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_{k+1}^\top(s) \cdot ds.$$

□

Отже, ми отримали факторизацію оператора Фредгольма S_2 рангу K (91)

$$S_2 = \hat{S}_K = S_{KK} \circ \dots \circ S_{11}, \quad (104)$$

де оператори S_{kk} є операторами Фредгольма рангу 1 і визначаються формулами (96)-(97).

Використовуючи факторизацію оператора S_2 (91), можна профакторизувати оператор S_3 (90) з невідродженою діагональною матрицею C^-

$$S_3 = I + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(C^-)^{-1} \psi^\top(s) \cdot ds. \quad (105)$$

Тут $\varphi, \psi - (1 \times K)$ – вектор-функції, $C^- = \text{diag}(c_1^-, \dots, c_K^-)$.

Позначимо $\varphi_1[1] := \varphi_1, \dots, \varphi_K[1] := \varphi_K, \psi_1[1] := \psi_1, \dots, \psi_K[1] := \psi_K$ та розглянемо такий оператор:

$$S_{11} := I + \varphi_1[1](x)(c_1^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s) \cdot ds. \quad (106)$$

Для факторизації введемо допоміжний оператор $\tilde{S}_{11}$

$$\tilde{S}_{11} := I - \psi_1[1] \left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1] \varphi_1[1] ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1[1] \cdot ds \quad (107)$$

і визначимо функції $\psi_j[2], j = \overline{1, K}$ так:

$$\begin{aligned} \psi_j[2] := \tilde{S}_{11} \{ \psi_2[1] \} = \psi_j[1](x) - \psi_1[1](x) \left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1[1](s) \psi_j[1](s) ds. \end{aligned} \quad (108)$$

Далі побудуємо оператор S_{22} , використовуючи функції $\varphi_2[1], \psi_2[2]$ та сталу c_2^-

$$S_{22} := I + \varphi_2[1](x)(c_2^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[2](s) \cdot ds \quad (109)$$

і допоміжний оператор $\tilde{S}_{22}$

$$\tilde{S}_{22} := I - \psi_2[2] \left(c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[2](s) \varphi_2[1](s) ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2[1](s) \cdot ds, \quad (110)$$

та визначаємо функцію $\psi_j[3], j = \overline{1, K}$

$$\psi_j[3] := \tilde{S}_{33} \{ \psi_3[2] \}. \quad (111)$$

На k -му кроці ($1 \leq k < K$) отримаємо набір функцій $\psi_j[k]$, $j = \overline{1, K}$. Визначаємо оператори

$$S_{kk} = I + \varphi_k[1](c_k^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[k](s) \cdot ds,$$

$$\tilde{S}_{kk} := I - \psi_k[k] \left(c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[k](s) \varphi_k[1](s) ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k[1](s) \cdot ds. \quad (112)$$

Далі будемо функції $\psi_j[k+1]$, $j = \overline{1, K}$,

$$\psi_j[k+1] := \tilde{S}_{kk} \{ \psi_j[k] \}, \quad (113)$$

та оператори

$$S_{k+1 \ k+1} = I + \varphi_{k+1}(c_{k+1}^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[k+1](s) \cdot ds,$$

$$\tilde{S}_{k+1 \ k+1} := I -$$

$$-\psi_{k+1}[k+1] \left(c_{k+1}^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[k+1](s) \varphi_{k+1}[1](s) ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{k+1}[1](s) \cdot ds. \quad (114)$$

Через K кроків отримаємо оператори S_{kk} , $k = \overline{1, K}$. Правильне таке твердження.

Твердження 4. Оператор $S_k := S_{kk} \circ S_{k-1 \ k-1} \circ \dots \circ S_{11}$, де S_{kk} , $k = \overline{1, K}$, набувають вигляду (112), можна зобразити так:

$$S_k = I + \hat{\varphi}_k(C_k^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad (115)$$

де $C_k^- = \text{diag}(c_1^-, \dots, c_k^-)$.

Доведення. Доведення проводимо як і у випадку твердження 14 за допомогою індукції по k . $\square$

Використовуючи твердження 15 та теорему 1, проведемо факторизацію оператора S_3

$$S_3 = I + \varphi(x)(C^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s) \cdot ds \quad (116)$$

з довільною невідродженою матрицею C^- , усі головні мінори якої відмінні від нуля. Нехай $C^- = (c_{ij}^-)_{i,j=1}^K$, $C_k^- := (c_{ij}^-)_{i,j=1}^k$, $\det(C_k^-) \neq 0$, $k = \overline{1, K}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_K) = (\varphi_1[1], \dots, \varphi_K[1])$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_K) = (\psi_1[1], \dots, \psi_K[1]) - (1 \times K)$ -вектор-функції, компоненти яких лінійно незалежні функції з простору $\mathfrak{L}$. Позначимо $\tilde{\varphi}_1[1] := \varphi_1[1]$ та введемо оператори

$$S_{11} := I + \varphi_1[1](x)(c_1^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s) \cdot ds, \quad (117)$$

де $c_1^- = c_{11}^-$, і допоміжний оператор $\tilde{S}_{11}$

$$\tilde{S}_{11} := I - \tilde{\psi}_1 \left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_1[1] \tilde{\varphi}_1[1] ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_1 \cdot ds. \quad (118)$$

Далі розглядаємо функції $\tilde{\varphi}_1[1] := \varphi_1[1]$, $\tilde{\varphi}_2[1] := l_{12}^- \varphi_1[1] + \varphi_2[1]$, $\tilde{\psi}_1[1] := \psi_1[1]$, $\tilde{\psi}_2[1] := f_{21}^- \psi_1[1] + \psi_2[1]$, де коефіцієнти l_{12}^- , f_{21}^- визначаються через матрицю C^- з формул (63) та (62) теореми 1. Означуємо функцію $\tilde{\psi}_j[2]$, $j = 1, 2$ так:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_j[2] &:= \tilde{S}_{11} \{ \tilde{\psi}_j[1] \} = \\ &= \tilde{\psi}_j[1] - \tilde{\psi}_1[1] \left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_1[1] \tilde{\varphi}_1[1] ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_1[1](s) \tilde{\psi}_j[1](s) ds. \end{aligned} \quad (119)$$

Використовуючи функції $\tilde{\varphi}_2[1]$, $\tilde{\psi}_2[2]$ та сталу $c_2^- = \frac{\det(C_2^-)}{\det(C_1^-)}$, побудуємо оператор S_{22}

$$S_{22} := I + \tilde{\varphi}_2[1](c_2^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2[2](s) \cdot ds. \quad (120)$$

Оператор $\tilde{S}_{22}$ визначимо так:

$$\tilde{S}_{22} := I - \tilde{\psi}_2[2] \left(c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2[2](s) \tilde{\varphi}_2[1](s) ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_2[1](s) \cdot ds, \quad (121)$$

та вводимо дві нові функції $\tilde{\varphi}_3[1] := l_{13}^- \varphi_1[1] + l_{23}^- \varphi_2[1] + \varphi_3[1]$, $\tilde{\psi}_3[1] := f_{31}^- \psi_1[1] + f_{32}^- \psi_2[1] + \psi_3[1]$. Визначимо функцію $\tilde{\psi}_3[2]$ так:

$$\tilde{\psi}_3[2] := \tilde{S}_{11} \{ \tilde{\psi}_3[1] \}. \quad (122)$$

Функції $\tilde{\psi}_j[3]$, $j = \overline{1, 3}$ задаємо через функції $\tilde{\psi}_j[2]$, $j = \overline{1, 3}$ так:

$$\tilde{\psi}_j[3] := \tilde{S}_{22} \{ \tilde{\psi}_j[2] \} = \tilde{S}_{22} \{ \tilde{S}_{11} \{ \tilde{\psi}_j[1] \} \}. \quad (123)$$

Далі продовжуємо аналогічні кроки. На k -му кроці ($1 \leq k < K$) отримуємо набори функцій $\tilde{\varphi}_j[1]$, $\tilde{\psi}_j[k]$, $j = \overline{1, k}$. Визначаємо оператори

$$S_{kk} = I + \tilde{\varphi}_k(c_k^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_k[k](s) \cdot ds,$$

$$\tilde{S}_{kk} := I - \tilde{\psi}_k[k] \left(c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_k[k] \tilde{\varphi}_k ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_k \cdot ds. \quad (124)$$

Далі вводимо функції

$$\tilde{\varphi}_{k+1}[1] := l_{1\ k+1}^- \varphi_1[1] + \dots + l_{k\ k+1}^- \varphi_k[1] + \varphi_{k+1}[1],$$

$$\tilde{\psi}_{k+1}[1] := f_{k+1\ 1}^- \psi_1[1] + \dots + f_{k+1\ k}^- \psi_k[1] + \psi_{k+1}[1],$$

де коефіцієнти $l_{1\ k+1}^-$, $\dots$, $l_{k\ k+1}^-$, $f_{k+1\ 1}^-$, $\dots$, $f_{k+1\ k}^-$ знаходять з формул (62) і (63). Тепер будуємо $\tilde{\psi}_{k+1}[j]$, $j = \overline{1, k}$ так:

$$\tilde{\psi}_{k+1}[2] := \tilde{S}_{11}\{\tilde{\psi}_{k+1}[1]\}, \quad \tilde{\psi}_{k+1}[3] := \tilde{S}_{22}\{\tilde{\psi}_{k+1}[2]\}, \quad \dots,$$

$$\tilde{\psi}_{k+1}[k] := \tilde{S}_{k-1\ k-1}\{\tilde{\psi}_{k+1}[k-1]\}. \quad (125)$$

Далі визначаємо функції $\tilde{\psi}_j[k+1]$, $j = \overline{1, k+1}$

$$\tilde{\psi}_j[k+1] := \tilde{S}_{kk}\{\tilde{\psi}_j[k]\} = \tilde{S}_{kk} \circ \tilde{S}_{k-1\ k-1} \circ \tilde{S}_{11}\{\tilde{\psi}_j[1]\}, \quad (126)$$

та оператори

$$S_{k+1\ k+1} = I + \tilde{\varphi}_{k+1}[1](c_{k+1}^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_{k+1}[k+1](s) \cdot ds,$$

$$\tilde{S}_{k+1\ k+1} := I - \tilde{\psi}_{k+1}[k+1] \left(c_{k+1}^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_{k+1}[k+1] \tilde{\varphi}_{k+1}[1] ds \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_{k+1}[1](s) \cdot ds, \quad (127)$$

де

$$c_k^- = \frac{\det(C_k^-)}{\det(C_{k-1}^-)}. \quad (128)$$

Через K кроків отримуємо оператори S_{kk} , $k = \overline{1, K}$. Для оператора $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1\ k-1} \dots \circ S_{11}$ виконується таке твердження.

Твердження 5. Оператор $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1\ k-1} \dots \circ S_{11}$, де оператори S_{kk} визначаються рівностями (126)-(128), можна зобразити у вигляді

$$\hat{S}_k = I + \hat{\varphi}_k(x)(C_k^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \quad (129)$$

де $\hat{\varphi}_k = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $\hat{\psi}_k = (\psi_1, \dots, \psi_k)$, $C_k^- = (c_{ij}^-)_{i,j=1}^k$.

Доведення. За зауваженням 1 матриця C_k^- факторизується так: $C_k^- = F_k U_k L_k$. Згідно з побудовою функцій $\hat{\tilde{\varphi}}_k := (\tilde{\varphi}_1 \dots, \tilde{\varphi}_k)$ та $\hat{\tilde{\psi}}_k := (\tilde{\psi}_1 \dots, \tilde{\psi}_k)$ їх можна записати у вигляді

$$\hat{\tilde{\varphi}}_k = \hat{\varphi}_k L_k^{-1}, \quad \hat{\tilde{\psi}}_k^\top = F_k^{-1} \hat{\psi}_k^\top. \quad (130)$$

Скориставшись твердженням 5, формулами (130), та факторизацією матриці C^- , отримаємо рівності

$$\begin{aligned} \hat{S}_k &= I + \hat{\tilde{\varphi}}_k(x) U_k^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\tilde{\psi}}_k^\top(s) \cdot ds = I + \hat{\varphi}_k(x) L_k^{-1} U_k^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} F_k^{-1} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds = \\ &= I + \hat{\varphi}_k(x) (C_k^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds. \end{aligned} \quad (131)$$

Якщо $k = K$, то отримаємо, що $\hat{S}_K = S_3$. $\square$

Отож, одержали факторизацію оператора Фредгольма S_3 рангу K (90)

$$S_3 = \hat{S}_K = S_{KK} \circ S_{K-1 K-1} \circ \dots \circ S_{11}, \quad (132)$$

де оператори S_{kk} – оператори Фредгольма рангу 1, визначаються рівностями (124).

5. Інваріантні перетворення інтегро-диференціальних виразів. Дослідимо застосування інтегральних операторів Розділу 2 для інваріантних перетворень лінійних диференціальних та інтегро-диференціальних виразів і побудови розв'язків рівнянь теорії солітонів.

5.1. Перетворення еволюційних диференціальних виразів за допомогою вольтеррівських операторів скінченного порядку. Розглянемо еволюційний диференціальний вираз такого вигляду:

$$L = \alpha \partial_t - \sum_{i=0}^n u_i D^i, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad D := \frac{\partial}{\partial x}, \quad (133)$$

коефіцієнти $u_i = u_i(x, t)$ якого є скалярними функціями. Під формально транспонованим розумітимемо вираз такого вигляду:

$$L^\tau = -\alpha \partial_t - \sum_{i=0}^n (-1)^i D^i u_i. \quad (134)$$

Нехай $(1 \times K)$ -векторні функції $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ є розв'язками рівнянь

$$L\{\varphi\} = \varphi \Lambda, \quad L^\tau\{\psi\} = \psi \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda, \tilde{\Lambda} \in Mat_{K \times K}(\mathbb{C}). \quad (135)$$

Позначимо через $W^\pm$ оператори бінарних перетворень порядку K (див. формули (57) та (84), (85)) такого вигляду:

$$W^\pm = I - \varphi (\Delta^\mp)^{-1} \int_{\mp\infty}^x \psi^\top(s) \cdot ds, \quad (136)$$

де $\Delta^\pm = C^\pm + \int_{\pm\infty}^x \psi^\top(s, t) \varphi(s, t) ds$, а матриці C^+ , C^- задовольняють рівність (89), наслідком якої є те, що $\Delta^+ = \Delta^-$. В теоремі 4 отримуємо структуру операторів $L^\pm$, одержаних після одягання оператора L (133) за допомогою вольтеррівських інтегральних перетворень вигляду (136).

Теорема 4. Нехай $(1 \times K)$ -вектор-функції ψ , φ спадають на обох нескінченностях і задовольняють умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^\top \varphi \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top \psi^\top \varphi) ds = 0. \quad (137)$$

Тоді оператори $L^+ = W^+ L (W^+)^{-1}$ та $L^- = W^- L (W^-)^{-1}$ набудуть вигляду

$$L^\pm = (L^\pm)_{\geq 0} + \Phi \mathcal{M} \int_{\mp\infty}^x \Psi^\top \cdot ds, \quad (138)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi &= W^+ \{\varphi\} (C^-)^{-1} = W^- \{\varphi\} (C^+)^{-1}, \\ \Psi &= (W^+)^{-1, \tau} \{\psi\} (C^-)^{\top, -1} = (W^-)^{-1, \tau} \{\psi\} (C^+)^{\top, -1}, \\ \mathcal{M} &= C^+ \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C^+ = C^- \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C^-, \end{aligned} \quad (139)$$

а символом $(L^\pm)_{\geq 0}$ позначили диференціальну частину відповідного оператора $L^\pm$. Причому диференціальні частини операторів L^+ та L^- збігаються: $(L^+)_{\geq 0} = (L^-)_{\geq 0}$.

Доведення. Спочатку перевіримо еквівалентності різних зображень у формулі (139) з використанням двох операторів W^+ , W^- . Прямими обчисленнями отримуємо, що

$$W^+ \{\varphi\} (C^-)^{-1} = \varphi(\Delta^-)^{-1} = \varphi(\Delta^+)^{-1} = W^- \{\varphi\} (C^+)^{-1}.$$

Еквівалентність зображень для вектор-функції Ψ перевіряємо аналогічно

$$\mathcal{M} = C^+ \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C^+ = C^- \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C^- + \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^\top \varphi \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top \psi^\top \varphi) ds = C^- \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C^-.$$

За Твердженням 2 отримуємо, що композиція операторів $(W^+)^{-1}$ та W^- дає оператор перетворень Фредгольма рангу K такого вигляду (див. формулу (90)):

$$S_3 = (W^+)^{-1} W^- = I + \varphi(C^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s, t) \cdot ds \quad (140)$$

Обчислимо комутатор

$$\begin{aligned} [L, S_3] &:= L S_3 - S_3 L = L \{\varphi\} (C^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s, t) \cdot ds - \varphi(C^-)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (L^\tau \{\psi(s, t)\})^\top \cdot ds = \\ &= \varphi(\Lambda(C^-)^{-1} - (C^-)^{-1} \tilde{\Lambda}^\top) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s, t) \cdot ds. \end{aligned} \quad (141)$$

Отож, комутатор оператора Фредгольма S_3 рангу K та диференціального оператора L дорівнює знову оператору Фредгольма рангу K . Розглянемо перетворення подібності для комутатора $[L, S_3]$ такого вигляду:

$$\begin{aligned} W^+[L, S_3](W^-)^{-1} &= W^+ \left(\varphi(\Lambda(C^-)^{-1} - (C^-)^{-1}\tilde{\Lambda}^\top) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s, t) \cdot ds \right) (W^-)^{-1} = \\ &= W^+ \{\varphi\} (\Lambda(C^-)^{-1} - (C^-)^{-1}\tilde{\Lambda}^\top) \int_{-\infty}^{+\infty} ((W^+)^{-1, \tau} \{\psi\})^\top \cdot ds. \end{aligned}$$

Використавши позначення $\Phi = W^\pm \{\varphi\} (C^\mp)^{-1}$, $\Psi = (W^\pm)^{-1, \tau} \{\psi\} (C^\mp)^\top, -1$, $\mathcal{M} = C^\pm \Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C^\pm$, останню рівність можна записати так:

$$W^+[L, S_3](W^-)^{-1} = \Phi \mathcal{M} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^\top \cdot ds. \quad (142)$$

Використавши формулу (142) та означення оператора S_3 (140), отримаємо, що

$$W^+L(W^+)^{-1} - W^-L(W^-)^{-1} = W^+[L, S_3](W^-)^{-1} = \Phi \mathcal{M} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^\top \cdot ds. \quad (143)$$

Скориставшись властивостями оператора Вольтерра та останньою рівністю, одержуємо формулу (138). $\square$

Зауваження 3. В теоремі 4 можна розглядати функції φ та ψ інтегровні лише на правій (лівій) півосі. В цьому випадку для одягання оператора L використовується оператор Вольтерра на відповідній півосі W^- (W^+). Зауважимо, що оператори $W^\pm$ також можна використовувати для інваріантного перетворення інтегро-диференціального оператора L з відповідною полярністю

$$L = \alpha \partial_t - \sum_{i=0}^n u_i D^i + \mathbf{q}(x) \mathcal{M}_0 \int_{\mp\infty}^x \mathbf{r}^\top(s) \cdot ds, \quad (144)$$

де $\mathbf{q}, \mathbf{r} - (1 \times K)$ -вектор-функції; $\mathcal{M}_0 - (K \times K)$ -стала матриця. В алгебрі формальних символів інваріантне перетворення для оператора L проводили в [26].

5.2. Побудова точних розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля та нелінійного рівняння Шредінгера. Зафіксуємо довільні точки a, b ($a < b$) з $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ і позначимо через L_1 лінійний інтегро-диференціальний вираз вигляду

$$L_1 := L_1[1] = D + \mathbf{q} \mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top(s) \cdot ds, \quad x_0 \in (a, b), \quad (145)$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x) = \mathbf{q}[1]$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = \mathbf{r}[1] - (1 \times K)$ -вектор-функції, які неперервні та інтегровні з квадратом модуля на інтервалі (a, b) , тобто належать простору $\mathfrak{L} = C(a, b) \cap L_2(a, b)$.

Правильне таке твердження.

Твердження 6. Нехай $(1 \times K)$ -векторні функції φ, ψ компоненти яких належать простору $\mathfrak{L}$, є фіксованими розв'язками рівнянь

$$L_1\{\varphi\} := L_1[1]\{\varphi\} = \varphi_x + \mathbf{q}[1]\mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[1](s)\varphi(s)ds = \varphi\Lambda,$$

$$(L_1^\top\{\psi\})^\top := (L_1^\top[1]\{\psi\})^\top = -\psi_x^\top - \left(\int_{x_0}^x \psi^\top(s)\mathbf{q}[1](s)ds \right) \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top[1] = \tilde{\Lambda}^\top \psi^\top. \quad (146)$$

з $(K \times K)$ -матрицями $\Lambda, \tilde{\Lambda}$, а функція f – довільний скалярний розв'язок задачі $L_1\{f\} := L_1[1]\{f\} = f\lambda$ з параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді функція

$$F = W\{f\} = f - \varphi \Delta^{-1} \int_{x_0}^x \psi^\top(s)f(s)ds, \quad \Delta = C + \int_{x_0}^x \psi^\top(s)\varphi(s)ds, \quad \det(C) \neq 0, \quad (147)$$

де оператор W є оператором перетворень Вольтерра порядку K , є розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$L_1[2]\{F\} = F_x + \varphi \Delta^{-1} \mathcal{M} \int_{x_0}^x \Delta^{-1}(s)\psi^\top(s)F(s)ds + \mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[2](s)F(s)ds =$$

$$= F\lambda - \Phi\mathcal{K}, \quad (148)$$

де $\Phi = \varphi \Delta^{-1}$, $\mathcal{M} = C\Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C - \psi^\top \varphi(x_0)$, $\mathcal{K} = \psi^\top f(x_0)$, $\mathbf{q}[2] = \mathbf{q}[1] - \varphi \Delta^{-1} \int_{x_0}^x \psi^\top(s)\mathbf{q}[1](s)ds$,

$$\mathbf{r}^\top[2] = \mathbf{r}^\top[1] - \left(\int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[1](s)\varphi(s)ds \right) \Delta^{-1} \psi^\top.$$

Функція $\Phi = \varphi \Delta^{-1} = W\{\varphi\}C^{-1}$ задовольнятиме таке рівняння:

$$L_1[2]\{\Phi\} = \Phi_x + \varphi \Delta^{-1} \mathcal{M} \int_{x_0}^x \Delta^{-1}(s)\psi^\top(s)\Phi(s)ds +$$

$$+ \mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[2](s)\Phi(s)ds = \Phi C \Lambda C^{-1} - \Phi(\psi^\top \varphi(x_0))C^{-1}. \quad (149)$$

З останнього рівняння отримуємо такий наслідок:

$$\Phi_x - \Phi \mathcal{M} \Delta^{-1} + \mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[2](s)\Phi(s)ds = \Phi \tilde{\Lambda}^\top. \quad (150)$$

Оператор L_1 (145) використовують для побудови розв'язків деяких нелінійних рівнянь математичної фізики (див [34]). Прийmemo $\mathcal{M}_0 = 0$ в операторі L_1 і розглянемо з ним в парі еволюційний оператор вигляду

$$M_2 = i\partial_{t_2} - D^2. \quad (151)$$

Використовуючи оператори L_1, M_2 та інтегральні перетворення аналогічного вигляду як у Розділі 2, можна отримати розв'язки нелінійного рівняння Шредінгера. Правильне твердження.

Твердження 7. [34] *Нехай функція φ є фіксованим розв'язком системи*

$$\begin{cases} L_1\{\varphi\} := \varphi_x = \varphi\Lambda, \\ M_2\{\varphi\} := i\varphi_{t_2} - \varphi_{xx} = 0. \end{cases} \quad (152)$$

Прийmemo

$$\Delta_2 = C + \int_{-\infty}^x \varphi^* \varphi dx,$$

де ермітову матрицю C визначаємо з рівності: $C\Lambda + \Lambda^*C = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ – вектор-стрічка довжини K . Тоді функція вигляду

$$q = \varphi \Delta_2^{-1} \mathbf{1}^\top = - \frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)} \quad (153)$$

задовольнятиме нелінійне рівняння Шредінгера

$$iq_{t_2} = q_{xx} + 2|q|^2 q. \quad (154)$$

Зокрема, прийнявши у твердженні 7 $\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$, де $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, K}$, $C = \left(\frac{2}{\lambda_s + \lambda_j} \right)_{j,s=1}^K$ та вибравши як розв'язок системи (152) вектор-стрічку

$$\varphi = (e^{\lambda_1 x - i\lambda_1^2 t_2}, \dots, e^{\lambda_K x - i\lambda_K^2 t_2}),$$

отримаємо регулярний K -солітонний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера (154) вигляду (153).

5.3. *Інваріантні перетворення інтегро-диференціальних виразів другого порядку.* Розглянемо інтегро-диференціальний вираз вигляду

$$L_2 := L_2[1] = -\mathcal{D}^2 + u + \mathbf{q} \mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top(s) \cdot ds, \quad x_0 \in (a, b), \quad (155)$$

де $\mathbf{q} := \mathbf{q}[1](x)$, $\mathbf{r} := \mathbf{r}[1](x) - (1 \times K)$ -вектор-функції, компоненти яких інтегровані з квадратом модуля на інтервалі (a, b) ; $u = u[1](x)$ – скалярна функція, інтегрована з квадратом модуля на (a, b) . Для виразу L_2 (155) правильний аналог твердження 6.

Твердження 8. *Нехай $(1 \times K)$ -матричні функції φ, ψ компоненти яких належать простору $\mathfrak{L}$, є фіксованими розв'язками рівнянь*

$$\begin{aligned} L_2\{\varphi\} &= L_2[1]\{\varphi\} = \varphi\Lambda, \quad (L_2^\top\{\psi\})^\top := (L_2^\top[1]\{\psi\})^\top = \\ &= -\psi_{xx}^\top + \psi^\top u[1] - \left(\int_{x_0}^x \psi^\top(s) \mathbf{q}[1](s) ds \right) \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top[1] = \tilde{\Lambda}^\top \psi^\top, \end{aligned} \quad (156)$$

з відповідними $(K \times K)$ -матрицями $\Lambda, \tilde{\Lambda}$, а функція f – довільний скалярний розв'язок задачі $L_1\{f\} = L_1[1]\{f\} = f\lambda$ з параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді функція

$$F := W\{f\} = f - \varphi \Delta^{-1} \int_{x_0}^x \psi^\top(s) f(s) ds, \quad \Delta = C + \int_{x_0}^x \psi^\top(s) \varphi(s) ds, \quad \det(C) \neq 0, \quad (157)$$

де оператор W є оператором перетворень Вольтерра порядку K , є розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} L_2[2]\{F\} := & -F_{xx} + u[2]F + \varphi \Delta^{-1} \mathcal{M} \int_{x_0}^x \Delta^{-1}(s) \psi^\top(s) F(s) ds + \\ & + \mathbf{q}[2] \mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[2](s) F(s) ds = F\lambda - \Phi \mathcal{K}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (158)$$

з потенціалом

$$u[2] = u[1] - 2(\varphi \Delta^{-1} \psi^\top)_x, \quad (159)$$

де $\Phi = \varphi \Delta^{-1}$, $\mathcal{M} = C\Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C + (\psi^\top \varphi_x - \psi_x^\top \varphi)(x_0)$, $\mathcal{K} = (\psi_x^\top f - \psi^\top f_x)(x_0)$,

$$\mathbf{q}[2] = \mathbf{q}[1] - \varphi \Delta^{-1} \int_{x_0}^x \psi^\top(s) \mathbf{q}[1](s) ds, \quad \mathbf{r}^\top[2] = \mathbf{r}^\top[1] - \left(\int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[1](s) \varphi(s) ds \right) \Delta^{-1} \psi^\top(s).$$

Функція $\Phi := \varphi \Delta^{-1} = W\{\varphi\} C^{-1}$ задовольнятиме таке рівняння:

$$\begin{aligned} L_2[2]\{\Phi\} := & -\Phi_{xx} + u[2]\Phi + \varphi \Delta^{-1} \mathcal{M} \int_{x_0}^x \Delta^{-1}(s) \psi^\top(s) \Phi(s) ds + \\ & + \mathbf{q}[2] \mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[2](s) \Phi(s) ds = \Phi C \Lambda C^{-1} - \Phi(\psi_x^\top \varphi - \psi^\top \varphi_x)(x_0) C^{-1}. \end{aligned}$$

З останнього рівняння отримаємо такий наслідок:

$$-\Phi_{xx} + u[2]\Phi - \Phi \mathcal{M} \Delta^{-1} + \mathbf{q}[2] \mathcal{M}_0 \int_{x_0}^x \mathbf{r}^\top[2](s) \Phi(s) ds = \Phi \tilde{\Lambda}^\top. \quad (160)$$

Нас цікавитимуть два характерні випадки попереднього твердження. Тобто, розглянемо випадок, коли вихідний і перетворений оператори $L_2[1]$ (155) та $L_2[2]$ (158) – чисто диференціальні. Це допоможе будувати розв'язки рівнянь Штурма-Ліувілля з ненульовими потенціалами. У випадку ненульової інтегральної частини, використовуючи в парі з оператором L_2 еволюційний диференціальний оператор другого порядку, зможемо будувати розв'язки моделі Яджими-Ойкави (див. [34]).

3.2.1 Побудова розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля

Для побудови розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля ми використовуватимемо зауваження 4.

Зауваження 4. Прийнемо в операторі L_2 (155) $\mathcal{M}_0 = 0$. Завдяки симетричності оператора Шредінгера $-D^2 + u$ у випадку дійснозначного потенціалу можемо накласти додаткову редукцію у Твердженні 8: $\Lambda = \tilde{\Lambda}$, $\psi = \varphi$. Якщо $\mathcal{M} = C\Lambda - \Lambda^\top C = 0$, то функції F та Φ задовольнятимуть рівняння (див. формули (158), (160))

$$-F_{xx} + u[2]F = F\lambda - \Phi\mathcal{K}, \quad -\Phi_{xx} + u[2]\Phi = \Phi\Lambda^\top. \quad (161)$$

Безпосередньо з рівнянь (161) отримуємо, що функція

$$\tilde{F} = F + \Phi(\Lambda^\top - I_K\lambda)^{-1}\mathcal{K} = f - \varphi\Delta^{-1}(\Lambda^\top - I_K\lambda)^{-1}(\varphi^\top f_x - \varphi_x^\top f), \quad (162)$$

де I_K – одинична $(K \times K)$ -матриця, за умови невиродженості матриці $(\Lambda^\top - I_K\lambda)$ буде розв'язком рівняння

$$-\tilde{F}_{xx} + u[2]\tilde{F} = \tilde{F}\lambda. \quad (163)$$

Використовуючи твердження 8 та зауваження 3, можемо будувати розв'язки рівняння Штурма-Ліувілля (163) з ненульовими потенціалами. Прийнемо в операторі L_2 (155) $u = 0$, $\mathcal{M}_0 = 0$. Тоді функція $\varphi = e^{\chi_1 x}$ буде розв'язком рівняння Штурма-Ліувілля $L_2\{\varphi\} = \varphi\Lambda$ (156) з $\Lambda = -\chi_1^2 \in \mathbb{R}$, $\chi_1 > 0$. За Твердженням 8 та Зауваженням 3 для рівняння Штурма-Ліувілля (163) з потенціалом $u[2]$ (159)

$$u[2] = -\frac{4\chi_1 c_1 e^{2\chi_1 x}}{\left(c_1 + \frac{1}{2\chi_1} e^{2\chi_1 x}\right)^2}, \quad (164)$$

де $c_1 = C - \frac{1}{2\chi_1} e^{2\chi_1 x_0}$, отримаємо такі розв'язки з відповідними власними значеннями (див. формулу (162) при $f = e^{kx}$ та $f = e^{ikx}$, відповідно):

$$\tilde{F} = \begin{cases} \frac{c_1(k+\chi_1)e^{kx} + \frac{k-\chi_1}{2\chi_1}e^{(k+2\chi_1)x}}{(c_1 + \frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x})(k+\chi_1)}, & \lambda = -k^2, \\ \frac{c_1(ik+\chi_1)e^{ikx} + \frac{ik-\chi_1}{2\chi_1}e^{(ik+2\chi_1)x}}{(c_1 + \frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x})(ik+\chi_1)}, & \lambda = k^2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}. \quad (165)$$

При $c_1 = \frac{1}{2\chi_1}$ потенціал $u[2]$ (164) набуде вигляду

$$u[2] = -\frac{\chi_1^2}{\cosh(\chi_1 x)^2} \in L_2(\mathbb{R}). \quad (166)$$

Функція F (165) при $k = \chi_1$, $\lambda = -\chi_1^2$ набуде такого вигляду:

$$F = \frac{2}{\cosh(\chi_1 x)}, \quad (167)$$

і буде швидкоспадає розв'язком задачі Штурма-Ліувілля з потенціалом (166) і $\lambda = -\chi_1^2$.

Розглянемо для рівняння Штурма-Ліувілля з потенціалом (166) дві пари розв'язків F_{1+} , F_{2+} та F_{1-} , F_{2-} при $\lambda = k^2$, які мають таку поведінку на безмежностях:

$$F_{1+} = e^{-ikx} + 0(1), x \rightarrow +\infty, \quad F_{2+} = e^{ikx} + 0(1), x \rightarrow +\infty,$$

$$F_{1-} = e^{-ikx} + 0(1), x \rightarrow -\infty, \quad F_{2-} = e^{ikx} + 0(1), x \rightarrow -\infty.$$

Матриця, яка переводить пару розв'язків F_{1+}, F_{2+} в F_{1-}, F_{2-} , називається матрицею монодромії

$$\begin{pmatrix} F_{1-} \\ F_{2-} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} F_{1+} \\ F_{2+} \end{pmatrix}. \quad (168)$$

Як відомо з теорії оберненої задачі розсіяння для оператора Шредінгера $-D^2 + u$, матриця T має таку структуру:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{a(k)}{b(k)} & \frac{b(k)}{a(k)} \end{pmatrix}, \quad (169)$$

де коефіцієнт $a(k)$ називається коефіцієнтом проходження, а коефіцієнт $b(k)$ – коефіцієнтом відбиття. Введемо позначення для функції $\tilde{F}$ (165) при $\lambda = k^2$: $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_1(k, x) := \tilde{F} = \frac{c_1(ik+\chi_1)e^{ikx} + \frac{ik-\chi_1}{2\chi_1}e^{(ik+2\chi_1)x}}{(c_1+\frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x})(ik+\chi_1)}$, та розглянемо в парі з нею функцію $\tilde{F}_2 = \tilde{F}_1(-k, x)$. Безпосередньо з формули (165) випливає, що

$$F_{1+} = \frac{-ik + \chi_1}{-ik - \chi_1} \tilde{F}_2, \quad F_{2+} = \frac{ik + \chi_1}{ik - \chi_1} \tilde{F}_1, \quad F_{1-} = \tilde{F}_2, \quad F_{2-} = \tilde{F}_1. \quad (170)$$

З формул (170) ми отримуємо, що матриця T (169) – діагональна і $a(k) = \frac{-ik-\chi_1}{-ik+\chi_1}$. Тобто, потенціал (166) – так званий прозорий потенціал, коефіцієнт відбиття для якого дорівнює нулю.

3.2.2. Побудова розв'язків моделі Яджими-Ойкави

Тепер розглянемо оператор L_2 (155) при $u = 0$, $M_0 = 0$ в парі з оператором M_2 (151). Розглянемо рівняння

$$L_2\{\varphi\} := -\varphi_{xx} = \varphi\Lambda_2, \quad M_2\{\varphi\} := i\varphi_{t_2} - \varphi_{xx} = 0, \\ (L_2^T\{\psi\})^\top = -\psi_{xx}^\top = \tilde{\Lambda}_2^\top \psi^\top, \quad (M_2^T\{\psi\}) = M_2\{\psi\} = 0. \quad (171)$$

Прийmemo $\Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_K^2)$, $\lambda_{j1} := \text{Re}\lambda_j$, $\lambda_{j2} := \text{Im}\lambda_j$, $j = \overline{1, K}$. Тоді функції $\psi = \bar{\varphi}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_K)$, де

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_{j1}x + 2\lambda_{j1}\lambda_{j2}t_2 + i(\lambda_{j2}x - (\lambda_{j1}^2 - \lambda_{j2}^2)t_2)}, \quad \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \quad k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, K}, \quad (172)$$

будуть розв'язками системи (171). В [34] доведено, що, використовуючи аналоги інтегральних перетворень, введених в розділі 2, отримаємо функції q , u

$$q = \varphi \Delta_2^{-1} \mathbf{1}^\top = -\frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)}; \quad (173)$$

$$u := (\varphi \Delta^{-1} \varphi^*)_x = -\left[\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} (\det \Delta_2)^{-1} \right]_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Delta_2, \\ \Delta_2 = \left(\frac{1}{\lambda_s^2 - \bar{\lambda}_j^2} ((\lambda_s - \bar{\lambda}_j) \bar{\varphi}_j \varphi_s + i) \right)_{j,s=1}^K, \quad (174)$$

які будуть K -солітонними розв'язками моделі Яджими-Ойкави

$$\begin{cases} iq_{t_2} = q_{xx} + 2uq, \\ u_{t_2} = (|q|^2)_x. \end{cases} \quad (175)$$

6. Завершальні зауваження. Інтегральні оператори перетворень Вольєрра та Фредгольма, які досліджували в Розділах 2 та 3, тісно пов'язані з основними об'єктами оберненої задачі розсіяння. В [31, 32] продемонстровано тісний зв'язок оператора S_3 (90) з операторами розсіяння та операторів $W^\pm$ (84)-(85) з операторами перетворень оберненої задачі для нестационарної системи Дірака, отриманих Л.П. Нижником [30]. Твердження 1 для інтегрального вольєррівського оператора перетворень є аналогом теореми Крама про факторизацію диференціального одягаючого оператора та теореми з [23] про оператор бінарних перетворень і його факторизацію в алгебрі формальних символів. Застосування результатів другого та третього розділів для інтегрування конкретних інтегровних систем наведено у пунктах 1-3 Розділу 4. Теорема 4 – природне розширення відповідної теореми про одягаюче перетворення Захарова-Шабата з [1]. Без значних змін отримані результати можна узагальнити на випадок матричних операторів перетворення Вольєрра та Фредгольма, що зробимо в наступній праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Захаров В.Е. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния / В.Е. Захаров, А.Б. Шабат // Функц. анализ. и его прил. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 43-53.
2. Захаров В.Е. Теория солитонов. Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манакон, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский – М.: Наука, 1980.
3. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983.
4. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры / В.А. Марченко – К.: Наук. думка, 1986.
5. Dickey L.A. Soliton equations and Hamiltonian systems / L.A. Dickey // Adv. Math. Phys. – 1991. – Vol. 12.
6. Ohta Y. An elementary introduction to Sato theory / Y. Ohta, D. Takahashi, T. Tokihiro // Prog. Theor. Phys. Suppl. – 1988. – Vol. 94. – P. 210-241.
7. Darboux G. Lecons sur la Theorie Generale de Surface et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal II / G. Darboux – Paris: Gauthiers-Villars, 1889.
8. Crum M.M. Associated Sturm-Liouville systems / M.M. Crum // Quart. J. Math. Oxford. – 1955. – Vol. 2, №6. – P. 121-127.
9. Matveev V.B. Darboux transformations and explicit solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation depending on the functional parameters / V.B. Matveev // Letter in Math. Physics. – 1979. – Vol. 3. – P. 213-216.
10. Matveev V.B. Darboux transformations and solitons / V.B. Matveev, M.A. Salle – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
11. Сидоренко Ю.Н. Метод одевания и преобразования Дарбу / Ю.Н. Сидоренко // Диф. уравн. – 2001. – Т. 37, №6. – С. 853-854.
12. Melnikov V.K. On equations for wave interactions / V.K. Melnikov // Letters in Math. Physics. – 1983. – Vol. 7, №2. – P. 129-136.
13. Melnikov V.K. A direct method for deriving a multi-soliton solution for the problem of interaction of waves on the x, y plane / V.K. Melnikov // Communications in Math. Physics. – 1987. – Vol. 112, №4 – P. 639-652.
14. Sidorenko J. Symmetry constraints of the KP-hierarchy / J. Sidorenko // Inverse Problems. – 1991. – Vol. 7. – P. L37-L43.

15. *Konopelchenko B.* (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems / *B. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp* // *Phys. Lett. A.* – 1991. – Vol. 157. – P. 17-21.
16. *Cheng Yi.* Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy / *Yi. Cheng* // *J. Math. Phys.* – 1992. – Vol. 33. – P. 3774-3787.
17. *Sidorenko J.* Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvili hierarchy / *J. Sidorenko, W. Strampp* // *J. Math. Phys.* – 1993. – Vol. 34, №4. – P. 1429-1446.
18. *Oevel W.* Wronskian solutions of the constrained KP hierarchy / *W. Oevel, W. Strampp* // *J. Math. Phys.* – 1996. – Vol. 37 – P. 6213-6219
19. *Самойленко А.М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем / *А.М. Самойленко, В.Г. Самойленко, Ю.М. Сидоренко* // *Укр. мат. журн.* – 1999. – Т. 51, №1. – С. 78-97.
20. *Митропольський Ю.О.* Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями / *Ю.О. Митропольський, В.Г. Самойленко, Ю.М. Сидоренко* // *Доп. НАН України.* – 1999. – №8. – С. 19-23.
21. *Liu X.* A generalized dressing approach for solving the extended KP and the extended mKP hierarchy / *X. Liu, R. Lin, B. Jin, and Yu. Zeng* // *J. Math. Phys.* – 2009. – Vol. 50. – 053506-1 - 053506-14.
22. *Liu X.* A new extended KP hierarchy / *X. Liu, Yu. Zeng, R. Lin* // *Physics Letters A.* – 2008. – Vol. 372, №21 – P. 3819-3823.
23. *Sidorenko Yu.M.* Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations / *Yu.M. Sidorenko* // *Мат. студії.* – 2003. – Т. 19, №2. – С. 181-192.
24. *Oevel W.* Darboux Theorems and the KP Hierarchy / *W. Oevel, W. Schief* // *Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations.* (ed. P.A. Clarkson). – 1993. – P. 193-205.
25. *Беркела Ю.Ю.* Теореми типу Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (Hk-сKP) / *Ю.Ю. Беркела, Ю.М. Сидоренко* // *Мат. студії.* – 2006. – Т. 25, №1. – С. 38-64.
26. *Сидоренко Ю.* Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса / *Ю. Сидоренко, О. Чвартацький* // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Мат. Мех.* – 2009. – Вип. 22. – С. 32-35.
27. *Починайко М.Д.* Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу / *М.Д. Починайко, Ю.М. Сидоренко* // *Укр. мат. журн.* – 2006. – Т. 58, №8. – С. 1238-1260.
28. *Sydorenko Yu.* Darboux transformations and scattering operators for Dirac's systems / *Yu. Sydorenko, M. Pochynayko* // *Мат. вісн. НТШ.* – 2006. – Т. 3. – С. 278-288.
29. *Сидоренко Ю.* Оператори перетворень для гіперболічної системи двох рівнянь / *Ю. Сидоренко, О. Чвартацький* // *Мат. вісн. НТШ* – 2010. – Т. 7. – С. 289-317.
30. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений / *Л.П. Нижник* – К.: Наук. думка, 1991.
31. *Сидоренко Ю.М.* Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень / *Ю.М. Сидоренко, М.Д. Починайко, О.І. Чвартацький* // *Вісн. НУ "Львівська політехніка". Серія фіз.-мат. науки.* – 2010. – № 287. – С. 28-59.
32. *Сидоренко Ю.* Конструктивний метод побудови оператора розсіяння для нестационарної гіперболічної системи рівнянь / *Ю. Сидоренко* // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2010. – Вип. 72. – С. 263-274.
33. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер* – М.: Наука, 1967.

34. Сидоренко Ю.М. Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень типу Дарбу / Ю.М. Сидоренко, О.І. Чвартацький // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 181-225.

*Стаття: надійшла до редакції 17.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012*

FACTORIZATION OF INTEGRAL OPERATORS AND NONLINEAR INTEGRABLE EQUATIONS, I

Yuriy SYDORENKO, Oleksandr CHVARTATSKYI

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua*

A factorization of the Volterra integral operator of binary transformations by elementary Volterra operators is obtained. Finite rank Fredholm operators is decomposed into the first rank Fredholm operators. Applications to the theory of nonlinear integrable systems is demonstrated.

Key words: integral transformations, factorization of Volterra and Fredholm operators with degenerate kernel.

ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ, I

Юрий СИДОРЕНКО, Александр ЧВАРТАЦКИЙ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua*

Получено факторизацию интегрального оператора Вольтерра бинарных преобразований элементарными интегральными операторами Вольтерра. Профакторизирован оператор Фредгольма конечного ранга операторами Фредгольма ранга 1. Продемонстрировано применение в теории нелинейных интегрируемых систем.

Ключевые слова: интегральные преобразования, факторизация операторов Вольтерра и Фредгольма с вырожденным ядром.

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕВІДОМИМ МОЛОДШИМ КОЕФІЦІЄНТОМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів
e-mail: snitkog@ukr.net*

Знайдено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежних від часу параметрів у коефіцієнті при невідомій функції в одновимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею.

Ключові слова: обернена задача, вільна межа, параболічне рівняння, функція Гріна.

1. Вступ. Завдяки активному застосуванню в економіці, медицині, ракетобудуванні та інших галузях науки і техніки обернені задачі зайняли належне місце серед інших задач для рівнянь із частинними похідними. Коефіцієнтні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння, в областях з відомими межами достатньо детально вивчені. Зокрема, в [1,2] досліджено обернені задачі визначення коефіцієнта $q(t)$ у рівнянні

$$u_t = u_{xx} + q(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T),$$

з додатковими умовами

$$u|_{x=x_0} = \psi(t), \quad x_0 \in (0, l),$$

$$\int_0^{s(t)} u(x, t) dx = E(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < s(t) \leq 1,$$

відповідно.

Питання одночасної ідентифікації коефіцієнта теплопровідності та коефіцієнта теплоємності опрацьовані в [3]–[5]. У [6] досліджено задачу одночасного визначення функцій, які залежать від різних аргументів, у коефіцієнті при невідомій функції у параболічному рівнянні

$$u_t - u_{xx} + (f(x) + g(t))u = 0.$$

Багато практично важливих задач зводяться до задач з вільними межами, в яких невідома межа розділяє або речовини з різними властивостями, або різні фази тієї самої речовини. Заміною змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. Такий підхід дає змогу застосувати до цих задач методику, розроблену для дослідження обернених задач. В [7, 8] знайдено умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x, t),$$

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + f(x, t)$$

з невідомим, залежним від часу, старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої невідома. В [9]–[11] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні в області, частина або вся межа якої невідома.

2. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x, t) : h_1(t) < x < h_2(t), 0 < t < T\}$, де $h_1 = h_1(t)$, $h_2 = h_2(t)$ – невідомі функції, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $c_1(t)$, $c_2(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + (c_1(t)x + c_2(t))u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [h_1(0), h_2(0)], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u(h_1(t), t) = \mu_1(t), \quad u(h_2(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

та умовами перевизначення

$$\begin{aligned} h'_1(t) &= u_x(h_1(t), t) + \mu_3(t), \quad h'_2(t) = -u_x(h_2(t), t) + \mu_4(t), \\ \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x, t) dx &= \mu_5(t), \quad \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x, t) dx = \mu_6(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4)$$

де $h_1(0) = h_{01}$ – задане число.

Заміною змінної $y = \frac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$ задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h_1(t), h_3(t), c_1(t), c_2(t), v(y, t))$, де

$$h_3(t) = h_2(t) - h_1(t), \quad v(y, t) = u(yh_3(t) + h_1(t), t),$$

в області з відомою межею $Q_T = \{(y, t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh_3(t) + h_1(t), t) + h'_1(t) + yh'_3(t)}{h_3(t)} v_y + \\ &+ (c_1(t)(yh_3(t) + h_1(t)) + c_2(t))v + f(yh_3(t) + h_1(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$v(y, 0) = \varphi(yh_3(0) + h_1(0)), \quad y \in [0, 1], \quad (6)$$

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad v(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$h'_1(t) = \frac{v_y(0, t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$h'_3(t) = -\frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$h_3(t) \int_0^1 v(y,t) dy = \mu_5(t), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$h_3^2(t) \int_0^1 yv(y,t) dy + h_1(t)\mu_5(t) = \mu_6(t), \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

де $h_1(0) = h_{01}$ – задане число.

3. Існування розв'язку задачі (5)-(11). Умови існування розв'язку задачі (5)-(11) подано в теоремі.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

- 1) $a, b, f \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\varphi \in C^2[h_{01}, h_{02}]$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2, 5, 6$, $\mu_j \in C[0, T]$, $j = 3, 4$;
- 2) $0 < a_0 \leq a(x, t) \leq a_1$, $f(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 5, 6$, $t \in [0, T]$;
- 3) $\varphi(h_{01}) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_{02}) = \mu_2(0)$, $\int_{h_{01}}^{h_{02}} x\varphi(x)dx = \mu_6(0)$, де $h_{02} = h_2(0)$ –

$$\text{розв'язок рівняння } \int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_5(0).$$

Тоді можна зазначити таке число T_0 , $0 < T_0 \leq T$, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок $(h_1, h_3, c_1, c_2, v) \in (C^1[0, T_0])^2 \times (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0, T_0]$, задачі (5)-(11).

Доведення. Існування розв'язку задачі (5)-(11) ґрунтується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку визначимо початкове значення функції $h_2(t)$, що задає частину межі області. За умов теореми існує єдиний розв'язок $h_{02} = h_2(0)$ рівняння

$$\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_5(0).$$

Позначимо $h_{03} = h_{02} - h_{01}$.

Зведемо задачу (5)-(11) до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\tilde{v}(y, t) = v(y, t) - \varphi(yh_{03} + h_{01}) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\tilde{v}(y, t)$ одержуємо задачу

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t = & \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} \tilde{v}_{yy} + \frac{b(yh_3(t) + h_1(t), t) + h'_1(t) + yh'_3(t)}{h_3(t)} (\tilde{v}_y + d(y, t)) + \\ & + (c_1(t)(yh_3(t) + h_1(t)) + c_2(t))(\tilde{v} + g(y, t)) + F(y, t), \quad (y, t) \in Q_T, \\ & \tilde{v}(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \\ & \tilde{v}(0, t) = \tilde{v}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (12)$$

де $d(y, t) = h_{03}\varphi'(yh_{03} + h_{01}) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)$,
 $g(y, t) = \varphi(yh_{03} + h_{01}) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1 - y)(\mu_1(t) - \mu_1(0))$,
 $F(y, t) = h_{03}^2 \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} \varphi''(yh_{03} + h_{01}) + f(yh_3(t) + h_1(t), t) - y\mu_2'(t) + \mu_1'(t)(y - 1)$.

За допомогою функції Гріна $G_1(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde{v}_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} \tilde{v}_{yy} + \frac{b(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3(t)} \tilde{v}_y$$

задачу (12) зводимо до рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{v}(y, t) = & \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left(\frac{h_1'(\tau) + \eta h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} (\tilde{v}_\eta(\eta, \tau) + d(\eta, \tau)) + \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)}{h_3(\tau)} \times \right. \\ & \left. \times d(\eta, \tau) + (c_1(\tau)(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau)) + c_2(\tau))(\tilde{v}(\eta, \tau) + g(\eta, \tau)) + F(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau, \quad (13) \end{aligned}$$

$(y, t) \in \overline{Q}_T$.

Позначимо $w(y, t) = v_y(y, t)$. Тоді з умов (8), (9) отримуємо

$$h_1'(t) = \frac{w(0, t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad h_3'(t) = -\frac{w(0, t) + w(1, t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t). \quad (14)$$

Використавши (14), подамо (13) у вигляді

$$\begin{aligned} v(y, t) = & \varphi(yh_{03} + h_{01}) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1 - y)(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \times \\ & \times \left(w(\eta, \tau) \left(\frac{w(0, \tau)(1 - \eta) - \eta w(1, \tau)}{h_3^2(\tau)} + \frac{(1 - \eta)\mu_3(\tau) + \eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)} \right) + F(\eta, \tau) + d(\eta, \tau) \times \right. \\ & \left. \times \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)}{h_3(\tau)} + (c_1(\tau)(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau)) + c_2(\tau))v(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \quad (15) \end{aligned}$$

Продиференціювавши (15) за змінною y , одержуємо

$$\begin{aligned} w(y, t) = & h_{03}\varphi'(yh_{03} + h_{01}) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y, t, \eta, \tau) \left(F(\eta, \tau) + \right. \\ & + \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)}{h_3(\tau)} d(\eta, \tau) + \left(\frac{w(0, \tau)(1 - \eta) - \eta w(1, \tau)}{h_3^2(\tau)} + \frac{(1 - \eta)\mu_3(\tau) + \eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)} \right) \times \\ & \left. \times w(\eta, \tau) + (c_1(\tau)(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau)) + c_2(\tau))v(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \quad (16) \end{aligned}$$

З умов (10), (11) отримуємо

$$h_3(t) = \frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y, t) dy}, \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

$$h_1(t) = \frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)} - \frac{h_3^2(t)}{\mu_5(t)} \int_0^1 yv(y, t) dy, \quad t \in [0, T]. \quad (18)$$

Продиференціювавши (10), (11) за змінною t і використавши (5), (14), одержуємо

$$c_1(t) = \left[\int_0^1 ((b(yh_3(t) + h_1(t), t) - a_x(yh_3(t) + h_1(t), t))w(y, t) + h_3(t)f(yh_3(t) + h_1(t), t)) \times \right. \\ \times (\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t) - yh_3(t)\mu_5(t)) + \mu_5(t)a(yh_3(t) + h_1(t), t)w(y, t))dy + \left(\mu_2(t)\mu_4(t) + \right. \\ \left. + w(1, t)\frac{a(h_3(t) + h_1(t), t) - \mu_2(t)}{h_3(t)} \right) (\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t) - h_3(t)\mu_5(t)) - \left(\mu_1(t)\mu_3(t) + \right. \\ \left. + w(0, t)\frac{a(h_1(t), t) + \mu_1(t)}{h_3(t)} \right) (\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) + \mu_6'(t)\mu_5(t) - \\ \left. - \mu_5'(t)\mu_6(t) \right] \Delta^{-1}(t), \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

$$c_2(t) = \left[\left(h_3^3(t) \int_0^1 y^2 v(y, t) dy + h_1(t)(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) \right) \left(\int_0^1 ((b(yh_3(t) + h_1(t), t) - \right. \right. \\ \left. - a_x(yh_3(t) + h_1(t), t))w(y, t) + h_3(t)f(yh_3(t) + h_1(t), t))dy - \frac{a(h_3(t) + h_1(t), t) - \mu_2(t)}{h_3(t)} \times \right. \\ \left. \times w(1, t) + \frac{a(h_1(t), t) + \mu_1(t)}{h_3(t)} w(0, t) + \mu_5'(t) - \mu_2(t)\mu_4(t) + \mu_1(t)\mu_3(t) \right) + \mu_6(t) \left(\int_0^1 (yh_3(t) \times \right. \\ \left. \times (w(y, t)(b(yh_3(t) + h_1(t), t) - a_x(yh_3(t) + h_1(t), t)) + h_3(t)f(yh_3(t) + h_1(t), t)) - w(y, t) \times \right. \\ \left. \times a(yh_3(t) + h_1(t), t))dy + h_1(t)\mu_5'(t) + \mu_6'(t) + h_3(t)(a(h_3(t) + h_1(t), t) - \mu_2(t))w(1, t) + \right. \\ \left. + h_3^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t) \right) \right] \Delta^{-1}(t), \quad t \in [0, T], \quad (20)$$

$$\text{де } \Delta(t) = h_3^4(t) \begin{vmatrix} \int_0^1 v(y, t) dy & \int_0^1 yv(y, t) dy \\ \int_0^1 yv(y, t) dy & \int_0^1 y^2 v(y, t) dy \end{vmatrix}.$$

Отже, задачу (5)-(11) зведено до системи інтегральних рівнянь (15)-(20) стосовно невідомих $(v(y, t), w(y, t), h_3(t), h_1(t), c_1(t), c_2(t))$. Якщо $(h_1, h_3, c_1, c_2, v) \in (C^1[0, T])^2 \times (C[0, T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)-(11), то

$$(v, w, h_3, h_1, c_1, c_2) \in (C(\overline{Q}_T))^2 \times (C[0, T])^4$$

є розв'язком системи рівнянь (15)-(20). Доведемо, що правильним є й обернене твердження.

Нехай $(v, w, h_3, h_1, c_1, c_2)$ – неперервний розв'язок системи рівнянь (15)-(20). Продиференціюємо (15) за змінною y . Праві частини отриманої рівності та рівності (16) збігаються, тому можемо зробити висновок, що $w(y, t) = v_y(y, t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_3(t) + h_1(t), t) + (1 - y)\mu_3(t) + y\mu_4(t)}{h_3(t)} + \right.$$

$$+ \frac{(1-y)v_y(0,t) - yv_y(1,t)}{h_3^2(t)} \Big) v_y + (c_1(t)(yh_3(t) + h_1(t)) + c_2(t))v + \\ + f(yh_3(t) + h_1(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \quad (21)$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0, T]$ функцій $c_1(t), c_2(t), h_1(t), h_3(t)$. З рівностей (17), (18) випливають умови (10), (11). Залишається довести виконання умов (8), (9). Подамо (19), (20) у вигляді

$$c_1(t)\mu_6(t) + c_2(t)\mu_5(t) = \frac{\mu_1(t) + a(h_1(t), t)}{h_3(t)} v_y(0, t) - \frac{a(h_1(t) + h_3(t), t) - \mu_2(t)}{h_3(t)} v_y(1, t) - \\ - \int_0^1 ((b(yh_3(t) + h_1(t), t) - a_x(yh_3(t) + h_1(t), t))w(y, t) + h_3(t)f(yh_3(t) + h_1(t), t))dy + \\ + \mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t) + \mu_5'(t), \quad (22)$$

$$c_1(t) \left(h_3^3(t) \int_0^1 y^2 v(y, t) dy + h_1(t)(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) \right) + c_2(t)(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) = \\ = -(a(h_1(t) + h_3(t), t) - \mu_2(t))v_y(1, t) - \int_0^1 (h_3(t)y((b(yh_3(t) + h_1(t), t) - \\ - a_x(yh_3(t) + h_1(t), t))w(y, t) + h_3(t)f(yh_3(t) + h_1(t), t)) - \\ - a(yh_3(t) + h_1(t), t)w(y, t))dy - h_1(t)\mu_5'(t) - h_3(t)\mu_2(t)\mu_4(t) + \mu_6'(t). \quad (23)$$

Припущення теореми дають підстави продиференціювати (17), (18) за t . Використавши те, що функція $v(y, t)$ задовольняє рівняння (21), та віднявши від отриманих рівностей (22), (23), отримуємо

$$\left(h_3'(t) - \mu_4(t) + \mu_3(t) + \frac{v_y(0, t) + v_y(1, t)}{h_3(t)} \right) \frac{\mu_5(t)}{h_3(t)} = 0, \\ \frac{2(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t))}{h_3^2(t)} \left(h_3'(t) - \mu_4(t) + \mu_3(t) + \frac{v_y(0, t) + v_y(1, t)}{h_3^2(t)} \right) + \\ + \left(h_1'(t) - \mu_3(t) - \frac{v_y(0, t)}{h_3(t)} \right) \frac{\mu_5(t)}{h_3(t)} = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $h_1, h_3 \in C^1[0, T]$, функція $v(y, t)$ задовольняє рівняння (5) та умови (8), (9).

Отже, еквівалентність задачі (5)-(11) та системи рівнянь (15)-(20) у зазначеному сенсі доведено.

Подамо $\Delta(t)$ у вигляді [12]

$$\Delta(t) = \frac{h_3^4(t)}{2} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v(y_1, t) & v(y_2, t) \\ y_1 v(y_1, t) & y_2 v(y_2, t) \end{vmatrix} dy_1 dy_2 = \\ = \frac{h_3^4(t)}{2} \int_0^1 \int_0^1 (y_2 - y_1)^2 v(y_1, t) v(y_2, t) dy_1 dy_2.$$

Знайдемо оцінки знизу функцій $v(y, t)$ і $h_3(t)$. Згідно з припущеннями теореми з (15) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1 , $0 < t_1 \leq T$, що

$$v(y, t) \geq \frac{\varphi_0}{2} \equiv M_0 > 0, \quad (y, t) \in \overline{Q}_{t_1}. \quad (24)$$

Очевидно, що виконання умови (24) рівносильне виконанню нерівності

$$\begin{aligned} & \left| y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left(d(\eta, \tau) \frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau), \tau)}{h_3(\tau)} + \right. \right. \\ & + F(\eta, \tau) + w(\eta, \tau) \left(\frac{w(0, \tau)(1-\eta) - \eta w(1, \tau)}{h_3^2(\tau)} + \frac{(1-\eta)\mu_3(\tau) + \eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)} \right) + (c_1(\tau)(\eta h_3(\tau) + \\ & \left. \left. + h_1(\tau)) + c_2(\tau)v(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau \right| \leq M_0, \quad (y, t) \in \overline{Q}_{t_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Врахувавши (25), з (15) одержуємо

$$v(y, t) \leq \max_{[0,1]} \varphi(yh_{03} + h_{01}) + M_0 \equiv M_1 < \infty, \quad (y, t) \in \overline{Q}_{t_1}. \quad (26)$$

Тоді для розв'язків рівняння (17) справджується нерівність

$$h_3(t) \geq \frac{1}{M_1} \min_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (27)$$

Отже,

$$\Delta(t) \geq C_0 > 0, \quad t \in [0, t_1]. \quad (28)$$

Знайдемо оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(20). Врахувавши (24), (26), для розв'язків рівнянь (17), (18) одержуємо такі нерівності:

$$h_3(t) \leq \frac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_1 < \infty,$$

$$|h_1(t)| \leq (\max_{[0,T]} |\mu_6(t)| + M_1 H_1) (\min_{[0,T]} \mu_5(t))^{-1} \equiv H_2 < \infty, \quad t \in [0, t_1]. \quad (29)$$

Позначимо $W(t) = \max_{y \in [0,1]} |w(y, t)|$. З (19), (20), врахувавши (26)-(29), одержуємо

$$|c_1(t)| \leq C_1 + C_2 W(t), \quad |c_2(t)| \leq C_3 + C_4 W(t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (30)$$

Використавши (26), (27), (29) та оцінки функції Гріна [13], з (16) отримуємо

$$W(t) \leq C_5 + C_6 \int_0^t (1 + |c_1(\tau)| + |c_2(\tau)| + W(\tau) + W^2(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0, t_1].$$

Врахувавши (30), подамо останню нерівність у вигляді

$$W(t) \leq C_7 + C_8 \int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [14]. Звідси отримуємо оцінку

$$W(t) \leq M_2 < \infty, \quad t \in [0, T_0],$$

де $T_0, 0 < T_0 \leq t_1$, визначається сталими C_7, C_8 . Тоді

$$|c_1(t)| \leq C_1 + C_2 M_2 \equiv B_1 < \infty, \quad |c_2(t)| \leq C_3 + C_4 M_2 \equiv B_2 < \infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Подано систему рівнянь (15)-(20) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y, t), w(y, t), h_3(t), h_1(t), c_1(t), c_2(t))$, а оператор $P = (P_1, \dots, P_6)$ визначається правими частинами рівнянь (15)-(20). Позначимо $N = \{(v, w, h_3, h_1, c_1, c_2) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^4 : M_0 \leq v(y, t) \leq M_1, |w(y, t)| \leq M_2, H_0 \leq h_3(t) \leq H_1, |h_1(t)| \leq H_2, |c_1(t)| \leq B_1, |c_2(t)| \leq B_2\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N , доводиться як у [9].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок системи рівнянь (15)-(20). Оскільки система рівнянь (15)-(20) та задача (5)-(11) еквівалентні у зазначеному сенсі, то існує розв'язок задачі (5)-(11) при $(y, t) \in \overline{Q}_{T_0}$. $\square$

4. Єдиність розв'язку задачі (5)-(11).

Теорема 2. Нехай виконуються умови: $a \in C^{2,0}(\mathbb{R} \times [0, T])$, $b, f \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0, T])$, $a(x, t) > 0$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, 5$. Тоді задача (5)-(11) не може мати двох різних розв'язків

$$(h_1, h_3, c_1, c_2, v) \in (C^1[0, T])^2 \times (C[0, T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T), \quad h_3(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Доведення. Припустимо, що $(h_{1i}(t), h_{3i}(t), c_{1i}(t), c_{2i}(t), v_i(y, t))$, $i = 1, 2$, – два розв'язки задачі (5)-(11). Позначимо

$$\frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = s_i(t), \quad \frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = p_i(t), \quad i = 1, 2, \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t), \quad p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

$$r(t) = c_{11}(t) - c_{12}(t), \quad q(t) = c_{21}(t) - c_{22}(t), \quad v(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t).$$

Функції $r(t), q(t), s(t), p(t), v(y, t)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t = & \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}(t)} + s_1(t) + yp_1(t) \right) v_y + (c_{11}(t) \times \\ & \times (yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + c_{21}(t)) v + \left(\frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} - \frac{a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)}{h_{32}^2(t)} \right) v_{2yy} + \\ & + \left(s(t) + yp(t) + \frac{b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}(t)} - \frac{b(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)}{h_{32}(t)} \right) v_{2y} + \\ & + (r(t)(yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + c_{12}(t)(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)) + q(t)) v_2 + \\ & + f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (31)$$

та умови

$$v(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (32)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (33)$$

$$s(t) = \frac{v_y(0, t)}{h_{31}^2(t)} + v_{2y}(0, t) \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) + \mu_3(t) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right), \quad t \in [0, T], \quad (34)$$

$$p(t) = -\frac{v_y(0, t) + v_y(1, t)}{h_{31}^2(t)} - (v_{2y}(0, t) + v_{2y}(1, t)) \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) +$$

$$+(\mu_4(t) - \mu_3(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right), \quad t \in [0, T], \quad (35)$$

$$\int_0^1 v(y, t) dy = \mu_5(t) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 yv(y, t) dy = & (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t))\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}\right) - \\ & -(h_{11}(t) - h_{12}(t))\frac{\mu_5(t)}{h_{32}^2(t)}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (37)$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}(t)} + s_1(t) + yp_1(t) \right) v_y +$$

$$+(c_{11}(t)(yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + c_{21}(t))v$$

з урахуванням умов (32), (33) функцію $v(y, t)$ подамо у вигляді

$$\begin{aligned} v(y, t) = & \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y, t, \eta, \tau) \left[\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau)}{h_{31}^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)}{h_{32}^2(\tau)} \right) v_{2\eta\eta} + \right. \\ & + \left(s(\tau) + \eta p(\tau) + \frac{b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau)}{h_{31}(\tau)} - \frac{b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)}{h_{32}(\tau)} \right) v_{2\eta}(\eta, \tau) + \\ & + (r(\tau)(h_{11}(\tau) + \eta h_{31}(\tau)) + c_{12}(\tau)(\eta(h_{31}(\tau) - h_{32}(\tau)) + h_{11}(\tau) - h_{12}(\tau)) + q(\tau))v_2(\eta, \tau) + \\ & \left. + f(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau) - f(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau) \right] d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned} \quad (38)$$

Продиференціювавши (38) за змінною y , одержуємо

$$\begin{aligned} v_y(y, t) = & \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^*(y, t, \eta, \tau) \left[\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau)}{h_{31}^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)}{h_{32}^2(\tau)} \right) v_{2\eta\eta} + \right. \\ & + \left(s(\tau) + \eta p(\tau) + \frac{b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau)}{h_{31}(\tau)} - \frac{b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau)}{h_{32}(\tau)} \right) v_{2\eta}(\eta, \tau) + \\ & + (r(\tau)(h_{11}(\tau) + \eta h_{31}(\tau)) + c_{12}(\tau)(\eta(h_{31}(\tau) - h_{32}(\tau)) + h_{11}(\tau) - h_{12}(\tau)) + q(\tau))v_2(\eta, \tau) + \\ & \left. + f(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau), \tau) - f(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau), \tau) \right] d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned} \quad (39)$$

Оскільки для $b_{1i}(t)$, $b_{2i}(t)$, $i = 1, 2$ справджуються рівності, аналогічні до (19), (20), то отримуємо

$$\begin{aligned} r(t)\mu_6(t) + q(t)\mu_5(t) = & \frac{a(h_{11}(t), t) + \mu_1(t)}{h_{31}(t)} v_y(0, t) - \frac{a(h_{11}(t) + h_{31}(t), t) - \mu_2(t)}{h_{31}(t)} v_y(1, t) + \\ & + \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) (v_{2y}(0, t)(a(h_{11}(t), t) + \mu_1(t)) - v_{2y}(1, t)(a(h_{11}(t) + h_{31}(t), t) - \mu_2(t))) + \\ & + (v_{2y}(0, t)(a(h_{11}(t), t) - a(h_{12}(t), t)) - (a(h_{11}(t) + h_{31}(t), t) - a(h_{12}(t) + h_{32}(t), t))v_{2y}(1, t)) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{h_{31}(t)} + \int_0^1 ((b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t))v_y(y, t) + (b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \\ & - b(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) - a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) + a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))v_{2y}(y, t) + \\ & + (h_{31}(t) - h_{32}(t))f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) + h_{31}(t)(f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \\ & - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))dy, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} r(t) = & \left[\int_0^1 (((b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t))v_{1y}(y, t) + f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) \times \right. \\ & \times h_{31}(t))(\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t) - yh_{31}(t)\mu_5(t)) + \mu_5(t)a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v_{1y}(y, t))dy + \\ & + \left(v_{1y}(1, t) \frac{a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \mu_2(t)}{h_{31}(t)} + \mu_2(t)\mu_4(t) \right) (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_5(t)) - \\ & - \left(v_{1y}(0, t) \frac{a(h_{11}(t), t) + \mu_1(t)}{h_{31}(t)} + \mu_1(t)\mu_3(t) \right) (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t)) + \mu'_6(t)\mu_5(t) - \mu'_5(t) \times \\ & \times \mu_6(t) \Big] \mu_5(t) \left(\mu_5(t)(h_{11}^2(t) - h_{12}^2(t)) - h_{31}^3(t) \int_0^1 y^2 v(y, t) dy - 2\mu_6(t)(h_{11}(t) - h_{12}(t)) - \right. \\ & - (h_{31}^3(t) - h_{32}^3(t)) \int_0^1 y^2 v_2(y, t) dy \Big) (\Delta_1(t)\Delta_2(t))^{-1} + \left[\int_0^1 ((\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t) - yh_{31}(t) \times \right. \\ & \times \mu_5(t))((b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t))v_y(y, t) + (b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \\ & - b(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) - a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) + a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))v_{2y}(y, t) + (h_{31}(t) - \\ & - h_{32}(t))f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) + h_{31}(t)(f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))) - \mu_5(t) \times \\ & \times (v_{2y}(y, t)(b(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) - a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)) + h_{32}(t)f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)) \times \\ & \times (h_{11}(t) - h_{12}(t) + y(h_{31}(t) - h_{32}(t))) + \mu_5(t)a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v_y(y, t) + \mu_5(t)v_{2y}(y, t) \times \\ & \times (a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))dy + \frac{a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \mu_2(t)}{h_{31}(t)} v_y(1, t) \times \\ & \times (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_5(t)) - \frac{a(h_{11}(t), t) + \mu_1(t)}{h_{31}(t)} v_y(0, t)(\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t)) + \\ & + \frac{1}{h_{31}(t)} (v_{2y}(1, t)(a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(h_{32}(t) + h_{12}(t), t))(\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t) - h_{31}(t) \times \\ & \times \mu_5(t)) - (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t))(a(h_{11}(t), t) - a(h_{12}(t), t))v_{2y}(0, t)) + \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) \times \\ & \times (v_{2y}(1, t)(a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \mu_2(t))(\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t) - h_{31}(t)\mu_5(t)) - (\mu_6(t) - h_{11}(t) \times \\ & \times \mu_5(t))(a(h_{11}(t), t) + \mu_1(t))v_{2y}(0, t)) - \mu_5(t)(h_{11}(t) - h_{12}(t)) \left(\frac{a(h_{11}(t), t) + \mu_1(t)}{h_{32}(t)} v_{2y}(0, t) - \right. \\ & - \frac{a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \mu_2(t)}{h_{32}(t)} v_{2y}(1, t) + \mu_1(t)\mu_3(t) - \mu_2(t)\mu_4(t) \Big) - \mu_5(t)(h_{31}(t) - h_{32}(t)) \times \\ & \times \left(\mu_2(t)\mu_4(t) + \frac{a(h_{31}(t) + h_{11}(t), t) - \mu_2(t)}{h_{32}(t)} v_{2y}(1, t) \right) \Big] \Delta^{-1}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (41)$$

де $\Delta_i(t) = 2h_{1i}(t)\mu_5(t)\mu_6(t) - \mu_6^2(t) - h_{1i}^2(t)\mu_5^2(t) + h_{3i}^3(t)\mu_5(t) \int_0^1 y^2 v_2(y, t) dy$, $i = 1, 2$.

Подано $\Delta_i(t)$, $i = 1, 2$, у вигляді

$$\Delta_i(t) = \frac{h_{3i}^4(t)}{2} \int_0^1 \int_0^1 (y_2 - y_1)^2 v_i(y_1, t) v_i(y_2, t) dy_1 dy_2, \quad i = 1, 2.$$

Використавши принцип максимуму [13] для розв'язку задачі (5)-(7), отримуємо

$$v_i(y, t) \geq M > 0, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T, \quad i = 1, 2,$$

де стала M визначається вихідними даними задачі. Тоді

$$\Delta_i(t) > 0, \quad i = 1, 2.$$

Згідно з припущеннями теореми правильною є така рівність:

$$\begin{aligned} f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) &= (h_{11}(t) - h_{12}(t) + y(h_{31}(t) - h_{32}(t))) \times \\ &\times \int_0^1 f_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t) + \sigma(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)), t) d\sigma, \end{aligned} \quad (42)$$

яка правильна і для функцій $b(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)$, $a(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)$ та $a_x(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)$, $i = 1, 2$.

Виразимо $h_{3i}(t)$, $h_{1i}(t)$ через $p_i(t)$, $s_i(t)$

$$h_{3i}(t) = h_{3i}(0) \exp \left(\int_0^t p_i(\tau) d\tau \right),$$

$$h_{1i}(t) = h_{1i}(0) + h_{3i}(0) \int_0^t s_i(\tau) \exp \left(\int_0^\tau p_i(\sigma) d\sigma \right) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

де $h_{31}(0) = h_{32}(0) = h_{03}$, $h_{11}(0) = h_{12}(0) = h_{01}$. Враховуючи рівність

$$e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{y + \tau(x-y)} d\tau,$$

одержимо

$$\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} = -\frac{1}{h_{03}} \int_0^t p(\tau) d\tau \int_0^1 \exp \left(-\int_0^t (\sigma p(\tau) + p_2(\tau)) d\tau \right) d\sigma, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} h_{11}(t) - h_{12}(t) &= h_{03} \left(\int_0^t s(\tau) \exp \left(\int_0^\tau p_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_0^t s_2(\tau) \int_0^\tau p(\eta) d\eta \exp \left(\int_0^\tau (p_2(\rho) + \sigma p(\rho)) d\rho \right) d\sigma d\tau \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Аналогічно (43), (44) використаємо для зображення різниць

$$h_{31}(t) - h_{32}(t), \quad h_{11}^2(t) - h_{12}^2(t), \quad h_{31}^3(t) - h_{32}^3(t), \quad \frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}.$$

Врахувавши (42)-(44) і підставивши (38), (39) в (34), (35), (40), (41), одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $p(t)$, $s(t)$, $q(t)$, $r(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $p(t) = 0$, $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $r(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Звідси отримаємо $p_1(t) = p_2(t)$, $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $r_1(t) = r_2(t)$, $t \in [0, T]$, а отже, $h_{31}(t) = h_{32}(t)$, $h_{11}(t) = h_{12}(t)$, $c_{11}(t) = c_{12}(t)$, $c_{21}(t) = c_{22}(t)$, $t \in [0, T]$. Використавши це в задачі (31)-(33), знаходимо, що $v_1(y, t) = v_2(y, t)$, $(y, t) \in Q_T$. $\square$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мамаюсупов О.Ш.* Об определении коэффициента параболического уравнения / *О.Ш. Мамаюсупов* // Исслед. по инт.-диф. уравн. Фрунзе. – 1989. – Вып. 22. – С. 157-160.
2. *Cannon J.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation / *J. Cannon, Y. Lin, S. Wang* // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – Vol. 33. – P. 149-163.
3. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости / *Н.И. Иванчов* // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35, №3. – С. 612-621.
4. *Ковальчук С.М.* Визначення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності в багатопаровому середовищі / *С.М. Ковальчук* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, №2. – С. 153-159.
5. *Пабирівська Н.В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення / *Н.В. Пабирівська* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, №1. – С. 51-58.
6. *Саватеев Е.Г.* Сведение обратной задачи для уравнения параболического типа / *Е.Г. Саватеев* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 334, №5. – С. 562-563.
7. *Иванчов М.И.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності / *М.И. Иванчов* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, №7. – С. 901-910.
8. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболическому рівнянні в області з невідомими межами / *І. Баранська* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20-38.
9. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболического рівняння в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.
10. *Снітко Г.А.* Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболическому рівнянні в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Вісн. нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643, №643. – С. 45-52.
11. *Снітко Г.А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболического рівняння в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, №4. – С. 37-47.
12. *Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций / *Г. Полиа, Г. Сеге* – М.: Наука, 1978.
13. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева* – М.: Наука, 1967.
14. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / *M. Ivanchov* – Lviv: VNTL Publ., 2003.

Стаття: надійшла до редакції 29.11.2012
прийнята до друку 12.12.2012

INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN MINOR COEFFICIENT IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Dudaev Str., 15, 79005, Lviv
e-mail: snitkog@ukr.net*

We establish unique solvability conditions of the inverse problem of finding the time-dependent parameters in the coefficient of the unknown function in one-dimensional parabolic equation in a free boundary domain.

Key words: inverse problem, Green function, free boundary, parabolic equation.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Галина СНИТКО

*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Дж. Дудаева, 15, 79005, Львов
e-mail: snitkog@ukr.net*

Установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения зависящих от времени параметров в коэффициенте при неизвестной функции в одномерном параболическом уравнении в области со свободной границей.

Ключевые слова: обратная задача, свободная граница, параболическое уравнение, функция Грина.

УДК 511.3

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Ярослав ХОЛЯВКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua

Нехай $\operatorname{sn}_i z$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі з алгебричними еліптичними модулями, $(4K_i, 2iK'_i)$ – пара основних періодів $\operatorname{sn}_i z$ ($i = 1, 2$). Отримано оцінку сумісного наближення $\operatorname{sn}_1 K_2, \operatorname{sn}_2 K_1$.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Якобі.

1. Вступ. Нехай $\operatorname{sn}_1 z, \operatorname{sn}_2 z$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі, $\varkappa_1, \varkappa_2$ – еліптичні модулі цих функцій, $\varkappa_1, \varkappa_2$ – алгебричні, $0 < \varkappa_1^2 < 1, 0 < \varkappa_2^2 < 1$, $(4K_1, 2iK'_1), (4K_2, 2iK'_2)$ – пари основних періодів $\operatorname{sn}_1 z, \operatorname{sn}_2 z$ [1].

Позначимо ξ_i – наближувальні алгебричні числа, $n_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ – їхні степені та довжини, відповідно, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$.

Теорема 1. Якщо хоча б одне з чисел $\operatorname{sn}_1 K_2, \operatorname{sn}_2 K_1$ трансцендентне і для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ справджується $|nK_1 - mK_2| > (|K_1| + |K_2|)(n + m)^{-1}$, то

$$\max\{|\operatorname{sn}_1 K_2 - \xi_1|, |\operatorname{sn}_2 K_1 - \xi_2|\} > \exp(-\Lambda T^2 \ln T), \quad (1)$$

де

$$T = n(n_1^{-1} \ln L_1 + n_2^{-1} \ln L_2 + \ln n), \quad \Lambda = \Lambda(\varkappa_1, \varkappa_2), \quad \Lambda > 0. \quad (2)$$

Подібні формулювання задач та оцінки можна знайти в [2].

2. Доведення Теорема 1. Доведення теореми будемо проводити другим методом Гельфонда (див., наприклад, [3], [4]). Використовуватимемо властивості еліптичних функцій Якобі та Вейерштрасса, сформульовані в [1], [3], [4].

Припустимо, що (1) не виконується, тобто для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\max\{|\operatorname{sn}_1 K_2 - \xi_1|, |\operatorname{sn}_2 iK'_1 - \xi_2|\} < \exp(-\lambda^7 T^2 \ln T). \quad (3)$$

Приймемо

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T, \quad N = \lambda \sqrt{\lambda T}. \quad (4)$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^L \sum_{l_2=0}^L C_{l_1, l_2} \operatorname{sn}_1^{l_1} z \operatorname{sn}_2^{l_2} z, \quad C_{l_1, l_2} = \sum_{\tau=1}^n C_{l_1, l_2, \tau} \zeta_\tau, \quad C_{l_1, l_2, \tau} \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

де ζ_τ – твірні елементи $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \kappa_1, \kappa_2)$.

Позначимо $\varphi_{i,1}(z) = \operatorname{sn}_i(z + \frac{K_i}{2})$, $\varphi_{i,2}(w) = \operatorname{sn}_i(w + \frac{3K_i}{2})$, $i = 1, 2$. Тоді

$$\operatorname{sn}_i(z + w) = \frac{\varphi_{i,1}(z)\varphi'_{i,2}(w) + \varphi_{i,2}(w)\varphi'_{i,1}(z)}{1 - \kappa_i^2 \varphi_{i,1}^2(z)\varphi_{i,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{i,1}(z, w)}{\Lambda_{i,2}(z, w)}, \quad \varphi_{k,i}(0) = (1 + \kappa'_k)^{-0,5}, \quad (6)$$

Існують многочлени $G_{i,s,k,l}(\kappa_i, z)$ такі, що

$$G_{i,s,k,l}(\kappa_i, z) = \frac{d^s}{dw^s} (\Lambda_{i,1}^k(z, w) \Lambda_{i,2}^l(z, w))|_{w=0}, \quad (7)$$

$$\deg G_{i,s,k,l} \leq 4(k+l), \quad \ln L(G_{i,s,k,l}) \leq s \ln(s(k+l) + c_1(s+k+l)).$$

З (5), (6), (7) подібно як в [3], [4], отримаємо

$$\begin{aligned} F^{(s)}(z) &= \frac{d^s}{dw^s} (\Lambda_{1,2}^{-L}(z, w) \Lambda_{2,2}^{-L}(z, w) (F(z+w) \Lambda_{1,2}^L(z, w) \Lambda_{2,2}^L(z, w)))|_{w=0} = \\ &= \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \frac{d^{s-t}}{dw^{s-t}} (\Lambda_{1,2}^{-L}(z, w) \Lambda_{2,2}^{-L}(z, w))|_{w=0} \times \\ &\times \sum_{l_1=0}^L \sum_{l_2=0}^L C_{l_1, l_2} \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} G_{1,t-i, l_1, L-l_1}(\kappa_1, z) G_{2,i, l_2, L-l_2}(\kappa_2, z) = \\ &= \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \frac{d^{s-t}}{dw^{s-t}} (\Lambda_{1,2}^{-L}(z, w) \Lambda_{2,2}^{-L}(z, w))|_{w=0} F_{s,t}(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Нехай $\xi_3^2 = (1 - \xi_1^2)(1 - \kappa_1^2 \xi_1^2)$, $\xi_4^2 = (1 - \xi_2^2)(1 - \kappa_2^2 \xi_2^2)$. Позначимо через $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)$ і $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)$ вирази, отримані з $F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)$ та $F_{s,t}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)$ заміною $\operatorname{sn}_1 K_2$, $\operatorname{sn}_2 K_1$, $\operatorname{sn}'_1 K_2$, $\operatorname{sn}'_2 K_1$ на $\xi_1, \dots, \xi_4$. Розглянемо $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)$ при $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq t \leq s \leq S$ як $N^2 S$ лінійних форм від nL^2 змінних $C_{l_1, l_2, \tau}$. Застосувавши принцип Діріхле ([5], лема 4.1), виберемо не всі рівні нулю $C_{l_1, l_2, \tau}$ такими, що для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq t \leq s \leq S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad |C_{l_1, l_2, \tau}| < \exp(c_2 \lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (9)$$

З (1), (2), (4), (9) одержимо для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq S$

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| < \exp(-\frac{1}{2} \lambda^7 T^2 \ln T). \quad (10)$$

З (9), (10) при $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq S$ одержимо

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\frac{1}{2} \lambda^7 T^2 \ln T). \quad (11)$$

Доведемо, що (11) виконується і для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$.

Нехай $G(z) = F(z) \sigma_1^L(z - \omega_1) \sigma_2^L(z - \omega_2)$, де ω_i – півперіод $\wp_i(u)$, а $\sigma_i(z)$ – σ -функції, що відповідають $\operatorname{sn}_i z$ [1]. Виберемо найменше $r \in \mathbb{N}$ таке, що $r > 32N(|K_1| + |K_2|)$, $R = 12r$. Тоді з (2), (4), (5), (9) та формули Ерміта ([5], лема 4.7) випливає

$$|G(z)|_{|z| \leq R} < \exp(-\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (12)$$

З (12) отримаємо для $0 \leq s \leq \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_{|z| \leq r} < \exp(-\frac{1}{2} \lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (13)$$

Для досить малого ε в ε -околах точок $4n_1K_1$ функція $\sigma_2(z - \omega_2)$ та ε -околах точок $4n_2K_2$ функція $\sigma_1(z - \omega_1)$ не мають нулів, тому для $|n_1|, |n_2| \leq 32N$ випливає

$$|\sigma_i(z - \omega_i)|_{z \in V(\varepsilon, 4n_1K_1 + 4n_2K_2)} > \exp(-c_3\lambda^5 \ln \lambda T^2). \quad (14)$$

З (12)–(14) для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\frac{1}{3}\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (15)$$

Враховуючи (10), для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$ та $0 \leq s \leq \lambda S$ з (15) випливає

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| < \exp(-\frac{1}{4}\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (16)$$

Розглядаючи $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)$, $0 \leq t \leq s \leq \lambda S$, $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, як значення відповідного многочлена в алгебричних точках, з теореми Ліувілля ([5], лема 9.2) отримаємо для $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ оцінку

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| > \exp(-\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (17)$$

З (8), (17) одержимо для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| > \exp(-2\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \quad (18)$$

Оцінки (16) та (18) суперечливі, тому для $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq t \leq s \leq \lambda S$ $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) = 0$. Тоді при $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) = 0. \quad (19)$$

З (19) випливає, що многочлен $F(z)$ має не менше $c_4\lambda^7 \ln \lambda T^2$ нулів (з врахуванням кратності), але нулів може бути не більше $c_5\lambda^6 \ln \lambda T^2$, тому для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$ припущення (3) приводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lawden D.F.* Elliptic functions and applications / *D.F. Lawden* – 1989.
2. *Fel'dman N.I.* Transcendental Numbers / *N.I. Fel'dman, Yu. V. Nesterenko* – Springer, 1998.
3. *Chudnovsky G.V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann-Weierschtrass theorem / *G.V. Chudnovsky* // *Inventiones Math.* – 1980. – Vol. 61. – P. 267-290.
4. *Нестеренко Ю.В.* О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции / *Ю.В. Нестеренко* // *Изв. РАН. Сер. мат.* – 1995. – Т. 59, №4. – С. 155-178.
5. *Фельдман Н.И.* Седьмая проблема Гильберта / *Н.И. Фельдман* – Москва: Изд-во МГУ, 1982.

Стаття: надійшла до редакції 18.10.2012
 прийнята до друку 12.12.2012

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUE
OF TWO ELLIPTIC FUNCTIONS

Yaroslav KHOLYAVKA

*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua*

Let $\operatorname{sn}_i z$ be algebraically independent Jacobi elliptic functions with algebraic modulus, $(4K_i, 2iK'_i)$ be main periods $\operatorname{sn}_i z$ ($i = 1, 2$). We estimate from below the simultaneous approximation $\operatorname{sn}_1 K_2, \operatorname{sn}_2 K_1$.

Key words: simultaneous approximation, Jacobi elliptic function.

СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ярослав ХОЛЯВКА

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua*

Пусть $\operatorname{sn}_i z$ – алгебраически независимые эллиптические функции Якоби с алгебраическими эллиптическими модулями, $(4K_i, 2iK'_i)$ – пара основных периодов $\operatorname{sn}_i z$ ($i = 1, 2$). Получено оценку совместного приближения $\operatorname{sn}_1 K_2, \operatorname{sn}_2 K_1$.

Ключевые слова: совместные приближения, эллиптическая функция Якоби.

УДК 519.6

МЕТОД ЛІНІЙНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КУРЧАТОВА ЗА УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ ПОДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ПОРЯДКІВ

Степан ШАХНО

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: shakhno@is.lviv.ua*

Досліджено збіжність методу лінійної інтерполяції Курчатова для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банахових просторах за узагальненої умови Ліпшиця для поділених різниць першого та другого порядку. Доведено умови та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку задачі.

Ключові слова: нелінійне рівняння, ітераційний метод, поділена різниця, порядок збіжності.

1. Вступ. Нехай задано рівняння

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

де $F : D \subseteq X \rightarrow Y$ – нелінійний оператор; X, Y – банахові простори.

Нехай x, y дві фіксовані точки з D . Лінійний оператор $F(x, y)$ з X в Y називатимемо поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x і y , якщо правильна рівність [1]

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \quad (2)$$

Вважатимемо, що існує похідна Фреше оператора F в D , причому $F(x, x) = F'(x)$.

Поділеною різницею другого порядку від функції F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x, y, z)$, який задовольняє умову

$$F(x, y, z)(y - z) = F(x, y) - F(x, z). \quad (3)$$

Відомим різницевим методом розв'язування нелінійних рівнянь є метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - (F(x_n, x_{n-1}))^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

де $F(x_n, x_{n-1})$ – поділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} – задані.

Метод хорд для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі досліджували автори [1, 2, 3, 4, 5] за умови, що поділені різниці нелінійного оператора F задовольняють умову Ліпшиця (Гьольдера) з невід'ємною постійною L .

У [9] досліджено метод Курчатова за звичайних умов Ліпшиця на поділені різниці першого та другого порядків і доведено квадратичну збіжність його. Ітераційна формула методу Курчатова набула вигляду

$$x_{n+1} = x_n - (F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

де $F(u, v)$ – поділена різниця першого порядку; x_0, x_{-1} – задані.

У праці [6] для дослідження методу Ньютона запропонували узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість константи L використано деяку додатну інтегровну функцію. У нашій праці [10] введено аналогічну узагальнену умову Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і за цієї умови досліджено збіжність методу хорд, знайдено порядок збіжності $(1 + \sqrt{5})/2$. Ми вводимо узагальнену умову Ліпшиця також для поділеної різниці другого порядку і вивчаємо збіжність методу Курчатова (5).

Позначимо $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\} \subset D$ – відкриту кулю радіуса r з центром в точці x_0 .

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq L(\|x - u\| + \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D \quad (6)$$

називають умовою Ліпшиця в області D з постійною L .

Якщо виконується умова

$$\|F(x, y) - F'(x_0)\| \leq L(\|x - x_0\| + \|y - x_0\|) \quad \forall x, y \in B(x_0, r), \quad (7)$$

то ми називаємо її центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ з константою L .

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути константою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку (6) і (7) для $x_0 = x^*$ будуть замінені, відповідно, на

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x, y) - F(u, v))\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u) du \quad \forall x, y, u, v \in D \quad (8)$$

та

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x, y) - F'(x^*))\| \leq \int_0^{\|x-x^*\|+\|y-x^*\|} L(u) du \quad \forall x, y \in B(x^*, r). \quad (9)$$

Водночас умови Ліпшиця (8) і (9) називаються узагальненими умовами Ліпшиця.

Аналогічно вводимо узагальнену умову Ліпшиця для поділеної різниці другого порядку

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u, x, y) - F(v, x, y))\| \leq \int_0^{\|u-v\|} N(u) du \quad \forall x, y, u, v \in B(x^*, r), \quad (10)$$

де N – додатна інтегровна функція.

2. Збіжність методу Курчатова. З радіусу області збіжності та порядку збіжності методу Курчатова впливає теорема.

Теорема 1. Нехай F – нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y . Припустимо, що: 1) $F(x) = 0$ має розв’язок $x^* \in D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого та другого порядку в $B(x^*, 3r) \subset D$, які задовольняють узагальнені умови Ліпшиця

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x, y) - F(u, v))\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u) du, \quad (11)$$

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u, x, y) - F(v, x, y))\| \leq \int_0^{\|u-v\|} N(u) du, \quad (12)$$

де $x, y, u, v \in B(x^*, 3r)$, L і N – неспадні функції. Нехай r задовольняє рівняння

$$\frac{\int_0^r L(u) du + 2r \int_0^{2r} N(u) du}{1 - \left(\int_0^{2r} L(u) du + 2r \int_0^{2r} N(u) du \right)} = 1. \quad (13)$$

Тоді для всіх $x_0, x_{-1} \in B(x^*, r)$ ітераційний процес (5) коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ належить $B(x^*, r)$, збігається до x^* і задовольняє нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq \frac{\int_0^{\rho(x_n)} L(u) du + \int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u) du \|x_n - x_{n-1}\|}{1 - \left(\int_0^{2\rho(x_n)} L(u) du + \int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u) du \|x_n - x_{n-1}\| \right)} \|x_n - x^*\|, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\varrho(y) = \|y - x^*\|$. Порядок збіжності ітераційної процедури (5) квадратичний.

Доведення. Доведемо, що функції $g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t L(u) du$ та $h(t) = \frac{1}{t} \int_0^t N(u) du$ монотонно неспадні стосовно t . Справді, при монотонності L отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} - \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \right) L(u) du &= \left(\frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) \int_0^{t_1} \right) L(u) du \geq \\ &\geq L(t_1) \left(\frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) \int_0^{t_1} \right) du = L(t_1) \left(\frac{t_2 - t_1}{t_2} + t_1 \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

для $0 < t_1 < t_2$. Отже, $g(t)$ – неспадна стосовно t . Аналогічно отримуємо для $h(t)$.

Позначимо через A_n лінійний оператор $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$. Легко переконатися в такому: якщо $x_n, x_{n-1} \in B(x^*, r)$, то $2x_n - x_{n-1}, x_{n-1} \in B(x^*, 3r)$. Тоді

A_n – оборотний і виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1}F'(x^*)\| &= \| [I - (I - F'(x^*)^{-1}A_n))^{-1}] \| \leq \\ &\leq \left(1 - \left(\int_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du \|x_n - x_{n-1}\| \right) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Справді, з формул (11) і (12) отримаємо

$$\begin{aligned} \|I - F'(x^*)^{-1}A_n\| &= \|F'(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x_n, x_n) + F(x_n, x_n) - \\ &- F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))\| = \|F'(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x_n, x_n) + \\ &+ F(x_n, x_n) - F(x_n, x_{n-1}) + F(x_n, x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))\| \leq \\ &\leq \int_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \\ &+ \|F'(x^*)^{-1}(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n))(x_n - x_{n-1})\| \leq \\ &\leq \int_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du \|x_n - x_{n-1}\| < \int_0^{2r} L(u)du + 2r \int_0^{2r} N(u)du. \end{aligned}$$

З означення r одержуємо

$$\int_0^{2r} L(u)du + 2r \int_0^{2r} N(u)du = 1 - \int_0^r L(u)du - 2r \int_0^{2r} N(u)du < 1. \quad (16)$$

Використовуючи теорему Банаха про обернений оператор [7], отримуємо формулу (15).

Далі можна записати

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|x_n - x^* - A_n^{-1}(F(x_n) - F(x^*))\| = \| - A_n^{-1}(F(x_n, x^*) - \\ &- A_n)(x_n - x^*) \| \leq \|A_n^{-1}F'(x^*)\| \|F'(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - A_n)\| \|x_n - x^*\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Згідно з умовами (11) і (12) теореми одержуємо

$$\begin{aligned} \|F'(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - A_n)\| &= \\ &= \|F'(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - F(x_n, x_n) + F(x_n, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))\| = \\ &= \|F'(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - F(x_n, x_n) + F(x_n, x_n) - F(x_n, x_{n-1}) + \\ &+ F(x_n, x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))\| \leq \\ &\leq \|F'(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - F(x_n, x_n))\| + \\ &+ \|F'(x^*)^{-1}(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n))(x_n - x_{n-1})\| \leq \\ &\leq \int_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du \|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned}$$

З (15) і (17) видно, що виконується (14).

Далі з (14) і (13) отримаємо

$$\|x_{n+1} - x^*\| < \|x_n - x^*\| < \dots < \max\{\|x_0 - x^*\|, \|x_{-1} - x^*\|\} < r.$$

Тому ітераційний процес (5) коректно визначений і послідовність, яку він породжує, належить $B(x^*, r)$. З останньої нерівності й оцінки (14) отримуємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$.

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ збігається до x^* , то

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \|x_n - x^*\| + \|x_{n-1} - x^*\| \leq 2\|x_{n-1} - x^*\|,$$

отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$.

Позначимо $\rho_{max} = \max\{\rho(x_0), \rho(x_{-1})\}$. Оскільки $g(t)$ і $h(t)$ монотонно неспадні, то, враховуючи вирази

$$\int_0^{\rho(x_n)} L(u) du = \frac{\int_0^{\rho(x_n)} L(u) d\rho(x_n)}{\rho(x_n)} \leq \frac{\int_0^{\rho_{max}} L(u) d\rho(x_n)}{\rho_{max}} = A\rho(x_n),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u) du &= \frac{\int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u) du \|x_n - x_{n-1}\|}{\|x_n - x_{n-1}\|} < \\ &< \frac{\int_0^{\|x_0 - x_{-1}\|} N(u) du \|x_n - x_{n-1}\|}{\|x_0 - x_{-1}\|} = G\|x_n - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} &\left(1 - \left(\int_0^{2\rho(x_n)} L(u) du + \int_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u) du \|x_n - x_{n-1}\|\right)\right)^{-1} < \\ &< \left(1 - \left(\int_0^{2\rho_{max}} L(u) du + \int_0^{\|x_0 - x_{-1}\|} N(u) du \|x_0 - x_{-1}\|\right)\right)^{-1} = H, \end{aligned}$$

з нерівності (14) випливає

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq H(A\rho(x_n) + G\|x_n - x_{n-1}\|^2)\|x_n - x^*\|$$

або

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq C_3\|x_n - x^*\|^2 + C_4\|x_n - x_{n-1}\|^2\|x_n - x^*\|. \quad (18)$$

Очевидно, порядок збіжності ітераційного процесу (5) не перевищує 2, тобто існують $C_5 \geq 0$ і $N > 0$, що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність

$$\|x_n - x^*\| \geq C_5\|x_{n-1} - x^*\|^2.$$

Оскільки

$$\|x_n - x_{n-1}\|^2 \leq (\|x_n - x^*\| + \|x_{n-1} - x^*\|)^2 \leq 4\|x_{n-1} - x^*\|^2,$$

то з (18) одержимо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq C_3 \|x_n - x^*\|^2 + 4C_4 \|x_{n-1} - x^*\|^2 \|x_n - x^*\| \leq \\ &\leq (C_3 + 4C_4/C_5) \|x_n - x^*\|^2 = C_6 \|x_n - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

З нерівності (19) випливає квадратичний порядок збіжності послідовності $\{x_n\}_{n \geq 0}$ до x^* . Теорему доведено. $\square$

3. Область єдиності розв'язку рівняння.

Теорема 2. Припустимо, що: 1) $F(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in D$, в якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого порядку $F(x, x^*)$ в $B(x^*, 3r) \subset D$, які задовольняють узагальнену умову Ліпшиця

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x, x^*) - F'(x^*))\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u) du \quad \forall x \in B(x^*, 3r),$$

де $\rho(x) = \|x - x^*\|$ і L – додатна інтегровна функція. Нехай r задовольняє

$$\int_0^r L(u) du \leq 1.$$

Тоді рівняння $F(x) = 0$ має єдиний розв'язок x^* в $B(x^*, r)$.

Доведення. Аналогічне [10]. $\square$

4. Наслідки. При вивченні різницевих методів традиційними є припущення, що поділені різниці задовольняють умови Ліпшиця. Вважаючи, що L і N є константами, отримаємо з теорем 1 та 2 такі наслідки.

Наслідок 1. Припустимо, що: 1) $F(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in D$, в якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого та другого порядку $F(x, y)$ і $F(x, y, z)$ в $B(x^*, 3r) \subset D$, які задовольняють умови Ліпшиця

$$\begin{aligned} \|F'(x^*)^{-1}(F(x, y) - F(u, v))\| &\leq L(\|x - u\| + \|y - v\|), \\ \|F'(x^*)^{-1}(F(u, x, y) - F(v, x, y))\| &\leq N\|u - v\|, \end{aligned}$$

де $x, y, u, v \in B(x^*, r)$, L, N – додатні числа і r є додатним коренем рівняння $8Nr^2 + 3Lr - 1 = 0$. Тоді метод Курчатова (5) збігається для всіх $x_{-1}, x_0 \in B(x^*, r)$ і виконується (14).

Зауважимо, що отримане r збігається зі значенням, наведеним в [9, 8].

Наслідок 2. Припустимо, що: 1) $F(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in D$, в якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого порядку $F(x, x^*)$ в $B(x^*, 3r) \subset D$, які задовольняють умову Ліпшиця

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x, x^*) - F'(x^*))\| \leq L\|x - x^*\| \quad \forall x \in B(x^*, 3r),$$

де L – додатне число і $r = \frac{1}{L}$. Тоді рівняння $F(x) = 0$ має єдиний розв'язок x^* у відкритій кулі $B(x^*, r)$. Таке r залежить тільки від L і не залежить від F .

5. Висновки. У працях [1, 3, 5, 8, 9] досліджено локальну збіжність методів хорд і Курчато-ва у разі виконання умов Ліпшиця для поділених різниць, які містять деякі постійні Ліпшиця. Ми дослідили локальну збіжність методу Курчато-ва за загальніших умов Ліпшиця, в яких замість сталих Ліпшиця використовують деякі додатні інтегровні функції. Отримані результати містять відомі як частинні випадки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Argyros I.K.* On an algorithm for solving nonlinear operator equation / *I.K. Argyros* // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*. – 1991. – Vol. 10, №1. – P. 83-92.
2. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / *Дж. Ортега, В. Рейнболдт* – М.: Мир, 1975.
3. *Шахно С.М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь / *С.М. Шахно* // *Мат. студії*. – 2004. – Т. 22, №1. – С.79-86.
4. *Шахно С.* Локальна збіжність ітераційно-різнице-вих методів розв'язування нелінійних операторних рівнянь / *С. Шахно, О. Макух* // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ.* – 2003. – Вип. 7. – С. 124-131.
5. *Hernandez M.A.* The Secant method and divided differences Hölder continuous / *M.A. Hernandez, M.J. Rubio* // *Applied Mathematics and Computation*. – 2001. – Vol. 124. – P. 139-149.
6. *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space / *X. Wang* // *IMA Journal of Numerical Analysis*. – 2000. – Vol. 20. – P. 123-134.
7. *Канторович Л.В.* О методе Ньютона / *Л.В. Канторович* // *Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова*. – 1949. – Т. 28. – С. 104-144.
8. *Шахно С.М.* Про різнице-вий метод з квадратичною збіжністю для розв'язування нелінійних операторних рівнянь / *С.М. Шахно* // *Мат. студії*. – 2006. – Т. 26, №1. – С. 105-110.
9. *Shakhno S.M.* On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations / *S.M. Shakhno* // *Proc. Appl. Math. Mech.* – 2004. – Vol. 4. – P. 650-651.
10. *Шахно С.М.* Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку / *С.М. Шахно* // *Матем. вісник НТШ*. – 2007. – Т. 4. – С. 296-305.
11. *Potra F.A.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations / *F.A. Potra* // *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* – 1984-85. – Т. 7, №1. – P. 75-106.

Стаття: надійшла до редакції 13.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

**KURCHATOV METHOD OF LINEAR INTERPOLATION UNDER
THE GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS FOR THE
FIRST- AND SECOND-ORDER DIVIDED DIFFERENCES****Stepan SHAKHNO***Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: shakhno@is.lviv.ua*

Convergence of the Kurchatov's method for solving nonlinear operator equations in the Banach spaces under the generalized Lipschitz condition for the first- and second-order divided differences is investigated. The conditions and speed of convergence of this method are found. The uniqueness ball for solution of operator equations is determined.

Key words: nonlinear equation, iterative method, divided difference, convergence order.

**МЕТОД ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КУРЧАТОВА ПРИ
ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ РАЗДЕЛЕННЫХ
РАЗНОСТЕЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ****Степан ШАХНО***Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: shakhno@is.lviv.ua*

Исследовано сходимость метода линейной интерполяции Курчатова для решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах при обобщенных условиях Липшица для разделенных разностей первого и второго порядков. Определены условия и скорость сходимости этого метода, найдено область единственности решения задачи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, итерационный метод, разделенная разность, порядок сходимости.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;
назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;
електронний варіант статті та резюме на CD-RW диску (редколегія повертає авторові диск; тексти можна надіслати за адресою lnu.visn.mm@gmail.com);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською, англійською та російською мовами, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії L^AT_EX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами L^AT_EX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Грабонович А.І.* Назва / *А.І. Грабонович* – К., 1985.
2. *Петренко О.Б.* Назва / *О.Б. Петренко, М.М. Шинк* – Л., 2001.
3. *Кравчук О.М.* Назва / *О.М. Кравчук* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
4. *Кравчук О.М.* Назва / *О.М. Кравчук, М.М. Потічний* // Мат. студії – 1995. – Т. 2, №2. – С. 4-20.
5. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Г.Д. Михайленко* – Л.: ІПІММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / *Г.Д. Михайленко, С.І. Степаняк* – Л.: ІППММ, 1993. – 9 с. – (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).
7. *Колмаз Ю.А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Ю.А. Колмаз* – К., 2008. – 20 с.
8. *Сеник С.М.* Назва / *С.М. Сеник* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
9. *Сеник С.М.* Назва / *С.М. Сеник, І.Т. Мандрик* – К., 1992. – 17 с. – Деп. в ДНТБ України, В2020-1995.
10. *Муравський В.К.* Назва / *В.К. Муравський* // Наукова конф. “Нелінійні диференціальні рівняння”: тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.
11. *Муравський В.К.* Назва / *В.К. Муравський, С.В. Ліско* // Наукова конф. “Нелінійні диференціальні рівняння”: тези доп., 27 серпня - 2 вересня 1994 р., Київ. – К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. – С. 540-551.

