ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 78

2013

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 78

2013

VISNYK
OF THE LVIV UNIVERSITY

Series
Mechanics and Mathematics

Issue 78

Scientific journal

Published 1–2 issues per year

Published since 1965

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
механіко-математична

Випуск 78

Збірник наукових праць

Виходить 1–2 рази на рік

Видається з 1965 року

Ivan Franko National
University of Lviv

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2013

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp

Editorial office address:
Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytetska Str., 1,
UA-79000 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk_en.asp

Редактор Н. ПЛИСА
Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 14,7
Наклад 200 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 5–13
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 5–13

УДК 517.95

УМОВИ ІСНУВАННЯ, ЄДИНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Галина БАРАБАШ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Розглянуто мішану задачу для рівняння типу коливання пластинки з розривними коефіцієнтами, які вироджуються на частині границі. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку зазначеної задачі, а також умови стійкості за Ляпуновим нульового розв'язку.

Ключові слова: рівняння типу коливання пластинки, узагальнений розв'язок, метод Гальоркіна, стійкість за Ляпуновим.

Досліджено умови існування, єдиності та стійкості розв'язку рівняння типу коливання пластинки, коефіцієнти якого зазнають розриву. Умови стійкості поперечних коливань стержня з гострим краєм досліджено у праці [1]. Використовуючи метод Гальоркіна і результати [2], доведено теореми про стійкість за Ляпуновим та асимптотичну стійкість нульового розв'язку зазначеного рівняння.

Нехай Ω є об'єднанням областей

$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \ : \ 0 < x_1 < a_0, \ 0 < x_2 < b\}$, $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \ : \ a_0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < b\}$ і контура $\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = a_0, 0 < x_2 < b\}$.

Розглянемо в циліндрі $Q = \Omega \times (0; +\infty)$ рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \left(a_{ij}^{kl(m)}(x,t) u_{x_k x_l}\right)_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{2} \left(b_{ij}^{(m)}(x,t) u_{x_j}\right)_{x_i} + $$
$$+ c^{(m)}(x,t) u_t + h^{(m)}(x,t) u = f^{(m)}(x,t), \tag{1}$$

$x = (x_1, x_2) \in \Omega_m, \ t > 0, \ m = 1, 2,$ з початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Вважаємо, що коефіцієнти рівняння (1) вироджуються при $x_2=0$:

$$a_0^m x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij}^2\leqslant\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant a_1^m x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij}^2, \tag{4}$$

де $0<\alpha_m<2$, $a_0^m>0$ для всіх $\eta\in\mathbb{R}^4$, $(x,t)\in Q^{(m)}=\Omega_m\times(0;+\infty)$, $m=1,2$. Функція u повинна задовольняти такі граничні умови (залежно від величини α_m):

$$\begin{cases} u(0,x_2,t)=u(a,x_2,t)=u(x_1,0,t)=u(x_1,b,t)=0,\\ u_{x_1}(0,x_2,t)=u_{x_1}(a,x_2,t)=u_{x_2}(x_1,0,t)=u_{x_2}(x_1,b,t)=0,\quad 0<\alpha_m<1; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u(0,x_2,t)=u(a,x_2,t)=u(x_1,0,t)=u(x_1,b,t)=0,\\ u_{x_1}(0,x_2,t)=u_{x_1}(a,x_2,t)=u_{x_2}(x_1,b,t)=0,\quad 1\leqslant\alpha_m<2,\ m=1,2. \end{cases}$$

Для шуканої функції u задано умови спряження

$$[u]_\Gamma=0,\quad [u_{x_1}]_\Gamma=0,\quad \sum_{i,k,l=1}^{2}\left(a_{i1}^{kl(1)}u_{x_kx_l}A_1-a_{i1}^{kl(2)}u_{x_kx_l}A_2\right)\Big|_\Gamma=0, \tag{6}$$

$$\sum_{j,k,l=1}^{2}\left((a_{1j}^{kl(1)}u_{x_kx_l})_{x_j}A_1-(a_{1j}^{kl(2)}u_{x_kx_l})_{x_j}A_2\right)\Big|_\Gamma-\sum_{j=1}^{2}\left(\left(b_{1j}^{(1)}A_1-b_{1j}^{(2)}A_2\right)u_{x_j}\right)\Big|_\Gamma=0,$$

де $t\in S=[0;+\infty)$, символ $[u]$ означає стрибок, який виконує функція u при переході через контур Γ, $A_m=A_m(t)$, $m=1,2$, – задані функції.

Введемо простір $\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)$ як замикання множини двічі неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови (5) за нормою

$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)}=\left(\sum_{m=1}^{2}\int_{\Omega_m}x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}v_{x_ix_j}^2dx\right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що для довільної функції $v\in\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)$ виконуються нерівності типу Фрідріхса

$$\int_{\Omega_m}v^2dx\leqslant\varkappa_0^m\int_{\Omega_m}x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}v_{x_ix_j}^2dx,\qquad \int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{2}v_{x_i}^2dx\leqslant\varkappa_1^m\int_{\Omega_m}x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}v_{x_ix_j}^2dx, \tag{7}$$

причому, $\varkappa_0^m=\dfrac{(5-\alpha_m)b^{4-\alpha_m}}{3(2-\alpha_m)(4-\alpha_m)}$, $\varkappa_1^m=\dfrac{2b^{2-\alpha_m}}{2-\alpha_m}$, $m=1,2$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3), (5), (6) *називається функція* u, *яка задовольняє включення*

$$u\in L^\infty_{loc}(S;\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)),\quad u_t\in L^\infty_{loc}(S;L^2(\Omega)), \tag{8}$$

умови (2) *і* (5)*, а також інтегральну тотожність*

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}\Big(-u_t v_t A_m - u_t v A_{mt} + c^{(m)} u_t v A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} A_m + \tag{9}$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j} v_{x_i} A_m + h^{(m)} u v A_m - f^{(m)} v A_m\Big) dx\, dt = \sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_0^{(m)}} u_1 v\, A_m dx$$

для довільної $v \in L^2(S; \overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega))$, $v_t \in L^2(S; L^2(\Omega))$*, яка має обмежений носій, де* $D_\tau^{(m)} = Q^{(m)} \cap \{t=\tau\}$, $\tau \geqslant 0$, $m = 1,2$.

Спочатку з'ясуємо умови існування та єдиності цього розв'язку. Будемо припускати, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(A): $a_{ij}^{kl(m)},\ a_{ijt}^{kl(m)} \in L^\infty(Q^{(m)})$, $a_{ij}^{kl(m)} = a_{kl}^{ij(m)}$, $i,j,k,l = 1,2$, $m = 1,2$;

(B): $b_{ij}^{(m)},\ b_{ijt}^{(m)} \in L^\infty(Q^{(m)})$, $b_{ij}^{(m)} = b_{ji}^{(m)}$, $i,j = 1,2$, $m = 1,2$;

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant b_0^m \sum_{i=1}^{2}\xi_i^2, \quad (x,t)\in Q^{(m)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2;$$

$b_0^m + \frac{a_0^m \gamma_1}{\varkappa_1^m} > 0$, $\gamma_1 > 0$, $m = 1,2$;

(C): $c^{(m)},\ c_t^{(m)} \in L^\infty(Q^{(m)})$; $c^{(m)}(x,t) \geqslant c_0 \geqslant 0$, $(x,t)\in Q^{(m)}$, $m = 1,2$;

(H): $h^{(m)},\ h_t^{(m)} \in L^\infty(Q^{(m)})$; $h^{(m)}(x,t) \geqslant h_0^{(m)}$, $(x,t) \in Q^{(m)}$, $h_0^{(m)} + \frac{a_1^m \gamma_2}{\varkappa_0^m} > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$, $m = 1,2$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (4), (A), (B), (C), (H), і, крім того,*

$$0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m}, \quad A \in C^1(S), \quad t \in S;$$

$$f^{(m)} \in L^2_{loc}(S; L^2(\Omega_m)), \quad m = 1,2; \quad u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega).$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), (5), (6).

Доведення. Розглянемо в області $Q_T^{(m)} = \Omega_m \times (0;T)$ рівняння (1), де T – довільне додатне число. Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u^N(x,t) = \sum_{p=1}^{N} C_p^N(t)\omega_p(x),$$

де $\{\omega_p(x)\}$ – база простору $\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)$, а $C_p^N(t)$ знаходимо з такої задачі:

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{\Omega_m}\Big(u_{tt}^N \omega_p A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l}^N \omega_{p x_i x_j} A_m + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j}^N \omega_{p x_i} A_m +$$
$$+ c^{(m)} u_t^N \omega_p A_m + h^{(m)} u^N \omega_p A_m - f^{(m)} \omega_p A_m\Big) dx = 0, \tag{10}$$

$$C_p^N(0) = u_{0p}^N, \quad C_{pt}^N(0) = u_{1p}^N, \quad p = 1, ..., N. \tag{11}$$

В умовах (11) сталі $u_{0p}^N,\ u_{1p}^N$ вибираємо так, щоб

$$u_0^N(x)=\sum_{p=1}^N u_{0p}^N\omega_p(x),\quad u_1^N(x)=\sum_{p=1}^N u_{1p}^N\omega_p(x),$$

причому, $u_0^N(x)\to u_0(x)$ в $\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)$, а $u_1^N(x)\to u_1(x)$ в $L^2(\Omega)$ при $N\to\infty$.

Домножимо кожне рівняння системи (10) на відповідну функцію $C_{pt}^N(t)$, підсумуємо по p від 1 до N, зінтегруємо по t від 0 до T. Після цих операцій отримаємо рівність

$$\sum_{m=1}^2\int\limits_{Q_T^{(m)}}\Bigg(u_{tt}^N u_t^N A_m+\sum_{i,j,k,l=1}^2 a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l}^N u_{x_ix_jt}^N A_m+\sum_{i,j=1}^2 b_{ij}^{(m)}u_{x_j}^N u_{x_it}^N A_m+$$
$$+c^{(m)}(u_t^N)^2A_m+h^{(m)}u^N u_t^N A_m-f^{(m)}u_t^N A_m\Bigg)dx\,dt=0.$$

Використовуючи інтегрування частинами та умови теореми 1, одержуємо оцінку

$$B_1\sum_{m=1}^2\int\limits_{D_T^{(m)}}\Bigg((u_t^N)^2+x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^2(u_{x_ix_j}^N)^2\Bigg)dx\leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant B_2\sum_{m=1}^2\Bigg(\int\limits_{D_0^{(m)}}\Bigg((u_1^N)^2+x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^2(u_{0x_ix_j}^N)^2\Bigg)dx+\int\limits_{Q_T^{(m)}}(f^{(m)})^2dx\,dt\Bigg)+$$
$$+B_3\sum_{m=1}^2\int\limits_{Q_T^{(m)}}\Bigg((u_t^N)^2+x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^2(u_{x_ix_j}^N)^2\Bigg)dx\,dt,$$

де $B_1=\min\limits_{m=1,2}\min\{A_{0m};A_{0m}a_0^m(1-\gamma_1-\gamma_2)\}$,
$B_2=\max\limits_{m=1,2}\max\{A_{1m};A_{1m}(a_1^m+b_1^m\varkappa_1^m+h_1^m\varkappa_0^m)\}$,
$B_3=\max\limits_{m=1,2}\max\{A_{1m}+2A_{2m};A_{2m}(a_1^m+b_1^m\varkappa_1^m+h_1^m\varkappa_0^m)+A_{1m}(a_2^m+b_2^m\varkappa_1^m+h_2^m\varkappa_0^m)\}$,
а додатні сталі $a_2^m,\ b_1^m,\ b_2^m,\ h_1^m,\ h_2^m,\ A_{2m}$ такі, що справджуються умови:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^2 a_{ijt}^{kl(m)}(x,t)\,\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant a_2^m x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^2\eta_{ij}^2,$$
$$\sum_{i,j=1}^2 b_{ij}^{(m)}(x,t)\,\xi_i\xi_j\leqslant b_1^m\sum_{i=1}^2\xi_i^2,\quad \sum_{i,j=1}^2 b_{ijt}^{(m)}(x,t)\,\xi_i\xi_j\leqslant b_2^m\sum_{i=1}^2\xi_i^2$$
$$h^{(m)}(x,t)\leqslant h_1^m,\quad h_t^{(m)}\leqslant h_2^m,\quad (x,t)\in Q^{(m)},$$
$$|A_m'(t)|\leqslant A_{2m},\quad t\in S,\quad m=1,2,$$

для всіх $\eta\in\mathbb{R}^4,\ \xi\in\mathbb{R}^2$.

Застосовуючи до (12) лему Гроноулла-Белмана, отримаємо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_T^{(m)}}\left((u_t^N)^2+x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}(u^N_{x_ix_j})^2\right)dx\leqslant B_4,$$

де B_4 – додатна стала, яка не залежить від N. Тому

$$\|u^N\|_{L^\infty((0;T);\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega))}\leqslant B_5,\quad \|u_t^N\|_{L^\infty((0;T);L^2(\Omega))}\leqslant B_5. \tag{13}$$

Нехай $S_k=(0;k)$. Згідно з оцінками (13) можна вибрати підпослідовність $\{u^{N,N}(x,t)\}$ таку, що для фіксованого k :

$$u^{N,N}\to v^k\quad *-\text{ слабко в } L^\infty(S_k;\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)),$$
$$u_t^{N,N}\to v_t^k\quad *-\text{ слабко в } L^\infty(S_k;L^2(\Omega)) \text{ при } N\to\infty.$$

Позначимо через u функцію, яка для кожного k в Q_k збігається з v^k. Очевидно, що u задовольняє включення (8). Далі за схемою, запропонованою в [3], легко довести, що u буде узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), (5), (6). □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (4), (A), (B), (C), (H), і, крім того,*

$$A_m(t)>0,\quad A''_m(t)\in L^\infty_{loc}(S),\quad m=1,2,\quad c_0\geqslant 0.$$

Тоді задача (1)–(3), (5), (6) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Доведемо, що відповідна однорідна задача з нульовими початковими умовами має лише тривіальний розв'язок. Приймемо

$$v(x,t)=\begin{cases}\int_t^\tau u\,d\theta, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ \quad 0, & \tau\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

Очевидно, що $v\in H^1_{\text{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega))$. Тому правильна рівність

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}\Bigg(-u_tv_tA_m-u_tvA'_m+\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l}v_{x_ix_j}A_m+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}u_{x_j}v_{x_i}A_m+h^{(m)}uvA_m+c^{(m)}u_tvA_m\Bigg)dx\,dt=0.$$

Використовуючи інтегрування частинами, одержимо

$$\sum_{m=1}^{2}\Bigg(\int\limits_{D_\tau^{(m)}}A_mu^2dx+\int\limits_{D_0^{(m)}}\Bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}z_{x_kx_l}(x,\tau)z_{x_ix_j}(x,\tau)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}z_{x_j}(x,\tau)z_{x_i}(x,\tau)\Bigg)A_mdx\Bigg)=$$
$$=\sum_{m=1}^{2}\Bigg(-\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}\Bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ijt}^{kl(m)}A_m(z_{x_kx_l}(x,\tau)-z_{x_kx_l}(x,t))(z_{x_ix_j}(x,\tau)-z_{x_ix_j}(x,t))+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(m)} A_m (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t)) +$$

$$+\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} A'_m (z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} A'_m (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t))\Big) dx\,dt -$$

$$-2\int_{Q_\tau^{(m)}} (c^{(m)} A_m - A'_m) u^2 dx\,dt +$$

$$+\int_{Q_\tau^{(m)}} (c_t^{(m)} A_m + c^{(m)} A'_m - A''_m - h^{(m)}) u (z(x,\tau) - z(x,t)) dx\,dt, \tag{14}$$

де $z(x,t) = \int_0^t u(x,\theta)\,d\theta$. Сталу τ виберемо з таких умов:

$$\frac{a_0^m \gamma_1}{\varkappa_1^m} + b_0^m - 2\tau(b_2^m A_{1m} + b_1^m A_{2m}) \geqslant 0, \quad \frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{2\varkappa_0^m} - 4\tau \geqslant \frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{4\varkappa_0^m},$$
$$\frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{2} - 2\tau(a_2^m A_{1m} + a_1^m A_{2m}) \geqslant \frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{4}, \quad m = 1, 2.$$

Тоді рівність (14) перепишеться у вигляді

$$\sum_{m=1}^{2} \int_{D_\tau^{(m)}} \Big(u^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_i x_j}^2\Big) dx \leqslant \frac{B_6}{B_5} \sum_{m=1}^{2} \int_{Q_\tau^{(m)}} \Big(u^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_i x_j}^2\Big) dx\,dt,$$

де $B_5 = \min\limits_{m=1,2} \min\Big\{A_{1m};\ A_{1m}\dfrac{a_0^m(1-\gamma_1)}{2}\Big\}$,

$$B_6 = \max_{m=1,2} \max\{(h_1^m)^2 + 2A_{2m} + 3(c_1^m A_{2m})^2 + 3(c_2^m A_{1m})^2 + 3(A_{3m})^2;$$
$$2(a_1^m A_{2m} + a_2^m A_{1m} + (b_1^m A_{2m} + b_2^m A_{1m})\varkappa_1^m + (h_1^m A_{2m} + h_2^m A_{1m})\varkappa_0^m)\},$$

а c_1^m, c_2^m, A_{3m} – такі додатні сталі, що задовольняють умови

$$c^{(m)}(x,t) \leqslant c_1^m, \quad c_t^{(m)}(x,t) \leqslant c_2^m, \quad |A''_m(t)| \leqslant A_{3m}, \quad (x,t) \in Q^{(m)}, \quad m = 1, 2.$$

Застосовуючи до цієї нерівності лему ([4], стор. 152), отримаємо, що

$$\sum_{m=1}^{2} \int_0^T \int_{D_t^{(m)}} \Big(u^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_i x_j}^2\Big) dx\,dt \leqslant 0$$

для довільного додатного T. Тобто $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in Q_T$. Отже, теорему 2 доведено. $\square$

Досліджуючи стійкість, вважатимемо, що $f^{(m)} \equiv 0$, в $Q^{(m)}$, $m = 1, 2$. Розглядається стійкість нульового розв'язку. Введемо позначення

$$\rho(u) = \left(\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{\Omega_m} \left(u_t^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_j}^2\right) dx\right)^{1/2}.$$

Означення 2. *Нульовий розв'язок задачі* (1)–(3), (5), (6) *називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що як тільки виконується умова $\rho(u(x,0)) < \delta$, тоді $\rho(u(x,t)) < \varepsilon$ для майже всіх $t \in S$.*

Теорема 3. *Нехай виконуються умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі для $f^{(m)} \equiv 0$ в $Q^{(m)}$, $m = 1, 2$, і, крім того,*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(m)} \eta_{ij} \eta_{kl} \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(m)} \xi_i \xi_j \leqslant 0, \quad h_t^{(m)} \leqslant 0, \quad A'_m \leqslant 0, \tag{15}$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^4$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $(x,t) \in Q^{(m)}$, $m = 1, 2$. Тоді нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим. Якщо ж, додатково

$$c_0 > 0, \tag{16}$$

то $\rho(u(x,t)) \leqslant B_{10} e^{-\mu t} \rho(u(x,0))$ для майже всіх $t \in S$, де μ і B_{10} – додатні сталі.

Доведення. Нехай $c_0 \geqslant 0$. Тоді згідно з умовами теореми з нерівності (12) одержимо

$$B_1 \rho^2(u^N(x,\tau)) \leqslant B_2 \rho^2(u_0^N),$$

де $\tau \in [0; T]$, а T – довільне додатне число. Отже, для достатньо великих N отримаємо

$$\rho(u^N(x,t)) \leqslant B_7 \rho(u_0^N) \leqslant 2B_7 \rho(u(x,0)), \quad t \in S.$$

Перейшовши до границі при $N \to \infty$, отримаємо

$$\rho(u(x,t)) \leqslant 2B_7 \rho(u(x,0))$$

майже для всіх $t \in S$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ вибираємо $\delta = \varepsilon / 2B_7$ і з умови $\rho(u(x,0)) < \delta$ випливає, що $\rho(u(x,t)) < \varepsilon$ для майже всіх $t \in S$.

Нехай $c_0 > 0$. Кожне рівняння системи (10) помножимо спочатку на відповідну функцію $C_{pt}^N e^{\mu t}$, а потім на $C_p^N \mu e^{\mu t}$ і підсумуємо по p від 1 до N. Тоді одержимо

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{\Omega_m} \Bigg((v_{tt} - 2\mu v_t + \mu^2 v) v_t A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} v_{x_k x_l} v_{x_i x_j t} A_m +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} v_{x_j} v_{x_i t} A_m + h^{(m)} v_t v A_m + c^{(m)} (v_t - \mu v) v_t A_m \Bigg) dx = 0,$$

де $v = u^N e^{\mu t}$, μ – додатна стала. Зінтегрувавши по t від 0 до τ і використовуючи умови (15), (16), отримаємо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\left(A_{1m}(v_t)^2+A_{1m}(a_0^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-c_1^m\mu\,\varkappa_0^m\,)\,x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}(v_{x_ix_j})^2\right)dx\leqslant$$
$$\leqslant B_8\rho^2(u^N(x,0)),\tag{17}$$

де $B_8=\max\limits_{m=1,2}\max\{A_{1m};\,A_{1m}(a_1^m+b_1^m\varkappa_1^m+(h_1^m+\mu^2+\mu)\varkappa_0^m)\}$, $\mu\leqslant\dfrac{c_0}{2}$. Перепишемо нерівність (17) для u^N, вибравши у цьому разі μ таким малим, щоб виконувались умови

$$a_0^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-\mu\varkappa_0^m(c_1+\frac{1}{\delta})>0,\quad m=1,2;\quad c_0-2\mu\geqslant 0.$$

Одержимо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\Bigg(A_{1m}(1-\mu\delta)(u_t^N)^2+A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-$$
$$-\mu(c_1+1/\delta)\varkappa_0^m)\,x_2^{\alpha_m}\sum_{i,j=1}^{2}(u^N_{x_ix_j})^2\Bigg)dx\leqslant B_8\rho^2(u_0^N)e^{-2\mu\tau}.$$

Нехай $B_9=\min\limits_{m=1,2}\min\{A_{1m}(1-\mu\delta),\ A_{1m}(a_0^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-\mu(c_1+1/\delta)\varkappa_0^m)\}$, де δ – така додатна стала, що $1-\mu\delta>0$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\rho^2(u^N(x,t))\leqslant\frac{B_8}{B_9}\,\rho^2(u_0^N)e^{-2\mu t}\leqslant\frac{2B_8}{B_9}\,\rho^2(u(x,0))e^{-2\mu t},$$

$t\in S$ для достатньо великих N. Перейшовши до границі при $N\to\infty$, одержимо

$$\rho(u(x,t))\leqslant B_{10}\rho(u(x,0))e^{-\mu t}$$

для майже всіх $t\in S$, де B_{10} – додатна стала, яка не залежить від t. Отже, теорему 3 доведено. □

Список використаної літератури

1. *Лавренюк С.П.* Об устойчивости поперечных колебаний стержня с острым краем / *С.П. Лавренюк* // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – Вип. 4. – С. 62-65.
2. *Онишкевич Г.М.* Стійкість за Ляпуновим рівняння типу коливання пластинки з розривними коефіцієнтами / *Г.М. Онишкевич* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 45. – С. 5-16.
3. *Онишкевич Г.М.* Стійкість за Ляпуновим рівняння типу коливання пластинки з гострим краєм / *Г.М. Онишкевич* // Деп. в ДНТБ України №2020. – 1995.
4. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики / *О.А. Ладыженская.* – М.: Наука, 1973. – 408 с.

Стаття: надійшла до редакції 27.06.2013
прийнята до друку 16.10.2013

THE CONDITIONS OF EXISTENCE, UNIQUENESS, AND LYAPUNOV STABILITY OF SOLUTION TO EQUATION OF TYPE OF PLATE OSCILLATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Galyna BARABASH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

The mixed problem the equation of type of plate oscillation with gaped coefficients which degenerate on the part of boundary is considered. The conditions of existence and singularity of the generalized solution of the problem and conditions of stability by Liapunov of the zero solution are obtained.

Key words: equation of type of plate oscillation, generalized solution, Galerkin's method, stability by Lyapunov.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ЗА ЛЯПУНОВЫМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Галина БАРАБАШ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Рассмотрено смешаную задачу для уравнения типа колебания пластинки с вырождающимися на части границы коэффициентами. Получены условия существования, единственности обобщённого решения этой задачи, а также условия устойчивости за Ляпуновым нулевого её решения.

Ключевые слова: уравнения типа колебания пластинки, обобщённое решение, метод Галёркина, устойчивость за Ляпуновым.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 14–26
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 14–26

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ АНІЗОТРОПНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Микола БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Розглянуто еліптично-параболічні анізотропні рівняння вищих порядків зі змінними показниками нелінійності. Знайдено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаної задачі з умовою Діріхле для таких рівнянь та отримано оцінки цих розв'язків.

Ключові слова: еліптично-параболічні рівняння, анізотропні рівняння вищих порядків, змінні показники нелінійності.

1. Вступ. Нелінійні еліптично-параболічні рівняння зі сталими показниками нелінійності досліджувало багато математиків (див. [1]–[7]). Сьогодні активно розвивається теорія нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Зауважимо, що узагальнені розв'язки таких рівнянь є елементами узагальнених просторів Соболєва. Серед праць, присвячених цій тематиці, можна назвати [8]–[20]. Зокрема, в [20] досліджено відповідні задачі для еліптично-параболічних рівнянь другого порядку зі змінними показниками нелінійності. Праці, які стосуються нелінійних еліптично-параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності, нам невідомі.

Ми вивчаємо проблему існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаної задачі для нелінійних еліптично-параболічних рівнянь вищих порядків. Зазначимо, що для доведення існування таких розв'язків використали комбінацію методів регуляризації та Гальоркіна. Наша праця складається з двох частин: у першій частині сформульовано задачі та основний результат, а в другій – обґрунтовано основний результат.

2. Формулювання задачі та основного результату. Нехай n, m – натуральні числа і M – підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$. Позначимо через N кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N

дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$). Тут і далі $\widehat{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів. Приймемо $|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, на якому введена норма $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Вважатимемо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω кусково-гладка, і позначимо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Нехай $T > 0$ – яке-небудь фіксоване число. Приймемо $Q := \Omega \times (0, T),\ \Sigma := \Gamma \times (0, T)$.

Припустимо, що

($\mathcal{B}$) $b : \Omega \to [0, +\infty)$ – вимірна й обмежена функція, причому $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ – область.

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

та початкову умову

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega_0, \tag{3}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ f_\alpha : Q \to \mathbb{R}\ (|\alpha| \in M),\ u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – задані функції, які задовольняють певні умови, про що буде сказано пізніше. Тут і далі для функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ позначаємо через δv впорядкований набір з похідних $D^\alpha v \equiv \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} v$ функції v порядків $|\alpha| \in M$ (правило впорядкування таке саме, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$).

Сформульовану вище *мішану задачу для рівняння* (1) *з крайовими умовами* (2) *і початковою умовою* (3) коротко називатимемо *задачею* (1)–(3).

Ми вивчатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)–(3), а для цього введемо необхідні позначення та зробимо відповідні припущення щодо вихідних даних цієї задачі.

Спочатку введемо потрібні нам функційні простори. Нехай $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Під $L_{r(\cdot)}(\Omega)$ розумітимемо підпростір простору $L_1(\Omega)$, елементи якого задовольняють умову $\int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\, dx < +\infty$, з нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} := \inf\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega |v(x)/\lambda|^{r(x)}\, dx \leqslant 1\}$. Простір $L_{r(\cdot)}(\Omega)$ є банаховим і називається узагальненим простором Лебега (детальніше див., наприклад, [8]). Введемо ще простір $W_s^m(\Omega) := \{v \in L_s(\Omega) \mid D^\alpha v \in L_s(\Omega)\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m\}$, який є банаховим з нормою $\|v\|_{W_s^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha v\|_{L_s(\Omega)}$, де $s \geqslant 1$ – яке-небудь число.

Нехай $p = (p_\alpha : |\alpha| \in M)$ – впорядкований набір вимірних на Ω функцій p_α (пронумерованих так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$), для яких виконується умова

$(\mathcal{P})$ $p_{\widehat{0}}^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_0} p_{\widehat{0}}(x) \geqslant 2$, $\quad p_\alpha^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) > 1$, $\quad p_\alpha^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) < +\infty$.
Через $p' = (p'_\alpha : |\alpha| \in M)$ позначатимемо впорядкований набір функцій таких, що $1/p_\alpha(x) + 1/p'_\alpha(x) = 1$ $(|\alpha| \in M)$ для м.в. $x \in \Omega$.

Нехай $W^m_{p(\cdot)}(\Omega) := \{v \in L_1(\Omega) \,|\, D^\alpha v \in L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega) \ \forall\alpha,\, |\alpha| \in M\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{W^m_{p(\cdot)}(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha v\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$ розуміємо замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|v\|_{W^m_{p(\cdot)}(\Omega)}$. Для зручності і ясності викладення матеріалу далі приймемо $\mathbb{V}_p := \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$. Введемо ще простір $W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ як підпростір простору $L_1(Q)$, складений з тих функцій h, для яких $D^\alpha h \in L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)$, якщо $|\alpha| \in M$, з нормою $\|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)}$. Через $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ позначимо замикання простору

$$\widetilde{C}^{m,0}(\overline{Q}) := \{h \in C(\overline{Q}) \,|\, D^\alpha h \in C(\overline{Q}) \ \forall\alpha, |\alpha| \leqslant m;\ D^\alpha h|_\Sigma = 0 \ \forall\alpha, |\alpha| \leqslant m-1\}$$

за нормою $\|v\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)}$.

Нехай $\widetilde{b}(x) = b(x)$, $q(x) = 2$, якщо $x \in \Omega_0$, і $\widetilde{b}(x) = 1$, $q(x) = 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Позначимо через $H^b(\Omega)$ лінійний простір, елементами якого є функції w такі, що $w = \widetilde{b}^{-1/2} v$, де $v \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$. Простір $H^b(\Omega)$ з півнормою $\|w\|_{H^b(\Omega)} = (\int_\Omega b(x)|w(x)|^2 dx)^{1/2}$ є повним півнормованим простором. Легко переконатися, що $H^b(\Omega)$ є поповненням лінійного простору $\mathbb{V}_p$ за півнормою $\|\cdot\|_{H^b(\Omega)}$ (див. [2, I.3.3]).

Введемо простір $C([0,T]; H^b(\Omega))$ як лінійний простір функцій $h : [0,T] \to H^b(\Omega)$ таких, що $b^{1/2} h \in C([0,T]; L_2(\Omega))$, і півнорму $\|h\|_{C([0,T];H^b(\Omega))} := \max\limits_{t\in[0,T]} \|h(\cdot,t)\|_{H^b(\Omega)}$ на ньому, з якою він є повним півнормованим простором.

Визначимо простір

$$\mathbb{U}^b_p := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap C([0,T]; H^b(\Omega))$$

і норму $\|h\|_{\mathbb{U}^b_p} := \|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)} + \|h\|_{C([0,T];H^b(\Omega))}$ на ньому, з якою він є банаховим.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$ визначених на $Q \times \mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють такі чотири умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного α $(|\alpha| \in M)$ функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто, для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$, будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ отримаємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta|\in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_\infty(Q)$, $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\,\cdot\,)}(Q)$;

($\mathcal{A}_3$) для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant 0,$$

причому в цій нерівності можна замінити знак "$\geqslant$" на знак "$>$" для м.в. $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, якщо $\xi_{\widehat{0}} \neq \eta_{\widehat{0}}$;

($\mathcal{A}_4$) існують стала $K > 0$ та невід'ємна функція $g \in L_1(Q)$ такі, що для будь-яких ξ з $\mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \geqslant K \sum_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)} - g(x,t).$$

Нехай $\mathbb{F}_{p'}$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і функції f_α з будь-якого такого набору належать простору $L_{p'_\alpha(\,\cdot\,)}(Q)$ для кожного $\alpha,\ |\alpha| \in M$.

Означення 1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_p$, $u_0 \in H^b(\Omega)$. *Узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3) *називається функція* $u \in \mathbb{U}_p^b$, *яка задовольняє (початкову) умову*

$$\|u(\cdot,0) - u_0(\cdot)\|_{H^b(\Omega)} = 0 \tag{4}$$

та рівність

$$\int\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u)\, D^\alpha v\, \varphi - b(x)\, u\, v\, \varphi' \Big\}\, dxdt = \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x,t)\, D^\alpha v\, \varphi\, dxdt \tag{5}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p,\ \varphi \in C_0^1(0,T)$.

Основним результатом нашої праці є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_p$, $u_0 \in H^b(\Omega)$. *Тоді задача* (1)–(3) *має єдиний узагальнений розв'язок і він задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)} \Big)\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big(\iint\limits_Q \Big(g(x,t) + \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)} \Big)\, dxdt + \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\,dx \Big), \tag{6}$$

де $C_1 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* K *і* $p_\alpha^-(|\alpha| \in M)$.

3. Обґрунтування основного результату. Спочатку сформулюємо потрібне нам допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* b *задовольняє умову* ($\mathcal{B}$) *і* $w \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ *така, що виконується тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ \Big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v \Big) \varphi - bwv\varphi' \Big\}\, dxdt = 0, \quad v \in \mathbb{V}_p, \quad \varphi \in C_0^1(0,T), \tag{7}$$

для деяких $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha| \in M)$. *Тоді* $w \in C\big([0,T]; H^b(\Omega)\big)$ *і для будь-яких* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in \mathbb{V}_p$, *та* $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, *отримаємо*

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega b(x)w(x,t_2)v(x)\,dx - \theta(t_1)\int\limits_\Omega b(x)w(x,t_1)v(x)\,dx +$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{\Big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v\Big)\theta - bwv\theta'\Big\}\,dxdt = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\|w(\cdot,t_2)\|_{H^b(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta(t_1)\|w(\cdot,t_1)\|^2_{H^b(\Omega)} - \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\|w(\cdot,t)\|^2_{H^b(\Omega)}\theta'(t)\,dt +$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha w\Big)\theta\,dxdt = 0. \qquad (9)$$

Доведення цієї леми подібне до доведення леми 1 [12] і ми його опускаємо.

Далі для зручності та скорочення записів будемо використовувати позначення

$$a_\alpha(w)(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta w(x,t)), \quad (x,t)\in Q, \quad |\alpha|\in M.$$

Доведення теореми. Використаємо комбінацію методів регуляризації та Фаедо-Гальоркіна. Нехай $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ – повна лінійно незалежна система функцій у просторі $\mathbb{V}_p$. Для довільного $k\in\mathbb{N}$ позначимо $V_k := \{d_1w_1 + \ldots + d_kw_k \,\big|\, d_1,\ldots,d_k \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, що замикання $\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} V_k$ за нормою простору $\mathbb{V}_p$ збігається з цим простором, і $\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} V_k$ є щільною множиною в просторі $H^b(\Omega)$.

Виберемо послідовність $\big\{u_{0,k}\big\}_{k=1}^\infty$ таку, що $u_{0,k}\in V_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$ і

$$\|u_0 - u_{0,k}\|_{H^b(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (10)$$

Зауважимо, що для кожних $k\in\mathbb{N}$, $\eta\in(0,1]$ і майже всіх $x\in\Omega$ одержимо

$$\Big|b^{1/2}(x) - \Big(b(x)+\eta\Big)^{1/2}\Big|^2\Big|u_{0,k}(x)\Big|^2 \quad\le\quad 4(b(x)+1)\Big|u_{0,k}(x)\Big|^2.$$

Отож, враховуючи теорему про граничний перехід під знаком інтеграла, для кожного фіксованого $k\in\mathbb{N}$ здобуваємо

$$\Big\|b^{1/2}u_{0,k} - \Big(b+\eta\Big)^{1/2}u_{0,k}\Big\|_{L^2(\Omega)} \underset{\eta\to0+}{\longrightarrow} 0.$$

Звідси випливає існування послідовності додатних чисел $\big\{\eta_k\big\}_{k=1}^\infty$ такої, що $\eta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ і

$$\big\|b^{1/2}u_{0,k} - \big(b+\eta_k\big)^{1/2}u_{0,k}\big\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (11)$$

Приймемо

$$b_k(x) := b(x)+\eta_k, \quad x\in\Omega, \quad k\in\mathbb{N}. \qquad (12)$$

Отож, на підставі (10)–(12) отримаємо

$$\left\| b^{1/2}u_0 - b_k^{1/2}u_{0,k} \right\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{13}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ шукаємо гальоркінське наближення u_k у вигляді

$$u_k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{k,i}(t) w_i(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{14}$$

де $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,k}$ – абсолютно неперервні на $[0,T]$ функції такі, що правильні рівності

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ b_k(x) u_{k,t} w_j + \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(u_k)\, D^\alpha w_j \Big\} dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha D^\alpha w_j \, dx, \quad t \in [0,T], \quad j = \overline{1,k}, \tag{15}$$

$$u_k(x,0) = u_{0,k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{16}$$

Співвідношення (15), (16) можна трактувати як задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,k}$. Систему рівнянь (15) можна звести до нормальної форми. Отож, на підставі теореми про існування, єдиність і продовження розв'язку цієї задачі Коші (див., наприклад, [21]) існує єдиний глобальний її розв'язок $c_{1,k}, \ldots.., c_{k,k}$ і він визначений на деякому проміжку $[0, T_k\rangle$, де $T_k \le T$. Тут і далі дужка "$\rangle$" означає або "$)$" або "$]$". Отже, функція u_k визначена на множині $\overline{\Omega} \times [0, T_k\rangle$. Пізніше ми доведемо оцінки, з яких буде випливати рівність $[0, T_k\rangle = [0, T]$.

Тепер отримаємо відповідні оцінки членів послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Домножимо для кожного $j \in \{1, \ldots, k\}$ рівність системи (15) з номером j на $c_{k,j}$ і підсумуємо ці рівності. Отриману рівність проінтегруємо за $t \in [0,\tau] \subset [0, T_k\rangle$ і, використовуючи (14), (16) та формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2 \, dx +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(u_k) D^\alpha u_k \Big\} \, dxdt = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha D^\alpha u_k \Big\} \, dxdt. \tag{17}$$

Далі нам буде потрібна нерівність Юнга у формі:

$$ab \le \varepsilon |a|^{r(x)} + \varepsilon^{-\frac{1}{r^- - 1}} |b|^{r'(x)}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{18}$$

для майже всіх $x \in \Omega$, де $r \in L^\infty(\Omega)$, $r^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, $r'(x) := r(x)/(r(x)-1)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

З (17), використовуючи умову $(\mathcal{A}_4)$ і нерівність (18) з достатньо малим $\varepsilon \in (0,1)$ (наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{1, K\} > 0$), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx + K\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k(x,t)|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt \le$$
$$\le C_2\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt + 2\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} g(x,t)\,dxdt +$$
$$+\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2\,dx, \quad \tau\in[0,T_k\rangle, \tag{19}$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка залежить лише від K і $p_\alpha^-(|\alpha|\in M)$.

На підставі (13) можна зробити висновок, що послідовність $\big\{\int_\Omega b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2\,dx\big\}_{k=1}^{+\infty}$ є обмеженою. Отже, з (19) одержимо такі оцінки

$$\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx \le C_3, \tag{20}$$

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k(x,t)|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt \le C_4, \tag{21}$$

де $\tau\in[0,T_k\rangle$ – довільне, а C_3, C_4 – додатні сталі, які не залежать від τ та k. На підставі (20) отримаємо, зокрема, що $[0,T_k\rangle = [0,T]$. Отже, оцінки (20), (21) правильні для кожного $\tau\in[0,T]$.

З умови $(\mathcal{A}_2)$ та оцінки (21), використовуючи нерівність Гельдера, отримаємо оцінку

$$\iint\limits_{Q} |a_\alpha(u_k)(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt \le C_5, \quad |\alpha|\in M, \tag{22}$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка не залежить від k.

Оскільки простори $L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)$, $L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha|\in M)$ рефлексивні (див. [8, с. 600]), то з оцінок (20), (21) і (22) отримуємо існування підпослідовності послідовності $\{u_k\}$ (цю підпослідовність позначатимемо так само як і всю послідовність), функцій $u\in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$, $\widetilde{u}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ і $\chi_\alpha\in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha|\in M)$ таких, що

$$b_k^{1/2}u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad * -\text{слабко в} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{23}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q), \tag{24}$$

$$a_\alpha(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_\alpha \quad \text{слабко в} \quad L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q), \quad |\alpha|\in M. \tag{25}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Для цього спочатку зазначимо, що

$$b_k^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2} \text{ сильно в } L_2(\Omega) \text{ і майже всюди на } \Omega. \tag{26}$$

Тепер доведемо, що

$$\tilde{u} = b^{1/2}u \quad \text{майже всюди на} \quad Q. \tag{27}$$

Справді, для довільної функції $\psi \in C(\overline{Q})$ на підставі (23) отримаємо

$$\iint\limits_Q b_k^{1/2} u_k \psi dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q \tilde{u}\psi\, dxdt. \tag{28}$$

Беручи до уваги (26), легко довести, що $b_k^{1/2}\psi \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} b^{1/2}\psi$ in $L_{p_{\widehat{0}}'(\cdot)}(Q)$. Отож, враховуючи (24), одержимо

$$\iint\limits_Q u_k b_k^{1/2} \psi\, dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q u b^{1/2}\psi\, dxdt. \tag{29}$$

Співвідношення (28), (29) дають підставу стверджувати, що для будь-якої $\psi \in C(\overline{Q})$ правильна рівність

$$\iint\limits_Q \tilde{u}\psi\, dxdt = \iint\limits_Q b^{1/2}u\psi\, dxdt,$$

а отже, правильною є рівність (27).

Виберемо довільно і зафіксуємо числа $j, k \in \mathbb{N}$ такі, що $k \geq j$. Домножимо рівність системи (15) з номером j на функцію $\theta \in C^1([0,T])$ таку, що $\theta(T) = 0$, і проінтегруємо отриману рівність за $t \in [0,T]$, використаємо формулу інтегрування частинами. Тоді, переходячи до границі при $k \to \infty$ і враховуючи (13), (16), (23)–(27), отримаємо

$$-\theta(0)\int\limits_Q b(x)u_0(x)w_j(x)\, dx - \iint\limits_Q \big(buw_j\big)\theta'\, dxdt +$$
$$+\iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha w_j\Big)\theta\, dxdt = 0. \tag{30}$$

З цієї рівності випливає, що для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$, правильна рівність

$$-\theta(0)\int\limits_Q b(x)u_0(x)v(x)dx - \iint\limits_Q \big(buv\big)\theta' dxdt + \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v\Big)\theta dxdt = 0. \tag{31}$$

Зауважимо таке: якщо прийняти $\theta = \varphi \in C_0^1(0,T)$ в (31), то одержимо рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{\Big(\sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v\Big)\varphi - \big(buv\big)\varphi'\Big\}\, dxdt = 0 \tag{32}$$

для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_0^1(0,T)$. На підставі леми і (32) отримаємо, що

$$u \in C\big([0,T]; H^b(\Omega)\big) \tag{33}$$

і для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$ правильна рівність

$$-\theta(0)\int\limits_\Omega b(x)u(x,0)v(x)dx - \iint\limits_Q buv\theta' dxdt + \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v\Big)\theta dxdt = 0. \tag{34}$$

З (31) і (34) отримуємо (4). Тоді на підставі (24) і (33) можемо зробити висновок про те, що $u \in \mathbb{U}_p^b$.

Враховуючи (32), для доведення тотожності (5) достатньо з'ясувати, що правильна рівність

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\chi_\alpha(x,t)D^\alpha v(x)\Big\}\,dx = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u)(x,t)D^\alpha v(x)\Big\}\,dx \tag{35}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$ і майже всіх $t \in (0,T)$. Для цього використаємо метод монотонності (див. [22]). Приймемо довільну функцію $w \in W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$. На підставі умови $(\mathcal{A}_3)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ одержимо

$$W_k := \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(u_k) - a_\alpha(w))(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\Big\}\theta\, dxdt \ge 0,$$

де $\theta(t) = 1 - t/T$, $t \in \mathbb{R}$. Звідси отримаємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[a_\alpha(u_k)D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\big]\Big\}\,\theta dxdt \ge 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Для кожного $j \in \{1,\dots,k\}$ помножимо рівність системи (15) з номером j на $c_{k,j}\theta$ і підсумуємо отримані рівності за j. Результуючу рівність інтегруємо за $t \in [0,T]$ і використовуємо формулу інтегрування частинами та (14) і (16). У підсумку отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt -$$

$$- \frac{1}{2T}\iint\limits_Q b_k|u_k|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\, dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

На підставі (36) і (37) одержуємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt - \frac{1}{2T}\iint\limits_Q b_k|u_k|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\, dx -$$

$$- \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[a_\alpha(u_k)D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\big]\Big\}\theta\, dxdt \ge 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Із співвідношень (23), (27) випливає

$$\lim_{k\to\infty} \inf \iint_Q b_k |u_k|^2\, dxdt \geqslant \iint_Q b|u|^2\, dxdt. \tag{39}$$

На підставі (13), (24), (25) і (39), з (38) отримаємо

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \sup W_k \le \iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u \Big\} \theta dxdt - \frac{1}{2T} \iint_Q b|u|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_\Omega b|u_0|^2 dx -$$

$$- \iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \big[\chi_\alpha D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u - D^\alpha w) \big] \Big\} \theta\, dxdt. \tag{40}$$

З (32), використовуючи лему (див. (9)) і (4), одержимо

$$\iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \chi_\alpha D^\alpha u \Big\} \theta\, dxdt = \iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u \Big\} \theta\, dxdt -$$

$$- \frac{1}{2T} \iint_Q b|u|^2\, dxdt + \frac{1}{2} \int_\Omega b|u_0|^2\, dx. \tag{41}$$

Тоді на підставі (40) і (41) отримуємо

$$\iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - a_\alpha(w))(D^\alpha u - D^\alpha w) \Big\} \theta\, dxdt \ge 0. \tag{42}$$

Підставивши $w = u - \lambda v \varphi$ в (42), де $v \in \mathbb{V}_p$, $\varphi \in C_0^1(0,T)$, $\lambda > 0$, і поділивши отриману нерівність на λ, одержимо

$$\iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - a_\alpha(u - \lambda v\varphi)) D^\alpha v \Big\} \theta \varphi\, dxdt \ge 0. \tag{43}$$

Переходячи в (43) до границі при $\lambda \to 0+$ на підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_2)$ та теореми про граничний перехід під знаком інтеграла, (див. [23, с. 648]), отримуємо

$$\iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - a_\alpha(u)) D^\alpha v \Big\} \theta \varphi\, dxdt = 0,$$

де $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_0^1(0,T)$ – довільні функції. Отож, рівність (35) правильна.

З (32), беручи до уваги (35), отримаємо (5). Отже, ми довели, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Тепер доведемо оцінку (6). Нехай u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). З (5), використовуючи лему з $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0,T]$ (див. (9)), отримаємо

$$\frac{1}{2} \int_\Omega b(x)|u(x,\tau)|^2\, dx + \int_0^\tau \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u) D^\alpha u \Big\}\, dxdt =$$

$$= \int_0^\tau \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u \Big\}\, dxdt + \int_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\, dx.$$

Звідси подібно до того як ми доводили нерівність (19), враховуючи ($\mathcal{A}_4$), (18), одержуємо (6).

Тепер доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3). Зробимо це методом від супротивного. Нехай u_1 і u_2 – два узагальнені розв'язки цієї задачі. Розглянемо різницю між рівністю (5) з $u = u_2$ і рівністю (5) з $u = u_1$. На підставі леми з $w = u_1 - u_2$, $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0, T]$, одержуємо (див. (9))

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b(x)|u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)|^2\, dx +$$

$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2))(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2)\Big\}\, dxdt = 0, \quad \tau \in (0,T].$$

Ця рівність і умова ($\mathcal{A}_3$) дають підстави стверджувати, що правильні такі дві рівності:

$$b|u_1 - u_2|^2 = 0, \qquad \sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2))(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2) = 0 \quad \text{майже скрізь на} \quad Q.$$

З першої рівності випливає, що $w(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in \Omega_0 \times (0,T)$. Друга рівність і умова ($\mathcal{A}_3$) дають змогу зробити висновок, що $w(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in (\Omega \setminus \Omega_0) \times (0,T)$. Отож, $w(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, тобто $u_1 = u_2$. Отримане протиріччя доводить наше твердження. $\square$

Список використаної літератури

1. *Showalter R.E.* Degenerate evolution equations and applications / *R.E. Showalter* // Indiana University Mathematics Journal. – 1974. – Vol. 23, №8. – P. 655-677.
2. *Showalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations / *R.E. Showalter* // Monographs and Studies in Mathematics (Monographs in differential equations), Vol. 1, Pitman, London-San Francisco, Calif.-Melbourne, 1977, xii+196 p.
3. *Alt H.W.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations / *H.W. Alt, S. Luckhaus* // Mathematische Zeitschrift. – 1983. – Vol. 183. – P. 311-341.
4. *Kuttler K.L.* The Galerkin method and degenerate evolution equations / *K.L. Kuttler, Jr.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1985. – Vol. 107. – P. 396-413.
5. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations / *R.E. Showalter* // Mathematical surveys and monographs, 49. – Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
6. *Favini A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / *A. Favini, A. Yagi.* – New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1999.
7. *Andreu F.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions / *F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón, J. Toledo* // Interfaces and Free Boundaries. – 2006. – Vol. 8, №4. – P. 447-479.
8. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ / *O. Kováčik, J. Rákosník* // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1991. – Vol. 41, №116. – P. 592-618.
9. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ / *O. Kováčik* // Fasciculi Mathematici. – 1995. – Vol. 25. – P. 87-94.
10. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory / *M. Růžička* // Lecture Notes in Mathematics, 1748. – (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

11. *Buhrii O.M.* On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration / *O.M. Buhrii, S.P. Lavrenyuk* // Ukrainian Math. Journal. – 2001. – Vol. 53, №7. – P. 1027-1042 (Переклад з Укр. мат. журн. – 2001. – Vol. 53, № 7. – С. 867-878).
12. *Бокало М.М.* Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *М.М. Бокало, І.Б. Паучок* // Матем. студії. – 2006. – Vol. 24, № 1. – С. 25-48.
13. *Bokalo M.* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces / *M. Bokalo, O. Domanska* // Матем. студії. – 2007. – Vol. 28, № 1. – С. 77-91.
14. *Антонцев С.* Затухание решений параболических уравнений с переменными показателями нелинейности / *С. Антонцев, С. Шмарев* // Научные записки Математического института имени Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 11-21.
15. *Алхутов Ю.* Параболические уравнения с переменными показателями нелинейности / *Ю. Алхутов, С. Антонцев, В. Жиков* // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2009. – Т. 6. – С. 23-50.
16. *Fu Y.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth / *Y. Fu, N. Pan* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2010. – Vol. 362. – P. 313-326.
17. *Mihailescu M.* Homoclinic solutions of difference equations with variable exponents / *M. Mihailescu, V. Radulescu, S. Tersian* // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 2011. – Vol. 38. – P. 277-289.
18. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
19. *Buhrii O.M.* Some parabolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity: unique solvability and comparison theorems / *O.M. Buhrii, Kh.P. Hlynyans'ka* // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 174, №2. – P. 169-189 (Translated from Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya. – 2009. – Vol. 52, №4. – P. 42-57).
20. *Bokalo M.M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations / *M.M. Bokalo* // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 178, №1. – P. 41-64 (Translated from Ukrains'kyi Matematychnyi Visnyk. – 2011. – Vol. 8, №1. – P. 55-86).
21. *Coddington E.A.* Theory of ordinary differential equations / *E. A. Coddington, N. Levinson.* – New York; Toronto; London: McGraw-Hill book company, 1955.
22. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Ж.-Л. Лионс.* – М.: Мир, 1972.
23. *Evans L.C.* Partial differential equations / *L.C. Evans* // Graduate Studies in Mathematics. – Vol. 19. Amer. Math. Soc.

Стаття: надійшла до редакції 04.12.2013
прийнята до друку 11.12.2013

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE ELLIPTIC-PARABOLIC ANISOTROPIC HIGHER ORDER EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Mykola BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

The elliptic-parabolic anisotropic higher order equations with variable exponents of nonlinearity are considered. The conditions of existence and uniqueness of generalized solutions of the initial-boundary value problem with condition Dirichlet to such equations are obtained. Also the estimates of this solutions are obtained.

Key words: elliptic-parabolic equation, anisotropic higher order equation, variable exponents of nonlinearity.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Николай БОКАЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Рассмотрено эллиптически-параболические анизотропные уравнения высших порядков с переменными показателями нелинейности. Найдены условия существования и единственности обобщенных решений смешанной задачи с условием Дирихле для таких уравнений и получены оценки этих решений.

Ключевые слова: эллиптически-параболические уравнения, анизотропные уравнения высших порядков, переменные показатели нелинейности.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 27–34
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 27–34

УДК 517.53

УМОВА ЗАСТОСОВНОСТІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ R-ПОРЯДКУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Тарас ГЛОВА[1], Петро ФІЛЕВИЧ[2]

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060
[2]*Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,*
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківсьск, 76025
e-mail: hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Нехай (λ_n) – невід'ємна зростаюча до $+\infty$ послідовність. Доведено, що умова $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, є необхідною для того, щоб R-порядок $R(F)$ кожного цілого ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ можна було обчислити за формулою

$$R(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Достатність цієї умови раніше довів К. Сугімура.

Ключові слова: степеневий ряд, ціла функція, максимум модуля, порядок, формула Коші-Адамара, ряд Діріхле, R-порядок.

1. Вступ. Для трансцендентної цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z = re^{i\theta}, \tag{1}$$

нехай $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ – її максимум модуля. Важливою характеристикою зростання функції f є її порядок

$$\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln r}.$$

Добре відома класична формула Коші-Адамара

$$\rho(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|},$$

яка дає змогу визначити порядок за послідовністю $(|a_n|)$ модулів тейлорових коефіцієнтів функції f.

Нехай Λ – клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ через $S(\lambda)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{2}$$

які не зводяться до експоненціального полінома. Для ряду (2) його максимум модуля визначимо за рівністю $M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| \ : \ \mathrm{Re}\, s = \sigma\}$. Як відомо, величину

$$R(F) = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma}$$

називатимемо R-порядком (порядком за Ріттом) ряду (2).

Поняття лінійного порядку цілого ряду Діріхле є узагальненням поняття порядку цілої функції, зображеної степеневим рядом. Справді, якщо в степеневому ряді (1) зробити заміну $z = e^s$, то отримаємо ряд Діріхле (2) з показниками $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, і за такої заміни одержимо $\sigma = \ln r$, $M(\sigma, F) = M(r, f)$, $R(F) = \rho(f)$, а для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ правильним буде аналог формули Коші-Адамара

$$R(F) = K(F) := \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}. \tag{3}$$

Ж. Рітт [1] довів, що формула (3) залишатиметься правильною для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ у випадку довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$, що задовольняє умову

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} < +\infty.$$

Сильніший результат, який сформулюємо у вигляді теореми, отримав К. Сугімура [2].

Теорема А. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Умова*

$$\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n), \quad n \to \infty, \tag{4}$$

є достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ *була правильна рівність* $R(F) = K(F)$.

Крім того, К. Сугімура [2] довів таку теорему.

Теорема В. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Умова*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n} = 0 \tag{5}$$

є необхідною для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ *була правильна рівність* $R(F) = K(F)$.

Отже, якщо умова (5) не виконується, то існує ряд Діріхле $F \in S(\lambda)$, для якого $R(F) \neq K(F)$. Насправді, для цього ряду $R(F) > K(F)$, оскільки завжди $R(F) \geq K(F)$ (див., наприклад, [3, с. 25-26]). Зауважимо таке: якщо $K(F) = +\infty$, то й $R(F) = +\infty$, тобто $R(F) = K(F)$.

Ф.Й. Гече [4] розглянув таке запитання: чи можна умову (4) в теоремі А замінити умовою (5), тобто чи є умова (5) необхідною і достатньою для того, щоб для

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ була правильна рівність $R(F) = K(F)$? Ф.Й. Гече [4] довів таку теорему, з якої випливає негативна відповідь на розглянуте ним запитання.

Теорема C. *Для довільної спадної до* 0 *послідовності* (ε_n) *існують послідовність* $\lambda \in \Lambda$, *ряд Діріхле* $F \in S(\lambda)$ *і послідовність натуральних чисел* (n_k) *такі, що*

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} = \varepsilon_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad R(F) > K(F).$$

Наша мета – довести, що шуканою необхідною і достатньою умовою є, насправді, умова (4). Цей факт випливає з такої теореми (і теореми A).

Теорема 1. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Якщо умова* (4) *не виконується, тобто*

$$\delta(\lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n} > 0,$$

то існує ряд Діріхле $F \in S(\lambda)$ *такий, що* $R(F) > K(F)$.

Зазначимо, що теорему A пізніше передоводили К. Танака [5] і А.Г. Аспейтія [6]. Найзагальніші результати щодо опису зростання цілих рядів Діріхле вигляду (2) в термінах послідовності $(|a_n|)$ отримав М.М. Шеремета [3]. Зокрема, з результатів М.М. Шеремети (див. в [3] наслідок 2 з теореми 1.11 і доведення наслідку 2 з теореми 1.12) випливає таке узагальнення теореми A.

Теорема D. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Якщо* $\delta(\lambda) < +\infty$, *то для кожного ряду Діріхле* $F \in S(\lambda)$ *такого, що* $K(F) < \frac{1}{\delta(\lambda)}$, *правильна нерівність*

$$R(F) \le \frac{K(F)}{1 - \delta(\lambda)K(F)}.$$

Отже, якщо $K(F) < \frac{1}{\delta(\lambda)}$ для деякого ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$, то за теоремою D величини $K(F)$ і $R(F)$ є скінченними одночасно. Така ситуація загалом неможлива, якщо $K(F) \ge \frac{1}{\delta(\lambda)}$.

Теорема 2. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Якщо* $\delta(\lambda) > 0$, $K \in \left[\frac{1}{\delta(\lambda)}, +\infty\right)$, *а* H *– зростаюча до* $+\infty$ *на* $(-\infty, +\infty)$ *функція, то існує ряд Діріхле* $F \in S(\lambda)$ *такий, що* $K(F) = K$ *і*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{H(\sigma)} = +\infty. \tag{6}$$

Теорема 1 є наслідком з теореми 2 (достатньо вибрати $H(\sigma) = \exp(\sigma^2)$).

Теорема 2, з одного боку, свідчить про істотність умови $K(F) < \frac{1}{\delta(\lambda)}$ в теоремі D. З іншого боку, з цієї теореми можна зробити такий висновок: якщо $\delta(\lambda) > 0$, то ряди Діріхле $F \in S(\lambda)$ можуть зростати як завгодно швидко навіть тоді, коли величина $K(F)$ для них залишається скінченною.

2. Допоміжні результати. Сформулюємо декілька лем, якими скористаємось для доведення теореми 2.

Через Ω позначимо клас додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією.

Нехай $\Phi \in \Omega$. Тоді Φ – опукла на $(-\infty, +\infty)$ функція і

$$\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma} \to +\infty, \quad \sigma \to +\infty.$$

З останнього співвідношення випливає, що для кожного $x > 0$ визначеною є функція

$$\widetilde{\Phi}(x) = \max\{\sigma x - \Phi(\sigma) \ : \ \sigma \in (-\infty, +\infty)\},$$

яка називається (див., наприклад, [8, с. 186]) спряженою за Юнгом з функцією Φ. Функція

$$\widehat{\Phi}(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty),$$

називається (див., наприклад, [3, с. 18]) спряженою за Ньютоном з функцією Φ.

Легко переконатися, що Φ' набуває на $(-\infty, +\infty)$ усі значення з $(0, +\infty)$. Нехай φ – функція, обернена до Φ'. Тоді функція φ є зростаючою на $(0, +\infty)$ і набуває на зазначеному інтервалі усі значення з $(-\infty, +\infty)$. Добре відоме таке твердження (див. [3, с. 18], [8, с. 186-187]).

Лема A. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Тоді:*

1) $\widehat{\Phi}(\sigma)$ є зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією;

2) $\widetilde{\Phi}(x) = x\widehat{\Phi}(\varphi(x))$, $x > 0$, де φ – функція, обернена до Φ'.

Перше з двох наведених далі тверджень добре відоме, а друге отримано в [7].

Лема B. *Нехай (x_n) – додатна неспадна послідовність. Якщо*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n} < +\infty,$$

то $n = o(x_n)$, $n \to \infty$.

Лема C. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а (a_n) – комплексна послідовність. Для того, щоб ряд Діріхле* (2) *був цілим, необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|} \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

3. Доведення теореми 2. Розглянемо послідовність $\lambda \in \Lambda$ таку, що $\delta(\lambda) > 0$, і нехай $K \in \left[\frac{1}{\delta(\lambda)}, +\infty\right)$ – довільне фіксоване число, а H – зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функція. Доведемо, що існує ряд Діріхле $F \in S(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і виконується співвідношення (6).

Приймемо $\delta = \frac{1}{K}$ і зафіксуємо числа α і β такі, що $0 < \alpha < \beta < \delta$.

Легко бачити, що існує функція $\Phi \in \Omega$, для якої

$$H(\sigma) = o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \to +\infty; \tag{7}$$

$$\Phi(\sigma) \geq \Psi(\sigma) := \exp\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right), \quad \sigma \in (-\infty, +\infty). \tag{8}$$

Через φ позначимо функцію, обернену до Φ'. З (8) випливає, що $\widetilde{\Phi}(x) \leq \widetilde{\Psi}(x) = \alpha x \ln \frac{\alpha x}{e}$ для всіх $x > 0$, тому за лемою A отримаємо

$$x\widehat{\Phi}(\varphi(x)) = \widetilde{\Phi}(x) < \beta x \ln x, \quad x \geq x_0. \tag{9}$$

Нехай (β_k) – зростаюча до δ послідовність з інтервалу (β, δ). Оскільки $\beta_k < \delta(\lambda)$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, то існує зростаюча послідовність (n_k) цілих чисел така, що

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} \geq \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Приймемо $\delta_n = \beta_0$ для всіх $n \leq n_0$ і $\delta_n = \beta_{k+1}$ для всіх $n \in (n_k, n_{k+1}]$ та $k \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що (δ_n) – неспадна послідовність з інтервалу (β, δ), яка прямує до δ. Звідси, зокрема, випливає, що для деякого $p_0 \in \mathbb{N}_0$ такого, що $\lambda_{p_0} \geq x_0$, послідовність $(e^{\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n})_{n=p_0}^{\infty}$ зростаюча. Крім того, для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ за (10) одержуємо $e^{\delta_{n_k} \lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} \leq n_k$. Тому згідно з лемою B

$$\sum_{n=p_0}^{\infty} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} = +\infty. \tag{11}$$

Далі зауважимо, що за (9) правильні нерівності

$$e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} < e^{-\lambda_n \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_n))}, \quad n \geq p_0. \tag{12}$$

З (11) і (12) випливає, що для кожного цілого $p \geq p_0$ визначеною є величина

$$m(p) = \min \left\{ m \in \{p, p+1, \dots\} \ : \ \sum_{n=p}^{m} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} \geq e^{-\lambda_p \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_p))} \right\},$$

причому $m(p) > p$. Приймемо

$$l(p) = \max \left\{ l \in \{p, p+1, \dots, m(p)\} \ : \ \sum_{n=l}^{m(p)} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} \geq e^{-\lambda_l \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_l))} \right\}.$$

Зазначений максимум існує, бо множина, від якої цей максимум береться, є скінченною і непорожньою (число p є її елементом, що випливає з означення величини $m(p)$). Тоді отримаємо $p \leq l(p) < m(p)$.

Виберемо зростаючу послідовність (p_k) цілих чисел (зауважимо, що p_0 вибрано вище) так, щоб виконувались нерівності

$$e^{-\lambda_{p_{k+1}} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{p_{k+1}}))} < \frac{1}{2} e^{-\lambda_{m(p_k)} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{m(p_k)}))}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

Для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ приймемо $l_k = l(p_k)$ і $m_k = m(p_k)$. Тоді $p_k \leq l_k < m_k < p_{k+1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ і з (13) за індукцією отримуємо

$$e^{-\lambda_{p_{k+j}} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{p_{k+j}}))} < \frac{1}{2^j} e^{-\lambda_{m_k} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{m_k}))}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Крім того, з означення величини l_k випливає, що

$$\sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} = e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}} + \sum_{n=l_k+1}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} <$$
$$< e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}} + e^{-\delta_{l_k+1} \lambda_{l_k+1} \ln \lambda_{l_k+1}} < 2e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо $n \in [l_k, m_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, то приймемо $a_n = e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n}$; в іншому разі приймемо $a_n = 0$. Розглянемо ряд Діріхле (2) з так визначеними коефіцієнтами a_n і зауважимо, що його можна записати у вигляді

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=l_k}^{m_k} a_n e^{s\lambda_n}.$$

Покажемо, що зазначений ряд задовольняє умови теореми.

Насамперед доведемо, що цей ряд цілий. Для кожного $q \in \mathbb{N}_0$ введемо позначення

$$T_q := \sum_{n=q}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=q}^{\infty} a_n.$$

За нерівностями (15) і (12) для всіх $q \in (m_{k-1}, l_k]$ і $k \in \mathbb{N}$ одержуємо

$$\sum_{n=q}^{m_k} a_n = \sum_{n=l_k}^{m_k} a_n = \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} < 2e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}} \le 2e^{-\delta_q \lambda_q \ln \lambda_q} < 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))},$$

а для всіх $q \in (l_k, m_k]$ і $k \in \mathbb{N}$, використовуючи означення величини l_k і нерівності (12), отримаємо

$$\sum_{n=q}^{m_k} a_n = \sum_{n=q}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} < e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))}.$$

Тому, скориставшись нерівностями (15), (12) та (14), для всіх $q \in (m_{k-1}, m_k]$ і $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$T_q = \sum_{n=q}^{m_k} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=l_{k+j}}^{m_{k+j}} a_n < 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=l_{k+j}}^{m_{k+j}} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} <$$

$$< 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + \sum_{j=1}^{\infty} 2e^{-\delta_{l_{k+j}} \lambda_{l_{k+j}} \ln \lambda_{l_{k+j}}} \le 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\delta_{p_{k+j}} \lambda_{p_{k+j}} \ln \lambda_{p_{k+j}}} <$$

$$< 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_{p_{k+j}} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{p_{k+j}}))} < 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} e^{-\lambda_{m_k} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{m_k}))} \le$$

$$\le 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\right) = 4e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))},$$

звідки

$$\frac{1}{\lambda_q} \ln \frac{1}{T_q} \ge \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q)) - \frac{\ln 4}{\lambda_q}, \quad q > m_0.$$

Оскільки з леми A випливає, що $\widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q)) \to +\infty$, $q \to \infty$, то

$$\frac{1}{\lambda_q} \ln \frac{1}{T_q} \to +\infty, \quad q \to \infty,$$

тому за лемою C побудований вище ряд Діріхле цілий, тобто $F \in S(\lambda)$.

Крім того, для цього ряду величина

$$\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}$$

дорівнює $\frac{1}{\delta_n}$ у випадку, якщо $n \in [l_k, m_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, і дорівнює 0 в іншому разі. Звідси, врахувавши, що $\delta_n \to \delta, n \to \infty$, легко отримуємо рівність $K(F) = \frac{1}{\delta} = K$.

Нарешті, оскільки $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, то

$$M(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\sigma\lambda_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} e^{\sigma\lambda_n},$$

тому для всіх достатньо великих $k \in \mathbb{N}_0$, згідно з означенням величин l_k і m_k, одержуємо

$$M(\varphi(\lambda_{l_k}), F) > \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} e^{\varphi(\lambda_{l_k})\lambda_n} \geq$$

$$\geq e^{\varphi(\lambda_{l_k})\lambda_{l_k}} \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} \geq e^{\varphi(\lambda_{l_k})\lambda_{l_k}} e^{-\lambda_{l_k} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{l_k}))} = e^{\Phi(\varphi(\lambda_{l_k}))}.$$

Оскільки $\varphi(\lambda_{l_k}) \to +\infty$, $k \to \infty$, то звідси отримуємо

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \geq 1. \tag{16}$$

Враховуючи (7), з (16) легко отримуємо (6). Теорему 2 доведено.

Список використаної літератури

1. *Ritt J.F.* On certain points in the theory of Dirichlet series / *J.F. Ritt* // Amer. J. Math. – 1928. – Vol. 50. – P. 73-78.
2. *Sugimura K.* Übertragung einiger Satze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletschen Reihen / *K. Sugimura* // Math. Z. – 1929. – Bd. 29. – S. 264-277.
3. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле / *М.М. Шеремета.* – К.: ІСДО, 1993.
4. *Гече Ф.И.* Замечания о формулах для определения линейного порядка целой функции, представленной рядом Дирихле / *Ф.И. Гече* // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, № 5. – С. 7-12.
5. *Tonaka C.* Note on Dirichlet series (V). On the integral functions defined by Dirichlet series (I) / *C. Tonaka* // Tôhoku. Math. J. – 1953. – Vol. 2, № 1. – P. 67-78.
6. *Azpeitia A.G.* A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series / *A.G. Azpeitia* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol.12, № 5. – P. 722-723.
7. *Шеремета М.М.* Про зростання цілого ряду Діріхле / *М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 8. – С. 1149–1153.
8. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции / *М.А. Евграфов.* – М.: Наука, 1979.

Стаття: надійшла до редакції 25.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

A CONDITION OF APPLICABILITY OF A FORMULA FOR CALCULATING OF R-ORDER OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Taras HLOVA[1], Petro FILEVYCH[2]

[1] *Pidsryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine,*
Naukova Str., 3b, Lviv, 79060
[2] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,*
Shevchenka Str., 57, Ivano-Frankivsk, 76025
e-mail: hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Let (λ_n) be a nonnegative sequence, increasing to $+\infty$. It is proved that the condition $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, is necessary in order that for every Dirichlet series of the form $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ its R-order $R(F)$ can be calculated by the formula

$$R(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Formerly K. Sugimura proved the sufficiency of this condition.

Key words: power series, entire function, maximum modulus, order, Cauchy-Hadamard formula, Dirichlet series, R-order.

УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ R-ПОРЯДКА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

Тарас ГЛОВА, Петр ФИЛЕВИЧ

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины,
ул. Наукова, 3б, Львов, 79060
[2] *Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника,*
ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76025
e-mail: hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Пусть (λ_n) – неотрицательная возрастающая к $+\infty$ последовательность. Доказано, что условие $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, является необходимым для того, чтобы R-порядок $R(F)$ любого целого ряда Дирихле вида $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ можно было найти по формуле

$$R(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Достаточность этого условия ранее доказал К. Сугимура.

Ключевые слова: степенной ряд, целая функция, максимум модуля, порядок, формула Коши-Адамара, ряд Дирихле, R-порядок.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 35–41
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 35–41

УДК 517.547.24

ЖЮЛІА-ВИНЯТКОВІСТЬ ЛОКСОДРОМНИХ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Ольга ГУЩАК, Андрій КОНДРАТЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: olya_khyl@ukr.net, kond@franko.lviv.ua

Розглянуто локсодромні мероморфні функції. Доведено, що кожна така функція є Жюліа-винятковою.

Ключові слова: нормальна сім'я, локсодромна функція, Жюліа-виняткова функція, еліптична функція.

1. Вступ. Допоміжні поняття та твердження. Теорію мультиплікативно періодичних мероморфних функцій розробив О. Раузенбергер [1]. Валірон назвав ці функції локсодромними, бо точки, в яких така функція набуває однакові значення, лежать на логарифмічних спіралях [2]. Локсодромні мероморфні функції дають просту конструкцію еліптичних функцій [2], [3].

Означення 1 ([2], [3]). *Нехай* $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. *Відображення* $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ *називається локсодромною функцією з мультиплікатором* q $(0 < |q| < 1)$, *якщо* f *є мероморфною і* $\forall z \in \mathbf{C}^*$ *виконується рівність* $f(qz) = f(z)$.

Кожна локсодромна функція f зображається у вигляді [2], [3]

$$f(z) = Cz^p \frac{\prod_{k=1}^{m} P(\frac{z}{a_k})}{\prod_{k=1}^{m} P(\frac{z}{b_k})}, \tag{1}$$

де a_k – нулі, а b_k – полюси функції f, $C = const$,

$$P(z) = (1-z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)\left(1-\frac{q^n}{z}\right)$$

і $p \in \mathbf{Z}$ таке, що

$$\frac{a_1 a_2 ... a_m}{b_1 b_2 ... b_m} = q^p, \quad |q| < |a_\nu| \leqslant 1, \quad |q| < |b_\mu| \leqslant 1.$$

Означення 2 ([4]). *Сім'я мероморфних функцій називається нормальною в області* D, *якщо з довільної послідовності функцій цієї сім'ї можна вибрати рівномірно збіжну (в сенсі Каратеодорі-Ландау)* [5], [6] *всередині* D *підпослідовність.*

Жюліа-виняткові функції вивчали Г. Жюліа, [7] П. Монтель [4] та О. Островський [5]. Ці функції тісно пов'язані з нормальними сім'ями функцій і названі так, оскільки для них не існує променів Жюліа. О. Островський знайшов необхідні та достатні умови Жюліа-винятковості мероморфної функції [4],[5]. Він розглядав функції на всій площині. Аналог теореми Островського для функцій, мероморфних в проколеній площині $\mathbf{C}^*$, сформулював О. Єрьоменко [8] (доведення див. [9]).

Означення 3. *Мероморфна в $\mathbf{C}^*$ функція f називається Жюліа-винятковою, якщо для довільної послідовності комплексних чисел $\{\sigma_n\}$, $\sigma_n \to \infty$, $n \to \infty$ існує підпослідовність $\{\sigma_{n_k}\}$ така, що послідовність $\{f(\sigma_{n_k} z)\}$ збігається рівномірно в $\mathbf{C}^*$ в сенсі Каратеодорі-Ландау при $k \to \infty$.*

О. Єрьоменко довів [8] таке узагальнення теореми О. Островського.

Теорема А ([8]). *Мероморфна функція $f : \mathbf{C}^* \to \overline{\mathbf{C}}$ є Жюліа-винятковою тоді і лише тоді, коли вона зображається у вигляді*

$$f(z) = Cz^p \frac{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{a_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{b_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{b_k}{z})} \tag{2}$$

де $C \in \mathbf{C}$, $p \in \mathbf{Z}$, $a_k \in \mathbf{C}^*$, $b_k \in \mathbf{C}^*$, обидві послідовності $\{a_k\}$ і $\{b_k\}$ можуть бути скінченими або нескінченими в одному чи в обох напрямах, при $k \to -\infty$ вони прямують до 0, а при $k \to +\infty$ до ∞, і виконуються такі умови:

1) *кількість нулів a_k і полюсів b_k функції f у кожному кільці вигляду $\{z : r < |z| < 2r\}$, $r > 0$ (з врахуванням кратності) обмежена сталою C_1;*
2) *різниця між кількістю нулів і полюсів функції f у кожному кільці $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ (з врахуванням кратності) обмежена сталою C_2;*
3) *для будь-яких i та j відношення*

$$|a_i|^p \frac{\prod_{k:0\leqslant \log|a_k|/\log|a_i|\leqslant 1} \frac{|a_i|}{|a_k|}}{\prod_{k:0\leqslant \log|b_k|/\log|a_i|\leqslant 1} \frac{|a_i|}{|b_k|}}$$

і

$$|b_j|^p \frac{\prod_{k:0\leqslant \log|b_k|/\log|b_j|\leqslant 1} \frac{|b_j|}{|b_k|}}{\prod_{k:0\leqslant \log|a_k|/\log|b_j|\leqslant 1} \frac{|b_j|}{|a_k|}}$$

обмежені зверху сталою C_3;

4) *існує незалежна від i та j стала C_4 така, що*

$$\left| \frac{a_i}{b_j} - 1 \right| \geqslant C_4.$$

2. Жюліа-винятковість локсодромних функцій. Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 1. *Кожна локсодромна функція f є Жюліа-винятковою.*

Доведення. Згідно з (1) кожна відмінна від сталої локсодромна функція f з мультиплікатором q набуває вигляду (2), тому залишається перевірити для неї умови 1)–4) теореми A.

Нехай m – кількість нулів функції f у кільці $A_q = \{z : |q| < |z| \leqslant 1\}$.

Зауважимо, що зі зображення (1) випливає (див. також [2], [3]) таке: кількість полюсів функції f у кільці A_q також дорівнює $m \geqslant 2$. Вона також дорівнює m у кожному кільці вигляду $A_q(R) = \{z : |q|R < |z| \leqslant R\}$.

1. Перевіримо умову 1) теореми A.

Існують $l \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$ такі, що

$$|q|^{l+1} < r \leqslant |q|^l, \tag{3}$$

$$|q|^{n+1} < 2r \leqslant |q|^n.$$

Кількість нулів функції f у кільці $\{z : r < |z| < 2r\}$ не перевищує $(l+1-n)m$, оскільки в кожному кільці $A_q(q^k)$ їх є m штук. З (3) випливає, що

$$l \leqslant \frac{\log r}{\log |q|},$$

$$n + 1 > \frac{\log 2 + \log r}{\log |q|}.$$

Тому

$$m(l+1-n) \leqslant \left(2 - \frac{\log 2}{\log |q|}\right) m =: C_1.$$

Ця ж сама оцінка годиться, вочевидь, для кількості полюсів функції f у довільному кільці $\{z : r < |z| < 2r\}$.

2. Умову 2) перевіримо так.

Можливі такі випадки:

а) Випадок, коли $\exists k \in \mathbf{Z}$ таке, що $|q|^{k+1} < r_1 < r_2 \leqslant |q|^k$. Тоді різниця між кількістю нулів і полюсів функції f в кільці $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ не перевищує m.

б) $\exists l, n \in \mathbf{Z}$ такі, що $r_1 < |q|^l \leqslant ... \leqslant |q|^n \leqslant r_2$. Тоді в кільцях $\{z : |q|^i < |z| \leqslant \leqslant |q|^{i-1}\}$ кількість нулів і полюсів однакова, тобто різниця дорівнює нулеві. Розглянемо кільця $\{z : r_1 < |z| \leqslant |q|^l\}$ і $\{z : |q|^n < |z| \leqslant r_2\}$. В них різниця між кількістю нулів і полюсів функції f не перевищує m.

Отже, в кільці $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ вона не перевищує $2m =: C_2$.

3. Для перевірки умови 3) нам потрібні деякі допоміжні поняття та факти.

Індексом мероморфної в $\mathbf{C}^*$ функції f (вздовж кола $\{z : |z| = t\}$) називається функція

$$\nu(t, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Im \left(\frac{f'(z)}{f(z)} dz \right).$$

Ця функція визначена для всіх $t > 0$ і є цілозначною [10].

Виконується такий аналог формули Єнсена [10]

$$\frac{1}{2} \int_s^r \frac{\nu(t, f)}{t} dt = I(r, f) - I(s, f), \tag{4}$$

де

$$I(t,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(te^{i\theta})|dt.$$

Лічильна функція $n(t,f)$ різниці нулів і полюсів функції f у кільцях, яку ми називатимемо функцією розподілу нулів і полюсів функції f, визначається так. У будь-якій фіксованій точці t_0 її значення вибирають довільним, а різниця $n(t_2,f)-n(t_1,f)$ при $t_1<t_2$ дорівнює різниці між кількістю нулів і полюсів функції f в кільці $z:t_1<|z|\leqslant t_2$. Отож, функція $n(t,f)$ неперервна справа.

Величини стрибків функцій ν і n в точці t_0 пов'язані згідно з принципом аргумента рівністю

$$\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}(\nu(t+\Delta t,f)-\nu(t-\Delta t,f))=\lim_{\Delta t\to 0}(n(t+\Delta t,f)-n(t-\Delta t,f)).$$

Згідно з принципом аргумента

$$\frac{\nu(r+0,f)-\nu(1,f)}{2}=n(r,f)-n(1,f),\quad r>1, \tag{5}$$

за умови, що на одиничному колі немає ні нулів, ні полюсів функції f. З огляду на (4) при $r>1$ отримаємо за цієї умови, інтегруючи частинами,

$$I(r,f)-I(1,f)=\frac{1}{2}\nu(r+0)\log r-\frac{1}{2}\int\limits_{(1,r]}\log t d\nu(t)=$$

$$=-\sum_{\substack{1<|a_k|\leqslant r\\1<|b_k|\leqslant r}}(\log|a_k|-\log|b_k|)+\frac{1}{2}\nu(r+0,f)\log r,$$

де a_k – нулі; b_k – полюси функції f.

Враховуючи (5), одержимо

$$I(r,f)-I(1,f)=\sum_{\substack{1<|a_k|\leqslant r\\1<|b_k|\leqslant r}}\left(\log\frac{r}{|a_k|}-\log\frac{r}{|b_k|}\right)+\frac{\nu(1,f)}{2}. \tag{6}$$

Якщо f набуло вигляду (2) і не має ні нулів, ні полюсів на одиничному колі, то враховуючи, що $\nu(1,z^p)=2p$, а індекс всіх інших множників вздовж одиничного кола дорівнює нулеві, отримаємо $\frac{1}{2}\nu(1,f)=p$. Якщо ж f має нулі та полюси на одиничному колі, то, позначивши

$$h(z)=\frac{\prod_{|a_k|=1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)}{\prod_{|b_k|=1}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)},$$

$$f_1=\frac{f}{h},$$

і, застосувавши класичну формулу Єнсена до h,

$$I(r,h)-I(1,h)=\sum_{\substack{|a_k|=1\\|b_k|=1}}\left(\log\frac{r}{|a_k|}-\log\frac{r}{|b_k|}\right),\quad r>1, \tag{7}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

отримаємо, додаючи (6) для f_1 та (7),

$$I(r,f) - I(1,f) = \sum_{\substack{1\leqslant|a_k|\leqslant r\\ 1\leqslant|b_k|\leqslant r}} \left(\log\frac{r}{|a_k|} - \log\frac{r}{|b_k|}\right) + p\log r. \tag{8}$$

Правий бік рівності (8) дорівнює логарифмові першого добутку в 3) при $r = |a_i| > 1$. Отже, обмеженість цього добутку зверху еквівалентна обмеженості зверху інтегральних середніх $I(|a_i|, f)$.

Цілком аналогічно доводиться, що обмеженість зверху зазначеного добутку при $|a_i| < 1$ та другого добутку в 3) еквівалентна обмеженості зверху $I(|a_i|, f)$ та $-I(|b_j|, f)$. Оскільки для локсодромної функції f з мультиплікатором q інтегральні середні мультиплікативно періодичні з періодом $|q|$, $I(|q|r, f) = I(r, f)$, то вони визначаються своїми значеннями на проміжку $(|q|, 1]$. Враховуючи їхню неперервність та проведені вище міркування, отримаємо, що добутки в 3) обмежені сталою

$$|\log|C|| + \max_{|q|\leqslant t\leqslant 1}|I(t,f)| + |I(1,f)| =: C_3.$$

4. Перевіримо, нарешті, умову 4).

Нехай a_i і b_j нулі та полюси функції f, відповідно. Вони мають вигляд [2], [3] $a_i = a_\nu q^n$, $b_j = b_\mu q^k$, де $k, n \in \mathbf{Z}$, $a_\nu \in A_q$, $b_\mu \in A_q$, $\mu, \nu \in \{1, ..., m\}$.

а) Розглянемо випадок, коли a_i і b_j потрапляють в те саме кільце $A_q(q^n)$. Тоді

$$\left|\frac{a_i}{b_j} - 1\right| = \left|\frac{a_\nu q^n}{b_\mu q^n} - 1\right| = \left|\frac{a_\nu}{b_\mu} - 1\right| \geqslant C_{41},$$

де $C_{41} = \min\limits_{a_\nu, b_\mu}\left|\dfrac{a_\nu}{b_\mu} - 1\right|$.

б) Нехай a_i і b_j потрапляють у різні кільця, тоді

$$\left|\frac{a_i}{b_j} - 1\right| = \left|\frac{a_\nu q^n}{b_\mu q^k} - 1\right| = \left|\frac{a_\nu}{b_\mu}q^{n-k} - 1\right| \geqslant \left|\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k} - 1\right|.$$

Якщо $n - k \geqslant 1$, то

$$\left|\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k} - 1\right| = -\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k} + 1 \geqslant 1 - C_{42}|q| > 0,$$

де $C_{42} = \max\limits_{a_\nu, b_\mu}\dfrac{|a_\nu|}{|b_\mu|}$.

Якщо $n - k \leqslant -1$, то

$$\left|\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q^{n-k}| - 1\right| = \frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k} - 1 \geqslant \frac{C_{43}}{|q|} - 1 > 0,$$

де $C_{43} = \min\limits_{a_\nu, b_\mu}\dfrac{|a_\nu|}{|b_\mu|}$.

Отже,

$$\left|\frac{a_i}{b_j} - 1\right| \geqslant C_4 > 0,$$

де $C_4 = \min\{C_{41}, 1 - C_{42}, C_{43} - 1\}$. Отож, функція f є Жюліа-винятковою. □

3. Нормальні сім'ї еліптичних функцій. Кожній локсодромній функції f з мультиплікатором q відповідає еліптична функція g [3]. А саме, позначимо

$$f\left(e^{-\frac{2\pi u}{\omega_1}}\right) = g(u), \quad q = e^{\frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1}}, \quad Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0.$$

Тоді $g(u)$ буде [3] еліптичною функцією з граткою періодів $\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$. Отримаємо

$$f(\sigma z) = g(u+\tau),$$

де

$$\tau = \frac{i\omega_1}{2\pi}\log\sigma.$$

Звідси

$$|\tau| \geqslant \frac{|\omega_1|}{2\pi}\log|\sigma|.$$

Тому $\tau \to \infty$ при $\sigma \to \infty$.

Отже, безпосереднім наслідком Теореми 1 є таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай g – еліптична функція. Тоді сім'я функцій $\{g(u+\tau)\}$, $\tau \in \mathbf{C}$ нормальна в $\mathbf{C}$.*

Це означає, що з довільної послідовності функцій $\{g(u+\tau_n)\}$, $\tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається рівномірно в $\mathbf{C}$ в сенсі Каратеодорі-Ландау.

Цей результат іншим способом довів К. Іосіда [11].

Список використаної літератури

1. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der periodischen functionen einer Variabeln / *O. Rausenberger.* – Leipzig: Druck und Ferlag von B.G. Teubner, 1884. – 470 p.
2. *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions: 2nd Edition / *G. Valiron.* – Paris: Masson et. Cie., 1947. – 522 p.
3. *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles / *Y. Hellegouarch.* – Academic Press, 2002. – P. 92-93.
4. *Montel P.* Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications / *P. Montel.* – Paris: Gauthier-Villars, 1927. (*Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. – Москва; Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1936).
5. *Ostrowski A.* Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen satzes / *A. Ostrowski* // Mathematische Zeitschrift. – 1926. – Vol. 24, №1. – P. 215-258.
6. *Khrystiyanyn A.Ya.* Nevanlinna characteristics of sequences of meromorphic functions and Julia's exceptional functions / *A.Ya. Khrystiyanyn, O.B. Khylynska, A.A. Kondratyuk* // Matematychni Studii. – 2011. – Vol. 36, №1. – P. 65-72.
7. *Julia G.* Leçons sur les fonctions unif ormes à point singulier essentiel isolè / *G. Julia.* – Paris: Gauthier — Villars, 1924.
8. *Eremenko A.* Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces / *A. Eremenko* // Preprint. Purdue University. – 1999.
9. *Радченко Л.Д.* Аналитические функции в плоскости без точки нуль / *Л.Д. Радченко* // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. – 2010. – №922. – С. 43-55.
10. *Kondratyuk A.A.* Meromorphic functions with several essential singularities. I / *A.A. Kondratyuk* // Matematychni Studii. – 2008. – Vol. 30, №1. – P. 125-131.

11. *Yosida K.* On a class of meromorphic functions / *K. Yosida* // Proc. Phis.-Math. Soc. Japan. – 2008. – Vol. 30, №1. – P. 125-131.

Стаття: надійшла до редакції 21.01.2013
прийнята до друку 16.10.2013

THE JULIA EXCEPTIONALITY OF LOXODROMIC MEROMORPHIC FUNCTIONS

Olha HUSHCHAK, Andriy KONDRATYUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: olya_khyl@ukr.net, kond@franko.lviv.ua

Loxodromic meromorphic functions are considered. It is proved that every such function is Julia exceptional.

Key words: normal family, loxodromic function, Julia exceptional function, elliptic function.

ЖЮЛИА-ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОСТЬ ЛОКСОДРОМНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ольга ГУЩАК, Андрей КОНДРАТЮК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: olya_khyl@ukr.net, kond@franko.lviv.ua

Рассмотрено локсодромные мероморфные функции. Доказано, что каждая такая функция есть Жюлиа-исключительной.

Ключевые слова: нормальное семейство, локсодромная функция, Жюлиа-исключительная функция, эллиптическая функция.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 42–51
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 42–51

УДК 517.5

ПРО ДЕЯКІ УМОВИ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ВАГОВИХ ПРОСТОРІВ ГАРДІ, ЩО МАЮТЬ СИНГУЛЯРНІСТЬ

Володимир ДІЛЬНИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: dilnyi@ukr.net

Розглянуто простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ аналітичних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій f, для яких

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Доведено еквівалентність умов, які пов'язують поведінку функції на дійсній півосі з поведінкою на уявній осі. Припускається, що сингулярна гранична функція є нетривіальною.

Ключові слова: ваговий простір Гарді, сингулярна гранична функція.

1. Вступ. Позначатимемо через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, тобто простір аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких виконується нерівність

$$\|f\| := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1}$$

Теорія просторів Гарді досить детально викладена у [1], [2], [11]. Зокрема, доведено, що простори $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, є банаховими стосовно зазначеної норми. А. Сєдлєцкий з'ясував [3], що простори $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, можуть бути визначені і як класи аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$\|f\|_* := \sup_{\varphi\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty, \tag{2}$$

де остання норма еквівалентна нормі, визначеній формулою (1). М. Джрбашян довів [4, с. 413-414] еквівалентність цих означень для випадку $p = 2$. Функції f з $H^p(\mathbb{C}_+)$

мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які позначаємо через $f(it)$, і $f(it) \in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$.

Б. Винницький розглянув [5] простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, $0 \le \sigma < +\infty$, функцій f, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\| := \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{3}$$

Для випадку $1 \le p < +\infty$ ця рівність визначає норму і у цьому випадку $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ є банаховим простором. Функції f з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які позначаємо також через f. Як випливає з вищенаведеного результату А. Сєдлєцкого, простір H^p_σ збігається з класичним простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, коли $\sigma = 0$.

У теорії аналітичних функцій відомий принцип "якщо функція на частині області дуже мала, то в іншій частині дуже велика". Фрази "дуже мала", "дуже велика" в конкретних твердженнях набувають цілком конкретного змісту. Одним із багатьох строгих формулювань такого типу є формула Карлемана. Мета нашої праці – довести твердження, що описує зазначений принцип для простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

2. Основна частина. Для кожної функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ існує [9] сингулярна гранична функція, яка з точністю до адитивної сталої і значень у точках неперервності визначається рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \log|f(x+iy)|\, dy - \int_{t_1}^{t_2} \log|f(iy)|\, dy.$$

Функція h є незростаючою на $\mathbb{R}$ і $h'(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \ne 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$. Тоді такі умови еквівалентні:*

1) $(\forall c \in \mathbb{R}): \quad G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z\log z - cz\right\} \notin H^p(\mathbb{C}_+)$;

2) $\varliminf_{r\to+\infty} \left(\int_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G(it)|\, dt - \int_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| - 2\sigma\log r \right) = -\infty$;

3) $\lim_{r\to+\infty} \left(\int_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G(it)|\, dt - \int_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| - 2\sigma\log r \right) = -\infty$;

4) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x \right) = +\infty$ *або* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} = +\infty$;

5) $\varlimsup_{x\to+\infty} \left(\frac{\log|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x \right) = +\infty$ *або* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} = +\infty$.

Цю теорему довели в [6] при додатковій умові тривіальності сингулярної граничної функції. Такого типу твердження використовують для дослідження цикличності функцій, властивостей інваріантних підпросторів і розв'язків рівняння типу згортки (див. [7], [8], [9]). Зауважимо, що твердження теореми справджується і для випадку $\sigma = 0$ у тому сенсі, що кожна з умов 1)–5) описує порожню множину.

Твердження теореми випливає з лем 2, 3, 5, 6, якщо врахувати, що імплікація 4) $\Rightarrow$ 5) є тривіальною.

Лема 1. *Якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, то справджується зображення*

$$G(z) = \exp\left\{ia_0 + a_1 z + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\log|G(it)|\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\,dh(t)\right\},$$

де

$$Q(t,z) = \frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)},$$

причому

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - \int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) > -\infty.$$

Ця лема випливає з [9, с. 64], якщо врахувати, що функція G не має нулів у $\mathbb{C}_+$.

Лема 2. *Якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, і умова 3) виконується, то виконується також умова 4).*

Доведення. Зауважимо спочатку, що можливі два випадки

$$(\exists c > 0): \quad \int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)| \leqslant c, \tag{4}$$

або (внаслідок монотонності)

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) = +\infty. \tag{5}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли виконується умова (4). Тоді

$$\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - 2\sigma\log r =$$

$$= \int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{p}\log\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p + \sigma|t|\right)dt -$$

$$-2\sigma\log r \le \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log^+\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt + \int\limits_{1<|t|\le r}\frac{\sigma}{|t|}dt - 2\sigma\log r \le$$

$$\le \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\le r}\frac{1}{t^2}\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < \frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < c < \infty,$$

де стала c від r не залежить. Якщо припустити, що

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r\right)>-\infty,$$

то на деякій послідовності (r_k) додатних чисел, такій що $r_k\to+\infty$ при $k\to\infty$, отримаємо

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r_k\right)>-\infty.$$

Врахувавши нерівність (4), одержимо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\int\limits_{1<|t|\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)\log|G(it)|\,dt-\int\limits_{1<t\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)|dh(t)|-2\sigma\log r_k\right)>-\infty,$$

що суперечить умові 3). Тому припущення неправильне, тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r\right)=-\infty. \tag{6}$$

За лемою 1 справджується зображення $G(z)=G_1(z)\,G_2(z)$, де

$$G_1(z)=e^{ia_0+a_1z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\log|G(it)|\,dt\right\},$$

$$G_2(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\,dh(t)\right\}.$$

В лемі 3 з [6] доведено, що тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G_1(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty. \tag{7}$$

Для доведення потрібного залишилось довести, що

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty}\frac{\log|G_2(x)|}{x}>-\infty. \tag{8}$$

Справді,

$$\frac{\log|G_2(x)|}{x}=\frac{\log\left|\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\,dh(t)\right\}\right|}{x}.$$

Але оскільки

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi}Q(t,x)\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{(tx+i)^2}{\pi i\left(t^2+1\right)^2(t+ix)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2(ti-x)}\right\}=$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(-x+it\right)}\cdot\frac{-x-it}{-x-it}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}+\right.$$

$$\left.+i\frac{t-t^3x^2-2x^2t}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}\right\} = \frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)},$$

то

$$\frac{\log\left|G_2\left(x\right)\right|}{x} = \frac{\log\left|\exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right)\right\}\right|}{x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right).$$

Як відомо у теорії інтеграла Стільтьєса, якщо s є неспадною, f є невід'ємною на інтервалі $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)ds\left(t\right) \geq 0.$$

Тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq 0.$$

Вважатимемо, що $x \geq 1$. Тоді

$$\frac{\log\left|G_2\left(x\right)\right|}{x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right).$$

Але $\frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2+2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}$, тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dh\left(t\right)}{\left(1+t^2\right)^2} \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dh\left(t\right)}{1+\left|t\right|^3},$$

бо $\left(1+t^2\right)^2 \geq 1+\left|t\right|^3$. Б. Винницький і В. Шаран довели в [10, с. 44], що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|dh\left(t\right)\right|}{1+\left|t\right|^3} < +\infty.$$

Тому $\frac{\log|G_2(x)|}{x} \geq -\infty$ при $x \geq 1$. Отже, нерівність (8) виконується. Додавши (7) і (8), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log|G_1(x)\,G_2(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty,$$

тобто виконання умови 4).

Нехай тепер виконується умова (5). Тоді, врахувавши, що $h(t)\in L^1[-1;1]$, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}+\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}=$$

$$=c+\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}\geqslant c+\varliminf_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|=$$

$$=c+\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|=+\infty.$$

Отже, і в цьому випадку виконується умова 4). □

Лема 3. *Якщо $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\leq p<+\infty$, $\sigma>0$, і виконується умова 5) теореми, то виконується умова 1).*

Доведення. Якщо виконується перша з умов 4), то твердження цієї леми випливає з леми 4 в [6]. Якщо ж

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}=+\infty,$$

то припустивши протилежне, тобто

$$(\exists c\in\mathbb{R}):\quad G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}\in H^p(\mathbb{C}_+),$$

отримуємо, що сингулярна гранична функція h_1 функції $G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}$ задовольняє умову (див. [2])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh_1(t)|}{1+t^2}<+\infty.$$

Проте $h_1\equiv h$, що призводить до суперечності. □

Лема 4. *Якщо $f\in H^p(\mathbb{C}_+)$, $p\in[1,+\infty)$ то справджується зображення*

$$f(z)=e^{i\alpha+\beta z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}\ln|f(it)|dt\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}dh(t)\right\}\prod_{|\lambda_n|\leqslant1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n},\tag{9}$$

де

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \leqslant 0, \tag{10}$$

причому для кутових граничних значень f на $i\mathbb{R}$, її сингулярної граничної функції h (яка є неспадною і $h'(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$) та послідовності нулів (λ_n) виконуються, відповідно, умови

$$f \in L^p(i\mathbb{R}), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|f(it)||}{1+t^2}dt < +\infty, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2}dt < +\infty, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Re\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty. \tag{11}$$

Навпаки, якщо для функції $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, неспадної функції $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь, послідовності (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, виконуються умови (10)–(11), то функція f, визначена рівністю (9), належить простору $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Це твердження доведене в [1, c. 81-82], [11, c. 25], див. також [2, c. 189-190].

Лема 5. *Якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, і виконується умова 1), то виконується умова 2).*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто

$$\varliminf_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G(it)|\, dt - \int\limits_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| - 2\sigma \log r \right) > -\infty. \tag{12}$$

Оскільки, як з'ясували при доведенні леми 2,

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G(it)|\, dt - 2\sigma \log r < c < \infty, \tag{13}$$

то умова (12) еквівалентна одночасному виконанню умов

$$\varliminf_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G(it)|\, dt - 2\sigma \log r \right) > -\infty$$

та

$$\lim_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| \right) < +\infty. \tag{14}$$

Врахувавши також (13), отримаємо

$$\int\limits_{1<t\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G(it)|\, e^{-\sigma|t|} dt = O(1)\,,\ r \to +\infty,$$

з чого (див. лему 5 в [6]) випливає

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\log\left|G_1(it)\, e^{-\sigma|t|}\right|\right|}{1+t^2} dt < +\infty,$$

де G_1 таке ж, як і в доведенні леми 2. Аналогічно, врахувавши, що функція $|h|$ є неспадною, з умови (14) отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh\,(t)|}{1+t^2}dt < +\infty.$$

Позначимо $\varphi(it) := G\,(it)\,e^{\frac{2\sigma}{\pi}it\log(it)}$. Оскільки виконуються умови (11), то за лемою 4 одержуємо $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, де

$$f(z) = e^{i\alpha+\beta z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}\ln|\varphi(it)|dt\right\}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}dh(t)\right\},$$

$\beta \leqslant 0$, h – сингулярна гранична функція функції G. Врахувавши, що G не має нулів у $\mathbb{C}_+$, сингулярна гранична функція функції f збігається з сингулярною граничною функцією функції G, а також рівності

$$Q\,(t,z) = \frac{i}{t+iz} - \frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2},$$

і $G\,(it)\,e^{\frac{2\sigma}{\pi}it\log(it)} = G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}$ при $t \in \mathbb{R}$, за лемою 1 одержимо зображення (інтеграли збігаються принаймні в розумінні головного значення)

$$G\,(z)\,e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z} =$$

$$= f(z)e^{ia_0+a_1z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)\log\left|G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|dt + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dh\,(t)\right\} = f(z)e^{i\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1z}$$

для деяких сталих $\widetilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{a}_1 \in \mathbb{R}$. Тому приходимо до висновку, що $G\,(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z - cz\right\} \in H^p\left(\mathbb{C}_+\right)$ для деякої сталої $c \in \mathbb{R}$, тобто умова 1) не виконується. Ця суперечність доводить твердження леми. □

Лема 6. *Якщо* $G \in H^p_\sigma\left(\mathbb{C}_+\right)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G\,(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, *і виконується умова 2), то виконується умова 3).*

Доведення. Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\varphi_1(r) := \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|dt \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{1}{t^2}|G(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < c_1 < +\infty.$$

Функція

$$\varphi_2(r) := \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log^+\frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}dt + \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|,$$

очевидно, є неспадною. Оскільки

$$\log|G(it)e^{-\sigma|t|}| = \log^+|G(it)e^{-\sigma|t|}| - \log^+\frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|},$$

то якби функція φ_2 була обмеженою зверху, то правильною була б нерівність

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt - \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) > -\infty,$$

що суперечить умові. Отже, $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\varphi_2(r) = \lim\limits_{r\to+\infty}\varphi_2(r) = +\infty$. Тому

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt - \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) =$$

$$= \varlimsup_{r\to+\infty}(\varphi_1(r)-\varphi_2(r)) \leqslant \varlimsup_{r\to+\infty}(c_1-\varphi_2(r)) = -\infty,$$

а отже, виконується умова 3). □

Список використаної літератури

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции / *Дж. Гарнетт.* – М.: Мир, 1984. – 469 с.
2. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций / *К. Гофман.* – М.: ИЛ., 1963. – 306 с.
3. *Седлецкий А.М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения / *А.М. Седлецкий* // Матем. сб. – 1975. – Т. 96, №1. – С. 75-82.
4. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / *М.М. Джрбашян.* – М.: Наука, 1966. – 672 с.
5. *Винницкий Б.В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент / *Б.В. Винницкий* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, №5. – С. 484-500.
6. *Дільний В.М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді / *В.М. Дільний* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №9. – С. 1257-1263.
7. *Vinnitskii B.* On extension of Beurling-Lax theorem / *B. Vinnitskii, V. Dil'nyi* // Math. Notes. – 2006. – Т. 79. – С. 362-368.
8. *Dilnyi V.* On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces / *Dilnyi V.* // Журн. матем. фіз., анал., геом. – 2011. – Т. 7. – С. 19-33.
9. *Винницький Б.В.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки / *Б.В. Винницький, В.М. Дільний* // Матем. студії. – 2001. – Т. 16, №1. – С. 61-70.
10. *Vynnytskyi B.* On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane / *B. Vynnytskyi, V. Sharan* // Матем. студії. – 2000. – Т. 14. – С. 41-48.
11. *Duren P.* Theory of H^p spaces / *P. Duren.* New York-London: Acad. Press, 1970. – 258 p.

Стаття: надійшла до редакції 04.10.2012
доопрацьована 28.03.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

ON SOME CONDITIONS FOR FUNCTIONS WITH SINGULARITY BELONGING TO THE WEIGHTED HARDY SPACES

Volodymyr Dilnyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: dilnyi@ukr.net

We consider the space $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ of analytic in $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ functions f, for which

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Equivalency of conditions that relate behavior of function on real semi-axis and imaginary axis is proved. Singular boundary function in this result is nontrivial.

Key words: weighted Hardy space, singular boundary function.

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ СИНГУЛЯРНОСТЬ

Владимир ДИЛЬНЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: dilnyi@ukr.net

Рассмотрено пространство $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ функций f, аналитических в $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, для которых

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Доказано эквивалентность условий, связывающих поведение функции на действительной полуоси и на мнимой оси. Допускается, что сингулярная граничная функция является нетривиальной.

Ключевые слова: весовое пространство Харди, сингулярная граничная функция.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 52–56
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 52–56

УДК 512.552.13

ДРОБОВЕ IF-КІЛЬЦЕ БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ, Андрій ГАТАЛЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доведено, що дробове IF-кільце Безу є дробово-регулярним, і якщо його стабільний ранг не перевищує 2, то дробове IF-кільце Безу є кільцем елементарних дільників.

Ключові слова: кільце Безу, IF-кільце, дробове IF-кільце, стабільний ранг, кільце елементарних дільників.

Нехай P – деяка кільцева властивість. Згідно з Вамошем [1] кільце R є дробовим P, якщо класичне кільце дробів $Q(R/I)$ кільця R/I має властивість P для довільного ідеалу I кільця R. Зокрема, нетерове кільце є дробово напівлокальне і також дробове кільце Каша. Мета нашої праці – дати відповідь на питання, сформульоване в [2] про дробове IF-кільце Безу. Доведемо, що дробове IF-кільце Безу є дробово-регулярним, і якщо його стабільний ранг дорівнює 2, то дробове IF-кільце Безу є кільцем елементарних дільників.

Назвемо комутативне кільце R дробово-регулярним, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ класичне кільце дробів $Q(R/rad(a))$ кільця $R/rad(a)$ є регулярним, де $rad(a)$ – нільрадикал елемента a [3].

Нагадаємо необхідні означення та факти.

Кільце R називатимемо IF-кільцем, якщо довільний ін'єктивний R-модуль плоский [4]. В наступних теоремах зібрано всі відомі факти про IF-кільця. Для зручності в теоремі 1 об'єднуються результати кількох авторів.

Теорема 1 ([2], [4], [5], [6], [7], [8]). *Нехай R – комутативне кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) *R – IF-кільце;*
2) *R – когерентне кільце і довільний скінченнопороджений ідеал є ануляторним ідеалом;*
3) *R – когерентне кільце і довільний плоский R-модуль є FP-ін'єктивним модулем;*
4) *R – когерентне і само FP-ін'єктивне кільце;*
5) *R – когерентне і локальне IF-кільце.*

Теорема 2 ([7]). *Комутативна область R є прюферовою областю тоді і тільки тоді, коли факторкільце R/I є IF-кільцем для довільного ненульового скінченно-породженого ідеалу I.*

Кільце R називатимемо напівкогерентним кільцем, якщо $Hom(B, C)$ є підмодулем плоского R-модуля, де B, C – ін'єктивні R-модулі [7]. Очевидно, що область Безу та нетерове кільце напівкогерентні. Комутативне кільце R є когерентним тоді і тільки тоді, коли $Hom(B, C)$ є плоским R-модулем для довільної пари B, C ін'єктивних R-модулів [7]. Якщо R – область цілісності, а B, C – ін'єктивні R-модулі, тоді $Hom(B, C)$ є модулем без кручення і $Hom(B, C) \subset Q \bigotimes Hom(B, C)$, де Q – поле дробів кільця R.

Твердження 1. *Редуковане комутативне кільце R є напівкогерентним тоді і тільки тоді, коли $minR$ – компакт.*

Перейдемо до характеризації IF-кілець. Очевидним прикладом IF-кільця може слугувати регулярне кільце, оскільки над таким кільцем довільний модуль плоский. Якщо кільце редуковане, то правильне й обернене твердження.

Твердження 2 ([7]). *Нехай R – комутативне кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) R – регулярне кільце;

2) R – редуковане IF-кільце.

Можна відмітити і такий результат.

Твердження 3 ([7]). *Нехай R – IF-кільце. Тоді:*

1) *$Q(R) = R$;*
2) *якщо S – мультиплікативно замкнена множина в R, тоді R_S є IF-кільцем.*

Це твердження відіграє фундаментальну роль у наших дослідженнях.

Твердження 4 ([7]). *Якщо кільце дробів $Q(R)$ кільця R є IF-кільцем, тоді R – напівкогерентне і довільний скінченнопороджений плоский підмодуль вільного R-модуля є проективним.*

Нехай R – комутативне кільце Безу, яке є дробовим IF-кільцем. Тоді для довільного ненульового ідеалу I кільця R, кільце дробів $Q(R/I)$ є IF-кільцем. Оскільки $min(R/I)$ гомоморфний $min(R/radI)$, то бачимо, що кільце $R/radI$ – редуковане кільце Безу з компактним простором $minR$. Згідно з [9] $Q(R/radI)$ є регулярним кільцем, і отже, R – дробово регулярне кільце. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 3. *Дробове IF-кільце Безу є дробово-регулярним.*

Наслідок 1. *Нехай R – дробове IF-кільце Безу. Тоді для довільного власного ідеалу I кільця R простір $min(R/I)$ – компакт.*

Теорема 4. *Нехай R – дробове IF-кільце Безу з ненульовим радикалом Джекобсона (нільрадикалом). Тоді ст.р.$(R) \leqslant 2$.*

Доведення. Розглянемо факторкільце $R/J(R)$. На підставі наслідку 1 $min(R/J(R))$ – компакт. Тоді $R/J(R)$ – кільце Ерміта, тобто кільце стабільного рангу 2 [10]. Звідси одержимо, що ст.р.$(R) \leqslant 2$ [11]. □

Нехай R – таке комутативне кільце Безу, що $Q(R/rad(a)$ є IF-кільцем для довільного ненульового елемента $a \in R$. Оскільки IF-кільце – це когерентне само FP-ін'єктивне кільце, тоді $Q(R/rad(a)$ – когерентне кільце. Враховуючи [7, тв. 3.2] одержимо, що $R/rad(a)$ – напівкогерентне редуковане кільце. Звідси на підставі [7], $min(R/rad(a)$ – компакт, а це означає, що $Q(R/rad(a)$ – регулярне кільце. Отже, доведена така теорема.

Теорема 5. *Нехай R – таке комутативне кільце Безу, що $Q(R/rad(a)$ є IF-кільцем для довільного ненульового елемента $a \in R$. Тоді R – дробово регулярне кільце.*

Щоб зрозуміти перевагу саме таких досліджень, розглянемо випадок адекватного кільця Безу R. Нехай a – ненульовий елемент кільця R. Тоді згідно з [14] R/aR – комутативне кільце Безу, в якому нульовий елемент $\bar{0}$ адекватний. Згідно з $(R/aR)/(aR/rad(a)) \cong R/rad(a)$ – регулярне кільце, яке збігається зі своїм кільцем дробів $Q(R/rad(a))$. Оскільки регулярне кільце є IF-кільцем, то одержуємо такий результат.

Теорема 6. *Адекватне кільце є скінченим дробовим IF-кільцем.*

Зауважимо, що в [12, приклад 2.3] наведено приклад адекватного кільця, яке не є дробовим IF-кільцем у сенсі означення з праці [3].

Теорема 7. *Дробово-регулярне (скінчене дробове IF-кільце) кільце Безу стабільного рангу 2 є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Для доведення достатньо довести, що модуль M, який відповідає матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$ є прямою сумою циклічних підмодулів. Зауважимо, що модуль можна розглядати як R/acR-модуль. Нехай $P = rad(ac)$. Оскільки кільце R є дробово регулярним, то кільце $\bar{R} = R/P$ є напівспадковим. Тоді $\bar{M} = M/PM$ є модулем, який відповідає матриці $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{0} \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix}$. Оскільки $\bar{R}$ – напівспадкове кільце і $\bar{a}\bar{c} = \bar{0}$, то існує такий ідемпотент $\bar{e} \in \bar{R}$, що $\bar{a} = \bar{e}\bar{a}$ і $\bar{c} = (\bar{1}-\bar{e})\bar{c}$. Легко побачити, що $\bar{M}\bar{e}$ відповідає матриці $\bar{e}\bar{A}$ як $\bar{e}\bar{R}$-модуль і $\bar{M}(\bar{1}-\bar{e})$ матриці $(\bar{1}-\bar{e})\bar{A}$ як $(\bar{1}-\bar{e})\bar{R}$-модуль. Кільця eR і $(1-e)R$ як гомоморфні образи R є кільцями Ерміта. Тому існують такі оборотні матриці $\bar{P}_1 \in M_2(\bar{e}\bar{R})$ і $\bar{Q}_1 \in M_2((\bar{1}-\bar{e})\bar{R})$, що

$$\bar{P}_1\bar{e}\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{s} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad (\bar{1}-\bar{e})\bar{A}\bar{Q}_1 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{t} \end{pmatrix}.$$

Приймемо $\bar{P} = (\bar{1}-\bar{e})\bar{E} + \bar{P}_1$ і $\bar{Q} = \bar{e}\bar{E} + \bar{Q}_1$, де $\bar{E}$ – оборотна матриця другого порядку над $\bar{R}$. Тоді $\bar{P}, \bar{Q}$ – такі оборотні над $\bar{R}$, що

$$\bar{P}\bar{A}\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{s} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{t} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що можемо припустити, що $\bar{s}$ є дільником $\bar{t}$. Також очевидно, що $\bar{a}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} + \bar{c}\bar{R} = \bar{s}\bar{R}$ і $\bar{s}$ є оборотним елементом в $\bar{R}$. Звідси випливає, що $\bar{M}$ циклічний $\bar{R}$-модуль. Згідно з лемою Накаями модуль M є циклічним модулем над кільцем R/acR. Звідси M є циклічним над R і $M \cong R/tR$ [13]. Отже, R є кільцем елементарних дільників. □

Список використаної літератури

1. *Vamos P.* The decomposition of finitely generated modules and fractionally self-injective rings / *P. Vamos* // J. London Math. Soc. – 1977. – Vol. 16 (2). – P. 209-220.
2. *Facchini A.* FP-injective quotient rings and elementary divisor rings / *A. Facchini, C. Faith* // Commut. Ring Theory Proc. Int. conf. – 1996. – Vol. 185. – P. 293-302.
3. *Zabavsky B.V.* Fractionally regular Bezout rings / *B.V. Zabavsky* // Math. Stud. – 2009. – Vol. 32. – P. 76-80.
4. *Colby R.R.* Rings which have flat injections / *R.R. Colby* // J. Algebra. – 1975. – Vol. 35. – P. 239-252.
5. *Pardo I. Gomes* On some properties of IF-rings / *Pardo I.Gomes, N.R. Gonzalez* // Questions Arithmetical. – 1983. – Vol. 5. – P. 335-405.
6. *Jain S.* Flat and FP-injectivity / *S. Jain* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 41. – P. 437-442.
7. *Matlis E.* Commutative semicoherent and semiregular rings / *E. Matlis* // J. Algebra. – 1985. – Vol. 95. – P. 343-372.
8. *Stenström B.* Coherent rings and FP-injective modules / *B. Stenström* // J. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 2. – P. 323-329.
9. *Maltis E.* The minimal spectrum of a reduced ring / *E. Maltis* // Illinois J. Math. – 1983. – Vol. 27, №3. – P. 353-391.
10. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range /*B.V. Zabavsky* // Alg. and Discr. Math. – 2005. – Vol. 1. – P. 151-165.
11. *Забавський Б.В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 / *Б.В. Забавський* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, №4. – С. 550-554.
12. *Couchot F.* The λ-dimension of commutative arithmetic ring / *F. Couchot* // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31. – P. 3143-3158.
13. *Larsen M.* Elementary divisor rings and finitely presented modules / *M. Larsen, W. Lewis, T. Shores* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 187. – P. 231-248.
14. *Забавский Б.В.* Адекватное в нуле кольцо является кольцом со свойством замены / *Б.В. Забавский, С.И. Белявская* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2011/2012. – Т. 17, №3. – P. 61-66.

Стаття: надійшла до редакції 12.04.2013
прийнята до друку 16.10.2013

FRACTIONAL IF-BEZOUT RING

Bogdan ZABAVSKY, Andriy GATALEVYCH

Ivan Franko Nathional University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Proved that IF Bezout ring is fractionally regular, and if its stable range does not exceed 2, then fractionally regular IF Bezout ring is elementary divisor ring.

Key words: Bezout ring, IF ring, fractionally IF ring, stable range, elementary divisor ring.

ДРОБНОЕ IF-КОЛЬЦО БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСКИЙ, Андрей ГАТАЛЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Івана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доказано, что дробное IF-кольцо Безу является дробно-регулярным, и если его стабильный ранг не превышает 2, то дробное IF-кольцо Безу является кольцом элементарных делителей.

Ключевые слова: кольцо Безу, IF-кольцо, дробное IF-кольцо, стабильный ранг, кольцо элементарных делителей.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 57–64
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 57–64

УДК 519.21

АДИТИВНІ ФУНКЦІОНАЛИ, ЗАДАНІ НА СІМЕЙСТВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Олександр ЛЕБЕДЄВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: alex-lebedev@hotmail.com

Досліджено адитивні функціонали, які задані у випадковому середовищі. Пораховано середній прибуток, ризик і міру ризику у випадку задання марковського процесу у випадковому середовищі з дискретним, неперервним часом та відомим початковим станом. Також розглянуто усереднені сумарні прибутки за одиницю часу у випадку, коли випадковий процес еволюціонує з часом та є марковським або напівмарковським із скінченною множиною станів.

Ключові слова: марковський процес, прийняття рішень, випадкове середовище, адитивний функціонал.

1. Вступ. Розглядаємо систему, в якої простір станів S складається зі скінченної кількості елементів. Нехай S збігається з множиною цілих чисел $S = \{1, 2, ..., N\}$. Кожному стану $i \in S$ відповідає скінченна множина K_i рішень (або альтернатив), елементи якої позначимо $k = 1, 2, ..., K_i$. Простором політик K назвемо прямий добуток множин рішень, тобто $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_N$. Розглядається задача прийняття послідовних рішень, яка полягає у виборі рішень при спостереженні за поточними станами в моменти $n = 0, 1, 2, ...$

Якщо система перебуває в стані $i \in S$ і приймає рішення $k \in K_i$, то система отримує дохід r_i^k, її стан у наступний момент часу визначається ймовірнісним законом p_{ij}^k $(j \in S)$, де p_{ij}^k – ймовірність того, що система зі стану i при виборі рішення k потрапить у стан j. Припускаємо, що дохід r_i^k обмежений при всіх $i \in S$ і $k \in K_i$. Крім того,

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^k = 1, \quad p_{ij}^k \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i, j \in S, \quad k \in K_i. \tag{1}$$

Розглянемо процес з переоцінкою. Нехай $\beta,\ 0 \leqslant \beta < 1,$ – коефіцієнт переоцінки. Його сенс полягає в тому, що одиниця доходу через час n (наприклад, n днів) становитиме β^n одиниць. Введення коефіцієнта переоцінки з математичного погляду зору веде до обмеження сумарного середнього прибутку.

Задамо початковий розподіл

$$a = (a_1, a_2, ..., a_N), \tag{2}$$

де

$$\sum_{i \in S} a_i = 1, \quad a_i \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i \in S. \tag{3}$$

Тоді система описується неоднорідним ланцюгом Маркова з прибутками [1], [5].

2. Марковські процеси прийняття рішень з переоцінкою у випадковому середовищі.

2.1. Дискретний час. Зовнішні чинники будемо описувати через клас подій $A_1, A_2, \ldots, A_m$, які називаються станами, причому $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – утворюють повну групу попарно несумісних подій.

Позначимо

$$\mathsf{P}(A_i) = p_i, \quad p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{4}$$

Тут p_i – ймовірність потрапляння у відповідне середовище A_i.

У кожному фіксованому стані середовища задано керування, набір стратегій і політик, коефіцієнт переоцінки та вектор-стовпець сумарних середніх прибутків [5]

$$V_\beta(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P_n(\pi) r(f_{n+1}). \tag{5}$$

Потрібно порахувати середній сумарний прибуток, ризик і міру ризику.

Порахуємо середній прибуток

$$\begin{gathered} p_1 V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1}) + p_2 V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2}) + \cdots + p_m V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m}) = \\ = p_1 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_1}^n P_n^{A_1}(\pi^{A_1}) r(f_{n+1}^{A_1}) + p_2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_2}^n P_n^{A_2}(\pi^{A_2}) r(f_{n+1}^{A_2}) + \cdots + \\ + p_m \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_m}^n P_n^{A_m}(\pi^{A_m}) r(f_{n+1}^{A_m}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i}). \end{gathered} \tag{6}$$

Ризик визначаємо як середньоквадратичне відхилення

$$\begin{gathered} p_1 \left(V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})\right)^2 + p_2 \left(V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})\right)^2 + \cdots + p_m \left(V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\right)^2 - \\ - \left(p_1 V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1}) + p_2 V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2}) + \cdots + p_m V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{m} p_i \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\right)^2. \end{gathered} \tag{7}$$

Тоді величина ризику набуде такого вигляду:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\right)^2}. \tag{8}$$

Мірою ризику вважаємо

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1})\Big)^2-\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1})\Big)^2}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1})}. \tag{9}$$

2.2. Неперервний час. Нехай тепер стани зовнішнього середовища $A_1, A_2, ..., A_m$ змінюються з часом та утворюють марковський процес $x(t)$ із скінченною множиною станів $A_1, A_2, ..., A_m$.

Нехай, $p_1(t), p_2(t), ..., p_m(t)$-ймовірності перебування середовища у відповідних станах

$$\begin{gathered} p_1(t)=P\{x(t)=A_1\}, \quad ..., \quad p_m(t)=P\{x(t)=A_m\}, \\ p_i(t)=P\{x(t)=A_i\}. \end{gathered} \tag{10}$$

У кожному фіксованому стані задано керування, набір стратегій і політик, коефіцієнт переоцінки та вектор-стовпець сумарних середніх прибутків [5]

$$V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i})=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1}), \quad \text{де} \quad i=1,...,m. \tag{11}$$

Треба порахувати середній сумарний прибуток, ризик і міру ризику.

Порахуємо середній прибуток

$$\begin{gathered} p_1(t)V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})+p_2(t)V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})+\cdots+p_m(t)V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})= \\ =p_1(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_1}P_n^{A_1}(\pi^{A_1})r(f^{A_1}_{n+1})+p_2(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_2}P_n^{A_2}(\pi^{A_2})r(f^{A_2}_{n+1})+\cdots+ \\ +p_m(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_m}P_n^{A_m}(\pi^{A_m})r(f^{A_m}_{n+1})=\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1}). \end{gathered} \tag{12}$$

Ризик рахуємо як середньоквадратичне відхилення

$$\begin{gathered} p_1(t)\left(V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})\right)^2+p_2(t)\left(V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})\right)^2+\cdots+p_m(t)\left(V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\right)^2- \\ -\Big(p_1(t)V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})+p_2(t)V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})+\cdots+p_m(t)V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\Big)^2= \\ =\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1})\Big)^2-\left(\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1})\right)^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Тоді величина ризику набуде такого вигляду:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1})\Big)^2-\left(\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n_{A_i}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f^{A_i}_{n+1})\right)^2}. \tag{14}$$

Мірою ризику вважаємо

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2 - \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})}. \qquad (15)$$

3. Адитивні функціонали прибутку. Нехай $x(t)$ марковський процес із скінченною множиною станів $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$. Позначимо τ_0 – момент першого виходу з початкового стану

$$\tau_0 = \inf_{t>0}\{x(t) \neq x(0)\}. \qquad (16)$$

Тоді $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \cdots$ – відповідний перший, другий, ..., n-й моменти виходу з попереднього стану. $x(\tau_1), x(\tau_2), \ldots, x(\tau_n), \ldots$ – утворюють однорідний ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями. $P\{x(\tau_n) = A_j | x(\tau_{n-1}) = A_i\} = p_{ij}$, p_{ij} – ймовірність того, що в момент τ_n система перебуває в стані A_j за умови, що в момент часу τ_{n-1} вона перебувала в стані A_i.

Час перебування у кожному фіксованому стані розподілений за показниковим розподілом і залежить лише від номеру цього стану [6]

$$P\{\tau > t \mid x(0) = A_i\} = e^{-\lambda_i t}. \qquad (17)$$

Матриця перехідних ймовірностей за один крок

$$P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m1} & p_{m2} & \ldots & p_{mm} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

є нерозкладною та стохастичною, тобто

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1. \qquad (19)$$

Тоді існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1, p_2, \ldots, p_m$ такий, що

$$\sum p_{ij} p_j = p_i, \quad \lim P\{x(t) = A_j \mid x(0) = A_i\} = p_j. \qquad (20)$$

Теорема 1 (Ергодична)**.** [3] *Нехай виконуються такі умови:* ***а)*** *стани вкладеного ланцюга Маркова утворюють один додатний клас із стаціонарними ймовірностями p_j;* ***б)*** *всі стани ланцюга Маркова регулярні, і коефіцієнти q_j задовольняють умову $\sum p_j q_j^{-2} < \infty$;* ***в)*** *функція $f(x)$ на станах ланцюга така, що $\sum f^2(i) p_i q_i^{-2} < \infty$. Тоді з ймовірністю* 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t))dt = \frac{\sum f(i) p_i \frac{1}{q_i}}{\sum p_i \frac{1}{q_i}}. \qquad (21)$$

Використовуючи цю теорему, ми можемо стверджувати, оскільки функція $V_\beta^{x(t)}$ є скінченною, що усереднений сумарний прибуток за одиницю часу збігається майже напевно до такої величини:

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t V_\beta^{x(u)}du \xrightarrow{\text{м.н.}} \frac{\sum\limits_{i=1}^m V_\beta^{A_i} p_i \frac{1}{\lambda_i}}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}} \tag{22}$$

або

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \sum_{n=0}^\infty \beta_{x(u)}^n P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)}) r(f_{n+1}^{x(u)})du = \frac{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i} \sum\limits_{n=0}^\infty \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}}. \tag{23}$$

Далі, знайшовши усереднений сумарний прибуток за одиницю часу, можемо порахувати усереднений сумарний прибуток за весь період часу t. Тому

$$\int\limits_0^t V_\beta^{x(u)}du \xrightarrow{\text{м.н.}} t\frac{\sum\limits_{i=1}^m V_\beta^{A_i} p_i \frac{1}{\lambda_i}}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}} \tag{24}$$

або

$$\int\limits_0^t \sum_{n=0}^\infty \beta_{x(u)}^n P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)}) r(f_{n+1}^{x(u)})du = t\frac{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i} \sum\limits_{n=0}^\infty \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}}. \tag{25}$$

4. Адитивні функціонали прибутку у випадку напівмарковського випадкового процесу. Розглянемо процес, для якого час перебування в кожному стані є випадковою величиною, а самі рішення приймають у випадкові моменти, тобто процеси прийняття рішень з неперервним часом.

Ми обмежимось напівмарковськими процесами прийняття рішень. Напівмарковський процес поєднує в собі властивості марковських процесів і процесів відновлення. Тобто, напівмарковський процес – це такий випадковий процес, який переходить із одного стану в інший відповідно до заданих розподілів ймовірностей, а час перебування процесу у будь-якому стані є випадковою величиною, розподіл якої залежить від цього стану та від стану, в який буде зроблено наступний перехід процесу.

Нехай випадковий процес $x(t)$, який характеризує еволюцію зовнішнього середовища, є напівмарковським випадковим процесом. Тоді $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ послідовні моменти виходу з початкового стану.

Час перебування у фіксованому стані не розподілений за показниковим розподілом. Позначимо

$$P\{\tau > t \mid x(0) = i\} = F_i(t). \tag{26}$$

Вважаємо, що середній час перебування в стані скінченний, тобто $E_i(\tau) < \infty$, це означає, що $\int_0^\infty tdF_i(t) = E_i(\tau) < \infty$ $x(\tau_1), \ldots, x(\tau_n)$ – утворюють ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями p_{ij}. $P\{x(\tau_n) = j \mid x(\tau_{n-1}) = i\} = p_{ij}$ – ймовірність того, що в момент τ_n система перебуває в стані j за умови, що в момент часу τ_{n-1} вона перебувала в стані i.

Аналогічно, ми можемо порахувати усереднений сумарний прибуток за одиницю часу, використавши ергодичну теорему. Оскільки функція $V_\beta^{x(u)}$ скінченна, то отримаємо, що усереднений сумарний прибуток за одиницю часу збігається з ймовірністю 1 до такої сталої величини $\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} V_\beta^i E_i(\tau) p_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i(\tau)}$, тобто

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t V_\beta^{x(u)} du \xrightarrow{\text{м.н.}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} V_\beta^i E_i(\tau) p_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i(\tau)} \tag{27}$$

або

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{x(u)}^n P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)}) r(f_{n+1}^{x(u)}) du = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} E_i(\tau) p_i \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_i^n P_n^i(\pi^i) r(f_{n+1}^i)}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i(\tau)}. \tag{28}$$

Далі, знайшовши усереднений сумарний прибуток за одиницю часу, можемо порахувати усереднений сумарний прибуток за весь період часу t. Тому

$$\int\limits_0^t V_\beta^{x(u)} du \xrightarrow{\text{м.н.}} t\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} V_\beta^i E_i(\tau) p_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i(\tau)} \tag{29}$$

або

$$\int\limits_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{x(u)}^n P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)}) r(f_{n+1}^{x(u)}) du = t\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} E_i(\tau) p_i \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_i^n P_n^i(\pi^i) r(f_{n+1}^i)}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i(\tau)}. \tag{30}$$

5. Висновки. Ми досліджували N-вимірний вектор сумарних середніх прибутків $V_\beta(\pi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta^n P_n(\pi) r(f_{n+1})$, який у кожному стані середовища $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ має свою відповідну матрицю перехідних ймовірностей, вектор прибутків, коефіцієнт переоцінки та стратегію. Розглянули марковські процеси прийняття рішень у випадковому середовищі з дискретним і неперервним часом, коли початковий стан системи був відомим. Для цих випадків знайдено середній прибуток, ризик і міру ризику.

Також розглядали усереднені сумарні прибутки за одиницю часу у випадку, коли зовнішнім середовищем є випадковий процес $x(t)$, що еволюціонує з часом, тобто є марковським процесом із скінченною множиною станів $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ або напівмарковським процесом.

Список використаної літератури

1. *Бобиляк А.М.* Метод пошуку оптимальних стратегій марковського процесу прийняття рішення на основі властивостей власного вектора / *А.М. Бобиляк* // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 17-25.
2. *Боднар Т.Д.* Оптимальний інвестиційний портфель для різних типів розподілів повернень / *Т.Д. Боднар* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Т. 67. – С. 5-13.
3. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов: Т. II / *И.И. Гихман, А.В. Скороход.* – М.: Наука, 1973. – 641 с.
4. *Єлейко Т.Я.* Розробка методів прискореного моделювання та стохастичної оптимізації в корпоративних моделях: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Т.Я. Єлейко.* – К., 2010. – 124 с.
5. *Майн Х.* Марковские процессы принятия решений / *Х. Майн, С. Осаки.* – М.: Наука, 1977. – 176 с.
6. *Скороход А.В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів / *А.В. Скороход.* – К.: Вища шк., 1975. – 296 с.

Стаття: надійшла до редакції 02.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ADDITIVE FUNCTIONALS PREDETERMINED ON A FAMILY OF MARKOV PROSESSES

Yaroslav YELEYKO, Oleksandr LEBEDIEV

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: alex-lebedev@hotmail.com

Additive functionals predetermined in a random environment are studied in the article. Average income, the risk and the measure of risk in the case of setting the Markov process in a random environment with discrete and continuous time and a given initial state are calculated. Also the average total profits per time unit in the case when the random process evolves over time and is a Markov's or semi-Markov's with a finite set of states are considered.

Key words: Markov process, decision theory, random environment, additive functional.

АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАДАННЫЕ НА СЕМЕЙСТВЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Александр ЛЕБЕДЕВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: alex-lebedev@hotmail.com

Изучено аддитивные функционалы заданные в случайной среде. Вычислено средний доход, риск и мера риска в случае задания марковского процесса в случайной среде с дискретным и непрерывным временем и известным начальным состоянием. Также рассмотрены усредненные суммарные прибыли за единицу времени, в случае когда случайный процесс эволюционирует со временем, и является марковским или полумарковским с конечным множеством состояний.

Ключевые слова: марковский процесс, принятие решений, случайная среда, аддитивный функционал.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 65–77
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 65–77

УДК 517.95

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У ЧАСОВІЙ СМУЗІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Володимир ІЛЬКІВ, Зіновій НИТРЕБИЧ

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Бандери, 12, Львів, 79013
e-mail: ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

Досліджено множину розв'язків задачі Діріхле у смузі для однорідного диференціального рівняння з частинними похідними з двома змінними другого порядку за однією (часовою) змінною, за якою задано однорідні крайові умови, та загалом нескінченного порядку за іншою (просторовою) змінною. Знайдено необхідні та достатні умови існування нетривіальних розв'язків цієї некоректної задачі у класі квазіполіномів і запропоновано диференціально-символьний метод їхньої побудови. Результати дослідження ядра задачі Діріхле у часовій смузі використано для деяких рівнянь математичної фізики.

Ключові слова: задача Діріхле, існування розв'язків.

1. Вступ. Відомо, що задачі з даними на всій границі області, зокрема смуги, для гіперболічних диференціальних рівнянь із частинними похідними є некоректними крайовими задачами [1, 2, 9, 10]. Прикладом такої задачі є задача Діріхле у часовій смузі $S_h \equiv \{(t,x): \ t \in (0,h), \ x \in \mathbb{R}\}$, де $h > 0$, для рівняння коливань струни

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ &U(0,x) = \varphi_1(x), \quad U(h,x) = \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Некоректність задачі (1) зумовлюється насамперед тим, що ядро цієї задачі, тобто множина нетривіальних розв'язків відповідної однорідної задачі

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad U(0,x) = U(h,x) = 0, \tag{2}$$

не є порожньою. Нетривіальними розв'язками задачі (2) є, наприклад, функції вигляду

$$U_k(t,x) = \sin\frac{\pi k t}{h} \sin\frac{\pi k x}{a h}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

У праці [1] серед задач Діріхле у смузі виділено коректні задачі (так звані задачі з нескінченним типом), які характеризуються розв'язками з певною поведінкою на нескінченності. Такі задачі мають лише тривіальний розв'язок.

Поданий вище приклад існування нетривіальних розв'язків (3) задачі (2) свідчить про те, що ці елементи ядра задачі містяться у класі квазіполіномів. Зокрема, кожну функцію з формули (3) для $k \in \mathbb{N}$ можна зобразити квазіполіномом

$$U_k(t,\, x) = \frac{1}{4}\, e^{\frac{i\pi}{ah}(at-x)} + \frac{1}{4}\, e^{-\frac{i\pi}{ah}(at-x)} - \frac{1}{4}\, e^{\frac{i\pi}{ah}(at+x)} - \frac{1}{4}\, e^{-\frac{i\pi}{ah}(at+x)}, \quad i^2 = -1.$$

Отже, важливим є питання дослідження розв'язків однорідної задачі Діріхле у часовій смузі для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку за часом і загалом нескінченного порядку за просторовою змінною зі сталими коефіцієнтами, яке як частковий випадок містить рівняння коливань струни, Клейна-Гордона-Фока, телеграфне рівняння, рівняння Лапласа, теорії пружності та ін. У випадку існування нетривіальних розв'язків однорідної задачі для їхньої побудови використаємо диференціально-символьний метод [5, 6] розв'язування задач для рівнянь із частинними похідними, що допускають відокремлення змінних, а також ідею його використання для побудови елементів ядра задачі з нелокальною умовою, запропоновану в [4]. Дослідженню крайової задачі у смузі для диференціального рівняння з частинними похідними за допомогою диференціально-символьного методу присвячена також праця [8].

2. Формулювання задачі. Мета нашої праці – дослідження у смузі S_h множини розв'язків $U = U(t,x)$ задачі Діріхле

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\, \frac{\partial}{\partial x}\right) U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t} + b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U = 0, \tag{4}$$

$$U(0,\, x) = U(h,\, x) = 0, \tag{5}$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є довільні цілі функції $a = a(\nu)$, $b = b(\nu)$.

Зауваження 1. Дію диференціального виразу $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з цілим символом

$$b\,(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \nu^j, \quad b_j \in \mathbb{C},$$

на нескінченно диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію U розуміємо так: $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U \equiv \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j \frac{\partial^j U}{\partial x^j}$.

Розв'язком задачі (4), (5) вважаємо цілу функцію

$$U = \sum_{k_0+k_1 \geq 0} u_{k_0k_1} t^{k_0} x^{k_1}, \quad k_0, k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad u_{k_0k_1} \in \mathbb{C},$$

змінних t і x, яка задовольняє рівняння (4) та умови Діріхле (5).

Очевидно, що задача (4), (5) має тривіальний розв'язок. Знайдемо умови існування лише тривіального розв'язку задачі (4), (5), а також зазначимо елементи ядра задачі (4), (5) і, що важливо, побудуємо ці елементи на підставі диференціально-символьного методу в явному вигляді у випадку нетривіального ядра.

3. Основні результати.

3.1. Розв'язність задачі Діріхле. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)\equiv\left(\frac{d^2}{dt^2}+2a(\nu)\frac{d}{dt}+b(\nu)\right)T(t,\nu)=0, \tag{6}$$

яке побудовано на підставі рівняння (4).

Нехай p_a та p_b – степені поліномів $a=a(\nu)$ та $b=b(\nu)$, якщо ж a не є поліномом, то $p_a=\infty$, аналогічно для функції b.

Елементи нормальної в точці $t=0$ фундаментальної системи розв'язків рівняння (6) набувають вигляду

$$T_0(t,\,\nu)=e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}+\operatorname{ch}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]\right\},$$

$$T_1(t,\,\nu)=e^{-a(\nu)t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}},$$

де $D(\nu)=a^2(\nu)-b(\nu)$, причому $4D(\nu)$ – дискримінант полінома

$$L(\lambda,\nu)=\lambda^2+2a(\nu)\lambda+b(\nu).$$

Зокрема, якщо ν_0 – нуль функції $D(\nu)$, то

$$T_0(t,\,\nu_0)=e^{-a(\nu_0)t}\left\{a(\nu_0)t+1\right\},\quad T_1(t,\,\nu_0)=te^{-a(\nu_0)t}.$$

Оскільки за припущенням $a(\nu)$, $b(\nu)$ – цілі функції, то за теоремою Пуанкаре ([11, с. 59]) функції $T_0(t,\,\nu)$, $T_1(t,\,\nu)$ є цілими функціями стосовно параметра ν. Надалі важливим буде ще й порядок p цілих стосовно ν функцій $T_0(t,\,\nu)$, $T_1(t,\,\nu)$, який визначають ([3, с. 83]) за формулою $p=\max\{p_a,\ p_b/2\}$. Якщо $a(\nu)$, $b(\nu)$ – поліноми, то $p<\infty$, і $p=\infty$, якщо $a(\nu)$ або $b(\nu)$ не є поліномом.

Відповідно до диференціально-символьного методу ([5, с. 106]) запишемо сім'ю формальних розв'язків рівняння (4), тобто сім'ю формальних рядів, які задовольняють (4)

$$U(t,\,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_0(t,\,\nu)e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0}+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_1(t,\,\nu)e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0}, \tag{7}$$

де $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ – диференціальні вирази з цілими символами, які підбираємо так, щоб рівність (7) визначала розв'язок задачі (4), (5).

Спочатку задовольняємо першу умову (5). Оскільки $T_0(0,\,\nu)=1$, $T_1(0,\,\nu)=0$, то

$$U(0,\,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0}=\varphi(x)=0.$$

Отже, формальні розв'язки рівняння (4), що справджують умову $U(0,\,x)=0$, за формулою (7), набувають вигляду

$$U(t,\,x)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=0}. \tag{8}$$

Задовольняючи другу умову $U(h, x) = 0$, одержуємо для вибору функції ψ тотожність

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=0} \equiv 0. \tag{9}$$

Розглянемо два можливі випадки.

3.1.1. Випадок $\mathbf{D}(\nu) \equiv \mathbf{D} = \mathrm{const}$. Тоді $b(\nu) = a^2(\nu) - D$, рівняння (4) набуває вигляду

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 U = DU,$$

а тотожність (9) є такою:

$$\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]}{\sqrt{D}}\,\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0. \tag{10}$$

Якщо виконується нерівність $h\sqrt{D} \neq \pi k i$ для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, тобто $\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]}{\sqrt{D}} \neq 0$, то одержуємо $\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu x}\right\}\big|_{\nu=0} \equiv 0$. Функція

$$V(t,x) = \psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}$$

є розв'язком задачі Коші для однорідного рівняння $\frac{\partial V}{\partial t} + a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V = 0$ з однорідною початковою умовою $V(h,x) = 0$, тому завдяки єдиності розв'язку задачі Коші одержуємо, що $V(t,x) \equiv 0$ в області S_h. Зокрема, при $t = 0$ отримаємо

$$V(0,x) = \psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0} = \psi(x) = 0.$$

Отже, у цьому разі за формулою (8) одержуємо лише тривіальний розв'язок задачі (4), (5).

Якщо ж для якогось $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$h\sqrt{D} = \pm\pi k i, \tag{11}$$

то $\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right] = 0$, тотожність (10) справджується, формальні розв'язки задачі (4), (5) набувають вигляду (8), а саме

$$U_k(t,\,x) = \frac{\sin(\pi k t/h)}{\pi k/h}\,\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0},\quad k \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Розв'язки (12) будуть фактичними розв'язками задачі (4), (5), якщо вони є цілими функціями змінних t та x. Це справджується для довільної цілої функції $\psi(x)$, порядок q якої має такі обмеження ([7], с. 316):

1) $q = 1$, якщо $a(\nu)$ не є поліномом ($p_a = \infty$) ;
2) $1 < q < \frac{p_a}{p_a-1} \leq 2$, якщо $2 \leq p_a < \infty$;
3) $q \geq 0$, якщо $p_a \leq 1$, тобто $a(\nu)$ – лінійна функція.

Для лінійної функції $a(\nu) = A\nu + B$, де $A, B \in \mathbb{C}$, отримуємо

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = e^{-Bt}\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu(x-At)}\right\}\Big|_{\nu=0} = e^{-Bt}\psi\left(x - At\right)$$

і з формули (12) одержуємо

$$U_k(t,\,x)=\frac{\sin\left(\pi kt/h\right)}{\pi k/h}e^{-Bt}\psi\left(x-At\right),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

У формулі (13) немає операції диференціювання, тому за функцію ψ достатньо взяти довільну двічі неперервно диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію. Якщо $\psi=\psi(x)$ – квазіполіном, то $U_k(t,\,x)$, $k\in\mathbb{N}$, також квазіполіноми за змінними t та x.

Отже, у випадку сталого дискримінанта задача (4), (5) має тривіальний розв'язок, якщо $D\neq-\left(k\pi/h\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$, або має нескінченновимірне ядро, що визначається класом цілих функцій деякого порядку для зчисленної кількості значень $D=-\left(k\pi/h\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$.

Приклад 1. Розв'язати в області S_π задачі Діріхле

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\pm 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+1\right)\right]U(t,\,x)=0,\quad t\in(0,\pi),\quad x\in\mathbb{R},\\&U(0,\,x)=U(\pi,\,x)=0,\quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{14}$$

▼ Дані задачі є задачами (4), (5), в яких $a(\nu)=\pm\nu$, $b(\nu)=\nu^2+1$, $h=\pi$, $D(\nu)=D=-1$. Умова (11) виконується для $k=\pm1$. Розв'язки задачі (14) за формулою (13) набувають вигляду

$$U(t,\,x)=\psi(x\mp t)\sin t,$$

де ψ – довільна двічі неперервно диференційовна функція. Ядра задач (14) є нескінченновимірними. ▲

Приклад 2. Розв'язати в області S_1 задачу Діріхле для бікалоричного рівняння

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]^2U(t,\,x)=0,\quad t\in(0,1),\quad x\in\mathbb{R},\quad a\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\\&U(0,\,x)=U(1,\,x)=0,\quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

▼ Отримали $a(\nu)=-a^2\nu^2$, $b(\nu)=a^4\nu^4$, $h=1$, $D(\nu)\equiv D=0$. Отже, задача має лише нульовий розв'язок, тобто ядро задачі тривіальне. ▲

3.1.2. Випадок $\mathbf{D}(\nu)\neq\mathrm{const}$. Розглянемо множину

$$M=\left\{\nu\in\mathbb{C}:\quad\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}=0\right\}, \tag{15}$$

яка є об'єднанням за натуральним параметром k множин нулів цілих функцій $D_k(\nu)\equiv h^2D(\nu)+k^2\pi^2$.

Множина M як множина нулів цілої функції $\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}$ у цьому випадку складається з нескінченної кількості відмінних між собою нулів γ_1, γ_2, ... відповідно скінченних кратностей p_{γ_1}, p_{γ_2}, ..., причому $|\,\gamma_n\,|\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Очевидно, що γ_j є нулем кратності p_{γ_j} функції D_k з деяким номером $k=k(\gamma_j)$, є нулем кратності $p_{\gamma_j}-1$ функції $\frac{dD}{d\nu}$, що випливає з рівностей похідних $\frac{d^sD_k}{d\nu^s}=h^2\frac{d^sD}{d\nu^s}$ для $s\in\mathbb{N}$, і не є нулем функції D.

Теорема 1. *Нехай функція* $\psi(x),\ x \in \mathbb{R}$, *є квазіполіномом вигляду*

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x) e^{\alpha_j x}, \qquad \deg Q_j(x) = n_j \le p_{\alpha_j} - 1, \tag{16}$$

в якому $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in M$, $Q_j(x)$ *– поліноми з комплексними коефіцієнтами степенів* $n_j \le p_{\alpha_j} - 1$, $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$. *Тоді функція (8), тобто*

$$U(t,\,x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ e^{-a(\nu)t + \nu x} \frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}} \right\} \Bigg|_{\nu = \alpha_j}, \tag{17}$$

є розв'язком задачі (4), (5). Навпаки, якщо розв'язок $U(t,\,x)$ *задачі (4), (5) є квазіполіномом, тобто* $U(t,\,x) = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{N} P_{lj}\,(t,x)\, e^{\beta_l t + \alpha_j x}$, *де* $m, N \in \mathbb{N}$, $P_{lj}\,(t,x)$ *– поліноми змінних* t *та* x *з комплексними коефіцієнтами степеня* n_j *за змінною* x, $\beta_l, \alpha_j \in \mathbb{C}$, $\beta_r \neq \beta_l$ *для* $r \neq l$, $r, l = \overline{1, N}$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ *для* $k \neq j$, $k, j = \overline{1, m}$, *то* $\alpha_j \in M$, $n_j < p_{\alpha_j}$ *для* $j = \overline{1, m}$ *і цей розв'язок набув вигляду (17), в якому* $Q_j(x) = \sum\limits_{l=1}^{N} \left(\beta_j P_{lj}(0,x) + \frac{\partial P_{lj}}{\partial t}(0,x) \right)$.

Доведення. Д о с т а т н і с т ь. Нехай $\psi(x)$ – функція вигляду (16). Тоді функція (8), очевидно, є розв'язком рівняння (4) і виконується умова $U(0,\,x) = 0$. Функцію (8) для квазіполінома (16) можна записати у вигляді (17) і

$$U(h,\,x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ e^{-a(\nu)h + \nu x} \frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}} \right\} \Bigg|_{\nu = \alpha_j}. \tag{18}$$

Оскільки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in M$, то $\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\alpha_j)}\right]}{\sqrt{D(\alpha_j)}} = 0$ і

$$\frac{\partial^k}{\partial \nu^k} \left[e^{-a(\nu)h + \nu x} \frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}} \right] \Bigg|_{\nu = \alpha_j} = 0$$

для $k = \overline{1, p_{\alpha_j} - 1}$, $j = \overline{1, m}$. Тому усі доданки в рівності (18) тотожно дорівнюють нулеві.

Н е о б х і д н і с т ь. Припустимо, що розв'язком задачі (4), (5) є квазіполіном вигляду $U(t,\,x) = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{N} P_{lj}\,(t,x)\, e^{\beta_l t + \alpha_j x}$. Позначимо $\frac{\partial U}{\partial t}\big|_{t=0} = \psi(x)$. Тоді $\psi(x)$ є квазіполіномом вигляду $\psi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j(x) e^{\alpha_j x}$, де $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $Q_j(x)$ – поліноми степенів не вище n_j, $j = \overline{1, m}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$. Тоді $U(t,x)$ як єдиний розв'язок задачі Коші

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,\,x) = 0,$$
$$U(0,x) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$$

можна подати у вигляді

$$U(t,\,x)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu x}T_1(t,\nu)\}\Big|_{\nu=0},$$

де $T_1(t,\nu)\;=\;e^{-a(\nu)t}\frac{\mathrm{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}$ – елемент нормальної фундаментальної системи розв'язків рівняння (6). З виконання умови $U(h,x)\equiv 0$ одержуємо тотожність

$$\sum_{j=1}^{m}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\,e^{\nu x}T_1(h,\nu)\,\}\Big|_{\nu=\alpha_j}\equiv 0.$$

Завдяки лінійній незалежності функцій

$$e^{\alpha_1 x},\;xe^{\alpha_1 x},\;x^2e^{\alpha_1 x},\ldots,x^{n_1}e^{\alpha_1 x},\ldots,e^{\alpha_m x},\;xe^{\alpha_m x},\;x^2e^{\alpha_m x},\ldots,x^{n_m}e^{\alpha_m x}$$

остання тотожність виконується тоді та лише тоді, коли $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_m$ є нулями функції $T_1(h,\nu)$ кратностей не нижче $p_{\alpha_1},\,p_{\alpha_2},\,\ldots,\,p_{\alpha_m}$, звідки випливають нерівності $n_1<p_{\alpha_1},\,\ldots,\,n_m<p_{\alpha_m}$. Теорему доведено. □

Зауваження 2. Теорема 1 дає змогу будувати розв'язки задачі (4), (5) квазіполіномного вигляду завдяки цілості символів операторів $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з як завгодно великою кількістю доданків. Однак множина розв'язків задачі (4), (5) є значно ширшою. Її елементами є також збіжні функціональні ряди

$$U(t,\,x)=\sum_{j=1}^{\infty}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\frac{\mathrm{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha_j},$$

тобто

$$U(t,\,x)=\sum_{j=1}^{\infty}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\right)\left\{e^{-a(\alpha_j)t+\alpha_j x}\frac{\mathrm{sh}\left[t\sqrt{D(\alpha_j)}\right]}{\sqrt{D(\alpha_j)}}\right\},$$

у яких $\alpha_j\in M,\;Q_j(x)$ – поліноми степенів $n_j\le p_j-1$, які отримують у результаті замикання у певному класі функцій множини квазіполіномних розв'язків (17).

3.2. Ядра задач Діріхле для рівнянь із частинними похідними. У цьому пункті розглянемо задачі Діріхле у смугах S_h, де $h>0$, зокрема у S_1, для класичних рівнянь математичної фізики та диференціально-функціональних рівнянь, а також знайдемо елементи їхніх ядер. Доведемо, що всі ці задачі мають нескінченновимірне ядро, тобто не є нетеровими.

3.2.1. Рівняння коливань струни.

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=\gamma^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2},\quad\gamma>0,\\ U(0,x)=U(h,\,x)=0.\end{gathered}\tag{19}$$

▼ Задача (19) – це задача (4), (5), у якій $a\,(\nu)\;=\;0,\;\;b\,(\nu)\;=\;-\gamma^2\nu^2$. Тоді $D(\nu)=\gamma^2\nu^2$, а множина (15) набуде вигляду

$$M=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{\,\nu\in\mathbb{C}:\;\;\gamma\nu h=\pm\,\pi ki\}\,.$$

Числа $\nu_k = \pm\frac{\pi k i}{\gamma h}$, де $k \in \mathbb{N}$, для функції $T_1(h,\nu) = \frac{\operatorname{sh}[\gamma\nu h]}{\gamma\nu}$ є простими нулями. За теоремою 1 функції вигляду

$$U_{\pm k}(t,x) = e^{\pm\frac{\pi k i x}{\gamma h}} \sin\frac{\pi k t}{h}, \quad k \in \mathbb{N},$$

є лінійно незалежними квазіполіномними комплексними розв'язками задачі (19), уявна частина яких дає при $\gamma = a$ розв'язки (3).

Остання формула містить два набори розв'язків задачі (19): перший – відповідає (верхньому) знаку „+", другий – відповідає (нижньому) знаку „–". Зауважимо, крім того, що за допомогою диференціально-символьного методу [5] за рахунок дискретного параметра k в $U_{\pm k}(t,x)$ можна отримати розв'язок задачі у вигляді

$$U(t,x) = \varphi(x+t) - \varphi(x-t),$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ періодична функція з періодом $T = 2h$, тобто $\varphi \in C^2_{2h}$. ▲

3.2.2. Рівняння Клейна-Гордона-Фока.

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right]U(t,x) = 0, \quad \gamma, m > 0,\\ U(0,x) = U(h,x) = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

▼ Для цієї задачі отримаємо $a(\nu) = 0,\ b(\nu) = -\gamma^2\nu^2 + m^2,\quad D(\nu) = \gamma^2\nu^2 - m^2$. Множина M набуває вигляду

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\nu \in \mathbb{C}:\ \ h\sqrt{\gamma^2\nu^2 - m^2} = \pm\,\pi k i\right\}.$$

Числа $\nu_k = \pm\frac{\sqrt{m^2h^2 - \pi^2k^2}}{\gamma h}$, де $k \in \mathbb{N}$, для функції $T_1(h,\nu) = \frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{\gamma^2\nu^2 - m^2}\right]}{\sqrt{\gamma^2\nu^2 - m^2}}$ у випадку $mh \neq \pi k$ є простими нулями. Якщо $mh = \pi k_0$, де $k_0 \in \mathbb{N}$, то $\nu = 0$ є двократним нулем функції $T_1(h,\nu)$. За теоремою 1 одержуємо таку серію ($k \in \mathbb{N}$) квазіполіномних розв'язків задачі (20):

1) $U_{\pm k}(t,x) = e^{\pm\frac{\sqrt{\pi^2k^2 - m^2h^2}}{\gamma h} i x} \sin\frac{\pi k t}{h}$, якщо $\pi k > mh$;

2) $U_{\pm k}(t,x) = e^{\pm\frac{\sqrt{m^2h^2 - \pi^2k^2}}{\gamma h} x} \sin\frac{\pi k t}{h}$, якщо $\pi k < mh$;

3) $U_k(t,x) = \sin\dfrac{\pi k t}{h},\ \ U_k(t,x) = x\sin\dfrac{\pi k t}{h}$, якщо $\pi k = mh$.

Розв'язки (3) отримуємо з цієї серії при $m \to 0$ та переході до уявної частини. ▲

3.2.3. Телеграфне рівняння.

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial}{\partial t} - \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]U(t,x) = 0, \quad \gamma, m > 0,\\ U(0,x) = U(h,x) = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

▼ Задачу (21) розглянемо як задачу (4), (5) з цілими функціями $a(\nu) = m$, $b(\nu) = -\gamma^2\nu^2$, $D(\nu) = m^2 + \nu^2\gamma^2$, $T_1(h,\nu) = e^{-mh}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{m^2+\nu^2\gamma^2}\right]}{\sqrt{m^2+\nu^2\gamma^2}}$.

Нулями функції $T_1(h,\,\nu)$ є числа $\nu_k=\pm\frac{\sqrt{\pi^2k^2+m^2h^2}}{\gamma h}\,i$, де $k\in\mathbb{N}$. Вони є простими, тому за теоремою 1 знаходимо квазіполіномні розв'язки задачі (21)

$$U_{\pm k}(t,\,x)=e^{-mt\pm\frac{\sqrt{\pi^2k^2+m^2h^2}}{\gamma h}ix}\,\sin\frac{\pi kt}{h},\quad k\in\mathbb{N}.$$

З уявної частини цих комплексних розв'язків при $m\to 0$ отримуємо дійсні розв'язки (3). ▲

3.2.4. Рівняння Лапласа.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]U(t,\,x)=0,\\&U(0,x)=\,U(h,\,x)=0.\end{aligned}\tag{22}$$

▼ Для задачі (22) одержуємо $a(\nu)=0, b(\nu)=\nu^2, D(\nu)=-\nu^2, T_1(h,\,\nu)=\frac{\sin[\nu h]}{\nu}$. Числа $\nu_k=\pm\frac{\pi k}{h}$, де $k\in\mathbb{N}$, є простими нулями функції $T_1(h,\,\nu)$. За теоремою 1 розв'язками задачі (22) є функції

$$U_{\pm k}(t,\,x)=e^{\pm\frac{\pi kx}{h}}\,\sin\frac{\pi kt}{h},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Зауважимо, що з цієї дискретної множини розв'язків задачі (22) за допомогою диференціально-символьного методу можна отримати розв'язки цієї задачі у вигляді

$$U(t,x)=\varphi(ix+t)-\varphi(ix-t),$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ періодична функція з періодом $T=2h$, тобто $\varphi\in C^2_{2h}$. ▲

3.2.5. Рівняння теорії пружності.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right]U(t,\,x)=0,\\&U(0,x)=\,U(h,\,x)=0.\end{aligned}\tag{23}$$

▼ Для цієї задачі отримаємо $a(\nu)=0$, $b(\nu)=\nu^4$, $D(\nu)=-\nu^4$, $T_1(h,\,\nu)=\frac{\sin[\nu^2 h]}{\nu^2}$,

$$M=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\nu\in\mathbb{C}:\ \ \nu^2h=\pm\,\pi k\right\}.$$

Числа $\nu_k=\pm\sqrt{\frac{\pi k}{h}}$, $\nu_k=\pm i\sqrt{\frac{\pi k}{h}}$, де $k\in\mathbb{N}$, прості нулі функції $T_1(h,\,\nu)$. Будуємо серію ($k\in\mathbb{N}$) квазіполіномних розв'язків задачі (23) відповідно до теореми 1

$$\begin{aligned}&U_{\pm 1k}(t,\,x)=e^{\pm x\sqrt{\frac{\pi k}{h}}}\sin\tfrac{\pi kt}{h},\\&U_{\pm 2k}(t,\,x)=e^{\pm ix\sqrt{\frac{\pi k}{h}}}\sin\tfrac{\pi kt}{h}.\ \blacktriangle\end{aligned}$$

Розглянемо задачу з вищою кратністю нуля функції $T_1(h,\,\nu)$.

Приклад 3. Розв'язати у смузі S_1 задачу Діріхле

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}+4\pi^2\right]U(t,\,x)=0,\\&U(0,x)=\,U(1,\,x)=0.\end{aligned}\tag{24}$$

▼ Для цієї задачі отримаємо $a(\nu)=\nu^2$, $b(\nu)=4\pi^2$, $h=1$, $D(\nu)=\nu^4-4\pi^2$, $T_1(1,\nu)=e^{-\nu^2}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\nu^4-4\pi^2}}{\sqrt{\nu^4-4\pi^2}}$, $M=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\big\{\nu\in\mathbb{C}:\ \nu^4-4\pi^2=-\pi^2k^2\big\}$.

Позначимо корені рівняння $\nu^4-4\pi^2=-\pi^2k^2$: $\nu_{11\pm}$ для $k=1$; ν_2 для $k=2$; $\nu_{k1\pm}$, $\nu_{k2\pm}$ для $k\geq 3$. Число $\nu_2=0$ має кратність 4. Тому для ν_2 за теоремою 1 знаходимо нетривіальні квазіполіномні розв'язки задачі (24)

$$U_{21}(t,x)=2\pi\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=\sin[2\pi t];$$

$$U_{22}(t,x)=2\pi\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=x\sin[2\pi t];$$

$$U_{23}(t,x)=2\pi\,\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=\big(x^2-2t\big)\sin[2\pi t];$$

$$U_{24}(t,x)=2\pi\,\frac{\partial^3}{\partial\nu^3}\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=\big(x^3-6tx\big)\sin[2\pi t].$$

Для нулів $\nu_{11\pm}=\pm\sqrt[4]{3\pi^2}$ одержуємо такі розв'язки задачі (24):

$$U_{11\pm}(t,x)=e^{-\pi\sqrt{3}\,t\pm\sqrt[4]{3\pi^2}x}\sin[\pi t]\,.$$

Для нулів $\nu_{12\pm}=\pm i\,\sqrt[4]{3\pi^2}$ одержуємо

$$U_{12\pm}(t,x)=e^{\pi\sqrt{3}\,t\pm i\,\sqrt[4]{3\pi^2}x}\sin[\pi t]\,.$$

Для коренів $\nu_{k1\pm}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\mp i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}$, де $k\in\mathbb{N}\backslash\{1;2\}$, отримаємо такі розв'язки задачі (24):

$$U_{k1\pm}(t,x)=\sin[\pi kt]\,e^{\pm\,\pi i\sqrt{k^2-4}\,t\,\pm\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1\mp i)\,\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}\,x}.$$

Для інших коренів $\nu_{k2\pm}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}$, де $k\in\mathbb{N}\backslash\{1;2\}$, одержуємо ще такі розв'язки задачі (24):

$$U_{k2\pm}(t,x)=\sin[\pi kt]\,e^{\pm\,\pi i\sqrt{k^2-4}\,t\,\pm\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\,\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}\,x}.\ \blacktriangle$$

Розглянемо приклад задачі Діріхле для диференціальних рівнянь нескінченного порядку.

Приклад 4. Розв'язати задачу Діріхле у смузі S_1 для диференціально-функціонального рівняння

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}=U(t,x+1)-10\,U(t,x),\\&U(0,x)=U(1,x)=0\,.\end{aligned}\tag{25}$$

▼ Диференціально-функціональне рівняння подамо у вигляді такого диференціального рівняння нескінченного порядку

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-e^{\frac{\partial}{\partial x}}+10\right]U(t,x)=0.$$

Тоді (25) є задачею (4), (5), у якій $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -e^{\nu} + 10$, $D(\nu) = e^{\nu} - 10$, $T_1(1, \nu) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{e^{\nu}-10}}{\sqrt{e^{\nu}-10}}$,

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\nu \in \mathbb{C} : \ e^{\nu} = 10 - \pi^2 k^2\right\}.$$

Числа $\nu_{1m} = \ln\left(10 - \pi^2\right) + 2\pi mi$, де $m \in \mathbb{Z}$, є простими нулями функції $T_1(1, \nu)$. Тому за теоремою 1 знаходимо такі розв'язки задачі (25):

$$U_{1m}(t, x) = \sin[\pi t]\left(10 - \pi^2\right)^x e^{2\pi mix}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для чисел $\nu_{km} = \ln\left(\pi^2 k^2 - 10\right) + (\pi + 2\pi m)i$, де $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $m \in \mathbb{Z}$, які є також простими нулями функції $T_1(1, \nu)$, одержуємо такі розв'язки задачі (25):

$$U_{km}(t, x) = \sin[\pi kt]\left(\pi^2 k^2 - 10\right)^x e^{\pi(1+2m)ix}, \ \ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \ m \in \mathbb{Z}. \ \blacktriangle$$

4. Висновки. Доведено, що ядро задачі Діріхле у часовій смузі є тривіальним лише у разі сталого дискримінанта $4D$ полінома $L(\,\cdot\,, \nu)$, який не належить до множини $P = \left\{-(2k\pi/h)^2, \ k \in \mathbb{N}\right\}$ від'ємних чисел. Якщо ж дискримінант $4D$ сталий і належить до множини P, то ядро задачі нескінченновимірне і визначається класом цілих функцій деякого порядку. В інших випадках доведено існування зліченної множини лінійно незалежних розв'язків задачі, до якої належать, зокрема, квазіполіномні функції. Для побудови квазіполіномних розв'язків використано диференціально-символьний метод. Цей метод дав змогу за допомогою дій диференціальних виразів скінченного порядку на класично відокремлені розв'язки однорідного рівняння з покладанням після дії виразів параметра (за яким діють вирази) рівним нулеві знайти шукані розв'язки задачі Діріхле. Порядок диференціальних виразів менший від кратності нулів деякої цілої функції. Результати дослідження ядра задачі Діріхле у часовій смузі продемонстровано на деяких класичних рівняннях математичної фізики.

У перспективі цікавими дослідженнями є знаходження класів однозначної розв'язності відповідної неоднорідної задачі Діріхле та задачі Неймана, а також дослідження ядер задач у випадку кількох просторових змінних.

Список використаної літератури

1. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое / *В.М. Борок* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183, №5. – С. 995-998.
2. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / *В.П. Бурский.* – К.: Наук. думка, 2002. – 316 с.
3. *Гельфанд И.М.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / *И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.* – М.: Физматгиз., 1958. – 274 с.
4. *Каленюк П.І.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними / *П.І. Каленюк, І.В. Когут, З.М. Нитребич* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, №2. – С. 7-15.
5. *Каленюк П.І.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / *П.І. Каленюк, З.М. Нитребич.* – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
6. *Каленюк П.И.* Обобщенный метод разделения переменных / *П.И. Каленюк, Я.Е. Баранецкий, З.Н. Нитребич.* – К.: Наук. думка, 1983. – 232 с.

7. *Леонтьев А.Ф.* Обобщение рядов экспонент / *А.Ф. Леонтьев.* – М.: Наука, 1981. – 320с.
8. *Нитребич З.М.* Крайова задача у безмежній смузі /*З.М. Нитребич* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1994. – Т. 37. – С. 16-21. (те саме: *Nytrebych Z.M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sci. – 1996. – Vol. 79, №6. – P. 1388-1392).
9. *Пташник Б.И.* Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / *Б.И. Пташник.* – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Пташник Б.Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / *Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук.* – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. *Тихонов А.Н.* Дифференциальные уравнения / *А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников.* – М.: Наука, 1980. – 232 с.

Стаття: надійшла до редакції 05.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ON SOLUTIONS OF A HOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM IN THE TIME STRIP FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH RESPECT TO TIME VARIABLE

Volodymyr IL'KIV, Zinovii NYTREBYCH

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12, Lviv, 79013
e-mail: ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

We investigate the set of solutions of Dirichlet problem in the strip for homogeneous partial differential equation with two variables of second order in one (time) variable, in which the homogeneous boundary conditions are given, and generally infinite order in other (spatial) variable. We establish the necessary and sufficient conditions of existence of nontrivial solutions of this ill-posed problem in the class of quasi-polynomials and propose the differential-symbol method of construction of such solutions. The results of investigating the null space of the Dirichlet problem in the time strip are used for certain equations of mathematical physics.

Key words: Dirichlet problem, existence of the solutions.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ВО ВРЕМЕННОЙ ПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Владимир ИЛЬКИВ, Зиновий НИТРЕБИЧ

Национальный университет "Львовская политехника",
ул. Бандеры, 12, Львов, 79013
e-mail: ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

Исследовано множество решений задачи Дирихле в полосе для однородного дифференциального уравнения в частных производных с двумя переменными второго порядка по одной (временной) переменной, по которой заданы однородные краевые условия, и вообще бесконечного порядка по второй (пространственной) переменной. Установлены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных решений данной некорректной задачи в классе квазиполиномов и предложен дифференциально-символьный метод их построения. Результаты исследования ядра задачи Дирихле во временной полосе использовано для некоторых уравнений математической физики.

Ключевые слова: задача Дирихле, существование решений.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 78–82
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 78–82

УДК 519.21

ОБЧИСЛЕННЯ РІВНОВАЖНОЇ ЦІНИ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ОПЦІОНУ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Ігор КОЦЮБА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: kotsiuba@hotmail.com

Розглянуто модель Блека-Шоулса та Мертона з параметрами, які залежать від часу та стану зовнішнього середовища, знайдено умови, за яких ціна європейського опціону до і після усереднення у цій моделі збігається.

Ключові слова: опціон, акції, рівноважна ціна, волатильність, модель Блека-Шоулса.

1. Вступ. Серед похідних цінних паперів як інструментів фінансової інженерії важливе місце займають опціони [4]. Існує декілька видів опціонів, тому для викладення подальшого матеріалу вважатимемо, що розглядаємо опціон європейського типу, побудованого на акціях, вартість яких описується послідовністю випадкових величин $S = (S(t))_{0 \leqslant t \leqslant T}$. Такий опціон характеризується фіксованою в момент його купівлі ціною K (за якою покупець може, наприклад, купити акції, фактична вартість яких $S(T)$ в момент часу T може суттєво відрізнятися від K) і наперед визначеним часом його виконання T.

Якщо $S(T) > K$, то така ситуація сприятлива для покупця опціону, оскільки за умовами контракту у нього є право купити акції за ціною K і потім миттєво продати їх за ринковою ціною $S(T)$. У цьому випадку його дохід становитиме $S(T) - K$.

Якщо ж виявиться, що $S(T) < K$, то право покупця купити акції (за ціною K) не дає йому нічого, тому що він може придбати акції дешевше (за ціною $S(T)$).

Очевидно, що за покупку такого фінансового інструмента треба заплатити деяку премію $C(S,T)$, яку називають рівноважною ціною колл-опціону. Отож, продавець і покупець постійно стикаються з проблемою визначення рівноважної ціни колл-опціону. Над її знаходженням працювала і працює величезна кількість видатних науковців, починаючи від Р. Мертона [3] та Ф. Блека і М. Шоулса [2]. Вони вперше строго формалізували проблему оцінювання опціонів і вивели класичні формули для обчислення рівноважних цін.

2. Рівноважна ціна європейського опціону купівлі. Розглянемо модель Блека-Шоулса з параметрами залежними від часу на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$, одним ризиковим і безризиковим активами. Вважатимемо, що на рівноважну ціну впливають зовнішні чинники, які задаються повною групою попарно несумісних подій $A_1, \ldots, A_n$ і надалі будемо їх ототожнювати зі станами середовища. В момент часу $t = 0$ може настати один із n станів зовнішнього середовища з ймовірністю

$$\mathsf{P}(A_i) = p_i, \quad p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{1}$$

де p_i-ймовірність потрапляння у відповідне середовище A_i. Виникає проблема розрахунку рівноважної ціни європейського опціону у цьому випадку. Для кожного стану зовнішнього середовища A_i відома ціна безризикового та ризикового активу. Ціну безризикового активу обчислюють як

$$B_{A_i}(t) = exp\left\{\int\limits_0^t r_{A_i}\,(s)\,ds\right\}, \tag{2}$$

а ціна ризикового активу дорівнює

$$S_{A_i}(t) = S_{A_i}(0)exp\left\{\int\limits_0^t \left(\mu_{A_i}(s) - \frac{1}{2}{\sigma_{A_i}}^2(s)\right)ds + \int\limits_0^t \sigma_{A_i}(s)dW_{A_i}(s)\right\}, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

де $r_{A_i}(t)$ – відсоткова ставка; $\mu_{A_i}(t)$ – очікуване середнє значення; $\sigma_{A_i}(t)$ – передбачувана волатильність. У цьому разі $r_{A_i}(t)$ – невід'ємна функція, інтегрована за Лебегом на будь-якому відрізку, $\mu_{A_i}(t)$ і $\sigma_{A_i}(t)$ – невипадкові функції, а $W_{A_i}(t)$ – стандартний вінерівський процес стосовно міри $\mathcal{P}$. Надалі розглядатимемо звуження зазначеної моделі на інтервалі [0,T], де T – дата виконання опціону.

Для того, щоб існувала єдина рівноважна ціна опціону, будемо розглядати безарбітражний ринок, тобто вимагатимемо виконання умов $\int_0^T \left(\frac{\mu_{A_i}(s) - r_{A_i}(s)}{\sigma_{A_i}(s)}\right)^2 ds < \infty$, $\int_0^T {\sigma_{A_i}}^2(s)ds < \infty$, $\int_0^T |\mu_{A_i}(s)|ds < \infty$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Крім того, вважатимемо, що початкова ціна акцій однакова для всіх станів зовнішнього середовища, тобто $S(0) = S_{A_i}(0)$, а страйкова ціна K і час виконання опціону T – сталі величини.

Згідно з [5],[6] і за формулою Феймана-Каца рівноважна ціна європейського опціону купівлі $C_{A_i}(S_{A_i}, t)$ задовольняє таку крайову задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{A_i}(S_{A_i}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2_{A_i}(t)S^2_{A_i}\frac{\partial^2 C_{A_i}(S_{A_i}, t)}{\partial S^2_{A_i}} + \\ + r_{A_i}(t)S_{A_i}\frac{\partial C_{A_i}(S_{A_i}, t)}{\partial S_{A_i}} - r_{A_i}(t)C_{A_i}(S_{A_i}, t) = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

$$C_{A_i}(S_{A_i}, T) = \max(S_{A_i} - K, 0), \quad (S_{A_i}, T) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T]. \tag{5}$$

де $K-$ страйкова ціна. Тоді справджується така теорема [1].

Теорема 1. *Нехай функції $r_{A_i}(t)$ і $\sigma_{A_i}(t)$ неперервні на $[0,T]$, $\sigma_{A_i}(t) > 0$ для всіх $t \in [0,T]$. Тоді розв'язок рівняння (4) з крайовою умовою (5) набуває такого вигляду:*

$$C_{A_i}(S_{A_i},t) = S_{A_i}\Phi(d_1^{A_i}) - K\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\Phi(d_2^{A_i}), \quad i=1,\dots,n, \tag{6}$$

де

$$d_1^{A_i} = \frac{\ln\frac{S_{A_i}}{K} + \int_t^T (r_{A_i}(s) + \frac{1}{2}\sigma_{A_i}^2(s))ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_{A_i}^2(s)ds}}, \qquad d_2^{A_i} = \frac{\ln\frac{S_{A_i}}{K} + \int_t^T (r_{A_i}(s) - \frac{1}{2}\sigma_{A_i}^2(s))ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_{A_i}^2(s)ds}},$$

а

$$\Phi(d_j^{A_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_j^{A_i}} \exp\{-\frac{1}{2}s^2\}ds, \quad j=1,2,$$

– функція стандартного нормального розподілу.

3. Умови рівноважності. Очевидно, що в момент часу t досить просто обчислити ціну акцій $S_{A_i}(t)$ та $C_{A_i}(S_{A_i},t)$ згідно з формулами (3) і (6) для будь-якого стану A_i, оскільки відомі значення $\mu_{A_i}, \sigma_{A_i}, r_{A_i}$.

З іншого боку, можемо спочатку усереднити значення $\mu_{A_i}, \sigma_{A_i}, r_{A_i}$ по всіх станах зовнішнього середовища і після цього знайти рівноважну ціну європейського опціону купівлі $C(S,t)$. Тобто, якщо

$$r(t) = \sum_{i=1}^n r_{A_i}p_i, \quad \mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu_{A_i}p_i, \quad \sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_{A_i}p_i,$$

то усереднену ціну акцій $S(t)$ знаходять згідно з формулою (4), а це дає змогу обчислити вартість опціону $C(S,t)$.

Мета нашої праці – знайти умови, за яких рівноважна ціна європейського опціону купівлі задовольнятиме рівність

$$C(S,t) = p_1C_{A_1}(S_{A_1},t) + p_2C_{A_2}(S_{A_2},t) + \dots + p_nC_{A_n}(S_{A_n},t) \tag{7}$$

або, за яких умов ціна опціону до усереднення та після усереднення збігатиметься. Рівність (7) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &S\Phi(d_1) - K\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\Phi(d_2) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i\left(S_{A_i}\Phi(d_1^{A_i}) - K\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\Phi(d_2^{A_i})\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, що (8) виконується, якщо:

$$S\Phi(d_1) = \sum_{i=1}^n p_iS_{A_i}\Phi(d_1^{A_i}), \tag{9}$$

$$\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\Phi(d_2)=\sum_{i=1}^n p_i\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\Phi(d_2^{A_i}). \tag{10}$$

Враховуючи, що $S=S(0)\exp\left\{\sum_{i=1}^n p_iX_i\right\}$, де

$$X_i=\int_0^t(\mu_{A_i}(s)-\frac{1}{2}\sigma^2_{A_i}(s))ds+\int_0^t\sigma_{A_i}(s)dW_{A_i}(s),$$

то умова (9) виглядатиме так:

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^n p_iX_i\right\}\int_{-\infty}^{d_1}\exp(-\frac{s^2}{2})ds=\sum_{i=1}^n\left(p_i\exp\{X_i\}\int_{-\infty}^{d_1^{A_i}}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds\right). \tag{11}$$

Шляхом алгебричних перетворень умови (10) можна отримати таку рівність:

$$\begin{aligned}&\exp\left\{-\sum_{i=1}^n\left(p_i\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right)\right\}\int_{-\infty}^{d_2}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds=\\&=\sum_{i=1}^n\left(p_i\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\int_{-\infty}^{d_2^{A_i}}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Отже, ціна європейського опціону купівлі до усереднення та після усереднення збігатиметься лише у разі виконання умов (11) та (12). Отже, ми отримали таке твердження.

Теорема 2. *Нехай функції $\mu_{A_i}(t)$, $r_{A_i}(t)$ і $\sigma_{A_i}(t)$ неперервні на $[0,T]$. Тоді рівноважна ціна європейського опціону купівлі задовольняє рівність (7), якщо виконуються умови (11), (12).*

4. Висновки. Знайдено умови рівноважності для розрахунку рівноважної ціни європейського опціону з використанням узагальнених моделей Блека-Шоулса, в яких параметри змінюються з часом. Розглянуто формули для обчислення рівноважної ціни акцій, цін ризикових і безризикових активів в умовах невизначеності.

Список використаної літератури

1. *Соловейко О.М.* Деякі фінансові обчислення, пов'язані з цінами акцій на ринку / *О.М. Соловейко* // Конф. "Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці *II*", присвячена пам'яті А.Я. Дороговцева: Праці конференції. – Київ, 2004. – С. 115.
2. *Black F.* The Pricing of options and corporate liabilities / *F. Black, M. Scholes* // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81 – P. 637-659.
3. *Merton R.C.* Theory of rational option pricing / *R.C. Merton* // Bell J. Econom. Manage. Sci. – 1973. – Vol.4. – P. 141-183.
4. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики: Т. II / *А.Н. Ширяев.* – М.: ФАЗИС, 1998. – 544 с.

5. *Dana R.-A.* Financial markets in continuous time / *R.-A. Dana, M. Jeanblanc.* – Springer-Verlag. – 2003. – 330 p.
6. *Fouque J.-P.* Derivatives in financial markets with stochastic volatility / *J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R. Sircar.* – Cambridge University Press, 2000. – 201 p.

Стаття: надійшла до редакції 02.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

CALCULATION OF THE FAIR PRICE OF EUROPEAN OPTION UNDER UNCERTAINTY

Ihor KOTSIUBA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: kotsiuba@hotmail.com

The article is deals with Black-Scholes model where parameters depends on time and environment state, conditions under which the fair price of the option before and after averaging coincide are considered.

Key words: option, share, fair price, volatility, Black-Scholes model.

РАСЧЕТ ЦЕНЫ РАВНОВЕСИЯ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Игорь КОЦЮБА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: kotsiuba@hotmail.com

Рассмотрено модель Блэка-Шоулса и Мертона с параметрами, которые зависят от времени и состояния внешней среды, установлены условия, при которых цена европейского опциона до и после усреднения в данной модели совпадает.

Ключевые слова: опцион, акции, цена равновесия, волатильность, модель Блэка-Шоулса.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 83–91
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 83–91

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Євгенія ЛЕСІНА

Інститут прикладної математики і механіки НАНУ,
вул. Р. Люксембург, 74, Донецьк, 83114
e-mail: lesina17@gmail.com

Досліджено задачу з косою похідною в одиничному крузі для скалярного неправильно еліптичного диференціального рівняння другого порядку з комплексними коефіцієнтами. Доведено розв'язність задачі в звичайній соболівській шкалі просторів за умов, що крайові дані належать деякому класу аналітичних функцій.

Ключові слова: неправильно еліптичне рівняння, ваговий простір Соболєва, проблема моментів, задача з косою похідною.

1. Вступ. Для правильно еліптичного оператора крайова задача з косою похідною може не бути еліптичною (тобто не задовольняти умову Лопатинського). Л. Хермандер розглядав задачу з косою похідною як нееліптичну крайову задачу, яку було розв'язано шляхом зведення до псевдодиференціального оператора на межі. В його праці [9] знайдено зв'язок між задачею з косою похідною і теорією псевдодиференціальних операторів, зокрема, зазначено умови, за яких псевдодиференціальний оператор є субеліптичним. У певному сенсі продовженням його досліджень можна вважати працю Ю.В. Єгорова та В.А. Кондратьєва [5], однак запропоновані авторами методи більш прості, оскільки ґрунтуються на простих геометричних міркуваннях і застосуванні теорії коерцитивних еліптичних задач.

В.Г. Мазья [7] вивчав задачу з косою похідною для еліптичного рівняння другого порядку. У припущенні, що векторне поле дотикається виділених гладких компактних підмноговидів межі Γ області, з'ясовано, що задача однозначно розв'язна, отримано оцінки розв'язків у $L_p(\Gamma)(1 < p \leqslant \infty)$ і доведено компактність зворотного оператора.

Дослідженням крайової задачі з косою похідною для еліптичного диференціального оператора в обмеженій області з гладкою межею займався також Б.П. Панеях [8]. За умови, що множина точок межі, в яких векторне поле задачі перетинає дотичний простір, непорожня, він довів фредгольмовість у відповідних просторах оператора, що відповідає задачі, і навів необхідну і достатню умову компактності зворотного оператора.

У [4] автори довели розв'язність задачі Діріхле в звичайній соболєвській шкалі просторів. У ній залежно від властивостей певного числа $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$, поданого явно через коефіцієнти рівняння (4) і названого кутом між характеристиками рівняння, було розглянуто три випадки:

1) кут φ_0 дійсний і π-раціональний, тобто $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$, де $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;
2) кут φ_0 дійсний і π-ірраціональний;
3) кут φ_0 комплексний.

Випадок 1) описано в [1], він стосується порушення єдиності розв'язку першої крайової задачі, коли є злічена кількість лінійно незалежних розв'язків однорідної задачі Діріхле. У випадках 2) і 3) доцільно вводити простори $H^m_\rho(\partial K)$ аналітичних правих частин для розв'язності в звичайній соболєвській шкалі просторів.

Означення 1. *Визначимо простір Соболева $H^m_\rho(\partial K)$ з вагою $\rho = \rho(n)$ для коефіцієнтів Фур'є як простір функцій*

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau\big) \tag{1}$$

з $L_2(\partial K)$ таких, що коефіцієнти α_n^C, α_n^S розкладу задовольняють умову

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2\big)\rho^2(n)\big(1+n^2\big)^m < \infty. \tag{2}$$

Зауважимо, що на властивості задачі Діріхле у випадку **2)**, на відміну від випадку **3)**, впливали теоретико-числові властивості числа φ_0, аналогічно тому, як це відбувається з властивостями задачі Діріхле для гіперболічного рівняння другого порядку з дійсними коефіцієнтами. Далі виявиться, що цей ефект простежується також при дослідженні задачі з косою похідною.

Зауваження 1. За вагу $\rho(n)$ приймаємо

$$\rho = \rho(n) = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}.$$

Зазначимо, що $|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)| > 0$ для неправильно еліптичного рівняння (4). Простір $H^m_\rho(\partial K)$ із такою вагою складається з функцій, коефіцієнти Фур'є яких спадають експоненціально.

2. Формулювання задачі. Для подальшого викладення нагадаємо означення правильно еліптичного оператора та задачі з косою похідною.

Лінійний диференціальний оператор $\mathcal{L} = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ називається еліптичним в області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, якщо його старший символ $l(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ для всіх $x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, і називається правильно еліптичним у відкритій або замкненій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, якщо m парне, $m = 2k$, і для будь-якого $x \in \Omega$, для кожної пари лінійно незалежних дійсних векторів ξ і η серед коренів полінома $l(x, \xi + t\eta)$ від параметра t існує саме k коренів $t_+^1, t_+^2, ..., t_+^k$ з додатною уявною частиною $\mathrm{Im}\, t_+^j > 0$ і k коренів $t_-^1, t_-^2, \dots, t_-^k$ з від'ємною уявною частиною $\mathrm{Im}\, t_-^j < 0$.

Отже, якщо припустити, що $\mathcal{L}$ – еліптичний оператор другого порядку і на межі $\partial\Omega$ області (точніше, в деякому околі межі) задано вектор-функцію $l = l(x)$ зі значеннями у $\mathbb{R}^n$, то задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial l}|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases}$$

називається задачею з косою похідною [6]. При $n \geqslant 3$ еліптичність такої задачі рівносильна тому, що поле $l(x)$ не дотикається межі в жодній точці $x \in \partial\Omega$, а при $n = 2$ еліптичність еквівалентна умові: $l(x) \neq 0$ для всіх $x \in \partial\Omega$. Зауважимо, таке: коли напрям l збігається з напрямом конормалі, задача з косою похідною стає задачею Неймана. Далі, розглядаючи рівняння з комплексними коефіцієнтами, ми натрапляємо на комплексний напрям конормалі, тому вектор-функція $l(x)$ набуває комплексних значень.

Для $n = 2$ розглянемо загальне рівняння другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами без молодших членів

$$a u_{x_1x_1} + b u_{x_1x_2} + c u_{x_2x_2} = 0. \tag{3}$$

Рівняння (3) переписується інакше (внаслідок розкладу оператора в лівій частині на лінійні множники)

$$(a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)\, u = 0, \tag{3'}$$

де $a^j = (a^j_1, a^j_2),\ j = 1, 2,$ – одиничні комплексні вектори. Остання форма запису дає змогу перейти до вигляду

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u = 0 \tag{4}$$

з комплексними числами φ_1 і φ_2, причому $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Недійсність чисел φ_1 і φ_2 зумовлює той факт, що початкове рівняння є еліптичним, тобто $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, де $l(\xi) = (\sin\varphi_1 \cdot \xi_1 + \cos\varphi_1 \cdot \xi_2)(\sin\varphi_2 \cdot \xi_1 + \cos\varphi_2 \cdot \xi_2)$ – символ диференціального оператора L. Правильна еліптичність означає в цій ситуації, що корені λ_1, λ_2 квадратного рівняння $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ мають уявні частини протилежних знаків, що еквівалентно наявності у комплексних кутів φ_1 і φ_2 уявних частин протилежних знаків, і, відповідно, у неправильно еліптичному випадку ці уявні частини мають однаковий знак.

Для рівняння (4) розглянемо таку крайову задачу з косою похідною:

$$(u'_{\nu_*} - g u'_\tau)|_{\partial K} = \kappa - g\gamma = \alpha, \tag{5}$$

де $g \neq \pm\frac{\overline{\Delta}}{2}$, $\Delta = \sin\varphi_0$, риска означає знак комплексного спряження, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ – одиничний круг на площині. Припустимо, що права частина $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$. У перелічених припущеннях поставимо питання щодо існування та єдиності розв'язку задачі (4), (5).

3. Попередні результати та проблема моментів на колі. У [2] було отримано умову зв'язку слідів розв'язку крайової задачі (наведеної в теоремі 1) у вигляді невизначеності деякої проблеми моментів (формула (6)), властивості якої визначали властивості задачі.

Теорема 1 ([2]). *Для того, щоб функція $u \in H^s(K)$ $(s \geqslant 2)$ була розв'язком задачі*

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K), \qquad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для рівняння (3'), необхідно і достатньо, щоб функції γ і κ задовольняли інтегральну рівність

$$\int_{\partial K} \big[\kappa - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\big] Q(x \cdot \widetilde{a}^j) d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

з будь-яким поліномом $Q \in \mathbb{C}[z]$. У цьому разі функція u відновлюється з точністю до адитивної сталої.

Тут $\widetilde{a}^1 = (-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1)$, $\widetilde{a}^2 = (-\overline{a}_2^2, \overline{a}_1^2)$ – направляючі вектори множини комплексних характеристичних напрямів $\Lambda^j = \{\lambda \widetilde{a}^j | \lambda \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ і $\frac{\partial}{\partial \nu_*} = l(\nu)\frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{1}{2k}[l(\nu(\tau))]'_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}$ – похідні стосовно дотичної і конормалі, відповідно; ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі; k – кривина кривої ∂K.

Рівність (6) є однорідною проблемою моментів, що виникає на межі кругу. Розглянемо проблеми моментів на ∂K і опишемо її у більш загальному вигляді.

Для двох заданих наборів чисел ω_n^j, $\omega_0^1 = \omega_0^2$, $n = \mathbb{Z}_+$, знайти функцію α таку, що

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau)(x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j)^n d\tau = \omega_n^j, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Помножимо рівності (7) на коефіцієнти полінома Чебишова T_n першого роду і після додавання отримаємо рівності

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau) T_n(-x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j) d\tau = \mu_n^j$$

з деякими μ_n^j. Оскільки $T_n(\cos\sigma) = \cos n\sigma$ і, крім того, на колі добуток $x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j = (\cos\tau, \sin\tau) \cdot (-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j) = -\cos(\tau + \varphi_j)$, то початкову проблему (7) можна переписати так.

Для двох заданих наборів чисел μ_n^j, $n = \mathbb{Z}_+$, знайти функцію α таку, що

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau) \cos n(\tau + \varphi_j) d\tau = \mu_n^j, \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

4. Задача $H_\rho^m - H^q$ на колі. Нехай M_q^j – підпростір простору $H^q(\partial K)$, $q \in \mathbb{R}$, елементами якого є функції $\alpha(\tau)$, що задовольняють при всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ інтегральну рівність

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau)(x \cdot \widetilde{a}^j)^k d\tau = 0, \quad j = 1, 2.$$

Іншими словами, через M_q^j позначено множину розв'язків однорідної проблеми моментів.

Означення 2 ([3]). *Вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ мають $H_\rho^m - H^q$-властивість на кривій ∂K, $q \leqslant m$, якщо для кожної функції $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ існують єдині функції $\alpha^1 \in M_q^1$, $\alpha^2 \in M_q^2$ такі, що правильний розклад у суму: $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + const$.*

Задача $H^m_\rho - H^q$ **на кривій** ∂K $(q \leqslant m)$ полягає у знаходженні умов на вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, необхідних і достатніх для виконання $H^m_\rho - H^q$-властивості на кривій ∂K.

Після підстановки розкладу (1) в умову (8) отримаємо співвідношення

$$\pi(\alpha^C_n \cos n\varphi_j - \alpha^S_n \sin n\varphi_j) = \mu^j_n, \quad j = 1, 2,$$

враховуючи які визначимо підпростори M^j_q, $j = 1, 2$, рівностями

$$\begin{aligned} M^1_q: &\quad \alpha^C_n \cos n\varphi_1 - \alpha^S_n \sin n\varphi_1 = 0, \\ M^2_q: &\quad \alpha^C_n \cos n\varphi_2 - \alpha^S_n \sin n\varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Тепер дослідимо задачу $H^m_\rho - H^q$ на колі ∂K у припущенні, що $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ – довільна функція, яка має розвинення (1). Інакше кажучи, одержимо для правої частини задачі (5) розвинення у суму двох функцій, які належать звичайним соболєвським просторам, тобто визначимо показник гладкості q.

Спроектуємо вектор $(\alpha^C_n, \alpha^S_n) \in \mathbb{C}^2$ на пряму $\alpha^C_n \cos n\varphi_1 - \alpha^S_n \sin n\varphi_1 = 0$. Координати $(\alpha^{1,C}_n, \alpha^{1,S}_n)$ проекції одержимо з системи

$$\begin{cases} \alpha^{1,C}_n \cos n\varphi_1 - \alpha^{1,S}_n \sin n\varphi_1 = 0, \\ \alpha^{1,C}_n \cos n\varphi_2 - \alpha^{1,S}_n \sin n\varphi_2 = \alpha^C_n \cos n\varphi_2 - \alpha^S_n \sin n\varphi_2, \end{cases}$$

звідки

$$(\alpha^{1,C}_n, \alpha^{1,S}_n) = \left(\frac{\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right).$$

Прямим доповненням цього вектора у $\mathbb{C}^2$, розташованим на другій прямій $\alpha^C_n \cos n\varphi_2 - \alpha^S_n \sin n\varphi_2 = 0$, буде вектор з компонентами

$$(\alpha^{2,C}_n, \alpha^{2,S}_n) = \left(\alpha^C_n - \frac{\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \alpha^S_n - \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right) =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 (-\alpha^C_n \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha^S_n)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \frac{-\alpha^C_n \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha^S_n}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right).$$

Далі, маючи координати проекції і прямого доповнення, знайдемо функції $\alpha^j \in M^j_q$, $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^{1,C}_n \cos n\tau + \alpha^{1,S}_n \sin n\tau) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \cos n\tau + \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \sin n\tau \right), \\ \alpha^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^{2,C}_n \cos n\tau + \alpha^{2,S}_n \sin n\tau) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 (-\alpha^C_n \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha^S_n)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \cos n\tau + \frac{-\alpha^C_n \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha^S_n}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \sin n\tau \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Розглянемо вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, які задано рівняннями (3') і (4), та з'ясуємо, при якому значенні показника q, $q \leqslant m$, вони мають $H^m_\rho - H^q$ - властивість на кривій ∂K. Дослідимо окремо два випадки, про які йшла мова у вступі:

2) $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ – дійсне π-ірраціональне число;

3) φ_0 – комплексне число.

Оцінимо коефіцієнти при множниках $\alpha^C_n \cos n\tau$, $\alpha^S_n \cos n\tau$, $\alpha^C_n \sin n\tau$, $\alpha^S_n \sin n\tau$ у виразах (9) функцій α^1 і α^2

$$\left|\frac{1}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2 - \sin n\varphi_2 \cos n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}\varphi_1|}\cdot e^{n|\operatorname{Im}\varphi_2|}}{|\sin n\varphi_0|} = \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|};$$
$$\left|\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}; \tag{10}$$
$$\left|\frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|};$$
$$\left|\frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 \operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}.$$

Випадок 2). Нагадаємо (див. зауваження 1), що ми використовуємо вагу для коефіцієнтів Фур'є у вигляді $\rho = e^{n(|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\operatorname{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$, тому $\rho = e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}$ для дійсного φ_0, оскільки в цьому випадку $\operatorname{Im}\varphi_1 = \operatorname{Im}\varphi_2$.

Далі нам знадобиться таке твердження.

Твердження 1 ([3]). *Нехай $\mu + 1 > 0$. Нерівність для числа $\varphi_0 \in \mathbb{R}$*

$$\exists\, C_0 > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\sin n\varphi_0| > C_0 n^{-\mu} \tag{11}$$

рівносильна нерівності

$$\exists\, C_1 > 0, \quad \forall\, \frac{q}{r} \in \mathbb{Q}, \quad \left|\frac{\varphi_0}{\pi} - \frac{q}{r}\right| > C_1 r^{-\mu-1}.$$

Застосовуючи нерівність (11), можна зробити висновок, що при дійсному φ_0 всі згадані вище відношення в лівих частинах виразів (10) оцінюються зверху величиною ρn^μ. Отже, коефіцієнти функцій α^1, α^2 задовольняють оцінку

$$|\alpha^{j,C}_n| \leqslant \rho n^\mu (|\alpha^C_n| + |\alpha^S_n|), \qquad |\alpha^{j,S}_n| \leqslant \rho n^\mu (|\alpha^C_n| + |\alpha^S_n|), \qquad j = 1, 2,$$

яка з урахуванням $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ означає, що $\alpha^j \in H^{m-\mu}(\partial K)$. Справді,

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha^C_n|^2 + |\alpha^S_n|^2)\rho^2 n^{2m} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha^{j,C}_n|^2 + |\alpha^{j,S}_n|^2}{\rho^2 n^{2\mu}} \cdot \rho^2 n^{2m} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(|\alpha^{j,C}_n|^2 + |\alpha^{j,S}_n|^2\big) n^{2(m-\mu)}.$$

Отже, ми з'ясували, враховуючи нерівність (2) означення 1, що у випадку **2)** функції $\alpha^j \in H^{m-\mu}(\partial K)$ (тобто шукане $q = m - \mu$).

Випадок 3). Якщо φ_0 – комплексне число, то всі чотири відношення у (10) оцінюють зверху вагою $\rho = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$. Але тоді

$$|\alpha_n^{j,C}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad |\alpha_n^{j,S}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad j = 1, 2,$$

тому знову, у зв'язку з означенням 1, доходимо висновку, що функції $\alpha^j \in H^m(\partial K)$ (тут індекс q збігається з m).

Резюмуючи одержані результати, сформулюємо доведене твердження у вигляді теореми 2.

Теорема 2. *Нехай φ_0 – дійсне число, $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ і нехай виконується нерівність (11) при деякому $\mu > -1$. Тоді функції α^j, $j = 1, 2$, належать простору $H^{m-\mu}(\partial K)$. Якщо φ_0 – комплексне число і знову $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$, то функції $\alpha^j \in H^m(\partial K)$.*

Зауваження 2. Уточнимо, що в сенсі означення 2 твердження теореми 2 означає, що при дійсному φ_0 вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ мають $H_\rho^m - H^{m-\mu}$-властивість на колі ∂K, а у випадку комплексного φ_0 зазначені вектори мають $H_\rho^m - H^m$-властивість на ∂K.

5. Розв'язність задачі з косою похідною. Застосуємо тепер усі викладені вище міркування до задачі (4), (5) і, використовуючи зв'язок з проблемою моментів, доведемо основний результат щодо розв'язності досліджуваної задачі.

Згідно з означенням $H_\rho^m - H^q$-властивості векторів $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2$ правильне розвинення: $\alpha = w_1 + w_2$, де $w_i \in M_q^i \subset H^q(\partial K)$, $q \leqslant m$, $i = 1, 2$. Позначивши

$$\begin{cases} v_1 = (u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau)|_{\partial K} = \kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma, \\ v_2 = (u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau)|_{\partial K} = \kappa - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma, \end{cases}$$

отримаємо в термінах v_1 і v_2 функції κ і γ

$$\begin{cases} \kappa = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \\ \gamma = \frac{1}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2). \end{cases} \tag{12}$$

Тоді

$$\alpha = \kappa - g\gamma = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{g}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2) = (\frac{1}{2} - \frac{g}{\overline{\Delta}})v_1 + (\frac{1}{2} + \frac{g}{\overline{\Delta}})v_2,$$

звідки

$$v_1 = \frac{w_1}{\frac{1}{2} - \frac{g}{\overline{\Delta}}} = \frac{2\overline{\Delta} w_1}{\overline{\Delta} - 2g}, \qquad v_2 = \frac{w_2}{\frac{1}{2} + \frac{g}{\overline{\Delta}}} = \frac{2\overline{\Delta} w_2}{\overline{\Delta} + 2g},$$

тобто за наданими функціями w_i, які побудовано за відомою функцією α, ми з останніх формул одержимо функції v_i, а далі, зважаючи на (12), визначимо функції κ і γ

$$\kappa = \overline{\Delta} \cdot \left(\frac{w_1}{\overline{\Delta} - 2g} + \frac{w_2}{\overline{\Delta} + 2g} \right) \in H^q(\partial K); \; \gamma = 2\left(\frac{w_1}{\overline{\Delta} - 2g} - \frac{w_2}{\overline{\Delta} + 2g} \right) \in H^q(\partial K). \tag{13}$$

Оскільки $w_1, w_2 \in H^q(\partial K)$, то функції γ і κ також належать $H^q(\partial K)$, а з побудови функцій w_i випливає, що вони задовольняють інтегральну рівність (6). Але тоді з теореми 2 робимо висновок щодо існування єдиного розв'язку $u(x) \in H^{q+3/2}(K)$ задачі

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa, \quad u'_\tau|_{\partial K} = \gamma. \end{cases}$$

З цього факту випливає існування єдиного розв'язку задачі (4), (5). Справді, отримавши вирази для w_1 і w_2 із рівностей (13) у термінах κ і γ та підставивши значення у розвинення $\alpha = w_1 + w_2$, отримаємо саме крайову умову (5). Отже, функція $u(x) \in H^{q+3/2}(K)$ задовольняє початкове рівняння (4) і умову (5), тобто є розв'язком задачі з косою похідною.

Зауваження 3. 1) Якщо $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ – дійсне і π-ірраціональне число та $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то функції $\gamma, \kappa \in H^{m-\mu}(\partial K)$ (у цьому випадку $q = m - \mu$). 2) Якщо ж φ_0 – комплексне число і знову $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то $\gamma, \kappa \in H^m(\partial K)$ (тобто $q = m$).

Сформулюємо остаточний результат щодо розв'язності задачі з косою похідною (5) для рівняння (4).

Теорема 3. *Нехай кут $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ між характеристиками рівняння (4) є дійсним і π-ірраціональним, і нехай, крім того, виконується нерівність (11) при деякому $\mu > -1$. Тоді розв'язок крайової задачі (4), (5) з $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ існує, єдиний і належить простору $H^{m+\frac{3}{2}-\mu}(K)$. Якщо ж число φ_0 є комплексним і знову $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то розв'язок крайової задачі (4), (5) існує, єдиний і належить простору $H^{m+\frac{3}{2}}(K)$.*

Список використаної літератури

1. *Бурский В.П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге / *В.П. Бурский* // Мат. заметки. – 1990. – Т. 48, № 3. – С. 32-36.
2. *Бурский В.П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов / *В.П. Бурский* // Укр. мат. журнал. – 1993. – Т. 45, № 11. – С. 1476-1483.
3. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / *В.П. Бурский.* – Киев: Наук. думка, 2002.
4. *Бурский В.П.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения / *В.П. Бурский, Е.В. Кириченко* // Укр. мат. журнал. – 2011. – Т. 63, № 2. – С. 156-164.
5. *Егоров Ю.В.* О задаче с косой производной / *Ю.В. Егоров, В.А. Кондратьев* // Мат. сборник. – 1969. – Т. 78 (120). – С. 148-176.
6. *Егоров Ю.В.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории / *Ю.В. Егоров, М.А. Шубин* // ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 30, 1987. – С. 1-264.
7. *Мазъя В.Г.* О вырождающейся задаче с косой производной / *В.Г. Мазъя* // Мат. сборник. – 1972. – Т. 87 (129). – С. 417-454.
8. *Панеях Б.П.* К теории разрешимости задачи с косой производной / *Б.П. Панеях* // Мат. сборник. – Т. 114 (156). – 1981. – С. 226-268.

9. *Хёрмандер Л.* Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи / *Л. Хёрмандер* // Сборник "Псевдодифференциальные операторы". – М.: Мир, 1967. – С. 166-297.

Стаття: надійшла до редакції 05.11.2013
прийнята до друку 11.12.2013

SOLVABILITY OF THE SKEW DERIVATIVE PROBLEM FOR IMPROPERLY ELLIPTIC EQUATION

Yevgeniya LESINA

Institute of applied mathematics and mechanics NASU,
R. Luxemburg Str., 74, Donetsk, 83114
e-mail: lesina17@gmail.com

The skew derivative problem for second order scalar improperly elliptic equation with complex coefficients is investigated. The solvability is proved in the simple scale of Sobolev spaces under condition that the boundary value data belong to some class of analytic functions.

Key words: improperly elliptic equation, Sobolev weight space, moment problem, skew derivative problem.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Евгения ЛЕСИНА

Институт прикладной математики и механики НАНУ,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк, 83114
e-mail: lesina17@gmail.com

Исследовано задачу с косой производной в единичном круге для скалярного неправильно эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с комплексными коэффициентами. Доказана разрешимость задачи в обычной соболевской шкале пространств при условии, что граничные данные принадлежат некоторому классу аналитических функций.

Ключевые слова: неправильно эллиптическое уравнение, весовое пространство Соболева, проблема моментов, задача с косой производной.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 92–107
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 92–107

УДК 517.95

NON-HOMOGENEOUS FRACTIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM IN SPACES OF GENERALIZED FUNCTIONS

Andrii LOPUSHANSKYJ[1], **Halyna LOPUSHANSKA**[2]

[1] *Institute of Mathematics, Rzeszów University,*
Al. Rejtana, 16 A, Rzeszo'w, 35-959, Poland
[2] *Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: alopushanskyj@gmail.com, lhp@ukr.net

We prove the existence and uniqueness theorem and get the representation, by means of the Green vector-function, of the solution of the problem

$$u_t^{(\beta)}(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \;\; a = const$$

$$u(x,t) = F_1(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \qquad u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega$$

with Riemann-Liouville fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (0,1)$ and F, F_1, F_2 from spaces of generalized functions D'.

Key words: fractional derivative, generalized function, boundary value problem, Green vector-function.

1. Introduction. The conditions of classical solvability of the first boundary value problem to equation

$$D_t^{\beta} u(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F(x,t), \quad a = const$$

in bounded domain $\Omega \times (0,T]$, with regulating derivative

$$D_t^{\beta} u(x,t) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \tfrac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau - \tfrac{u(x,0)}{t^{\beta}}\right)$$

of the order $\beta \in (0;1)$, under homogeneous boundary conditions, were obtained by Luchko Yu. [1], Meerschaert M.M., Nane Erkan and Vallaisamy P. [2]. The solution was constructed by means of Fourier rows on eigen functions of corresponding Sturm-Lioville problem.

There were proved in [3], [4] the existence and uniqueness theorem and the representation, by means of Green function, of classical solution of fractional Cauchy problem

$$D_t^{\beta} u(x,t) = A(x,D)u(x,t), \quad (x,t) \in R^N \times [0,T],$$
$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

with continuous function g_1 having some growth at infinity, elliptic differential second order operator $A(x, D)$ with smooth coefficients depending on space variables $x \in \mathbb{R}^n$. Such regulating fractional derivative was used by the authors of [5]-[10] and the others. The classical solution of corresponding fractional Cauchy problem in the case $\beta > 1$ and $A(x, D) = \Delta$ was constructed in [9]. The representation, by means of Green function, of the solution was obtained. In [11] and [12] the unique solvability of the fractional Cauchy problem with given data – slowly increasing generalized functions and from weight spaces of generalized functions, respectively, was established.

We prove the unique solvability of the first boundary value problem to equation

$$u_t^{(\beta)}(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \quad a = const,$$

with Riemann-Liouville fractional derivative $u_t^{(\beta)}$ of the order $\beta \in (0,1)$, in spaces of generalized functions of type D'. This paper is organized as follows. The main significances and terminology are given in section 2. We state the problem in section 3. To prove the main result (in section 5) we study the properties of conjugated Green operators in section 4. We finish this paper with some remarks in section 6 and addition on some requisite properties of the H-function of Fox in section 7.

2. Auxiliary significances. Let Ω be boundary domain in $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3, \dots$, $S = \partial\Omega$ – the boundary of domain Ω (of class C^∞), $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $Q_{1T} = S \times (0,T]$,

$D(\bar{Q}_T) = C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l\varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots\}$,

$D(\bar{Q}_{1T}) = C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_{1T}) = \{\varphi \in C^\infty(\bar{Q}_{1T}) : D_t^l\varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots\}$,

$D(R^N) = C_0^\infty(R^N)$ – the space of indefinitely differentiable functions with compact supports in R^N,

$D(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$,

$D'(\mathbb{R}^N)$, $D'(\bar{\Omega})$, $D'(\bar{Q}_T)$ and $D'(\bar{Q}_{1T})$ – the spaces of linear continuous functionals (generalized functions) on $D(\mathbb{R}^N)$, $D(\bar{\Omega})$, $D(\bar{Q}_T)$ and $D(\bar{Q}_{1T})$, respectively,

(f, φ) – the value of $f \in D'(\mathbb{R}^N)$ onto the basic function $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$,

$(f, \varphi)_0$ – the value of $f \in D'(\bar{Q}_T)$ onto the basic function $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$,

$(f, \varphi)_1$ – the value of $f \in D'(\bar{Q}_{1T})$ onto the basic function $\varphi \in D(\bar{Q}_{1T})$,

$(f, \varphi)_2$ – the value of $f \in D'(\bar{\Omega})$ onto the basic function $\varphi \in D(\bar{\Omega})$.

We denote by $\hat{*}$ the operation of convolution of generalized function g and basic function φ: $(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$, and by $*$ – the operation of convolution of generalized functions f and g – the generalized function $f * g$: $(f * g, \varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$ for all basic function φ. We use the function $f_\lambda \in D'_+(R) = \{f \in D'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \tfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ for } \lambda > 0 \quad \text{and} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ for } \lambda \leqslant 0,$$

where $\theta(t)$– Heaviside function, $\Gamma(\lambda)$– Gamma-function. The function

$$u_t^{(\beta)} = f_{-\beta} * u$$

is called the Riemann-Lioville derivative of the order β of the function $u \in D'_+(\mathbb{R})$. If the regulating derivative $D^\beta u(t)$ exists then

$$D^\beta u(t) = u^{(\beta)}u(t) - f_{1-\beta}(t)u(0).$$

The relations underway

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \qquad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu},$$

and for $(x,t)\in Q_T$, $v\in D(\bar Q_T)$, $\beta\in(0;1)$

$$f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t)=f'_{1-\beta}(t)\hat{*}v(x,t)=-f_{1-\beta}(t)\hat{*}v_t(x,t)=-\tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\tfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^T\tfrac{v(x,\eta)}{(\eta-t)^\beta}d\eta.$$

We denote by $C_{2,\beta}(Q_T)$ the class of restricted twice continuously differentiable by variables x functions $v(x,t)$, $(x,t)\in\bar Q_T$, vanishing at $t\geq T$ and with continuous $D_t^\beta v(x,t)$ in Q_T.

We introduce the operators

$$\hat L:(\hat Lv)(x,t)\equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t)-a^2\Delta v(x,t),\quad (x,t)\in Q_T,\quad v\in D(\bar Q_T),$$

$$L:(Lv)(x,t)\equiv f_{-\beta}(t)*v(x,t)-a^2\Delta v(x,t),\quad (x,t)\in Q_T,\quad v\in D'(\bar Q_T),$$

$$L^{reg}:\ (L^{reg}v)(x,t)\equiv D_t^\beta v(x,t)-a^2\Delta v(x,t),\quad (x,t)\in Q_T,\quad v\in C_{2,\beta}(Q_T),$$

the functional space

$$X(\bar Q_T)=\{\varphi\in C^{\infty,(0)}(\bar Q_T)\ :\ \hat L\varphi\in D(\bar Q_T),\ \varphi|_{\bar Q_{1T}}=0\}$$

which does not empty (see following lemma 3) and $X'(\bar Q_T)$ – the space of linear continuous functionals on $X(\bar Q_T)$, denote by $(f,\varphi)_0$ the value of $f\in X'(\bar Q_T)$ onto $\varphi\in X(\bar Q_T)$.

3. Problem's definition.

Supposition (L): Let $\beta\in(0,1)$, $F\in X'(\bar Q_T)$, $F_1\in D'(\bar Q_{1T})$, $F_2\in D'(\bar\Omega)$.

Under supposition (L) we study the problem

$$f_{-\beta}(t)*u(x,t)-a^2\Delta u(x,t)=F(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,t)=F_1(x,t),\quad (x,t)\in Q_{1T},\qquad u(x,0)=F_2(x),\quad x\in\Omega. \tag{2}$$

Definition 1. *The function $u\in D'(\bar Q_T)$ satisfying the equality*

$$(u,\hat L\psi)_0=(F,\psi)_0+(F_1,\frac{\partial\psi}{\partial\nu})_1+(F_2,\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt)_2\qquad\forall\psi\in X(\bar Q_T) \tag{3}$$

is called the solution of the problem (1), (2). Here $\nu(x)=(\nu_1(x),\dots,\nu_N(x))$ – the unite vector of the inner normal to the surface S at the point $x\in S$.

Note that for $u\in C_{2,\beta}(Q_T)$, $\psi\in X(\bar Q_T)$ the Green formula

$$\int\limits_{Q_T}u(x,t)(\hat L\psi)(x,t)dxdt=\int\limits_{Q_T}(L^{reg}u)(x,t)\psi(x,t)dxdt+ \tag{4}$$

$$+a^2\int\limits_0^T dt\int\limits_S u(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dS+\int\limits_\Omega u(x,0)dx\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt$$

holds. We may prove it as the corresponding formula in [11].

We may consider the problem (1), (2) as the generalization of the problem

$$(L^{reg}u)(x,t)=g_0(x,t),\quad (x,t)\in Q_T \tag{5}$$

$$u(x,t)=g_1(x,t),\quad (x,t)\in Q_{1T},\qquad u(x,0)=g_2(x),\quad x\in\Omega \tag{6}$$

with regular data g_0, g_1, g_2. It obtains from following theorem 1 that under rather regular given functions $F = g_0$, $F_1 = g_1$, $F_2 = g_2$ the solutions of the problems (1), (2) and (5), (6) coincide.

4. Green vector-function.

Definition 2. *The vector-function $(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t))$ such that under rather regular functions g_0, g_1, g_2 the function*

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy+ \tag{7}$$

$$+\int_{Q_{1t}} G_1(x-y,t-\tau)g_1(y,\tau)dSd\tau + \int_\Omega G_2(x-y,t)g_2(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T$$

is the classical (of class $C_{2,\beta}(Q_T)$) solution of the problem (5), (6) is called the Green vector-function of the problem (1), (2) (as well as of the problem (5), (6)).

It follows from the definition 2 that

$$(LG_0)(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \quad \text{where } \delta - \text{delta-function of Dirac},$$

$$(L^{reg}G_1)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \qquad G_1(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in Q_{1T},$$

$$(L^{reg}G_2)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad G_2(x,0) = \delta(x), \quad x \in \Omega.$$

In [3], [4] the properties of the Green operators on $C_{2,\beta}(\mathbb{R}^N \times (0,T])$ were studied. We study the conjugated Green operators

$$(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T dt \int_\Omega G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx,$$

$$(\hat{\mathfrak{G}}_1\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T dt \int_\Omega G_1(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx,$$

$$(\hat{\mathfrak{G}}_2\varphi)(y) = \int_0^T dt \int_\Omega G_2(x-y,t)\varphi(x,t)dxdt, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T)$$

by methods of the works [4], [13], [11].

Lemma 1. *For all $\psi \in X(\bar{Q}_T)$*

$$(\hat{\mathfrak{G}}_0(\hat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,t), \quad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{8}$$

$$(\hat{\mathfrak{G}}_1(\hat{L}\psi))(y,\tau) = \frac{\partial\psi(y,t)}{\partial\nu}, \quad (y,t) \in \bar{Q}_{1T}, \tag{9}$$

$$(\hat{\mathfrak{G}}_2(\hat{L}\psi))(y) = \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,t)dt, \quad y \in \Omega. \tag{10}$$

Proof. If we substitute the solution (7) of the classical first boundary value problem (5), (6) into the formula (4), then for all $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ we obtain

$$\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt+$$
$$\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S G_1(x-y,t-\tau)g_1(y,\tau)dS\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_\Omega G_2(x-y,t)g_2(y)dy\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt+\int\limits_{Q_{1T}} g_1(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dSdt+$$
$$+\int\limits_{Q_T} g_2(x)f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt,$$

that is
$$\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx\Big)g_0(y,\tau)dyd\tau+$$
$$+\int\limits_{Q_{1T}}\Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega G_1(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx\Big)g_1(y,\tau)dSd\tau+$$
$$+\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_{Q_T} G_2(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big)g_2(y)dy=$$
$$=\int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt+\int\limits_{Q_{1T}} g_1(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dSdt+$$
$$+\int\limits_{Q_T} g_2(x)f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt.$$

The correctness of the lemma follows from the arbitrariness of g_0, g_1, g_2 .

Lemma 2. *Mapping $\hat{\mathfrak{G}}_0$ acts: $D(\bar{Q}_T)\to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$.*

Proof. It follows from the results of [14] that the fundamental function $G(x,t)$ of the operator L is given by

$$G(x,t)=\frac{\pi^{-N/2}t^{\beta-1}}{|x|^N}H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta}\Big|\begin{matrix}(1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (N/2,1) & (1,1)\end{matrix}\right), \tag{11}$$

where $H^{m,n}_{p,q}\left(z\Big|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right):=H(z)$ is the H-function of Fox [15].

By property (B) (in addition) of the H-function we simplify the expression (11) and get the representation

$$G(x,t)=\frac{\pi^{-N/2}t^{\beta-1}}{|x|^N}H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta}\Big|\begin{matrix}(\beta,\beta) & \\ (1,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right). \tag{12}$$

We use following significances for $H^{m,n}_{p,q}$:
$\Delta^*=\sum_{i=1}^q\beta_i-\sum_{i=1}^p\alpha_i$,
$a^*=\sum_{i=1}^n\alpha_i-\sum_{i=n+1}^p\alpha_i+\sum_{i=1}^m\beta_i-\sum_{i=m+1}^q\beta_i$.

Since $\Delta^*=2-\beta$, it follows from theorem 1.1 [15] that function $G(x,t)$ exists for all $x\neq 0$, $t>0$ $(\Delta^*\neq 0)$.

Using property (E) (in addition) of the H-function we find

$$\frac{dG(x,t)}{d|x|} = \frac{\partial G(|x|,t)}{\partial |x|} = -\frac{\pi^{-N/2}t^{\beta-1}}{|x|^{N+1}} H^{3,0}_{2,3}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta}\Big| \begin{matrix} (\beta,\beta) & (N,2) & \\ (N+1,2) & (1,1) & (N/2,1) \end{matrix}\right),$$

whence

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial \nu} = -\frac{\pi^{-N/2}t^{\beta-1}}{|x|^{N+1}} H^{3,0}_{2,3}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta} \begin{matrix} (\beta,\beta) & (N,2) & \\ (N+1,2) & (1,1) & (N/2,1) \end{matrix}\right) \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j\nu_j(x)}{|x|}, \quad (13)$$

$x \in S$. Since $\Delta^* = 2-\beta$, it follows from theorem 1.1 [15] that function $\frac{\partial \tilde{G}_0(x,t)}{\partial \nu}$ exists for all $x \neq 0$, $t > 0$.

As in [3], [4] one may prove by Levi method that the functions G_0 and G (and its derivatives) have equal character of singularities.

Let $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ $(\gamma_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, \dots, N)$ be multi-index, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_N$, $D^\gamma_x = D^\gamma = (\frac{\partial}{\partial x})^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1}\dots\partial x_N^{\gamma_N}}$.

Because that $G(x,t) = G(|x|,t)$ (and therefore, $(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma G(x-y,t) = (-\frac{\partial}{\partial y})^\gamma G(x-y,t)$ for all multi-index γ), by property of the convolution of generalized function and basic $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ we obtain

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_\tau^T G(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial\tau}(G(x-y,t-\tau)\hat{*}\varphi(x,\tau) =$$

$$= G(x-y,t-\tau)\hat{*}\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial\tau} = \int_\tau^T G(x-y,t-\tau)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}dt$$

(and therefore, $(\frac{\partial}{\partial\tau})^{\gamma_0}\int_{Q_T} G(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dxdt = \int_{Q_T} G(x-y,t-\tau)(\frac{\partial}{\partial t})^{\gamma_0}\varphi(x,t)dxdt$). In respect continuity of functions $D^\gamma_x D^{\gamma_0}_t\varphi(x,t)$ on $\bar{Q}_T$ for all $\gamma_0 \in \mathbb{Z}_+$ and multi-index γ, it is enough to demonstrate the uniform convergence of the integrals

$$\int_\tau^T dt\int_\Omega |G(x-y,t-\tau)|dx, \quad \int_\tau^T dt\int_S |G(x-y,t-\tau)|dS_x, \quad (14)$$

$$\int_\tau^T dt\int_S \Big|\frac{\partial G(x-y,t-\tau)}{\partial\nu_x}\Big|dS_x. \quad (15)$$

In [15] the asymptotic of the H-functions is constructed. Using the realization of the conditions (1.1.6) and (1.3.2) from this work for obtaining of the estimates of the H-functions we adapt the corollary 1.10.2 [15]:

$$\left|H^{q,0}_{p,q}\left(z\Big|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right| \leq C|z|^{\frac{\mu+\frac{1}{2}}{\Delta^*}}e^{-h|z|^{\frac{1}{\Delta^*}}} \quad \text{for real} \quad z \to \infty, \quad (16)$$

where $\mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2}$, C and $h = h(a,\beta)$ are positive constants. Further we denote by $P, \hat{C}, c, C_i, C^*_i, C'_i, c_i, c'_i, \hat{c}_i, c^*_i$ $(i = 0,1,2,3)$ some positive constants.

Using (12) and (13) we find $\mu + \frac{1}{2} = \frac{N}{2} + 1 - \beta$ for G, $\mu + \frac{1}{2} = \frac{N}{2} + 2 - \beta$ for $\frac{\partial G}{\partial \nu}$, $\Delta^* = 2 - \beta$ for both cases. Then by (16) we get the following estimates:

$$|G(x,t)| \leq \frac{\hat{C}t^{\beta-1}}{|x|^N} \cdot \left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{N+2-2\beta}{2(2-\beta)}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \leq \frac{C_0}{t^{1-\beta}|x|^N} \quad \text{for} \quad |x|^2 > t^\beta, \tag{17}$$

$$\left|\frac{\partial G(x,t)}{\partial \nu}\right| \leq \frac{\hat{C}t^{\beta-1}}{|x|^{N+1}} \cdot \left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{1+\frac{N}{2(2-\beta)}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \leq \frac{C_1}{t^{1-\beta}|x|^{N+1}} \quad \text{for} \quad |x|^2 > t^\beta. \tag{18}$$

By corollary from theorem 1.12 [15] the following estimates

$$\left|H^{m,n}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right| \leq C|z|^\varrho |logz|^{N^*-1}, \quad z \to 0 \tag{19}$$

hold where $\varrho = \min\limits_{1\leq j\leq m} \frac{Reb_j}{\beta_j}$, N^* is the greatest order of the poles $b_{jl} = \frac{-b_j - l}{\beta_j}$, $1 \leq j \leq m$, $l = 0, 1, \dots$ of the function $\Gamma(b_j + \beta_j s)$.

We find $\varrho = \min\{1, \frac{N}{2}\} = 1$ for $N \geq 2$ ($\varrho = 1/2$ for $N = 1$) and get

$$|G(x,t)| \leq \frac{C_0^*}{t|x|^{N-2}}, \quad \left|\frac{\partial G(x,t)}{\partial \nu}\right| \leq \frac{C_1^*}{t|x|^{N-1}}, \quad \text{for} \quad |x|^2 < t^\beta \tag{20}$$

in the case of the simple poles b_{jl} (that is $N \geq 3$),

$$|G(x,t)| \leq \frac{C_0^*}{t} ln\frac{t^{\beta/2}}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial G(x,t)}{\partial \nu}\right| \leq \frac{C_1^*}{t|x|} ln\frac{t^{\beta/2}}{|x|}, \quad \text{for} \quad |x|^2 < t^\beta, \quad N = 2.$$

Now we may prove the uniform convergence of integrals (14),(15). Let for all $(y,\tau) \in \bar{Q}_T$, $\varepsilon > 0$

$Q_{T,\varepsilon}(y,\tau) = Q_{T,\varepsilon} = \{(x,t) \in \bar{Q}_T \ : \ |x-y| < \varepsilon, \ 0 < t - \tau < \varepsilon^{2/\beta}\}$,

$Q_{1T,\varepsilon}(y,\tau) = Q_{1T,\varepsilon} = \{(x,t) \in \bar{Q}_{1T} \ : \ |x-y| < \varepsilon, \ 0 < t - \tau < \varepsilon^{2/\beta}\}$.

Then in the case $N \geq 3$, for all $(y,\tau) \in \bar{Q}_T$, $\varepsilon > 0$ the formulas (17), (18), (20) imply following requisite estimates

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}(y,\tau)} |G(x-y,t-\tau)|dxdt \leq \int\limits_{(x,t)\in Q_{T,\varepsilon}:|x-y|^2<(t-\tau)^\beta} |G(x-y,t-\tau)|dxdt +$$

$$+ \int\limits_{(x,t)\in Q_{T,\varepsilon}:|x-y|^2>(t-\tau)^\beta} |G(x-y,t-\tau)|dxdt \leq$$

$$\leq C_0^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} \frac{dt}{t} \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|^2<t^\beta} |x-y|^{2-N}dx + C_0 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} \frac{dt}{t^{1-\beta}} \int\limits_{x\in\Omega:t^\beta<|x-y|^2<\varepsilon^2} |x-y|^{-N}dx \leq$$

$$\leq c_0 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-1} \int\limits_0^{t^{\beta/2}} rdr + t^{\beta-1} \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\varepsilon} r^{-1}dr]dt \leq c_0^*\varepsilon^2,$$

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}(y,\tau)} |G(x-y,t-\tau)|dS_x dt \le c_0 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-1+\frac{\beta}{2}} + t^{\beta-1}(t^{-\beta/2} - \varepsilon^{-1})]dt \le c_0^* \varepsilon,$$

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}(y,\tau)} \Big|\frac{\partial G(x-y,t-\tau)}{\partial \nu_x}\Big| dSdt \le C_1^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} \frac{dt}{t} \int\limits_{x\in S:|x-y|^2<t^\beta} |x-y|^{1-N+s} dS +$$

$$+C_1 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} \frac{dt}{t^{1-\beta}} \int\limits_{x\in S: t^\beta<|x-y|^2<\varepsilon^2} |x-y|^{-N-1+s} dS \le$$

$$\le c_1 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-1} \int\limits_0^{t^{\beta/2}} r^{s-1}dr + t^{\beta-1} \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\varepsilon} r^{s-2}dr]dt \le$$

$$\le c_1' \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-1+\frac{s\beta}{2}} + t^{\beta-1}(t^{(s-2)\beta/2} - \varepsilon^{s-1})]dt \le c_1^* \varepsilon^s.$$

Here $s \in (0,1)$ – smoothness of surface S is taken into consideration. We get similar results in the case $N=2$ and for G_0 instead of G.

Lemma 3. *For arbitrary $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ there exists $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ such that*

$$(\hat{L}\psi)(x,t) = \varphi(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T.$$

Proof. As in [11] we show that the function

$$\psi(y,\tau) = \int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx$$

is desired.

Lemma 4. $G_1(x-y,t) = \frac{\partial G_0(x-y,t)}{\partial \nu_y}, \quad (x,t) \in Q_T,\ (y,\tau) \in Q_{1T},$

$$G_2(x,t) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

Proof. It follows from (8) and (9) that for all $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, $(y,\tau) \in Q_{1T}$

$$\int\limits_\tau^T \int\limits_\Omega \frac{\partial G_0(x-y,t-\tau)}{\partial \nu_y} (\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_\tau^T \int\limits_\Omega G_1(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \frac{\partial \psi(y,\tau)}{\partial \nu_y},$$

whence

$$\int\limits_\tau^T \int\limits_\Omega \Big[\frac{\partial G_0(x-y,t-\tau)}{\partial \nu_y} - G_1(x-y,t-\tau)\Big](\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = 0.$$

By lemma 3, for every $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, there exists the function $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ such that $\hat{L}\psi = \varphi$ in Q_T. Then

$$\int_\tau^T \int_\Omega \Big[\frac{\partial G_0(x-y,t-\tau)}{\partial \nu_y} - G_1(x-y,t-\tau)\Big]\varphi(x,t)dxdt = 0 \quad \forall \varphi \in D(\bar{Q}_T).$$

By known lemma of Du Bois-Reymond we get the first formula in assertion of lemma. We obtain the second formula in assertion of lemma reciprocally, from formulas (8) and (10).

Note, that by means of Fourier rows on eigen ortonormed functions $\omega_m(y)$ ($m = 1, 2, \dots$) of the Sturm-Lioville problem

$$\Delta\omega_m + \lambda_m\omega_m = 0, \quad y \in \Omega, \quad \omega_m(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega$$

we find the main Green function

$$G_0(x-y,t-\tau) = (t-\tau)^{\beta-1}\sum_{m=0}^{\infty} E_\beta(-\lambda_m a^2(t-\tau)^\beta)\omega_m(x)\omega_m(y)$$

where $E_\beta(z) = E_{\beta^{-1}}(z,\beta) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}$ – Mittag-Leffler function [7] having the estimate $E_\beta(-a^2\lambda_m(t-\tau)^\beta) \le \frac{C}{1+a^2\lambda_m(t-\tau)^\beta}$.

Lemma 5. *Following mappings*
$\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$, $\quad \hat{\mathfrak{G}}_1 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_{1T})$, $\quad \hat{\mathfrak{G}}_2 : D(\bar{Q}_T) \to C^\infty(\bar{\Omega})$
hold.

Proof. . It follows from lemmas 2 and 3 that $\hat{\mathfrak{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$. By lemma 4 $G_1(x-y,t) = \frac{\partial G_0(x-y,t)}{\partial \nu_y}$, $(x,t) \in Q_T$, $(y,\tau) \in Q_{1T}$. Let $\tilde{G}_1(x-y,t) = \frac{\partial G(x-y,t)}{\partial \nu_y}$, $(x,t) \in Q_T$, $(y,\tau) \in Q_{1T}$. It follows from (18) and (20) that

$$|\tilde{G}_1(x-y,t)| \le \frac{C_1}{t^{1-\beta}|x-y|^{N+1}} \quad \text{for} \quad |x-y|^2 > t^\beta,$$

$$|\tilde{G}_1(x-y,t)| \le \frac{C_1^*}{t|x-y|^{N-1}}, \quad \text{for} \quad |x-y|^2 < t^\beta, \quad N \ge 3,$$

$$|\tilde{G}_1(x-y,t)| \le \frac{C_1^*}{t|x-y|} ln \frac{t^{\beta/2}}{|x-y|}, \quad \text{for} \quad |x-y|^2 < t^\beta, \quad N = 2$$

and the similar estimates for $G_1(x-y,t)$ hold.

We find function $G_2(x,t)$ using lemma 4 and properties of the H-functions. Being that $G_2(x,t) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t)$, $\tilde{G}_2(x,t) = f_{1-\beta}(t) * G(x,t)$, we use the property (F) (in addition) about fractional differentiation of the H-function reforming the expression (12) before it.

Because in our case ($n = 0$) the condition (1.1.6) hold automatically, the property (D) (in addition) for $\lambda = \frac{|x|^2}{4a^2}$ implies

$$G(x,t) = \frac{\pi^{-N/2}t^{\beta-1}}{|x|^N}\frac{|x|^2}{4a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{|x|^2}{4a^2}\Big)^k H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{1}{t^\beta}\middle|\begin{matrix}(\beta,\beta) & \\ (1+k,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right).$$

Using property (C) (in addition) of the H-functions we get

$$G(x,t) = \frac{\pi^{-N/2}t^{\beta-1}}{4a^2|x|^{N-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(1-\frac{|x|^2}{4a^2})^k H_{2,1}^{0,2}\left(t^\beta\Big|\begin{matrix}(-k,1) & (1-N/2,1)\\ (1-\beta,\beta) & \end{matrix}\right).$$

At last, by property (F), we find that

$$\tilde{G}_2(x,t) = \frac{\pi^{-N/2}}{4a^2|x|^{N-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(1-\frac{|x|^2}{4a^2})^k H_{3,2}^{0,3}\left(t^\beta\Big|\begin{matrix}(1-\beta,\beta) & (-k,1) & (1-N/2,1)\\ (1-\beta,\beta) & (0,\beta) & \end{matrix}\right).$$

Using properties (B) and (C) of the H-function, we reform this expression toward following

$$\tilde{G}_2(x,t) = \frac{\pi^{-N/2}}{4a^2|x|^{N-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(1-\frac{|x|^2}{4a^2})^k H_{2,1}^{0,2}\left(t^\beta\Big|\begin{matrix}(-k,1) & (1-N/2,1)\\ (0,\beta) & \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\pi^{-N/2}}{4a^2|x|^{N-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(1-\frac{|x|^2}{4a^2})^k H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{1}{t^\beta}\Big|\begin{matrix}(1,\beta) & \\ (1+k,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right),$$

and lastly, by property (D), we obtain that $\tilde{G}_2(x,t)$ is given by

$$\tilde{G}_2(x,t) = \frac{\pi^{-N/2}}{|x|^N} H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta}\Big|\begin{matrix}(1,\beta) & \\ (1,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right). \qquad (21)$$

Since $\Delta^* = 2-\beta$, it follows from the theorem 1.1 [15] that the functions $\tilde{G}_2(x,t)$ and $G_2(x,t)$ exist for all $x \neq 0$, $t > 0$.

Note that function (21) is such as constructed in [3] and also [16] Green function of the Cauchy problem for the equation with regulating derivative.

As in proof of lemma 2, in respect continuity of functions $D_x^\gamma D_t^{\gamma_0}\varphi(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$ for all $\gamma_0 \in \mathbb{Z}_+$ and multi-index γ, it remains to demonstrate the uniform convergence of integrals

$$\int\limits_{Q_T} |\tilde{G}_i(x-y,t)|dxdt, \quad \int\limits_{Q_{1T}} |\tilde{G}_i(x-y,t)|dSdt, \quad i=1,2, \quad \int\limits_{Q_{1T}} \Big|\frac{\partial \tilde{G}_2(x-y,t)}{\partial \nu_x}\Big|dSdt.$$

By property (E) of the differentiation of the H-function we get

$$\frac{\partial \tilde{G}_2(x,t)}{\partial \nu_x} = -\frac{\pi^{-N/2}}{|x|^{N+1}} H_{2,3}^{3,0}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta}\Big|\begin{matrix}(1,\beta) & (N,2) & \\ (N+1,2) & (1,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right) \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j\nu_j(x)}{|x|}. \qquad (22)$$

We find $\mu+\frac{1}{2}=\frac{N}{2}$ for the H-function in (21), $\mu+\frac{1}{2}=\frac{N}{2}+1$ for the H-function in (22). Then by estimate (16) we get

$$|\tilde{G}_2(x,t)| \le \frac{C}{|x|^N}\cdot\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{N}{2(2-\beta)}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{C_2}{|x|^N} \quad \text{for} \quad |x|^2 > t^\beta,$$

$$\Big|\frac{\partial \tilde{G}_2(x,t)}{\partial \nu_x}\Big| \le \frac{C}{|x|^{N+1}}\cdot\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{N+2}{2(2-\beta)}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{C_3}{|x|^{N+1}} \quad \text{for} \quad |x|^2 > t^\beta,$$

and by estimate (19) for $|x|^2 < t^\beta$

$$\Big|\frac{\partial \tilde{G}_1(x,t)}{\partial \nu_x}\Big| \le \frac{C_1'}{t|x|^N}, \quad |\tilde{G}_2(x,t)| \le \frac{C_2^*}{t^\beta|x|^{N-2}}, \quad \Big|\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial \nu_x}\Big| \le \frac{C_3^*}{t^\beta|x|^{N-1}} \quad \text{if} \quad N \ge 3,$$

$$|\frac{\partial \tilde{G}_1(x,t)}{\partial \nu_x}| \leq \frac{C_1'}{t|x|^2} ln\frac{t^{\beta/2}}{|x|}, \quad |\tilde{G}_2(x,t)| \leq \frac{C_2^*}{t^\beta} ln\frac{t^{\beta/2}}{|x|},$$

$$|\frac{\partial \tilde{G}_2(x,t)}{\partial \nu_x}| \leq \frac{C_3^*}{t^\beta |x|} ln\frac{t^{\beta/2}}{|x|} \quad \text{if} \quad N=2.$$

Now, as in proof of lemma 2, in the case $N \geq 3$ we find following estimates:

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}(y,\tau)} |\tilde{G}_1(x-y,t-\tau)|dxdt \leq \int\limits_{(x,t)\in Q_{T,\varepsilon}:|x-y|^2<(t-\tau)^\beta} |\tilde{G}_1(x-y,t-\tau)|dxdt +$$

$$+ \int\limits_{(x,t)\in Q_{T,\varepsilon}:|x-y|^2>(t-\tau)^\beta} |\tilde{G}_1(x-y,t-\tau)|dxdt \leq$$

$$\leq C_1^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} \frac{dt}{t} \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|^2<t^\beta} |x-y|^{1-N}dx + C_1 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} \frac{dt}{t^{1-\beta}} \int\limits_{x\in\Omega:t^\beta<|x-y|^2<\varepsilon^2} |x-y|^{-N-1}dx \leq$$

$$\leq c_1 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-1} \int\limits_0^{t^{\beta/2}} dr + t^{\beta-1} \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\varepsilon} r^{-2}dr]dt \leq c_1^*\varepsilon \quad \forall (y,\tau)\in Q_{1T},$$

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}(y,0)} |\tilde{G}_2(x-y,t)|dxdt \leq$$

$$\leq C_2^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} t^{-\beta}dt \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|^2<t^\beta} |x-y|^{2-N}dx + C_2 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} dt \int\limits_{x\in\Omega:t^\beta<|x-y|^2<\varepsilon^2} |x-y|^{-N}dx \leq$$

$$\leq c_2 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-\beta} \int\limits_0^{t^{\beta/2}} rdr + \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\varepsilon} r^{-1}dr]dt \leq c_2' \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [1 + ln\frac{\varepsilon}{t^{\beta/2}}]dt \leq c_2^*\varepsilon^{2/\beta} \quad \forall y\in\bar{\Omega},$$

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}(y,\tau)} |\tilde{G}_1(x-y,t-\tau)|dS_xdt = \int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}(y,\tau)} |\frac{\partial G(x-y,t-\tau)}{\partial \nu}|dS_xdt \leq c_1^*\varepsilon^s$$

$$\forall (y,\tau)\in \bar{Q}_T, \quad s\in(0,1)$$

(see proof of lemma 2),

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}(y,0)} |\tilde{G}_2(x-y,t)|dS_xdt = \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} dt \int\limits_S |\tilde{G}_2(x-y,t)|dS_x \leq$$

$$\leq c \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [\int\limits_{x\in S:|x-y|^2<t^\beta} |\tilde{G}_2(x-y,t)|dS + \int\limits_{x\in S:t^\beta<|x-y|^2<\varepsilon^2} |\tilde{G}_2(x-y,t)|dS]dt \leq$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

$$\leq c\int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}}[C_2^* t^{-\beta}\int\limits_{x\in S:|x-y|<t^\beta}|x-y|^{2-N}dS+C_2\int\limits_{x\in S:t^\beta<|x-y|^2<\varepsilon^2}|x-y|^{-N}dS]dt\leq$$

$$\leq \hat{c}_2\int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}}[1+t^{-\beta/2}-\varepsilon^{-1}]dt\leq c_2^*\varepsilon^{\frac{1}{\beta}-1}\quad \forall y\in\bar{\Omega},$$

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}(y,0)}|\frac{\partial\tilde{G}_2(x-y,t)}{\partial\nu_x}|dS\leq$$

$$\leq C_3^*\int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}}[t^{-\beta}\int\limits_{x\in S:|x-y|^2<t^\beta}|x-y|^{1-N}dx+C_3\int\limits_{x\in S:t^\beta<|x-y|^2<\varepsilon^2}|x-y|^{-1-N}dx]dt\leq$$

$$\leq c_3\int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}}[t^{-\beta}\int\limits_0^{t^{\beta/2}}r^{s-1}dr+\int\limits_{t^{\beta/2}}^{\varepsilon}r^{s-3}dr]dt\leq c_3^*\varepsilon^{\frac{2(1-\beta)}{\beta}+s},\quad \forall y\in\bar{\Omega},\quad s\in(0,1),\quad \varepsilon>0.$$

We get similar results in the case $N=2$.

5. The existence and uniqueness theorem.

Theorem 1. *Under supposition (L) the unique solution $u\in D'(\bar{Q}_T)$ of the problem (1), (2) exists. It is given by the formula*

$$(u,\varphi)_{Q_T}=(F,\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)_0+(F_1,\hat{\mathfrak{G}}_1\varphi)_1+(F_2,\hat{\mathfrak{G}}_2\varphi)_2\quad\forall\varphi\in D(\bar{Q}_T).\tag{23}$$

Proof. It follows from lemma 5 that

$$\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi\in X(\bar{Q}_T),\quad \hat{\mathfrak{G}}_1\varphi\in C^{\infty,(0)}(Q_{1T}),\quad \hat{\mathfrak{G}}_2\varphi\in D(\bar{\Omega})\quad\forall\varphi\in D(\bar{Q}_T).$$

So, the right-hand side in formula (23) makes sense and the function $u\in D'(\bar{Q}_T)$ is defined by (23).

Substituting the function (23) into identity (3), using lemma 1, we show that the function (23) satisfies the problem (1), (2):

$$(u,\hat{L}\psi)_{Q_T}=(F,\hat{\mathfrak{G}}_0(\hat{L}\psi))_0+(F_1,\hat{\mathfrak{G}}_1(\hat{L}\psi))_1+(F_2,\hat{\mathfrak{G}}_2(\hat{L}\psi))_2=$$

$$=(F,\psi)_0+(F_1,\tfrac{\partial\psi}{\partial\nu})_1+(F_2(x),\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt)_2\qquad\forall\psi\in X(\bar{Q}_T).$$

Let u_1,u_2 be solutions of the problem (1), (2). It follows from the solution's definition that function $u=u_1-u_2$ satisfies the condition

$$(u,\hat{L}\psi)_{Q_T}=0\qquad\forall\psi\in X(\bar{Q}_T).$$

By lemma 3, for every $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$, there exists function $\psi\in X(\bar{Q}_T)$ such that $\hat{L}\psi=\varphi$ in $\bar{Q}_T$. Then, from the previous identity, $(u,\varphi)_{Q_T}=0$ for every $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$, that is $u=0$ in $D'(\bar{Q}_T)$. The theorem is proved.

6. Final remarks. The result of the theorem 1 may by improved: by learning new properties of conjugated Green operators as in [12] we may find the character of the solution's singularities at the boundary of the domain subject to the singularities of the right-hand side of the equation and subject to the orders of the singularities of given generalized functions in initial and boundary conditions.

The obtained results have expansion to the equation

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]$$

with partial Riemann-Liouville fractional derivatives $u_{x_j}^{(\alpha)}$ and constant coefficients b_j, $j = \overline{1,n}$ under the condition $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j p_j^{\alpha} \geq C_0$ for all $p \in \mathbb{R}^n, |p| = 1$ (the estimates of the fundamental solutions were given in [17]) and also to the equation

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2} u = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]$$

where the fractional n-dimensional Laplace operator $(-\Delta)^{\alpha/2}$ is defined by its Fourier transform: $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^{\alpha}\mathfrak{F}[\psi(x)]$.

We may also study the generalized boundary value meaning of corresponding problems for semi-linear equations

$$u_t^{(\beta)}(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = f(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]$$

by the methods of [18].

7. Addition. Here we adduce some properties of the H-function of Fox

$$H_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right) := H(z)$$

from [15] which were applied in previous sections. We have

$$H(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \mathfrak{H}(s) z^{-s} ds,$$

where

$$\mathfrak{H}(s) = \frac{\Pi_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\Pi_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\Pi_{i=n+1}^{q}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\Pi_{j=m+1}^{p}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)},$$

$$z^{-s} = \exp[-s(log|z| + iargz)], \quad z \neq 0, \quad i^2 = -1,$$

$\mathbb{C}$ is infinite contour which separates all the poles $b_{jl} = \frac{-b_j - l}{\beta_j}$, $1 \leq j \leq m$, $l = 0,1,\dots$ of the functions $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ to the left and all the poles $a_{ik} = \frac{1-a_i-k}{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq n$, $k = 0,1,\dots$ of the functions $\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)$ to the right (under supposition that these poles do not coincide).

(A) – *property 2.1* [15]. The H-function is symmetric in the set of pares (a_1,α_1), $\dots$, (a_n,α_n); in $(a_{n+1},\alpha_{n+1}),\dots,(a_p,\alpha_p)$; in $(b_1,\beta_1),\dots,(b_m,\beta_m)$ and in $(b_{m+1},\beta_{m+1}),\dots,(b_q,\beta_q)$.

(B) – *property 2.2* [15]. For $n \geq 1$, $q \geq m$

$$H^{m,n}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) & \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_{q-1},\beta_{q-1}) & (a_1,\alpha_1)\end{matrix}\right)=$$
$$=H^{m,n-1}_{p-1,q-1}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_2,\alpha_2) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_{q-1},\beta_{q-1})\end{matrix}\right).$$

(C) – *property 2.3* [15].

$$H^{m,n}_{p,q}\left(\frac{1}{z}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)=H^{n,m}_{q,p}\left(z\middle|\begin{matrix}(1-b_1,\beta_1) & \dots & (1-b_q,\beta_q)\\ (1-a_1,\alpha_1) & \dots & (1-a_p,\alpha_p)\end{matrix}\right).$$

(D) – *theorem 2.1* [15]. For all $\lambda\in C$, $m>0$ and under condition (1.1.6) of this work,

$$H^{m,n}_{p,q}\left(\lambda z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)=$$
$$=\lambda^{\frac{b_1}{\beta_1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\lambda^{\frac{1}{\beta_1}})^k H^{m,n}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1+k\beta_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right).$$

(E) – *property 2.8* [15] *about the differentiation*. For $\omega,c\in\mathbb{C}$, $\sigma>0$, $k=0,1,\dots$

$$(\tfrac{d}{dz})^k\left[z^{\omega}H^{m,n}_{p,q}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right]=$$
$$=z^{\omega-k}H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(-\omega,\sigma) & (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) & (k-\omega,\sigma)\end{matrix}\right)=$$
$$=(-1)^k z^{\omega-k}H^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) & (-\omega,\sigma)\\ (k-\omega,\sigma) & (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right).$$

(F) – *theorem 2.7* [15] *about fractional differentiation*. For $a^*>0$, $\sigma\min\limits_{1\le j\le m}[\frac{Reb_j}{\beta_j}]+Re\omega>-1$, $\varrho>0$

$$f_{\varrho}(z)*\left[z^{\omega}H^{m,n}_{p,q}\left(z^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right]=$$
$$=z^{\omega+\varrho}H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(z^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(-\omega,\sigma) & (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) & (-\omega-\varrho,\sigma)\end{matrix}\right).$$

References

1. *Luchko Yu.* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order / *Yu. Luchko* // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2009. – Vol. 12, №4. – P. 409-422.
2. *Meerschaert M.M.* Fractional Cauchy problems on bounded domains / *M.M. Meerschaert, Nane Erkan, P. Vallaisamy* // Ann. Probab. – 2009. – Vol. 37. – P. 979-1007.
3. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка / *А.Н. Кочубей* // Дифф. уравнения. – 1990. – Т. 26, №4. – С. 660-670.
4. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei.* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004. – 390 p.

5. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost friequency independent / *M. Caputo* // II. Geofis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529-539.
6. *Caputo M.* Linear model of dissipation in anelastic solids / *M. Caputo, P. Minardi* // Rev. Nuovo Cimento (Ser. II). – 1971. – Vol. 1. – P. 161-198.
7. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / *М.М. Джрбашян* – М.: Наука, 1999. – 671 с.
8. *Gorenfio R.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In A. Carpinteri and P. Minardi editors / *R. Gorenfio, P. Minardi* // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, V. 378 of CISM Lecture Notes. – Wien and New-York: Springer-Verlag, 1997. – P. 223-276.
9. *Ворошилов А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для дифуззионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / *А.А. Ворошилов, А.А. Килбас* // ДАН. – 2007. – Т. 414, №4. – С. 1-4.
10. *Engler H.* Similarity solutions for a class of hyperbolic integrodifferential equations / *H. Engler* // Differential Integral Eq. – 1997. – Vol. 10 (5). – P. 815-840.
11. *Лопушанская Г.П.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / *Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, О.В. Пасичник* // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, №6. – С. 1288-1299.
12. *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій / *Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський* // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, №8. – С. 1067-1080.
13. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала / *Л.Н. Сретенский.* – М.: Гостехиздат, 1946. – 317 р.
14. *Jun Sheng Duan* Time- and space-fractional partial differential equations / *Jun Sheng Duan* // J. Math. Phis. – 2005. – Vol. 46 (013504).
15. *Kilbas A.A.* H-Transforms / *A.A. Kilbas, M. Sajgo.* – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004. – 401 p.
16. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas / *V.V. Anh, N.N. Leonenko* // J. of Statistical Physics. – 2001. – Vol. 104 (5/6). – P. 1349-1387.
17. *Лопушанська Г.П.* Фундаментальний розв'язок рівнянь з частинними дробовими похідними / *Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 46-55.
18. *Лопушанська Г.* Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь / *Г. Лопушанська, О. Чмир* // Нелин. гран. задачи. – 2007. – Вип. 17. – С. 50-73.

Стаття: надійшла до редакції 08.11.2012
прийнята до друку 16.10.2013

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78 **107**

НЕОДНОРІДНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ В ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ[1], Галина ЛОПУШАНСЬКА[2]

[1]*Інститут математики, Ряшівський університет,*
ал. Рейтана, 16 А, Ряшів, 35-959, Польща
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: alopushanskyj@gmail.com, lhp@ukr.net

Доведено теорему існування та єдиності, одержано зображення за допомогою вектор-функції Гріна розв'язку задачі

$$u_t^{(\beta)}(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \;\; a = const$$

$$u(x,t) = F_1(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \qquad u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (0,1)$ та F, F_1, F_2 із просторів узагальнених функцій D'.

Ключові слова: похідна дробового порядку, узагальнена функція, крайова задача, вектор-функція Гріна.

НЕОДНОРОДНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Андрей ЛОПУШАНСКИЙ[1], Галина ЛОПУШАНСКАЯ[2]

[1]*Институт математики, Жешовский университет,*
ал. Рейтана, 16 А, Жешов, 35-959, Польша
[2]*Львовский национальнїй университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: alopushanskyj@gmail.com, lhp@ukr.net

Доказана теорема существования и единственности, получено представление с помощью вектор-функции Грина решения задачи

$$u_t^{(\beta)}(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \;\; a = const$$

$$u(x,t) = F_1(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \qquad u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega$$

с дробной производной Римана-Лиувилля $u_t^{(\beta)}$ порядка $\beta \in (0,1)$ и F, F_1, F_2 из пространств обобщенных функций D'.

Ключевые слова: производная дробного порядка, обобщенная функция, краевая задача, вектор-функция Грина.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 108–112
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 108–112

УДК 512.4

FILTERS AND THEIR TRIVIALITY

Yuriy Maturin

Institute of Physics, Mathematics and Computer Science
Drohobych State Pedagogical University,
Stryjska Str., 3, Drohobych, 82100
e-mail: yuriy_ maturin@hotmail.com

Filters of modules are studied. Necessary and sufficient conditions for all preradical filters to be trivial are given.

Key words: ring, module, preradical.

All rings are considered to be associative with unit $1 \neq 0$ and all modules are left unitary.

Let R be a ring. The category of left R-modules will be denoted by $R - Mod$. We shall write $N \leq M$ if N is a submodule of M. The set of all R-endomorphisms of M will be denoted by $End(M)$. Let $J(M)$denote the Jacobson radical of M. Let $N \leq M$ and $f \in End(M)$. Put

$$(N : f)_M = \{x \in M \mid f(x) \in N\}\,, \quad End(M)_N = \{f \in End(M) \mid f(M) \subseteq N\}\,.$$

Let E be some non-empty collection of submodules of a left R-module M.

Consider the following conditions:

$$L \in E, L \leq N \leq M \Rightarrow N \in E; \tag{1}$$

$$L \in E, f \in End(M) \Rightarrow (L : f)_M \in E; \tag{2}$$

$$N, L \in E \Rightarrow N \bigcap L \in E; \tag{3}$$

$$N \in E, N \in Gen(M), L \leq N \leq M \wedge \forall g \in End(M)_N : (L : g)_M \in E \Rightarrow L \in E; \tag{4}$$

Definition 1. *A non-empty collection E of submodules of a left R-module M satisfying* (1), (2), (3) *is called a preradical filter of M (see* [2]*).*

Definition 2. *A non-empty collection E of submodules of a left R-module M satisfying* (1), (2), (4) *is called a radical filter of M(see* [2]*).*

Definition 3. *A preradical (radical) filter E of a left R-module M is said to be trivial if either $E = \{L \,|L \leq M\}$ or $E = \{M\}$.*

Theorem 1. *Let M be a left R-module such that $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$, where $M_i = Tr_M(M_i)$ for each $i \in \{1, 2, ..., n\}$ and $\forall S : S \leq M \Rightarrow S \in Gen(M)$. If E_i is a radical [preradical] filter of M_i for each $i \in \{1, 2, ..., n\}$, then $E = \{J_1 + J_2 + ... + J_n|$ $J_i \in E_i(i \in \{1, 2, ..., n\})\}$ is a radical [preradical] filter of M.*

Proof. Let E_i is a radical [preradical] filter of M_i for each $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Put

$$E = \{J_1 + J_2 + ... + J_n \,|J_i \in E_i(i \in \{1, 2, ..., n\})\}.$$

(1) Let $J_1 + J_2 + ... + J_n \leq S \leq M$, where $J_1 \in E_1, J_2 \in E_2, ..., J_n \in E_n$. As in the above, by a similar argument, $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$, where $S_i = Tr_S(M_i) = f_i(S)$. Hence $J_i \leq S_i$ for any $i \in \{1, 2, ..., n\}$. By (1) for radical [preradical] filters, $S_i \in E_i$ for any $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Hence $S \in E$.

(2) Let $J_1 \in E_1, J_2 \in E_2, ..., J_n \in E_n, F \in End(M)$. Since M_i is fully invariant for any $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $F(M_i) \subseteq M_i$ for any $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Consider

$$F_i : M_i \to M_i, F_i(m) = F(m), (m \in M_i).$$

Hence $F_i \in End(M_i)$. We claim that

$$(J_1 : F_1)_{M_1} + (J_2 : F_2)_{M_2} + ... + (J_n : F_n)_{M_n} = ((J_1 + J_2 + ... + J_n) : F)_M.$$

Indeed, let $x \in M, x = x_1 + x_2 + ... + x_n, \forall i \in \{1, 2, ..., n\} : x_i \in M_i$. Hence

$$x \in (J_1 : F_1)_{M_1} + (J_2 : F_2)_{M_2} + ... + (J_n : F_n)_{M_n} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, ..., n\} : x_i \in (J_i : F_i)_{M_i} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, ..., n\} : F_i(x_i) \in J_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, ..., n\} : F(x_i) \in J_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F(x) \in J_1 + J_2 + ... + J_n \Leftrightarrow x \in ((J_1 + J_2 + ... + J_n) : F)_M.$$

By (2) for radical [preradical] filters, $(J_i : F_i)_{M_i} \in E_i$ for any $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Therefore $((J_1 + J_2 + ... + J_n) : F)_M \in E$.

(3) $J_1 \in E_1, J_2 \in E_2, ..., J_n \in E_n, T_1 \in E_1, T_2 \in E_2, ..., T_n \in E_n$. By (3) for preradical filters, $J_1 \bigcap T_1 \in E_1, J_2 \bigcap T_2 \in E_2, ..., J_n \bigcap T_n \in E_n$. Hence

$$(J_1 + J_2 + ... + J_n) \bigcap (T_1 + T_2 + ... + T_n) = J_1 \bigcap T_1 + J_2 \bigcap T_2 + ... + J_n \bigcap T_n \in E.$$

(4) Let $N_1 \in E_1, N_2 \in E_2, ..., N_n \in E_n$, $L \leq N \leq M$, $\forall g \in End(M)_N : (L : g)_M \in E$, where $N = N_1 + N_2 + ... + N_n$. As in the above consideration, we obtain $L = L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_n$, where $L_i = Tr_L(M_i) = f_i(L)$. Since $L \leq N$, it is easily seen that $L_i \leq N_i$ for any $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Let g_i be an arbitrary element of $End(M_i)_{N_i}$. Consider

$$g : M \to M, x_1 + x_2 + ... + x_i + ... + x_n \mapsto g_i(x_i), (x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, ..., x_n \in M_n).$$

Hence $g \in End(M)_N$. It is obvious that $f_i((L : g)_M) = (L_i : g_i)_{M_i}$. Since $(L : g)_M \in E$, $(L_i : g_i)_{M_i} = f_i((L : g)_M) \in E_i$.

Claim that

$$\forall s \in \{1, 2, ..., n\} \;\; \forall K \leq M_s : \;\; K \in Gen(M_s).$$

Indeed, let $K \leq M_s$. Since $K \in Gen(M)$, $Tr_K(M) = K$. By Proposition 8.20 [1], $K = Tr_K(M) = \sum_{i=1}^{n} Tr_K(M_i)$. But $Tr_K(M_i) \leq K \bigcap Tr_M(M_i) = K \bigcap M_i \leq M_s \bigcap M_i = 0$ for any $s \neq i$. Hence $K = Tr_K(M) = Tr_K(M_s)$. Therefore $K \in Gen(M_s)$.

Whence $N_i \in Gen(M_i)$ for any $i \in \{1,2,...,n\}$. Now we obtain $N_i \in E_i, N_i \in Gen(M_i), L_i \leq N_i \leq M_i \wedge \forall g_i \in End(M_i)_{N_i} : (L_i : g_i)_{M_i} \in E_i$. By (4) for radical [preradical] filter E_i of M_i, $L_i \in E_i$. Therefore $L = L_1 + L_2 + ... + L_n \in E$.

Corollary 1. *Let $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$, where R_i is a non-zero two-sided ideal for each $i \in \{1,2,...,n\}$. If E_i is a radical [preradical] filter of R_i for each $i \in \{1,2,...,n\}$, then $E = \{J_1 + J_2 + ... + J_n \,|J_i \in E_i(i \in \{1,2,...,n\})\}$ is a radical [preradical] filter of R.*

Proof. It is easy to see that $R_i = Tr_R(R_i)$ for each $i \in \{1,2,...,n\}$ and $\forall S : S \leq R \Rightarrow S \in Gen(R)$.

Theorem 2. *If M is a left R-module with $J(M) \neq M$, then every preradical filter of M is trivial if and only if M is a finitely generated semisimple module and all minimal submodules of M are isomorphic.*

Proof. ($\Rightarrow$) Assume that every preradical filter of M is trivial. Let Ssbe the class of all semisimple modules of M. Consider

$$F := \{L \leq M \quad | \quad M/L \in Ss\}.$$

Since $J(M) \neq M$, $F \neq \{M\}$.

(1) Let $L \leq K, L \in F$. Then there exists an exact sequence $M/L \to M/K \to 0$. Hence $K \in F$.

(2) Let $L \in F, f \in End(M)$. Since there exists an exact sequence $0 \to M/(L : f)_M \to M/L$, $(L : f)_M \in F$.

(3) Let $L, N \in F$. Since there exists an exact sequence $0 \to M/(L \bigcap N) \to M/L \times M/N$, $L \bigcap N \in F$.

Therefore F is a preradical filter.

Since F is a preradical filter and $F \neq \{M\}$, $0 \in F$. Hence M is semisimple.

We shall show that all minimal submodules of M are isomorphic. Suppose that L, N are non-isomorphic minimal submodules of M. Hence $Tr_M(L), Tr_M(N)$ are fully invariant submodules of M. Since L, N are non-isomorphic, $Tr_M(L), Tr_M(N)$ are independent. Hence $Tr_M(L) \bigcap Tr_M(N) = 0$. Since $0 \neq L \subseteq Tr_M(L) \& 0 \neq N \subseteq Tr_M(N) \& Tr_M(L) \bigcap Tr_M(N) = 0$, $0 \neq Tr_M(L) \neq M$. Taking into account that $Tr_M(L)$ is a fully invariant submodule of M, it is easily seen that $\{B \leq M \,|Tr_M(L) \leq B\}$ is a non-trivial preradical filter of M, contrary to the fact that every preradical filter of M is trivial.

Since all minimal submodules of M are isomorphic, M has exactly one homogeneous component.

Suppose that M is not a finitely generated module. Hence $M = \underset{i \in A}{\oplus} P_i$, where $P_i \cong P$ for some minimal submodule $P \leq M$, $Card(A) = \infty$.

Put

$$E := \{T \mid T \leq M, \; M/T \quad \text{is finitely generated} \}.$$

Let $a \in A$. Put

$$K := \sum_{i \in A \setminus \{a\}} P_i.$$

It is obvious that $M/K = (K \oplus P_a)/K \cong P_a$ is finitely generated. Therefore $K \in E$. Since $M/0 \cong M$ is not finitely generated, $0 \notin E$.

Hence $E \neq \{T | T \leq M\}$ and $E \neq \{M\}$.

(1) Let $L \in E, L \leq N \leq M$. There exists an exact sequence $M/L \to M/N \to 0$. Since M/L is finitely generated and M/N is an epimorphic image of M/L, M/N is finitely generated. Hence $N \in E$.

(2) Let $L \in E, f \in End(M)$. By Lemma 1 [3], $M/(L : f)_M \cong f(M)/(f(M) \bigcap L)$. By Corollary 3.7 (3) [1, p. 46], $f(M)/(f(M) \bigcap L) \cong (f(M) + L)/L$. Since $(f(M) + L)/L$ is a submodule of a finitely generated semisimple module M/L, $M/(L : f)_M$ is finitely generated. Hence $(L : f)_M \in E$.

(3) Let $N, L \in E$. Hence $M/N, M/L$ are finitely generated semisimple modules. It follows from this that $M/N \times M/L$is finitely generated semisimple. Since there exists an exact sequence $0 \to M/(N \bigcap L) \to M/N \times M/L$ and $M/N \times M/L$ is finitely generated semisimple, $M/(N \bigcap L)$ is finitely generated. Hence $N \bigcap L \in E$.

Now we obtain that E is a non-trivial filter, contrary to the fact that every preradical filter of M is trivial. It means that M is finitely generated.

($\Leftarrow$) Assume that M is a finitely generated semisimple module and all minimal submodules of M are isomorphic. Hence M is a finitely generated semisimple module with a unique homogeneous component. Arguing as in the proof of Theorem 4 [3] we can show that all preradical filters of M are trivial.

Corollary 2. *All preradical filters of R are trivial if and only if $R \cong M_n(T)$ for some division ring T and $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. By Theorems 2 and 13.4 [1].

Acknowledgements. I would like to thank Professor M.Ya. Komarnytskyi and Associate Professor O.L. Horbachuk for helpful discussions.

References

1. *Anderson F.W.* Rings and categories of modules / *F.W. Anderson, K.R. Fuller* // Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1973. – 340 p.
2. *Kashu A.I.* Radicals and torsions in modules / *A.I. Kashu* // Chisinau: Stiintca, 1983. – 156 p.
3. *Maturin Yu.* Preradicals and submodules / *Yu. Maturin* // Algebra and discrete mathematics. – 2010. – Vol. 10, №1.

Стаття: надійшла до редакції 28.05.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ФІЛЬТРИ ТА ЇХНЯ ТРИВІАЛЬНІСТЬ

Юрій Матурін

*Інститут фізики, математики та інформатики
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка,
вул. Стрийська, 3, Дрогобич, 82100
e-mail: yuriy_maturin@hotmail.com*

Вивчено фільтри модулів. Наведено необхідні та достатні умови для тривіальності всіх напередрадикальних фільтрів.

Ключові слова: кільце, модуль, напередрадикал.

ФИЛЬТРЫ И ИХ ТРИВИАЛЬНОСТЬ

Юрий Матурин

*Институт физики, математики и информатики
Дрогобычского государственного педагогического университета имени Ивана Франко,
ул. Стрыйская, 3, Дрогобыч, 82100
e-mail: yuriy_maturin@hotmail.com*

Изучено фильтры модулей. Указано необходимые и достаточные условия для тривиальности всех предрадикальных фильтров.

Ключевые слова: кольцо, модуль, предрадикал.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 113–117
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 113–117

УДК 511.3

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

Ольга МИЛЬО, Ярослав ХОЛЯВКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Нехай $\wp_i(z)$, $(i = 1, 2)$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса з алгебричними інваріантами. Отримано оцінку сумісного наближення значень кожної з цих функцій у періодах іншої.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Вейєрштрасса.

1. Вступ. Нехай $\wp_1(z)$, $\wp_2(z)$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса з алгебричними інваріантами $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$. Позначимо (ω_1, ω_1'), (ω_2, ω_2') – пари основних періодів $\wp_1(z)$, $\wp_2(z)$, відповідно [1], [2]. Нехай $\omega_1^* \in \{\omega_1, \omega_1'\}$, $\omega_2^* \in \{\omega_2, \omega_2'\}$ – такі числа, що утворюють решітку. Без зменшення загальності приймемо $\omega_1^* = \omega_1$, $\omega_2^* = \omega_2$. Вважатимемо, що точки, кратні ω_1, не є полюсами $\wp_2(z)$, а кратні ω_2, не є полюсами $\wp_1(z)$.

Через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь і довжину полінома P з цілими коефіцієнтами, через $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ – степінь та довжину алгебричного числа α; ξ_i – довільні алгебричні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ – їхні степені та довжини, відповідно, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3})$.

Теорема 1. *Якщо хоча б одне з чисел $\wp_1(\omega_2)$, $\wp_2(\omega_1)$ трансцендентне, то для довільних алгебричних чисел ξ_1, ξ_2 справджується оцінка*

$$\max\{|\wp_1(\omega_2) - \xi_1|,\ |\wp_2(\omega_1) - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda\, n^3 M^2\right), \tag{1}$$

де

$$M = \max\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \frac{\ln L_2}{d_2} + 1, \ln n\right), \tag{2}$$

$\Lambda > 0$ *– константа залежна лише від чисел $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$.*

Подібні оцінки та формулювання задач можна знайти в [3].

2. Доведення Теореми 1. Доводитимемо теорему другим методом Гельфонда, викладеним раніше у [4], [5]. Будемо використовувати відомі властивості еліптичних функцій Вейєрштрасса, формулювання яких можна знайти, наприклад, в [1], [4], [5].

Припустимо, що умова (1) не виконується, тобто

$$\max\{|\wp_1(\omega_1)-\xi_1|,\ |\wp_2(\omega_2)-\xi_2|\} < \exp\left(-\lambda^7\, n^2 M^3\right) \tag{3}$$

для досить великого $\lambda \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$N^2 = [\lambda^3\, n\, M], \quad S = L = [\ln \lambda\, N^2], \tag{4}$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\wp_1^{l_1} z \wp_2^{l_2} z, \quad C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau, \quad C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де ζ_τ – твірні елементи $\mathbb{Q}(\xi_1,\xi_2,g_{1,2},g_{1,3},g_{2,2},g_{2,3})$.

Позначимо $\phi_i(z) = \wp_i(z+\frac{\omega_i}{2})$, $i=1,2$. З формули додавання

$$\wp_i(z+w) = \left(\frac{\wp_i'(z)-\wp_i'(w)}{2(\wp_i(z)-\wp_i(w))}\right)^2 - \wp_i(z) - \wp_i(w)$$

у відповідних позначеннях отримаємо

$$\wp_i(z+w) = \wp_i(z+\frac{\omega_i}{2}+w+\frac{\omega_i}{2}) = \left(\frac{\phi_i'(z)-\phi_i'(w)}{2(\phi_i(z)-\phi_i(w))}\right)^2 - \phi_i(z) - \phi_i(w) = \frac{\Lambda_{i,1}(z,w)}{\Lambda_{i,2}(z,w)}. \tag{6}$$

Існують поліноми $G_{i,s,k,l}(z)$, $H_{s,t}(z)$ такі, що

$$G_{i,s,k,l}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{i,1}^k(z,w)\Lambda_{i,2}^l(z,w))|_{w=0}, H_{s,t}(z) =$$

$$= \frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0}, \tag{7}$$

$\ln L(G_{i,s,k,l}) \leqslant s\ln(s(k+l)+c_1(s+k+l))$, $\deg G_{i,s,k,l} \leqslant 4(k+l)$.

З (5)–(7), подібно, як у працях [4], [5], отримаємо

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)))|_{w=0} =$$

$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t} H_{s,t}(z) \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2} \sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i} G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(z) G_{2,i,l_2,L-l_2}(z). \tag{8}$$

Позначимо

$$F_{s,t}(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2} \sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i} G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(z) G_{2,i,l_2,L-l_2}(z). \tag{9}$$

Нехай $\xi_3^2 = 4\xi_1^3 - g_{1,2}\xi_1 - g_{1,3}$, $\xi_4^2 = 4\xi_2^3 - g_{1,2}\xi_2 - g_{1,3}$, $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ та $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ – вирази, отримані з виразів $F^{(s)}(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ та $F_{s,t}(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ заміною $\wp_1(\omega_2)$, $\wp_2(\omega_1)$, $\wp_1'(\omega_2)$, $\wp_2'(\omega_1)$ на ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4. Розглянемо $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$, $1 \leqslant n_1,n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$, як $N^2 S$ лінійні форми від nL^2 змінних $C_{l_1,l_2,\tau}$. Згідно з принципом Діріхле ([2], лема 4.1) та (4), (9) виберемо не всі рівні нулю числа $C_{l_1,l_2,\tau}$ так, що для $1 \leqslant n_1,n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) = 0, \quad |C_{l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^6 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{10}$$

З (1), (2), (4), (10) одержимо: для $1 \leqslant n_1,n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$

$$|F^{(s)}(n_1\omega_1+n_2\omega_2) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 M^3). \tag{11}$$

З (8)–(11), якщо $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$, одержимо

$$|F^{(s)}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 M^3). \tag{12}$$

Доведемо, що оцінка (12) також виконується і для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$. Нехай

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L(z - \omega_1/2)\sigma_2^L(z - \omega_2/2), \tag{13}$$

де $\sigma_i(z)$ – σ-функція, що відповідає $\wp_i(z)$ [1]. Виберемо найменше можливе ціле r так, щоб виконувалась умова

$$r > 4(N+1)(|\omega_1| + |\omega_1'| + |\omega_2| + |\omega_2'|). \tag{14}$$

Позначимо $R = 4r$. Тоді з формули Ерміта ([2, лема 4.7]) і виразів (2), (4), (5), (10), (13), (14) випливає

$$|G(z)|_{|z|\leqslant R} < \exp(-\lambda^6 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{15}$$

З (15) отримаємо для $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\leqslant r} < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^6 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{16}$$

Для досить малого ε в ε-околах точок $n_1\omega_1$ функція $\sigma_1(z - \omega_1/2)$ та ε-околах точок $n_2\omega_2$ функція $\sigma_2(z - \omega_2)$ не мають нулів, тому для $|n_1|, |n_2| \leqslant 2N$

$$|\sigma_i(z - \omega_i/2)|_{z\in V(\varepsilon, n_1\omega_1+n_2\omega_2)} > \exp(-c_3\lambda^5 \ln\lambda\, n^2 M^2). \tag{17}$$

З (15)–(17) для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)| < \exp(-\frac{\lambda^6}{3} \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{18}$$

Враховуючи (11), для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$ та $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ з (18) випливає

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| < \exp(-\frac{\lambda^6}{4} \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{19}$$

Розглядаючи $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$, $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, як значення відповідного полінома в алгебричних точках, з теореми Ліувілля ([2], лема 9.2), рівностей (2) та (4) отримаємо для $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ оцінку

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| > \exp(-\lambda^5 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{20}$$

З (9), (20) одержимо

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| > \exp(-2\lambda^5 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{21}$$

Оцінки (19) та (21) суперечливі, тому для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$ отримаємо

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) = 0. \tag{22}$$

З (22) випливає, що поліном $F(z)$ має не менше $c_4\lambda^7 \ln\lambda\, n^2 M^2$ нулів (з урахуванням кратності), але нулів може бути не більше $c_5\lambda^6 \ln\lambda\, n^2 M^2$ [6], тому для досить великого $\lambda \in \mathbb{N}$ припущення (3) призводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

Список використаної літератури

1. *Lawden D.F.* Elliptic functions and applications / *D.F. Lawden.* – 1989.
2. *Фельдман Н.И.* Седьмая проблема Гильберта / *Н.И. Фельдман.* – М.: Изд-во МГУ, 1982.
3. *Fel'dman N.I.* Transcendental Numbers / *N.I. Fel'dman, Yu.V. Nesterenko.* – Springer, 1998.
4. *Chudnovsky G.V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann-Weierschtrass theorem / *G.V. Chudnovsky* // Inventiones Math. – 1980. – Vol. 61. – P. 267-290.
5. *Нестеренко Ю.В.* О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции / *Ю.В. Нестеренко* // Изв. РАН. Сер. мат. – 1995. – Т. 59, №4. – С. 155-178.
6. *Brownawell W.D.* Multipliciti estimates for analitic functions (I) / *W.D. Brownawell, D.W. Masser* // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 314. – P. 200-216.

Стаття: надійшла до редакції 05.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUES OF TWO WEIERSTRASS ELLIPTIC FUNCTIONS

Ol'ha MYLYO, Yaroslav KHOLYAVKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua, olga.mylyo@gmail.com

Let $\wp_i(z)$, $(i = 1, 2)$, be algebraically independent Weierstrass elliptic functions with algebraic invariants. We estimate from below a simultaneous approximation of the values of each of these functions in other periods.

Key words: simultaneous approximation, Weierstrass elliptic function.

СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА

Ольга МИЛЬО, Ярослав ХОЛЯВКА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail:olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Пусть $\wp_i(z)$ – алгебраически независимые эллиптические функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами ($i = 1, 2$). Получено оценку совместного приближения значений каждой из этих функций в периодах другой.

Ключевые слова: совместные приближения, эллиптическая функция Вейерштрасса.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 118–129
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 118–129

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ШАРУВАТИХ ПЛАСТИЧНО ДЕФОРМІВНИХ ТІЛАХ ЗА УМОВ, ЩО МОДЕЛЮЮТЬ ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ

Віра МИХАЙЛИШИН

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060
e-mail: vira.mykhailyshyn@gmail.com

Сформульовано задачу термомеханіки для шаруватих термочутливих пластично деформівних тіл. Запропоновано загальний підхід до її розв'язування на підставі методу скінченних елементів, який для задачі про напружено-деформований стан враховує розрахункові схеми стосовно покрокових апроксимації та лінеаризації вихідних співвідношень. Досліджено термомеханічні процеси у тришаровій сфері, виготовленій з двох матеріалів, для двох варіантів розміщення матеріалів. З'ясовано вплив розміщення матеріалів на формування напружень і зроблено висновки про доцільність застосування одного з варіантів на підставі розрахункової оцінки напруженого стану.

Ключові слова: теорія теплопровідності, теорія пластичного неізотермічного течіння, метод скінченних елементів, шаруваті тіла, напруження, деформації, зміцнення.

Прогнозування здатності структурно неоднорідних тіл, якими можуть бути елементи конструкцій, вузли сучасної техніки чи вироби в цілому, працювати при високих, загалом змінних у часі температурах, має практичний і теоретичний інтерес. Оцінка виникаючих напружень експериментальним шляхом дає підстави зробити досить обмежені висновки щодо закономірностей їхніх розподілів залежно від геометричних параметрів досліджуваних фізичних об'єктів, матеріалів, величини та характеру термічних впливів. Є багато теоретичних праць, які ґрунтуються на теорії пружності, і для шаруватих тіл здебільшого досліджені деформаційні явища, спричинені механічними навантаженнями [6, 17]. Прогнозування теплових і механічних процесів у кусково-однорідних тілах, теоретично і фізично обґрунтоване, є важливою технологічною, прикладною та науковою проблемою. Мета нашої праці – дослідити шаруваті тіла в умовах термічних впливів, які можуть моделювати технологічні умови їхнього виготовлення чи експлуатації.

Значну частину досліджень у цьому напрямі становлять праці з вивчення термомеханічних процесів у рамках припущень про пружне деформування, для тіл канонічної форми у стаціонарних теплових режимах та багатьох інших припущень. Ця праця зорієнтована на теоретичне обґрунтування оцінки параметрів температурного та напружено-деформованого станів, базується на теорії нестаціонарної теплопровідності [8] та теорії пластичного неізотермічного течіння з ізотропно-кінематичним зміцненням [12], методі скінченних елементів (МСЕ) [10] для розв'язування відповідних крайових задач математичної фізики для шаруватих тіл. Розрахункові схеми МСЕ розвинуті в [5, 11] стосовно використовуваного варіанта теорії пластичності та методів лінеаризації покроково апроксимованої вихідної задачі про напружено-деформований стан. Запропонований досить загальний теоретичний підхід дає змогу в сукупності врахувати важливі для оцінки виникаючих напружень явища зміцнюваності матеріалів, які можуть деформуватись пластично за фізично нелінійним законом, та термочутливості матеріалів для тіл неканонічної форми.

Задача теплопровідності та задача про напружено-деформований стан, спричинений термічними чинниками та можливими механічними впливами, формулюється для шарувато неоднорідного тіла, яке складається з N шарів, характеристики матеріалів яких і їхня температурна залежність в розглядуваних температурних діапазонах відома. Розглядувані нестаціонарні теплові процеси реалізуються при охолодженні завдяки конвективному теплообміну з середовищем через вільні зовнішні поверхні. Припускається можливість виникнення пластичних деформацій, спричинених певними термомеханічними чинниками впливу. Процеси вважають квазістатичними, геометрично лінійними при можливих великих переміщеннях. Враховують зміцнення матеріалів за межею пружності, що математично описується відповідними модельними наближеннями. Шарувате тіло розглядають у декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3), в якій воно займає у початково недеформованому та початково ненапруженому станах область Ω_0 з обмежуючою поверхнею Γ_0 та розділюючими шари поверхнями η_k $(k = 1,\ 2,\ ...,\ N-1)$. Взаєморозміщення обмежуючої Γ_0 та розділюючих η_k поверхонь довільне та стосовно координатних поверхонь на відміну від обмежень [7], в якій ці поверхні паралельні між собою і паралельні до відповідних координатних. Припускають ідеальний тепловий і механічний контакти між шарами. Температурне поле у k-му шарі описується рівнянням теплопровідності [8]

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_q^{(k)}(T)\ \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = C^{(k)}(T)\ \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

з початковою умовою

$$T(\{x\}, t)|_{t=t_0} = T_0\left(\{x\}\right) \tag{2}$$

та граничною умовою

$$-\lambda_q^{(k)}\ (T)\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_{01}} = \beta\left(T\right) \quad \left(T\left(\{x\}\,, t\right) - T_C\right) \tag{3}$$

теплообміну через частину поверхні $\Gamma_{01} \subset \Gamma_0$. Крім того, при ідеальному тепловому контакті між шарами на розділюючих шари поверхнях $\eta = \eta_k$ неперервність температур і рівність теплових потоків через ці поверхні виражається співвідношеннями

$$T^{(k)}|_{\eta\, k} = T^{(k+1)}|_{\eta\, k}, \qquad \lambda_q^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial \eta}\bigg|_{\eta\, k} = \lambda_q^{(k+1)} \frac{\partial T^{(k+1)}}{\partial \eta}\bigg|_{\eta\, k} \tag{4}$$

відповідно. У формулах (1) – (4) і далі введено позначення T для температури тіла, T_0 – для початкової температури, T_C – для температури середовища, t – для часу, λ_q – для коефіцієнта теплопровідності, C – для питомої об'ємної теплоємності, n – для зовнішньої нормалі до поверхні, β – для коефіцієнта тепловіддачі у середовище. Верхній індекс (k) означає номер шару.

Задача про напружено-деформований стан пластично деформівного тіла, яке зазнає температурних чинників впливу і, крім того, може потрапляти під вплив статичного механічного навантаження, формулюється в змінних Лагранжа на основі фізичного рівняння теорії пластичного неізотермічного течіння з ізотропно-кінематичним зміцненням [12]. До цієї задачі входить рівняння рівноваги [3], геометричне лінійне співвідношення [3] і вищеназване рівняння стану [12], яке для k-го шару набуває вигляду:

$$\begin{gathered}\{d\sigma\} = \left([D]^{(k)\ t+dt} - \frac{9}{4\,(\overline{\sigma}_i^t)^2} \cdot \frac{[D]^{(k)\ t+dt}\ \{\overline{s}\}^t\ \{\overline{s}\}^{t\prime}\ [D]^{(k)\ t+dt}}{H^{(k)\ t} + 3G^{(k)\ t+dt}}\right)\left(\{d\varepsilon\} - \left\{d\varepsilon^T\right\}\right) + \\ + \left([dD]^{(k)} - \frac{9}{4(\overline{\sigma}_i^t)^2} \cdot \frac{[D]^{(k)\ t+dt}\ \{\overline{s}\}^t\ \{\overline{s}\}^{t\prime}\ [dD]^{(k)}}{H^{(k)\ t} + 3G^{(k)\ t+dt}}\right)\left(\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon^p\}^t - \left\{\varepsilon^T\right\}^t\right) + \\ + \frac{3}{2\overline{\sigma}_i^t} \cdot \frac{[D]^{(k)\ t+dt}\ \{\overline{s}\}^t\ \dfrac{\partial \tilde{\tilde{\sigma}}_i^t}{\partial T}}{H^{(k)\ t} + 3G^{(k)\ t+dt}}\, dT.\end{gathered} \tag{5}$$

Граничними умовами цієї задачі при закріпленні тіла на частині поверхні $\Gamma_{0\,u} \subset \Gamma_0$ і механічних навантаженнях на частині поверхні $\Gamma_{0\,\sigma} \subset \Gamma_0$ ($\Gamma_{0\,u} \bigcup \Gamma_{0\,\sigma} = \Gamma_0$, $\Gamma_{0\ u} \bigcap \Gamma_{0\ \sigma} = \varnothing$) є умова

$$\{u\}\,|_{\Gamma_{0\ u}} = \{u^*\} \tag{6}$$

та умова

$$[n]'\,\{\tilde{\sigma}\}\,|_{\Gamma_{0\ \sigma}} = \{P_n\}\,. \tag{7}$$

Співвідношення (5) описує поведінку пластично деформівних термочутливих зміцнюваних у процесі деформування матеріалів. В рівнянні стану (5) прирости напружень Піоли-Кірхгофа другого роду $\{d\sigma\}$ виражаються через повні $\{\varepsilon\}$, пластичні $\{\varepsilon^p\}$, температурні $\left\{\varepsilon^T\right\}$ деформації Гріна; їхні прирости $\{d\varepsilon\}$, $\left\{d\varepsilon^T\right\}$; через інтенсивність досягнутих приведених до центру поверхні текучості напружень $\overline{\sigma}_i$; матрицю $[D]$ пружних сталих та її пов'язаний із температурою приріст $[dD]$; G – модуль пружності при зсуві; через H – миттєве значення тангенса кута нахилу ізотермічної кривої деформування "інтенсивність деформацій ε_i – інтенсивність напружень σ_i"; через девіаторні компоненти $\{\overline{s}\}$ приведених до центру поверхні текучості попередньо досягнутих напружень; $\tilde{\tilde{\sigma}}_i$ – інтенсивність напружень Коші [12]. У формулах (6), (7) $\{\widetilde{\sigma}\}$ – вектор початкових напружень Піоли-Кірхгофа першого роду, $[n]$ – матриця напрямних косинусів зовнішньої нормалі $\{n\}$ до поверхні Γ_0, $\{P_n\}$ – вектор поверхневих навантажень на частині поверхні $\Gamma_{0\,\sigma} \subset \Gamma_0$. У формулах (5), (7) символ "$\prime$" означає операцію транспонування. Верхні індекси "t" і "$t + dt$" засвідчують моменти деформування t і $t + dt$, відповідно.

Крім того, для жорстко зв'язаних складових шарів на розділюючих поверхнях η_k справджується неперервність переміщень і напружень, що виражається умовами

$$\{u\}^{(k)}|_{\eta\,k} = \{u\}^{(k+1)}|_{\eta\,k}, \qquad \{\sigma\}^{(k)}|_{\eta\,k} = \{\sigma\}^{(k+1)}|_{\eta\,k}. \tag{8}$$

Сформульована сукупністю рівняння рівноваги [3], геометричного лінійного співвідношення [3] і співвідношень (5) – (8) задача про напружено-деформований пружно-пластичний стан тіла є задачею стосовно невідомих переміщень $\{u\}$, деформацій $\{\varepsilon\}$ і напружень $\{\sigma\}$. Розв'язок цієї задачі на відміну від задач теорії пружності не точно описує механічну поведінку пластично деформівних тіл, оскільки рівняння стану (5) цієї теорії й інших відомих теорій пластичності не є точними стосовно критеріїв пластичного деформування. Це означає, що інтенсивність деформацій ε_i та інтенсивність напружень σ_i, отриманих на підставі розв'язку сформульованої задачі, не задовольняють експериментальну криву деформування матеріалу "$\varepsilon_i - \sigma_i$", функціонально описану критерієм пластичного деформування. В цій праці критерієм пластичного деформування є модифікована на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення умова [4]

$$\sqrt{\frac{3}{2}\,\{\overline{s}\}^{t\,\prime}\,\{\overline{s}\}^{t}} = \sigma_T + \beta^*\,b\,\left(\varepsilon_i^{p\,t}\right)^m \quad (0 \le \beta^* \le 1) \tag{9}$$

$$(\{\overline{s}\}^t = \{\overline{\sigma}\}^t - \{1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}'\ \overline{\sigma}_0^t,$$

$$\{\overline{\sigma}\}^t = \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t, \qquad \overline{\sigma}_0^t = \frac{1}{3}\{1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}\ \left(\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t\right)),$$

яка єдиним виразом записана на підставі прийнятого в [12] критерію. У формулах (9) σ_T означає межу текучості матеріалу; ε_i^p – інтенсивність пластичних деформацій; β^*, b, m – характерні для матеріалу параметри зміцнення, з допомогою яких апроксимується експериментальна крива деформування; $\{\gamma\}$ – зміщуваний у просторі напружень центр поверхні текучості, заданої першою формулою з (9). Це зміщення математично виражається правилом Ціглера [20]

$$\{d\gamma\} = d\mu\ \left(\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t\right), \tag{10}$$

в якому множник $d\mu$ в явному стосовно критерію (9) вигляді [4] отриманий на підставі співвідношення [19] в неявній формі. Критерій (9) найбільш фізично обґрунтований при параметрі зміцнення $\{\gamma\} \ne 0$ $(t > 0)$, $0 < \beta^* \le 1$ [12], який разом з параметрами b, m є ізотропно-кінематичним модельним наближенням відповідно до кривої деформування "$\varepsilon_i - \sigma_i$" зміцнюючих властивостей матеріалу. Цей критерій допомагає також моделювати поведінку ідеального матеріалу ($\{\gamma\} = 0$, $\beta^* = 0$), ізотропно зміцнюваного ($\{\gamma\} = 0$, $0 < \beta^* \le 1$) та кінематично зміцнюваного ($\{\gamma\} \ne 0$ $(t > 0)$, $\beta^* = 0$) [12], які менш достовірно узгоджуються з кривою деформування.

Розв'язок сформульованої вище задачі стосовно невідомих механічних параметрів стану без доповнення критерієм (9) з конкретизацією у формі (10) не задовольняє цей критерій. Це пов'язано з незадовільною узгодженістю співвідношення (5) між деформаціями та напруженнями з експериментальною кривою деформування матеріалу. Відомі підходи до розв'язування задач механіки на підставі різних рівнянь стану при пластичному деформуванні полягають у знаходженні розв'язків задач без доповнення певними критеріями пластичного деформування та ітераційного уточнення цих розв'язків відповідно до кривої деформування і її функціонально заданого у формі критерію аналогу [11, 13, 16].

Розв'язування сформульованої задачі в аналітичному вигляді навіть для областей канонічної форми, однорідних, у стаціонарних теплових процесах та інших часткових випадках може бути пов'язане з принциповими труднощами або практично неможливим. Підхід, запропонований з використанням розрахункових схем МСЕ, дає змогу розв'язувати конкретні задачі на підставі наведеної постановки для тіл неканонічної форми, з довільною кількістю складових шарів з різних матеріалів при довільному взаєморозміщенні обмежуючої та розділюючих шари поверхонь, при довільному характері розподілу додаткового до температурного статичного механічного навантаження, у нестаціонарному тепловому процесі, з довільно заданим характером температурної залежності необхідних для розрахунків термомеханічних характеристик матеріалів і ін.

Розв'язування задач розрахунковими підходами МСЕ ґрунтується на їхніх еквівалентних варіаційних формулюваннях: на формулюванні [14] для задачі теплопровідності та принципі віртуальної роботи [3] для задачі про напружено-деформований стан. Розв'язування задачі розрахунку з допомогою МСЕ напружено-деформованого стану відбувається так: у межах кроку при покроковій апроксимації [2, 13] розв'язується лінеаризована задача без врахування критерію пластичності, розв'язок якої уточнюється ітераційним шляхом відповідно до кривої деформування та критерію пластичності, що є функціональним аналогом кривої. Питання, пов'язані з розвитком обчислювальних схем МСЕ стосовно використовуваного варіанту теорії течіння, конструюванням ключових рівнянь МСЕ для покроково апроксимованої лінеаризованої задачі, організацією уточнюючого розв'язки ітераційного процесу, функціональні можливості розробленого програмного забезпечення опрацьовані в [5, 11]. Розроблена методика та програмне забезпечення допомагають прогнозувати тепломеханічні явища на підставі двовимірних задач термопластичності для шаруватих пружних та ідеальних або зміцнюваних пружно-пластичних тіл з довільною обмежуючою поверхнею і довільно орієнтованими розділюючими шари поверхнями при просторовій у межах кожного шару однорідності термочутливих складових матеріалів. Чинники впливу на напружено-деформований стан – неізотермічні теплові і (або) силові.

Запропонований підхід проілюстрований на розв'язуванні задач для шаруватої порожнистої сфери з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім радіусом R_2, що охолоджується від початкової однорідно розподіленої температури завдяки конвективному теплообміну з середовищем через поверхню $r = R_2$ при термоізоляції поверхні $r = R_1$. Нехай сфера складається з N шарів із сферичними коаксіальними розділюючими шари поверхнями $\eta_k = r_k \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ N-1)$, між якими є ідеальний тепловий і механічний контакти.

Еволюція термомеханічних станів у процесі охолодження сфери описується співвідношеннями задачі теплопровідності та задачі про напружено-деформований стан у сферичній системі координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$. У зв'язку з геометричною симетрією початково недеформованого тіла в цій системі координат та симетрією умов термічного впливу вивчається термомеханічний процес в області Ω_0 як області четвертої частини вертикального діаметрального перерізу. Задача осесиметрична. Для задачі теплопровідності початковою умовою є умова (2). Граничною умовою конвективного теплообміну з середовищем через поверхню $r = R_2$ при теплоізольованій поверхні $r = R_1$ є умова

$$-\lambda_q^{(1)} \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_2} = \beta(T - T_C), \tag{11}$$

де $\lambda_q^{(1)}$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу зовнішнього шару, який примикає до поверхні $r = R_2$. Граничними умовами на перерізах Γ_{01} та Γ_{02} області Ω_0, що відповідають $\theta = 0$ та $\theta = \pi/2$, є умови відсутності теплових потоків через ці перерізи і виражаються співвідношеннями

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \tag{12}$$

Умови ідеального теплового контакту між шарами описують формулами (4).

Прогнозування температурних напружень, спричинених нестаціонарним процесом охолодження, відбувається на підставі теорії пластичного течіння з фізичним рівнянням (5) [12]. Відповідна задача про напружено-деформований стан охоплює граничні умови стосовно нерозривності переміщень u_θ на перерізах Γ_{01} та Γ_{02} області Ω_0

$$u_\theta|_{\theta=0} = 0, \qquad u_\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{13}$$

та граничні умови на поверхнях $r = R_1$ та $r = R_2$

$$\sigma_r|_{r=R_1} = 0, \qquad \sigma_r|_{r=R_2} = 0 \tag{14}$$

для сферичного тіла, вільного від механічних навантажень. Ідеальний механічний контакт між шарами означає виконання умов (8).

На практиці можуть виникнути питання, які пов'язані з вибором і розташуванням складових матеріалів так, щоб при виготовленні чи експлуатації такого кусково-однорідного сферичного тіла виникаючі напруження були меншими.

Як приклад вивчають тепловий і механічний процеси у тришаровій виготовленій із двох матеріалів сфері з шарами однакової товщини для двох варіантів розміщення матеріалів. Перший, який примикає до поверхні $r = R_2$, і третій, який примикає до поверхні $r = R_1$, шари виготовлені з того самого матеріалу. Розглядають два випадки, які відрізняються розташуванням одного з двох матеріалів або поблизу вільних сферичних зовнішніх поверхонь, або його розміщенням у середньому внутрішньому шарі. З'ясовують вплив таких розміщень матеріалів на напружено-деформований стан у нестаціонарному процесі охолодження від однорідної температури $T_0 = 300°C$ до температури середовища $T_C = 20°C$ з коефіцієнтом тепловіддачі у середовище β =56 кВт/(м^2·К). Розділюючими шари поверхнями є поверхні $\eta_1 = r = \frac{R_1+2R_2}{3}$ та $\eta_2 = r = \frac{2R_1+R_2}{3}$. Тоді при розв'язуванні задачі теплопровідності з початковою умовою (2), граничними умовами (11), (12) і контактними умовами (4) та при розв'язуванні задачі про напружено-деформований стан з граничними умовами (13), (14) і контактними умовами (8) кількість шарів $N = 3$.

Геометрична область сферичного порожнистого тіла задається внутрішнім радіусом $R_1 = 0,05$ м і зовнішнім радіусом $R_2 = 0,1$ м. Складовими матеріалами сфери є сталь 0Х13 та сплав ТС-5. Необхідні для розрахунків довідкові дані про термомеханічні термочутливі та постійні характеристики цих матеріалів є в [1, 9, 12, 15, 18]. Оскільки немає довідкових даних щодо параметрів зміцнення для сплаву ТС-5, то роблять припущення про деформування цього матеріалу як ідеального пружно-пластичного. Сталь 0Х13 при оцінці температурних напружень тришарової сфери почергово моделюється ідеальним матеріалом, кінематично зміцнюваним та ізотропно-кінематично зміцнюваним. Параметрами ізотропного зміцнення для сталі 0Х13 є $\beta^* = 0,515$, $b = 2208$ МПа, $m = 0,435$ [12].

Сітка з 135 скінченних елементів утворена перетином концентричних віддалених у радіальному напрямі на відстані $\frac{R_2 - R_1}{9}$ дуг з радіальними прямими, рівномірно поділяючими кут $[0,\ \pi/2]$ на 15 кутів.

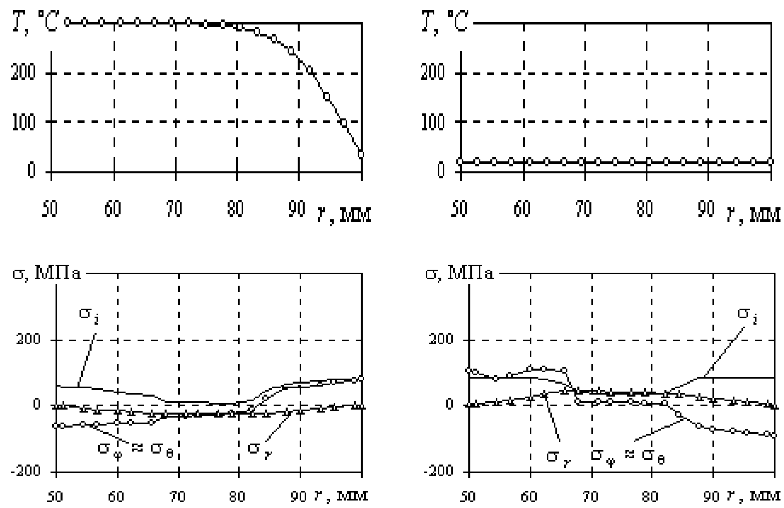
Задачу теплопровідності розв'язують з початковим кроком по часу $(\Delta t)_0 =$ 1 сек і укрупненими часовими кроками зі зменшенням градієнтності температурного поля. Вузлові значення температури отримали для N_T =680 кроків. Розрахунково змодельований тепловий процес охолодження до температури $T \approx 20^\circ C$ триває протягом $t^* = 420$ сек $= 7$ хв.

Для розрахунку температурних напружень, спричинених тепловим режимом охолодження, зроблено додаткове укрупнення часових інтервалів для забезпечення вищої високої швидкості обчислень, яке практично не впливає на їхню точність. У підсумку механічний процес простежується протягом $N_{\text{НДС}} = 63$ кроків.

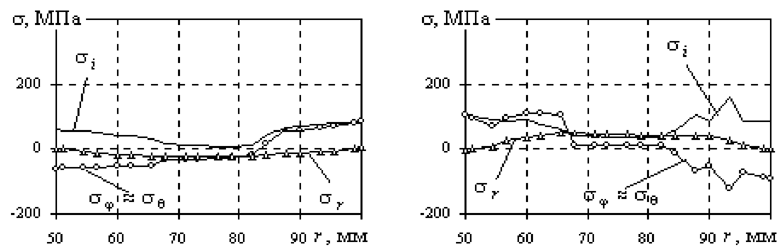
Для аналізу температурних напружень отримали та проаналізували результати для таких випадків розміщення матеріалів. У першому випадку матеріали шарів розміщені, починаючи від поверхні $r = R_2$, так: сталь 0Х13 – сплав ТС-5 – сталь 0Х13. В другому випадку їхнє розміщення таке: сплав ТС-5 – сталь 0Х13 – сплав ТС-5. Результати розрахунково змодельованого термомеханічного процесу зображено на рис. 1 та рис. 2 для вибіркових часових моментів простежування $t = 5$ сек та $t = 420$ сек вздовж радіального перерізу, який перетинає точки інтегрування скінченних елементів.

Шарувата неоднорідність розглядуваної сфери несуттєво впливає на розподіл температурного поля. Наявність матеріалу в середньому шарі, який відмінний від матеріалів, що примикають до вільних сферичних поверхонь, робить помітний вплив на розподіл напружень (рис. 1, 2). У зв'язку з інтенсивною віддачею тепла через поверхню $r = R_2$, особливо на початку охолодження, в цій приповерхневій зоні локалізуються суттєві напруження для модельних наближень для ідеального матеріалу та в припущенні кінематичного та ізотропно-кінематичного зміцнення сталі 0Х13 для обох варіантів розміщення шарів. Для ідеального матеріалу вони найменші, порівнюючи з іншими модельованими варіантами зміцнення в рамках розглядуваного варіанта розміщення шарів. Максимальні розтягуючі напруження виникають на початку охолодження (наприклад, при $t = 5$ сек). Внаслідок повного охолодження відбувається їхній перерозподіл так, що в зоні високих початкових градієнтів температур поблизу поверхні $r = R_2$ ці напруження стискуючі і менші за величиною порівняно з початковими інтервалами охолодження. Ці закономірності характерні для обох варіантів розміщення матеріалів.

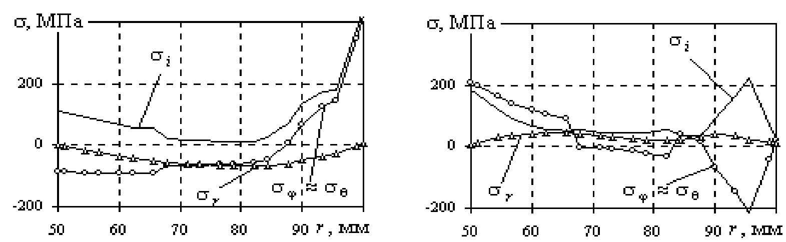
$t = 5$сек, $N_{\text{НДС}} = 50$ $\qquad$ $t = 420$сек, $N_{\text{НДС}} = 63$



ідеальний матеріал сталі 0Х13



кінематичне зміцнення сталі 0Х13

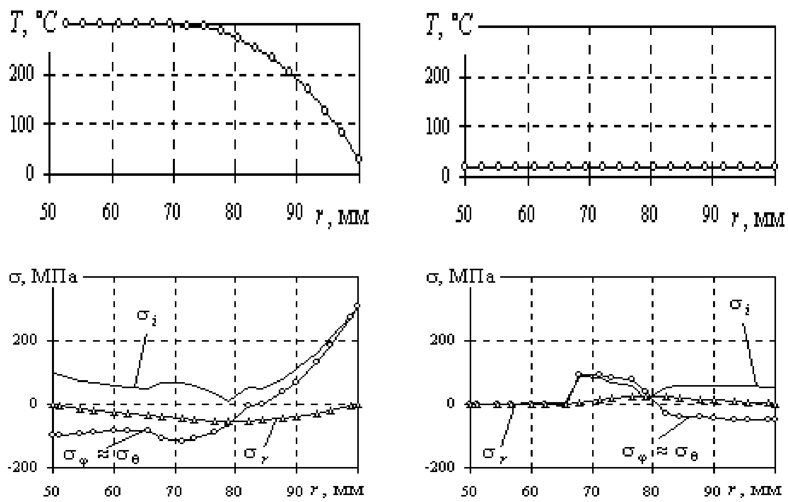


ізотропно-кінематичне зміцнення сталі 0Х13

Рис. 1.

Важливими з інженерних міркувань є висновки про доцільність використання певного варіанта складеної шаруватої сфери на підставі оцінки виникаючих напружень.

$t = 5$сек, $N_{\text{НДС}} = 50$ $t = 420$сек, $N_{\text{НДС}} = 63$



ідеальний матеріал сталі 0X13
Рис. 2.

Розрахунково спостережуваний деформаційний процес у випадку розміщення шарів відповідно до першого варіанта відбувається при пластичному деформуванні протягом всього охолодження. При моделюванні ізотропно-кінематичного зміцнення як найбільш узгодженого з експериментальною кривою деформування матеріалу для шарів із сталі 0X13, які контактують з вільними сферичними поверхнями, досить суттєві максимальні розтягуючі напруження локалізовані поблизу поверхні $r = R_2$ (рис. 1). Вони можуть бути небезпечними для експлуатації в умовах високих градієнтів температур. Для високопластичної сталі 0X13 ці напруження перевищують межу текучості σ_T =96 МПа при $20\,^\circ C$ [12] (рис. 1).

У випадку розміщення шарів так, що шари з сплаву ТС-5 контактують із сферичними обмежуючими поверхнями, а середній шар виготовлений із сталі 0X13, максимальні розтягуючі напруження локалізовані в околі поверхні $r = R_2$, зокрема на початку охолодження, є також високими (рис. 2). Навіть при високих початкових градієнтах температур розрахунково спостережуване пластичне деформування починає відбуватись лише з часу $t = 3,6$ сек при моделюванні поведінки сталі 0X13 ідеальним матеріалом або кінематично зміцнюваним. Результати стосовно величини та характеру напружень для ідеального та кінематично зміцнюваного матеріалів практично збігаються, оскільки при пружному деформуванні до моменту $t = 3,6$ сек зміцнення не відбувається, а наступний деформаційний процес за фізично нелінійним законом (5) при меншій градієнтності температурного поля і незначних зонах пластичного деформування не приводить до суттєвої відмінності напружень у припущенні ідеального та кінематично зміцнюваного матеріалів. При моделюванні ізотропно-кінематичного зміцнення як найбільш фізично обґрунтованого деформування має пружний характер протягом розглядуваного температурного режиму охолодження. Це означає, що інтенсивність σ_i максимальних напружень не перевищує межі текучості σ_T сплаву ТС-5. Тому сферичне тіло в розглянутому температурному режимі з шарами, матеріали яких розміщені у порядку сплав ТС-5 – сталь 0Х13 – сплав ТС-5, має більший ресурс міцності, ніж сфера з шарами, матеріали яких розміщені, починаючи від зовнішньої поверхні, у порядку сталь 0Х13 – сплав ТС-5 – сталь 0Х13.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки ДФФД (проект № Ф41.2/001).

Список використаної літератури

1. *Бернштейн М.Л.* Механические свойства металлов / *М.Л. Бернштейн, В.А. Займовский* – М.: Металлургия, 1979. – 496 с.
2. *Бондарь В.С.* Шаговый метод решения задач нелинейного поведения конструкций / *В.С. Бондарь, В.В. Даншин, А.Н. Фролов* // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – 1986. – С. 26-31.
3. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / *К. Васидзу* – М.: Мир, 1987. – 542 с.
4. *Гачкевич О.Р.* Математичне моделювання і дослідження напруженого стану тіл у процесі охолодження при високотемпературному відпалі / *О.Р. Гачкевич, В.С. Михайлишин* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С. 186-198.
5. *Гачкевич О.* Числова методика розв'язування задач термомеханіки тіл у разі охолодження в процесі високотемпературного відпалювання / *О. Гачкевич, В. Михайлишин, А. Равська-Скотнічна* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 78-92.
6. *Григоренко Я.М.* Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів / *Я.М. Григоренко, В.Д. Будак, О.Я Григоренко* – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294с.
7. *Григоренко Я.М.* Задачи теории упругости неоднородных тел / *Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова* – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
8. *Коваленко А.Д.* Термоупругость / *А.Д. Коваленко* – К: Вища шк., 1975. – 216 с.
9. *Лившиц Б.Г.* Физические свойства металлов и сплавов / *Б.Г. Лившиц, В.С. Крапошин, Я.Л. Липецкий* – М.: Металлургия, 1980. – 320 с.
10. *Толок В.А.* Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / *В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, Д.П. Бувайло* – К.: Наук. думка, 2003. – 316 с.
11. *Михайлишин В.* Ітераційні процедури для задач неізотермічної пружно-пластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням / *В. Михайлишин* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 102-112.
12. *Морозов Е.М.* Неизотермическая модель упругопластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами / *Е.М. Морозов, Г.П. Никишков, Т.А. Черныш* // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. – Свердловск: Уральск. научн. центр АН СССР, 1986. – С. 87-94.
13. *Писаренко Г.С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие. / *Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский* – К.: Наук. думка, 1981. – 496 с.
14. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С. Сахаров, И. Альтенбах* – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
15. *Юренев В.Н., Лебедев П.Д.* Теплотехнический справочник: Т. 2 / *В.Н. Юренева, П.Д. Лебедева* – М.: Энергия, 1976. – 897 с.

16. *Биргер И.А.* Термопрочность деталей машин / *И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демьянушко и др.* – М.: Машиностроение, 1975. – 456 с.
17. *Феденко В.И.* Неупругая деформация многослойного материала при растяжении вдоль его слоев / *В.И. Феденко* // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 17. – С. 254-260.
18. *Францевич И.Н.* Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов / *И.Н. Францевич, Ф.Ф. Воронов, С.А. Бакута* – К.: Наук. думка, 1982. – 288 с.
19. *Allen D.H.* A theory for analysis of thermoplastic materials / *D.H. Allen, W.E. Haisler* // Comput. & Struct. – 1981. – Vol. 13, №1. – P. 129-135.
20. *Ziegler H.* A modification of Prager's hardening rule / *H. Ziegler* // Quart. Appl. Math. – 1959. – Vol. 17. – P. 55-65.

Стаття: надійшла до редакції 26.01.2013
прийнята до друку 16.10.2013

INVESTIGATION OF REGULARITIES OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN THE LAYERED PLASTIC DEFORMABLE SOLIDS UNDER SIMULATED WORKING CONDITIONS

Vira MYKHAILYSHYN

Pidsryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine,
Naukova Str., 3b, Lviv, 79060
e-mail: vira.mykhailyshyn@gmail.com

The problem of the thermomechanics for the layered temperature sensitive plastic deformable solids is formulated. The general approach to solving it based on the finite element method that include for the problem of stress and strain states the calculating schemes concerning step-by-step approximation and linearization of the original relationships is proposed. The thermomechanical processes in three-layered sphere of two materials for two variants of materials placement are investigated. Influence of materials placement on the stresses formation is clarified and conclusions about application expediency of one of variants based on the calculating estimation of stress state are made.

Key words: heat transfer theory, theory of the plastic nonisothermal yielding, finite element method, layered solids, stresses, strains, hardening.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ ПРИ УСЛОВИЯХ, МОДЕЛИРУЮЩИХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ

Вера МИХАЙЛИШИН

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины,
ул. Наукова, 3б, Львов, 79060
e-mail: vira.mykhailyshyn@gmail.com

Сформулировано задачу термомеханики для слоистых термочувствительных пластически деформируемых тел. Предложен общий подход к ее решению на основании метода конечных элементов, который для задачи о напряженно-деформированном состоянии включает расчетные схемы касательно пошаговых аппроксимаций и линеаризации исходных соотношений. Исследованы термомеханические процессы в трехслойной сфере, изготовленной из двух материалов, для двух вариантов размещения материалов. Выяснено влияние размещения материалов на формирование напряжений и сделано выводы о целесообразности применения одного из вариантов на основании расчетной оценки напряженного состояния.

Ключевые слова: теория теплопроводности, теория пластического неизотермического течения, метод конечных элементов, слоистые тела, напряжения, деформации, упрочнение.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 130–140
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 130–140

УДК 513.88

ПРО ОПЕРАТОРНУ ЧАСТИНУ МАКСИМАЛЬНО ДИСИПАТИВНОГО РОЗШИРЕННЯ ЕРМІТОВОГО ОПЕРАТОРА

Юрій ОЛІЯР, Олег СТОРОЖ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: aruy14@ukr.net

Застосовуючи критерій максимальної дисипативності розширення-відношення S скінченновимірного нещільно визначеного звуження симетричного оператора L_0 з довільними дефектними числами, побудовано операторну частину відношення S. Доведено таке: якщо S є оператором, то він споріднений (у сенсі В.Е. Лянце) з парою (L_0^*, L_0).

Ключові слова: лінійне відношення, дисипативність, операторна частина, розширення.

1. Вступ. Теорію лінійних відношень ("багатозначних операторів") започаткував Р. Аренс [1] і надалі досліджували Е.А. Коддінгтон [2], А. Дайксми і Г. Сноо [3], В.М. Брук [4], А.Н. Кочубей [5, 6], В.І. Горбачук і М.Л. Горбачук [7] та інші математики (див., наприклад, [8–13]). Зокрема, в [6], використовуючи концепцію лінійних відношень, отримано такі результати:

1) описано усі максимально дисипативні розширення-відношення S скінченновимірного звуження (щільно визначеного) симетричного оператора L_0 з однаковими дефектними числами, який діє в гільбертовому просторі;
2) виділено операторну частину відношення S.

Про перенесення першого з цих результатів на випадок, коли L_0 має довільний індекс дефекту, йдеться в [14]. Ця стаття є продовженням праці [14]. Вона присвячена поширенню на випадок довільних дефектних чисел другого зі згаданих результатів. Крім того, ми доводимо, якщо S є оператором, то він споріднений в сенсі В.Е. Лянце [15, 16] з парою (L_0^*, L_0).

Зазначимо, що важливість вивчення максимально дисипативних операторів зумовлена хоча б такою обставиною: щільно визначений лінійний оператор A в гільбертовому просторі H максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли iA є генератором сильно неперервної півгрупи стисків у H (див. [17]).

2. Основні поняття та позначення. Попередні відомості. Ми використовуємо такі позначення:

- $D(T), R(T), \ker T$ – відповідно, область визначення, область значень і многовид нулів оператора T;
- $(\cdot \mid \cdot), \oplus, \dot{+}, \perp$ – символи скалярного добутку, ортогональної суми, прямої суми та ортогонального доповнення, відповідно (якщо X -гільбертів простір, а T_1, T_2 – лінійні многовиди в X, то $T_1 \ominus T_2 \overset{def}{=} T_1 \bigcap T_2^{\perp}$);
- AE – образ множини E при відображенні A;
- 1_X -тотожне перетворення множини X;
- $A \downarrow E$ – звуження відображення A на множину E;
- якщо X, Y – гільбертові простори, то під $\mathcal{C}(X), \mathcal{B}(X,Y)$ розуміємо класи лінійних замкнених щільно визначених неперервних операторів у просторі X і лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$, відповідно, ($\mathcal{B}(X) \overset{def}{=} \mathcal{B}(X,X)$).

Нехай H – комплексний гільбертів простір, а $H^2 = H \oplus H$. Нагадаємо, що (замкненим) лінійним відношенням у просторі H називають довільний (замкнений) лінійний многовид $T \subset H^2$, а область визначення $D(T)$ та спряжене відношення у просторі T^* визначають так:

$$D(T) = \{y \in H \ : \ (\exists z \in H)\ (y,z) \in T\},$$
$$\{T^* = (y_2, z_2) \in H^2 \ : \ \forall (y_1, z_1) \in T \ \ (z_1 \mid y_2) - (z_2 \mid y_1) = 0\}.$$

Легко бачити, що

$$T^* = (JT)^{\perp} = JT^{\perp}, \tag{1}$$

де

$$J(h_1, h_2) = (-ih_2, ih_1) \quad (h_1, h_2 \in H). \tag{2}$$

Означення 1. *Відношення T називають дисипативним (акумулятивним), якщо для будь-якого $(y,z) \in T$ $\Im(z \mid y) \geqslant 0 (\leqslant 0)$ і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо воно, крім того, не має нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень.*

Нагадаємо також, що в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком.

Роль вихідного об'єкта у статті відіграє симетричний оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$, де H – фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Отож, $L_0 \subset L_0^* \overset{def}{=} L$. Нехай H_0 – скінченновимірний підпростір простору H, P_0 – ортопроектор, $H \to H_0$, $S_0 \overset{def}{=} L_0 \downarrow H_0^{\perp}$, а $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, \delta_+, \delta_-)$ – фіксований антисиметричний простір граничних значень оператора L_0, введений у [18].

Теорема 1. *([14]) Для будь-якого стиску $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+ \oplus H_0, \mathcal{H}^- \oplus H_0)$ підпростір, що складається з тих елементів $\{(y, Ly + \phi) \subset S_0^*\}$ (іншими словами $\{(y, Ly+\phi) : y \in D(L), \phi \in H_0\}$), які задовольняють умову*

$$K(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + iP_0 y)) - (\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - iP_0 y)) = 0, \tag{3}$$

є максимально дисипативним розширенням оператора S_0.

Навпаки, будь-яке макимально дисипативне відношення-розширення S – це частина простору S_0^*, яка виділяється умовою (3).

Аналогічно формулюються умови акумулятивності розширення відношення S_0. Нехай $T \subset H^2$ – замкнене лінійне відношення

$$T(0) \stackrel{def}{=} \{z \in H \ : \ (0, z) \in T\}, \quad T_\infty \stackrel{def}{=} 0 \oplus T(0), \quad T_{op} \stackrel{def}{=} T \ominus T_\infty.$$

T_∞ називається багатозначною частиною відношення T, а T_{op} – його операторною частиною. Відомо [6] (див. також [1], [3]) таке: якщо T – максимально дисипативне відношення, то T_{op} – замкнений оператор з областю визначення $D(T)$, а $T_{op} \downarrow ([H \ominus T(0)] \bigcap D(T))$ – максимально дисипативний оператор в $H \ominus T(0)$.

3. Багатозначна й операторна частини максимально дисипативного розширення S відношення S_0.

Зауваження 1. З теореми 1, а точніше, з [3], випливає, що $(0, \phi) \in S$ тоді і тільки тоді, коли $K(0, \phi) = (0, \phi)$, тобто

$$S(0) = \{\phi \in H_0 \ : \ K(0, \phi) = (0, \phi)\} = \ker(K \downarrow (\{0\} \oplus H_0) - 1_{\{0\}\oplus H_0}). \tag{4}$$

Нехай Q – ортопроектор $H \to H \ominus S(0)$, $\Lambda \stackrel{def}{=} K \downarrow ((\{0\} \oplus H_0) - 1_{\{0\}\oplus H_0})$, тобто

$$\forall h \in H_0 \quad \Lambda(0, h) = K(0, h) - (0, h),$$

$$\Lambda_0 = K \downarrow ((\{0\} \oplus QH_0) - 1_{\{0\}\oplus QH_0})(= \Lambda \downarrow (\{0\} \oplus QH_0).$$

З (4) випливає, що $S(0) = \ker \Lambda$, зокрема S є оператором тоді і тільки тоді, коли $\ker \Lambda = \{0\}$ і що $\ker \Lambda_0 = \{0\}$.

Зауваження 2. Нехай $(y, Ly + \phi) \in S$, зокрема $y \in D(S) = D(S_{op})$. Тоді

$$S_{op} y = QLy + Q\phi. \tag{5}$$

Доведення. Справді,

$$Ly + \phi = QLy + Q\phi + (1_H - Q)(Ly + \phi),$$

тому

$$(y, Ly + \phi) = (y, QLy + Q\phi) + (0, (1_H - Q)(Ly + \phi)).$$

Оскільки $1_H - Q$ – ортопроектор $H \to S(0)$, то $(0, (1_H - Q)(Ly + \phi)) \in S_\infty \subset S$. Оскільки $(y, Ly + \phi) \in S$, то звідси випливає, що $(y, QLy + Q\phi) \in S$.

Крім того, для всякого $z \in S(0) \quad ((y, QLy + Q\phi) \mid (0, z)) = 0$, тому

$$(y, QLy + Q\phi) \in S \cap S_\infty^\perp = S_{op},$$

а отже, справджується (5). □

Нехай Π_1 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \mathcal{H}^- \oplus \{0\}$, Π_2 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \{0\} \oplus H_0$, а оператор $W : D(L) \to \mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+$ визначається так:

$$\forall y \in D(L) \quad Wy = -\sqrt{2}[K(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y) + (-\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y)]. \tag{6}$$

Теорема 2. *В умовах теореми 1*

$$D(S_{op}) = D(S) = \{y \in D(L) \ : \ Wy \in R(\Lambda_0), \ \Pi_1 \Lambda_0^{-1} Wy = 0\}, \tag{7}$$

$$\forall y \in D(S_{op}) \ S_{op} y = QLy + \Pi_1 \Lambda_0^{-1} Wy = 0. \tag{8}$$

Доведення. Для знаходження $D(S_{op})$ та $Q\phi$ подамо (3) у такому вигляді:

$$K(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) + K(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\phi) - (\delta_- y, \frac{-i}{\sqrt{2}}P_0 y) - (0, \frac{1}{\sqrt{2}}\phi)$$

або, що еквівалентно,

$$K(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) + (-\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda(0, \phi). \tag{9}$$

З (4) і (9) випливає, що $\phi \in S(0) = \ker\Lambda$, тому, оскільки

$$\Lambda(0, Q\phi) = \Lambda_0(0, Q\phi) + \Lambda(0, (1_H - Q)\phi) = \Lambda_0(0, Q\phi),$$

то рівність (9) можна записати так: $\Lambda_0(0, Q\phi) = Wy$ тобто $Wy \in R(\Lambda_0)$ і $(0, Q\phi) = \Lambda_0^{-1}Wy$.

Остання рівність рівносильна системі

$$\Pi_1\Lambda_0^{-1}Wy = 0, \quad Q\phi = \Pi_2\Lambda_0^{-1}Wy. \tag{10}$$

Враховуючи (5) і цитовані вище властивості операторної частини максимально дисипативного відношення, бачимо, що теорему доведено. □

Приклад 1. Нехай L_0 має індекс дефекту (1, 1), $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \delta_+, \delta_-)$ – антисиметричний простір граничних значень цього оператора (наприклад, L_0 – мінімальний оператор, породжений в $L_2(0,1)$ диференціальним виразом $i\acute{y}$, $\delta_+ y = y(1)$, $\delta_- y = y(0)$), а S_0 – (одновимірне) звуження цього оператора L_0 на підпростір $H_0^{\perp}$, де H_0 лінійна оболонка породжена одиничним вектором $e \in H$.

Нехай $K \in \mathcal{B}(\mathbb{C} \oplus H_0, \mathbb{C} \oplus H_0)$ – стиск, який визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

Оператор K природно ототожнюється з числовою матрицею

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad (k_{ij} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, 2).$$

Знайдемо загальний вигляд максимально дисипативного розширення S оператора S_0.

a)

$$\ker\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} \\ 0 & k_{22} - 1 \end{pmatrix} = \{0\},$$

тобто

$$|k_{12}|^2 + |k_{22} - 1|^2 > 0.$$

Зі сказаного вище випливає, що в цій ситуації $S(0) = \{0\}$, тобто S є оператором, а рівняння (9) набуває вигляду

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ 0 & K_{22} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_+ y \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(y \mid e)e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta_- y \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(y \mid e)e \end{pmatrix}\right],$$

де $e \in H_0$ і $\|e\| = 1$ або (що еквівалентно)

$$k_{12}(\phi \mid e) = -\sqrt{2}(k_{11}\delta_+ y + \frac{i}{\sqrt{2}}k_{12}(y \mid e) - \delta_- y) \overset{def}{=} \alpha(y) \tag{11, a}$$

$$(k_{22}-1)(\phi \mid e) = -\sqrt{2}(k_{21}\delta_+ y + \frac{i}{\sqrt{2}}k_{22}(y \mid e) + \frac{i}{\sqrt{2}}(y \mid e)) \overset{def}{=} \beta(y). \qquad (11, б)$$

Враховуючи це, неважко зміркувати, що

$$(\phi \mid e) = \frac{\overline{k_{12}}\alpha(y) + (\overline{k_{22}}-1)\beta(y)}{|k_{12}|^2 + |k_{22}-1|^2} \overset{def}{=} \gamma(y). \qquad (12)$$

Підставляючи (12) в (11, а), (11, б) і враховуючи рівність $\phi = \gamma(y)e$, бачимо, що

$$D(S) = \{y \in D(L) \ : \ (k_{22}-1)\alpha(y) - k_{12}\beta(y) = 0\},$$
$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \gamma(y)e.$$

б) $k_{12} = 0, k_{22} = 1$.

У цій ситуації $S(0) = H_0$, а отже, $Qy = y - (y \mid e)e$.

Отримали

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{21} & 1_{H_0} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити (див. також [20]), що K може бути стиском тільки при $K_{21} = 0$ (і $\|K_{11}\| \leqslant 1$). Отож, з точністю до згаданого вище ототожнення

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $|k| \leqslant 1$. Міркуючи так, як при виведенні (11, а), (11, б) бачимо, що в розглядуваному випадку

$$S = \{(y, Ly + ce) \ : \ y \in D(S), \ c \in \mathbb{C}\},$$

де

$$D(S) = \{y \in D(L) \ : \ k\delta_+ y + \delta_- y = 0, \ (y \mid e) = 0\}.$$

Згідно зі сказаним вище (оскільки для будь-якого $\phi = ce \in H_0$
$Q\phi = \phi - (\phi \mid e)e = 0$),

$$D(S_{op}) = D(S) = \{y \in D(L) \ : \ k\delta_+ y + \delta_- y = 0, \ (y \mid e) = 0\},$$
$$\forall y \in D(S_{op}) \ S_{op}y = Ly - (Ly \mid e)e.$$

4. Друге формулювання теореми 2. Відомо [14] (див. також [18]), що лінійне відношення $S \supset S_0$ є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли існують лінійні оператори $A^{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\pm} \oplus H_0, \mathcal{H}^{-} \oplus H_0)$ такі, що

$$A^+(A^+)^* \leqslant A^-(A^-)^*, \quad \ker A^- = \{0\}, \qquad (13)$$

а S складається з тих елементів $\{y, Ly + \phi\} \subset S_0^*$, які задовольняють умову

$$A^+(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + iP_0 y)) + A^-(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - iP_0 y)) = 0. \qquad (14)$$

З (14) випливає, що $(0, \phi) \in S$ тоді і тільки тоді, коли $A^+(0,\phi) + A^-(0,\phi) = 0$, тобто

$$S(0) = \{\phi \in H_0 \ : \ A^+(0,\phi) + A^-(0,\phi) = 0\} =$$
$$= \ker(A^+ \downarrow (\{0\} \oplus H_0) + A^- \downarrow (\{0\} \oplus H_0)). \qquad (15)$$

Нехай Q- ортопроектор $H \to H \ominus S_0$,

$$\Pi = A^+ \downarrow (\{0\} \oplus H_0) + A^- \downarrow (\{0\} \oplus H_0), \quad \Pi_0 = \Pi \downarrow (\{0\} \oplus QH_0).$$

З (15) випливає, що $S(0) = \ker \Pi$, зокрема S є оператором тоді і тільки тоді, коли $\ker \Pi = \{0\}$, а отже, $\ker \Pi_0 = \{0\}$.

Нехай, як і вище, Π_1 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \mathcal{H}^- \oplus \{0\}$, Π_2 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \{0\} \oplus H_0$.

Визначимо оператор $N : D(L) \to \mathcal{H}^- \oplus H_0$ так:

$$\forall y \in D(L) \quad Ny = -\sqrt{2}[A^+(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}} P_0 y) + A^-(\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y)]. \tag{16}$$

Теорема 3. *При зроблених припущеннях (див. зокрема (13), (14))*

$$D(S) = D(S_{op}) = \{y \in D(L) \ : \ Ny \in R(\Pi_0),\ \Pi_1 \Pi_0^{-1} Ny = 0\}, \tag{17}$$

$$\forall y \in D(S_{op}) \quad S_{op} y = QLy + \Pi_2 \Pi_0^{-1} Ny, \tag{18}$$

де N визначено згідно з (16).

Доведення. Для знаходження $D(S_{op})$ та $Q\phi$ подамо (14) у такому вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Pi(0, \phi) = -[A^+(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}} P_0 y) + A^-(\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y)]. \tag{19}$$

Оскільки $\Pi(0, \phi) = \Pi_0(0, Q\phi)$, то ця рівність може бути записана так: $\Pi_0(0, Q\phi) = Ny$, тобто $Ny \in R(\Pi_0)$, $(0, Q\phi) = \Pi_0^{-1} Ny$.

Остання рівність рівносильна системі

$$\Pi_1 \Pi_0^{-1} Ny = 0, \quad Q\phi = \Pi_2 \Pi_0^{-1} Ny. \tag{20}$$

Враховуючи (5) і цитовані вище властивості операторної частини максимально дисипативного відношення, бачимо, що теорему доведено. □

Наслідок 1. *В умовах теореми 3 S є (максимально дисипативним) оператором-розширенням оператора S_0 тоді і тільки тоді, коли* $\ker \Pi = \{0\}$

У цьому випадку

$$D(S) = \{y \in D(L) \ : \ Ny \in R(\Pi),\ \Pi_1 \Pi^{-1} Ny = 0\}$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Pi_2 \Pi^{-1} Ny.$$

Для доведення достатньо застосувати теорему 3 при $Q = 1_H$.

5. Дисипативні розширення оператора S_0 і теорія В.Е. Лянце споріднених операторів. Нехай $L, L_0 \in \mathcal{C}(H)$ і $L_0 \subset^m L$ (це означає, що L скінченновимірний, а саме m-вимірний, розширений оператор L_0). Використовуючи термінологію, запропоновану в [15, 16], будемо говорити, що оператор $T \in \mathcal{C}(H)$ споріднений з оператором L, якщо T та L мають спільне скінченновимірне замкнене звуження і спорідненим з парою (L, L_0) ($T \sim (L, L_0)$, якщо, крім того, $D(T) \subset D(L)$, $D(T^*) \subset D(L_0^*)$, $D((L \downarrow D(T))^*) \subset D(L_0^*)$).

Далі скрізь припускаємо, що оператори L та L_0 такі, як і вище, причому L_0 має індекс дефекту (m_+, m_-) $\quad (m_\pm < \infty)$, а отже, (див. [18]) $\dim \mathcal{H}^\pm = m_\pm, L_0 \subset^{m_+ + m_-} L$. Крім того, без особливих пояснень використовують результати праць [15, 16], а також праць [19, 20], присвячених викладові основних положень теорії дисипативних операторів у гільбертовому просторі.

Теорема 4. *Якщо L скінченновимірний розширений оператор L_0, то будь-який максимально дисипативний оператор $S \supset S_0$ є спорідненим з парою (L, L_0).*

Доведення. Безпосередньо з теореми 2 випливає, що оператор $S \supset S_0$ максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли існує стиск

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+ \oplus H_0, \mathcal{H}^- \oplus H_0)$$

такий, що

$$\ker \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} - 1_{H_0} \end{pmatrix} = \{0\}, \tag{21}$$

а графік $G(S)$ оператора S складається з усіх тих $\{(y, Ly + \phi) : y \in D(L), \phi \in H_0\}$, які задовольняють умову

$$\begin{pmatrix} K_{12}\phi \\ (K_{22} - 1_{H_0})\phi \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \left[\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_+ y \\ \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta_- y \\ \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y \end{pmatrix} \right] \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} A_1^+ \delta_+ y + A_1^- \delta_- y + A_1^0 P_0 y \\ A_2^+ \delta_+ y + A_2^- \delta_- y + A_2^0 P_0 y \end{pmatrix}, \tag{22}$$

де $A_1^{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\pm}, \mathcal{H}^-), A_1^0 \in \mathcal{B}(H_0, \mathcal{H}^-), A_2^{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\pm}, H_0), A_2^0 \in \mathcal{B}(H_0)$.

Подіявши на першу рівність цієї системи оператором K_{12}^*, а на другу – оператором $(K_{22}^* - 1_{H_0})$ і додавши отримані співвідношення, бачимо, що за певних $B^{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\pm}, H_0), B_0 \in \mathcal{B}(H_0)$

$$\left[K_{12}^* K_{12} + (K_{22}^* - 1_{H_0})(K_{22} - 1_{H_0})\right] \phi = B^+ \delta_+ y + B^- \delta_- y + B_0 P_0 y.$$

Оскільки $\dim H_0 < \infty$, то з (21) випливає, що

$$\mathcal{K} \stackrel{def}{=} [K_{12}^* K_{12} + (K_{22}^* - 1_{H_0})(K_{22} - 1_{H_0})]^{-1} \in \mathcal{B}(H_0),$$

а

$$\phi = \mathcal{K} B^+ \delta_+ y + \mathcal{K} B^- \delta_- y + \mathcal{K} B_0 P_0 y. \tag{23}$$

Підставляючи (23) в (22), отримуємо систему вигляду

$$\begin{cases} F_1^+ \delta_+ y + F_1^- \delta_- y = F_1^0 P_0 y \\ F_2^+ \delta_+ y + F_2^- \delta_- y = F_2^0 P_0 y \end{cases}, \tag{24}$$

де $F_1^{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\pm}, \mathcal{H}^-), F_1^0 \in \mathcal{B}(H_0, \mathcal{H}^-), F_2^{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\pm}, H_0), F_2^0 \in \mathcal{B}(H_0)$.

Зрозуміло, що система (22) рівносильна (23)-(24), зокрема $D(S)$ складається з усіх тих $y \in D(L)$, які задовольняють (24). Але (24) рівносильна системі $m_- + m_0$ скалярних рівнянь ($m_0 \stackrel{def}{=} \dim H_0$)

$$\begin{cases} (F_1^+ \delta_+ y \mid h_i) + (F_1^- \delta_- y \mid h_i) = (F_1^0 P_0 y \mid h_i), & i = 1, ..., m_-, \\ (F_2^+ \delta_+ y \mid e_j) + (F_2^- \delta_- y \mid e_j) = (F_2^0 P_0 y \mid e_j), & j = 1, ..., m_0, \end{cases}, \tag{25}$$

де $\{h_1, ..., h_m\}, \{e_1, ..., e_{m_0}\}$ – ортонормовані бази в $\mathcal{H}^-$ та H_0, відповідно. Однак не всі рівняння цієї системи незалежні. Використовуючи результати праць [15, 16, 19, 20], можна довести, що серед співвідношень (25) є тільки m_- незалежних. Тому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що (27) еквівалентна співвідношенню

$$\sum_{i=1}^{r}(F_1^+\delta_+y \mid h_i)h_i + \sum_{i=1}^{r}(F_1^-\delta_-y \mid h_i)h_i + \sum_{i=r+1}^{m_-}(F_2^+\delta_+y \mid e_{i-r})h_i +$$

$$+\sum_{i=r+1}^{m_-}(F_2^-\delta_-y \mid e_{i-r})h_i = \sum_{i=1}^{r}(F_1^0P_0y \mid h_i)h_i + \sum_{i=r+1}^{m_-}(F_2^0P_0y \mid e_{i-r})h_i. \qquad (26)$$

Перше, ніж переходити до завершення доведення, пояснимо, що під $(\cdot \mid \cdot)_L$ розуміємо скалярний добуток графіка оператора L

$$(\forall y \in D(L)) \quad (\forall z \in D(L)) \quad (y \mid z)_L = (y \mid z)_L + (Ly \mid Lz), \qquad (27)$$

під $D[L]$ – многовид $D(L)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком (27), а під $\ominus_L$ –символ ортогонального доповнення в $D[L]$. Якщо $W \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}^-)$, то під $W' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^-, D[L])$ розуміємо спряжений оператор

$$(\forall y \in D(L)) \quad (\forall h \in \mathcal{H}^-) \quad (Wy \mid h)_{\mathcal{H}^-} = (y \mid W'h)_L,$$

де $(\cdot \mid \cdot)_{\mathcal{H}^-}$ символ скалярного добутку в $\mathcal{H}^-$.

Продовжимо наші міркування. З (26) випливає, що існують оператори $U \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}^-), \Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H}^-)$ такі, що $\ker U \supset D(L_0)$ і

$$D(S) = D(L \downarrow D(S)) = \{y \in D(L) \ : \ Uy - \Phi y = 0\},$$

зокрема $D(S) \subset D(L)$.

Оскільки (див. [19, 20]) S^* – максимально акумулятивний оператор, то $D(S^*) \subset D(L)$. Далі, S та L мають спільне скінченновимірне замкнене звуження S_0, тому для завершення доведення достатньо довести, що

$$D((L \downarrow D(S))^*) \subset D(L). \qquad (28)$$

А це справді так. Насправді, застосувавши абстрактну формулу Гріна (в сенсі [15, 16]) до пари $(L, L \downarrow D(S))$, отримуємо

$$D(L_S^*) = D(L_0) \dotplus L[D(L) \ominus_L D(L_S)] = D(L_0) \dotplus L[D(L) \ominus_L \ker(U - \Phi)] =$$

$$= D(L_0) \dotplus LR(U' - \Phi').$$

Враховуючи співвідношення $R(U') = D(L) \ominus_L \ker U \subset D(L) \ominus_L D(L_0)$ і застосовуючи абстрактну формулу Гріна до пари (L, L_0), одержимо

$$LR(U') \subset L[D(L) \ominus_L D(L_0)] = D(L) \ominus_L D(L_0) \subset D(L).$$

Далі, для будь-яких $y \in D(L), h \in \mathcal{H}^-$

$$(Ly \mid L\Phi'h) = (y \mid \Phi'h)_L - (y \mid \Phi'h) = (\Phi y \mid h)_{\mathcal{H}^-} - (y \mid \Phi'h) = (y \mid \Phi^*h - \Phi'h),$$

а отже, $L\Phi'h \in D(L^*) = D(L_0)$ (і $L_0L\Phi'h = \Phi^*h - \Phi'h$). Отож, $LR(\Phi') \subset D(L_0) \subset$ $\subset D(L)$.

Співвідношення (28), а з ним і теорему 4 доведено. $\square$

Наслідок 2. *В умовах теореми 4 будь-який замкнений щільно визначений дисипативний оператор, який є розширенням оператора S_0, споріднений з парою (L, L_0).*

Доведення. Нехай $\hat{S} \supset S_0, \hat{S} \in \mathcal{C}(H)$ і $\hat{S}$ – дисипативний оператор. Відомо [19, 20], що існує масимально дисипативний оператор $S \in \mathcal{C}(H)$, який є розширенням оператора $\hat{S}$. Отримали $S_0 \subset \hat{S} \subset S \subset S_0^*$, а отже, $S_0 \subset S^* \subset \hat{S}^* \subset S_0^*$.

З цих співвідношень випливає, що

$$D(\hat{S}) \subset D(L),\ D(\hat{S}^*) \subset D(S_0^*) = D(L). \tag{29}$$

Далі, L і $\hat{S}$ мають спільне скінченновимірне замкнене звуження S_0, тому оператор $\hat{S}$ споріднений з L. Нарешті,

$$L \downarrow (D(S^*)) \subset L \downarrow (D(\hat{S}^*)),$$

тому

$$(L \downarrow (D(\hat{S}^*)))^* \subset (L \downarrow (D(S^*)))^*.$$

Але $D(L \downarrow (D(S^*)))^* \subset D(L)$ (це випливає з теореми 4 і з того, що S^* – максимально акумулятивний оператор), тому $D(L \downarrow (D(\hat{S}^*)))^* \subset D(L)$. Звідси і з (29) випливає, що $\hat{S}^* \sim (L, L_0)$, а отже, (див. [15, 16]) $\hat{S} \subset (L, L_0)$. □

Список використаної літератури

1. *Arens R.* Operational calculus of linear relations / *R. Arens* // Pacif. J. Math. – 1961. – Vol. 11, №1. – P. 9-23.
2. *Coddington E.A.* Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear operators / *E.A. Coddington* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 79, №4. – P. 712-715.
3. *Dijksma A.* Self-adjoint extensions of symmetric subspaces / *A. Dijksma, H.S.V. de Snoo* // Pacif. J. Math. – 1974. – Vol. 54, №1. – P. 71-100.
4. *Брук В.М.* О расширениях симметрических отношений / *В.М. Брук* // Мат. заметки. – 1977. – Vol. 22, №6. – C. 825-834.
5. *Кочубей А.Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / *А.Н. Кочубей* // Мат. заметки. – 1975. – Vol. 17, №1. – C. 41-48.
6. *Кочубей А.Н.* О расширениях неплотно заданного оператора / *А.Н. Кочубей* // Сиб. мат. журн. – 1977. – Vol. 18, №2. – C. 314-320.
7. *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / *В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук.* – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
8. *Derkach V.A.* Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility / *V.A. Derkach, S. Hassi, M.M. Malamud, H.S.V. de Snoo* // Meth. of Funct. Anal. and Topology. – 2000. – Vol. 6, №3. – P. 24-55.
9. *Arlinskii Y.M.* External extensions of sectorial linear relations / *Y.M. Arlinskii* // Math. Studii. – 1997. – Vol. 7, №1. – P. 81-96.
10. *Sandovici A.* Canonical extensions of symmetric linear relations / *A. Sandovici* // Operator Theory. – 2006. – Vol. 20, №1. – P. 207-221.
11. *Hassi S.* Finite-dimensional graph perturbations of selfadjoint Sturm-Liouville operators / *S. Hassi, H. Snoo, A. Sterk, H. Winkler* // Tiberiu Constantinescu Memorial vol. Theta Foundation, 2007. – P. 205-226.
12. *Bruk V.M.* On linear relations generated by nonegative operator functions and degenerate elliptic differential operator expression / *V.M. Bruk* // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – Vol. 5, №2. – P. 123-144.
13. *Bruk V.M.* On linear relations generated by a Nevanlinna operator function / *V.M. Bruk* // J. Math., Phys., Anal., Geom. – 2011. – Vol. 7. – №2. – P. 115-140.

14. *Сторож О.Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених операторів / *О.Г. Сторож* // Карпатські мат. публ. – 2009. – Vol. 1, №2. – С. 207-213.
15. *Лянце В.Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами. / *В.Э. Лянце* // Докл. АН СССР. – 1972. – Vol. 204, №3. – С. 542-545.
16. *Лянце В.Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. / *В.Э. Лянце* // Теория фунций, функ. анализ и их прилож. – 1972. – Vol. 16. – С. 165-186.
17. *Иосида К.* Функциональный анализ / *К. Иосида* – М., 1967.
18. *Сторож О.Г.* О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами / *О.Г. Сторож* // Мат. заметки. – 1984. – Vol. 36, №5. – С. 791-796.
19. *Phillips R.C.* Dissipative operators and hyperbolic sytems of partial differential equations / *R.C. Phillips* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 90 – P. 193-254.
20. *Штраус А.В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора / *А.В. Штраус* // Изв. АН СССР. – 1968. – Vol. 32, №1. – С. 186-207.

Стаття: надійшла до редакції 29.11.2012
прийнята до друку 16.10.2013

ON THE OPERATOR PART OF A MAXIMAL DISSIPATIVE EXTENSION OF HERMITIAN OPERATOR

Yurii OLIIAR, Oleh STOROZH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: aruy14@ukr.net

Applying the criterion of maximal dissipativity of subspace extension S of a finite-dimensional nondensely defined restriction of symmetric operator L_0 with arbitrary defect numbers the operator part of S is constructed. It is proved that in case when S is an operator, it is related (accordingly to W.E. Lyantse) to the pair (L_0^*, L_0).

Key words: linear relation, dissipativity, operator part, extension.

ОПЕРАТОРНАЯ ЧАСТЬ МАКСИМАЛЬНО ДИСИПАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВОГО ОПЕРАТОРА

Юрий ОЛИЯР, Олег СТОРОЖ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: aruy14@ukr.net

Применяя критерий максимальной дисипативности расширения-отношения S конечного не плотно заданого сужения симметрического оператора L_0 с произвольными дефектными числами, построили операторную часть отношения S. Доказано такое: если S является оператором, то он родственен (в смысле В.Э. Лянце) паре (L_0^*, L_0).

Ключевые слова: линейное отношение, дисипативность, операторная часть, расширение.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 141–147
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 141–147

УДК 512.624

НИЖНЯ МЕЖА ДЛЯ ПОРЯДКУ ЕЛЕМЕНТІВ У РОЗШИРЕННЯХ СКІНЧЕННИХ ПОЛІВ ВИГЛЯДУ F_{p^p}

Роман ПОПОВИЧ

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Бандери, 12, Львів, 79013
e-mail: rombp07@gmail.com

Явно будуємо в скінченних полях вигляду F_{p^p} для $p \geq 2$ елементи великого мультиплікативного порядку.

Ключові слова: скінченне поле, мультиплікативний порядок.

У низці прикладних застосувань із використанням скінченних полів часто потрібні елементи великого порядку [8, 9]. В ідеалі хотілось би мати змогу отримувати примітивний елемент для будь-якого скінченого поля. Якщо не маємо розвинення порядку мультиплікативної групи поля на прості множники, невідомо як досягти мети. Тому розглядають менш претензійне питання: збудувати елемент доказово великого порядку. У цьому разі достатньо отримати нижню межу для порядку. Питання розглядають для загальних і для спеціальних скінченних полів. Скінченне поле з q елементів позначаємо F_q.

С. Гао [7] дав алгоритм побудови елементів великого порядку для багатьох (згідно з висловленою ним, проте не доведеною, гіпотезою для всіх) загальних розширень F_{q^n} скінченого поля F_q з нижньою границею для порядку $\exp(\Omega((\log m)^2/\log\log m))$. Й. Волох [12] запропонував метод побудови елементів порядку принаймні $\exp(\Omega(\log m)^2))$.

Для часткових випадків скінченних полів можна збудувати елементи, які мають набагато більші порядки.

Розширення, пов'язані з поняттям гауссівського періоду, розглянуті в [3, 10]. Нижня границя на порядок дорівнює $\exp(\Omega(\sqrt{m}))$. Розширення на підставі полінома Куммера набувають вигляду $F_q[x]/(x^m - a)$. Їх, зокрема, застосовують у криптографії, що ґрунтується на спарюванні. У [6] з'ясували, як будувати елементи великого порядку в таких розширеннях за умови $q \equiv 1(mod\ m)$. У цьому разі отримано нижню границю $\exp(\Omega(m))$. Елементи великого порядку збудовано в [5] для розширень вигляду $F_q[x]/(x^{2^t} - a)$ та $F_q[x]/(x^{3^t} - a)$ без умови $q \equiv 1(mod\ m)$. Нижні границі на мультиплікативні порядки дорівнюють $\exp(\Omega(\log m)^2))$, де $m = 2^t$ та $m = 3^t$, відповідно. Повністю умова $q \equiv 1(mod\ m)$ для розширень вигляду $F_q[x]/(x^m - a)$ знята в [11].

Групу, породжену елементом v, позначаємо $\langle v \rangle$. Кількість сполучень з n елементів по k елементів позначаємо $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

Явно будуємо елементи великого порядку в спеціальних розширеннях Артіна-Шраєра скінченних полів, подаємо явну оцінку знизу на їхній мультиплікативний порядок. Для будь-якого простого числа p розширенням Артіна-Шраєра скінченого поля F_p є поле F_{p^p}. Відомо [8, 9], що $x^p - x - a$ нерозкладний поліном над F_p для будь-якого ненульового елемента a з F_p. Тому з обчислювальної точки зору можна вважати, що $F_{p^p} = F_p[x]/(x^p - x - a)$. Нехай $\theta = x(mod\ x^p - x - a)$. Зрозуміло, що $\theta^p = \theta + a$.

Точніше, йдеться про таке. В [1] довели таке: коли $p \geq 41$, то для будь-якого ненульового елемента b поля F_p елемент $\theta + b$ поля F_{p^p} має порядок більший від 4^p. Ми знімаємо умову $p \geq 41$, тобто даємо оцінку знизу для порядків елементів вигляду $\theta + b$ для розширень Артіна-Шраєра з характеристикою $p \geq 2$. Для отримання результатів використовуємо теоретичні міркування та комп'ютерні обчислення.

Приймаємо лінійний двочлен від елемента, який задає розширення, та всі його спряжені, що також належать до підгрупи, породженої цим двочленом, і будуємо їхні різні добутки. Усі спряжені згаданого лінійного двочлена також є лінійними двочленами. Ідею запропонував П. Берізбейтіа [4] як вдосконалення алгоритму AKS [2] та розвинута в [6, 11] для розширень Куммера.

Нагадаємо, що для поля F_q характеристики p автоморфізм Фробеніуса – це відображення $\varphi : F_q \to F_q$, яке кожному елементу α з F_q ставить у відповідність елемент α^p [8, 9]. Два елементи α, β з F_q називаємо спряженими (над F_p), якщо

$$\alpha = \varphi^t(\beta)$$

для деякого степеня φ^t автоморфізму Фробеніуса.

Лема 1. *У випадку поля $F_{p^p} = F_p[x]/(x^p - x - a)$ спряжені елемента $\theta + b$ $(b \in F_p)$ набувають вигляду $\theta + b + ia$ для $i = 0, ..., p-1$.*

Доведення. Доведемо, що $(\theta + b)^{p^i} = \theta + b + ia$, що для будь-якого натурального i. Доведемо це індукцією по i.

Очевидно, що для $i = 0$ рівність виконується. Припустимо, що вона виконується для деякого i. Тоді для $i + 1$ отримаємо

$$(\theta + b)^{p^{i+1}} = [(\theta + b)^{p^i}]^p = (\theta + b + ia)^p = \theta^p + b + ia = \theta + b + (i+1)a.$$

Отже, рівність правильна для будь-якого натурального i. □

Варто зауважити, що елементи $\theta + b + ia$ є різними для $i = 0, ..., p-1$.

Лема 2. *Всі елементи вигляду $\theta + b + ia$ $(i = 0, ..., p-1)$ мають однаковий мультиплікативний порядок.*

Доведення. Приймемо довільні два елементи α, β згаданого вигляду. Згідно з лемою 1 ці елементи спряжені. Тобто існує такий степінь φ^t автоморфізму Фробеніуса, що

$$\alpha = \varphi^t(\beta).$$

Зрозуміло, що φ^t також є автоморфізмом. Якщо φ^t – автоморфізм і $\beta^k = 1$, то тоді $\varphi^t(\beta^k) = \alpha^k = 1$. □

Зафіксуємо цілі числа $1 \le c_- \le c \le p-1$. Нехай $S(p, c_-, c)$ множина таких відображень f з множини $\{0, ..., p-1\}$ в множину цілих чисел, що

I) $|\{i | f(i) < 0\}| = c_-$;

II) $-\sum_{i, f(i)<0} f(i) \le c$;

III) $\sum_{i, f(i)\ge 0} f(i) \le p-1-c$.

В [1] доведено таку лему.

Лема 3. *Число елементів множини $S(p, c_-, c)$ дорівнює*

$$\left(\begin{array}{c} p \\ c_- \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} c \\ c_- \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2p-c_--c-1 \\ p-c-1 \end{array}\right).$$

Наступна лема дає оцінку знизу для числа елементів множини $S(p, c_-, c)$.

Лема 4. $S(p, c_-, c) > 4^p$ *для* $p \ge 13$.

Доведення. Приймемо у визарі з леми 3 $c_- = c = 4$. Тоді

$$S(p,\, c_-,\, c) = \left(\begin{array}{c} p \\ 4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2p-9 \\ p-5 \end{array}\right) > \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4}\left(\begin{array}{c} 2(p-5) \\ p-5 \end{array}\right).$$

Використовуючи нерівність для центрального біноміального коефіцієнта

$$\left(\begin{array}{c} 2(p-5) \\ p-5 \end{array}\right) \ge \frac{4^{p-5}}{2\sqrt{p-5}},$$

одержимо

$$S(p,\, c_-,\, c) > \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4096\sqrt{p-5}}4^p.$$

Позаяк $p(p-1)(p-2(p-3) \ge 4096\sqrt{p-5}$ для $p \ge 13$ (оскільки p – просте число, то значення 12 не враховуємо), то отримуємо $S(p,\, c_-,\, c) > 4^p$. □

Лема 5. *У випадку поля F_{p^p} мультиплікативнй порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ ($b \in F_p$) дорівнює:*

3 для $p = 2$,

13 для $p = 3$,

781 для $p = 5$,

137257 для $p = 7$,

28531167061 для $p = 11$.

Доведення. Розглянемо відповідні скінченні поля та виконані в них комп'ютерні обчислення.

1. Випадок поля F_{2^2}.

Характеристика поля дорівнює $p = 2$. Згідно з виконаними комп'ютерними обчисленнями кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $2^2 - 1 = 3$ і мультиплікативнй порядок елемента θ – 3. Тоді згідно з лемою 3 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ ($b \in F_p$) також дорівнює 3.

2. Випадок поля F_{3^3}.

Характеристика поля дорівнює $p = 3$. Згідно з виконаними комп'ютерними обчисленнями кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $3^3 - 1 = 26$, а мультиплікативний порядок елемента θ – 13. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ $(b \in F_p)$ також дорівнює 13.

3. Випадок поля F_{5^5}.

Характеристика поля дорівнює $p = 5$. Згідно з виконаними комп'ютерними обчисленнями кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $5^5 - 1 = 3124$, а мультиплікативнй порядок елемента θ – 781. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ $(b \in F_p)$ дорівнює 781.

4. Випадок поля F_{7^7}.

Характеристика поля дорівнює $p = 7$. Згідно з виконаними комп'ютерними обчисленнями кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $7^7 - 1 = 823542$, а мультиплікативнй порядок елемента θ – 137257. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ $(b \in F_p)$ також дорівнює 137257.

5. Випадок поля $F_{11^{11}}$.

Характеристика поля дорівнює $p = 11$. Згідно з виконаними комп'ютерними обчисленнями кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $11^{11} - 1 = 285311670610$, а мультиплікативнй порядок елемента θ – 28531167061. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ $(b \in F_p)$ дорівнює 28531167061. □

Теорема 1. *а) Якщо $p = 2$, то елементи поля F_{2^2} вигляду $\theta + b$ $(b \in F_2)$ мають порядок 3;*

б) якщо $p = 3$, то елементи поля F_{3^3} вигляду $\theta + b$ $(b \in F_3)$ мають порядок 13;

в) якщо $p = 5$, то елементи поля F_{5^5} вигляду $\theta + b$ $(b \in F_5)$ мають порядок 781;

г) якщо $p \geq 7$, то елементи поля F_{p^p} вигляду $\theta + b$ $(b \in F_p)$ мають порядок більший від 4^p.

Доведення. З леми 5 випливають частини (а), (б) і (в) теореми. З леми 5 випливає також частина (г) для $p = 7$ (оскільки $4^7 < 137257$) та для $p = 11$ (оскільки $4^{11} < 28531167061$).

За лемою 4 отримаємо, що $S(p, c_-, c) > 4^p$ для $p \geq 13$. Звідси випливає твердження теореми. □

Комп'ютерні обчислення, описані в лемі 5, виконані на двоядерному процесорі Intel Pentium P6200 2,13 GHz у двох варіантах. У першому варіанті використано власну програму в середовищі Delphi. У другому варіанті для порівняння використано середовище Maple. В обидвох варіантах отримали однакові результати.

Оскільки не всі визнають доведення з застосуванням комп'ютерних обчислень, то подаємо також ескіз доведення леми 5 без комп'ютерних обчислень. Для цього достатньо взяти розклади відповідних порядків мультиплікативних груп скінченних полів на прості множники та обчислити степені елемента θ. Хоча ці результати отримали з використанням комп'ютерних обчислень, проте їх можна перевірити вручну. Зокрема, для піднесення до степеня можна використати відомий швидкий ("індійський") алгоритм послідовних піднесень до квадрата та множень.

Доведення леми 5 без застосування комп'ютерних обчислень. Розглянемо відповідні скінченні поля та порядки елементів у них.

1. Оскільки випадок поля F_{2^2} потребує нескладних обчислень, то їх не подаємо.
2. Випадок поля F_{3^3}.

Кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $26 = 2 \cdot 13$. Можна безпосередньо перевірити, що $\theta^{13} = 1$. Отож, мультиплікативний порядок елемента θ дорівнює 13. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ також дорівнює 13.

3. Випадок поля F_{5^5}.

Кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $3124 = 4 \cdot 11 \cdot 71$. Можна безпосередньо перевірити, що

$$\theta^{11} = \theta^3 + 2\theta^2 + \theta \neq 1,$$
$$\theta^{71} = 4\theta^4 + 2\theta^3 + 4\theta^2 + 3\theta + 1 \neq 1,$$
$$(\theta^{71})^{11} = 1.$$

Отже, мультиплікативний порядок елемента θ дорівнює $781 = 11 \cdot 71$. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ дорівнює 781.

4. Випадок поля F_{7^7}.

Кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $823542 = 2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 4733$. Можна безпосередньо перевірити, що

$$\theta^{29} = \theta^5 + 4\theta^4 + 6\theta^3 + 4\theta^2 + \theta \neq 1,$$
$$\theta^{4733} = \theta^6 + 5\theta^5 + 2\theta^4 + 5\theta^3 + 4\theta^2 + 2\theta + 5 \neq 1,$$
$$(\theta^{4733})^{29} = 1.$$

Отож, мультиплікативний порядок елемента θ дорівнює $137257 = 29 \cdot 4733$. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ також дорівнює 137257.

5. Випадок поля $F_{11^{11}}$.

Кількість елементів мультиплікативної групи поля дорівнює $285311670610 = 2 \cdot 5 \cdot 15797 \cdot 1806113$. Можна безпосередньо перевірити, що

$$\theta^{15797} = 2\theta^{10} + 3\theta^9 + 2\theta^8 + 3\theta^7 + 4\theta^6 + 8\theta^5 + 6\theta^4 + 4\theta^3 + 3\theta^2 + 8\theta \neq 1,$$
$$\theta^{18061137} = 3\theta^{10} + 4\theta^9 + 8\theta^8 + 8\theta^7 + 6\theta^6 + 7\theta^5 + \theta^4 + 5\theta^3 + 4\theta^2 + 6 \neq 1,$$
$$(\theta^{1806113})^{15797} = 1.$$

Отже, мультиплікативний порядок елемента θ дорівнює $28531167061 = 15797 \cdot 1806113$. Тоді згідно з лемою 2 мультиплікативний порядок всіх елементів вигляду $\theta + b$ дорівнює 28531167061.

Список використаної літератури

1. *Попович Р.* Елементи великого порядку в розширеннях Артіна-Шраєра скінченних полів / *Р. Попович* // Матем. студії. – 2013. – Т. 39, №2. – С. 115-118.
2. *Agrawal M.* PRIMES is in P. / *M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena* // Ann. of Math. – 2004. – Vol. 160, №2. – P. 781-793.
3. *Ahmadi O.* Multiplicative order of Gauss periods / *O. Ahmadi, I.E. Shparlinski, J.F. Voloch* // Int. J. Number Theory. – 2010. – Vol. 6, №4. – P. 877-882.

4. *Berrizbeitia P.* Sharpening Primes is in P for a large family of numbers / *P. Berrizbeitia* // Math. Comp. – 2005. – Vol. 74:252. – P. 2043-2059.
5. *Burkhart F.* Finite field elements of high order arising from modular curves / *F. Burkhart et al.* // Designs, Codes and Cryptography. – 2009. – Vol. 51, №3. – P. 301-314.
6. *Cheng Q.* On the construction of finite field elements of large order / *Q. Cheng* // Finite Fields Appl. – 2005. – Vol. 11, №3. – P. 358-366.
7. *Gao S.* Elements of provable high orders in finite fields / *S. Gao* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 127, №6. – P. 1615-1623.
8. *Lidl R.* Finite Fields / *R. Lidl, H. Niederreiter.* – CRC Press, 2013. – 755 p.
9. *Mullen G.L.* Handbook of finite fields. / *G.L. Mullen, D. Panario.* – Cambridge University Press, 1997. – 1068 p.
10. *Popovych R.* Elements of high order in finite fields of the form $F_q[x]/\Phi_r(x)$ / *R. Popovych* // Finite Fields Appl. – 2012. – Vol. 18, №4. – P. 1615-1623.
11. *Popovych R.* Elements of high order in finite fields of the form $F_q[x]/(x^m - a)$ / *R. Popovych* // Finite Fields Appl. – 2013. – Vol. 19, №1. – P. 86-92.
12. *Voloch J.F.* Elements of high order on finite fields from elliptic curves / *J.F. Voloch* // Bull. Austral. Math. Soc. – 2010. – Vol. 81, №3. – P. 425-429.

Стаття: надійшла до редакції 10.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

LOWER BOUND FOR ELEMENTS ORDER IN FINITE FIELDS EXTENSIONS OF THE FORM F_{p^p}

Roman POPOVYCH

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12, Lviv, 79013
e-mail: rombp07@gmail.coml

We construct explicitly in any finite field of the form F_{p^p} for $p \geq 2$ elements with high multiplicative order.

Key words: finite field, multiplicative order.

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ ПОРЯДКА ЭЛЕМЕНТОВ В РАСШИРЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ ПОЛЕЙ ВИДА F_{p^p}

Роман ПОПОВЫЧ

Национальный университет "Львовская политехника",
ул. Бандеры, 12, Львов, 79013
e-mail: rombp07@gmail.com

Явно строим в конечных полях вида F_{p^p} для $p \geq 2$ элементы большого мультипликативного порядка.

Ключевые слова: конечное поле, мультипликативный порядок.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 148–155
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 148–155

УДК 537.72

ПРО R-ПОРЯДОК І НИЖНІЙ R-ПОРЯДОК РЯДІВ ДІРІХЛЕ З НУЛЬОВОЮ АБСЦИСОЮ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ

Юлія СТЕЦЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: yuliastets@mail.ru

Знайдено умови на показники ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, за яких $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0\beta$, де $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln\lambda_n/(\ln\lambda_{n+1})$, а $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$ і $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$ відповідно R-порядок і нижній R-порядок.

Ключові слова: ряд Діріхле, R-порядок, нижній R-порядок, максимальний член.

1. Вступ. Для цілої функції f, заданої лакунарним рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad z = re^{i\varphi}, \tag{1}$$

нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а $\varrho = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ і $\lambda = \varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$- відповідно порядок і нижній порядок. Дж. Уіттекер [1] довів, що

$$\lambda \leqslant \varrho\beta, \quad \beta = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}. \tag{2}$$

Для аналітичних в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| = 1\}$ функцій вигляду (1) порядок ϱ^0 і нижній порядок λ^0 визначають рівностями $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$ і $\lambda^0 = \varliminf\limits_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$. За умови $\varrho^0 \in (0, +\infty)$ Л. Сонс [2] зробила спробу довести, що $\lambda^0 + 1 \leqslant (\varrho^0 + 1)\beta$. П.В. Філевич і М.М. Шеремета [3] з'ясували, що ця нерівність є неправильною і довели, що для аналітичних в $\mathbb{D}_R$ функцій правильним є повний аналог нерівності Уіттекера, тобто $\lambda^0 \leqslant \varrho^0\beta$. Цей результат випливає зі загальної доведеної в [3] теореми про оцінки знизу максимального члена ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{3}$$

з довільною абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$, де $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$. Для $\sigma < A$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (3), а $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. Якщо $A = +\infty$, то R-порядок ϱ_R і нижній R-порядок λ_R вводяться [4] за формулами $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}$ і $\lambda_R = \varliminf\limits_{\sigma\to\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}$. Тоді за умови $\ln n = o\big(\lambda_n \ln \lambda_n\big)$, $n \to \infty$, правильна [3] нерівність $\lambda_R \leqslant \varrho_R \beta$, яка є очевидним узагальненням нерівності (2) Уіттекера. Аналогами порядку і нижнього порядку аналітичної в $\mathbb{D}_R$ функції для рядів Діріхле (3) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності є величини [5] $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{-\ln|\sigma|}$ та $\lambda^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{-\ln|\sigma|}$, якщо $\ln\ln n = o(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, то [3] $\lambda^0 \leqslant \varrho^0 \beta$. А.М. Гайсин для характеристики зростання рядів Діріхле (3) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності ввів [6] R-порядок $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ і подав формулу для його знаходження. Нижнім R-порядком для таких рядів Діріхле будемо називати величину $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$, а метою запропонованої праці є доведення такої теореми.

Теорема 1. *Якщо* $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)$ *при* $n \to \infty$, *то* $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0 \beta$.

Крім того, буде доведено аналог теореми 1, який дає оцінки нижнього R-типу через R-тип.

2. Доведення теореми 1. Спочатку доведемо таку лему.

Лема 1. *Якщо* $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\varrho_R^0 = \varrho^* =: \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F), \quad \lambda_R^0 = \lambda^* =: \varliminf_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F).$$

Доведення. Справді, з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$ отримаємо $\lambda^* \leqslant \lambda_R^0$ і $\varrho^* \leqslant \varrho_R^0$. З іншого боку, з умови $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)$, $n \to \infty$, випливає, що $\ln n(t) \leqslant \dfrac{\varepsilon^2 t}{\ln t}$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $t \geqslant t_o(\varepsilon)$, де $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant 1} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n). Тому

$$\frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon), F)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n/(1+\varepsilon)\}}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon), F)} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|\lambda_n}{1+\varepsilon}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|\lambda_n}{1+\varepsilon}\right\} \leqslant \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma| t}{1+\varepsilon}\right\} dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \int_0^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma| t}{1+\varepsilon}\right\} dt \leqslant \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \left(\int_0^{t_0} n(t) dt + \int_{t_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} t + \frac{\varepsilon^2 t}{\ln t}\right\} dt \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt+o(1),\quad \sigma\uparrow 0.$$

Приймемо $t(\sigma)=\exp\left\{\dfrac{2\varepsilon(1+\varepsilon)}{|\sigma|}\right\}$. Тоді $t(\sigma)\to+\infty$ при $\sigma\uparrow 0$ і

$$\int\limits_0^{t(\sigma)} \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt\leqslant \int\limits_0^{t(\sigma)} \exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t}{\ln t}\right\}dt\leqslant$$

$$\leqslant t(\sigma)\exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}\right\}=\exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}+\ln t(\sigma)\right\}=\exp\left\{\frac{(1+o(1))\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}\right\}\leqslant\exp\{t(\sigma)\},$$

а

$$\int\limits_{t(\sigma)}^\infty \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt\leqslant \int\limits_{t(\sigma)}^\infty \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t(\sigma)}\right)\right\}dt=$$

$$=\int\limits_{t(\sigma)}^\infty \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|t}{2(1+\varepsilon)}\right\}dt\leqslant\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon|\sigma|}.$$

Тому

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F)}\leqslant\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\exp\{t(\sigma)\}+2+o(1),\quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки легко випливає, що

$$|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)\leqslant|\sigma|\ln\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F)+|\sigma|\ln t(\sigma)+o(1)=$$

$$=(1+\varepsilon)\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}\ln\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F)+2\varepsilon(1+\varepsilon)+o(1),\quad \sigma\uparrow 0.$$

Переходячи до границі при $\sigma\uparrow 0$, отримуємо нерівності $\lambda_R^0\leqslant(1+\varepsilon)\lambda^*+2\varepsilon(1+\varepsilon)$ і $\varrho_R^0\leqslant(1+\varepsilon)\varrho^*+2\varepsilon(1+\varepsilon)$, тобто з огляду на довільність ε правильні нерівності $\lambda_R^0\leqslant\lambda^*$ і $\varrho_R^0\leqslant\varrho^*$. Лему 1 доведено.

Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty,0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,0)$. Для $\Phi\in\Omega(0)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Для функції $\Phi\in\Omega(0)$ і чисел $0\leqslant a<b<+\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int\limits_a^b\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt,\quad G_2(a,b,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\varphi(t)dt\right).$$

Тоді [7] $G_1(a,b,\Phi)<G_2(a,b,\Phi)$ і правильна [3] така лема.

Лема 2. *Нехай ряд Діріхле* (3) *має абсцису абсолютної збіжності* $\sigma_a=0$, $\Phi\in\Omega(0)$ *і* $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma\in[\sigma_0,0)$. *Тоді*

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}{G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)},\tag{4}$$

якщо, крім того,

$$\left(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{(\Phi'(\sigma))^2}-1\right)\ln\Phi(\sigma)\geqslant q>-\infty,\quad \sigma\in[\sigma_0,0), \tag{5}$$

то

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\ln\mu(\sigma,F)}{\ln\Phi(\sigma)}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}{\ln G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}. \tag{6}$$

Тепер можемо довести теорему 1. Для цього розглянемо функцію $\Phi(\sigma)=T\exp\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\}$, де $T>0$ і $\varrho>0$. Тоді [8] при $n\to\infty$

$$G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\frac{(1+o(1)\lambda_n\lambda_{n+1})\varrho}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}-\frac{1}{\ln\lambda_{n+1}}\right), \tag{7}$$

а

$$G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|}\right\},$$

$$\frac{|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|}{\varrho}=\frac{1}{\varrho(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\varphi(t)dt=A_n+2B_n+(1+o(1))C_n\ln\frac{eT}{\varrho},\quad n\to\infty,$$

$$A_n=\frac{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln t_n\ln\lambda_{n+1}},$$

$$B_n=\frac{\lambda_{n+1}\ln^2\lambda_n\ln\ln\lambda_{n+1}-\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}\ln\ln\lambda_n}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln^2\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}}$$

і

$$C_n=\frac{\lambda_{n+1}\ln^2\lambda_n-\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln^2\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}},\quad n\to\infty.$$

Оскільки $B_n=o(A_n)$ і $C_n=o(A_n)$ при $n\to\infty$, то $|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|=\varrho(1+o(1))A_n$ і, отже,

$$\ln G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=(1+o(1))\frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}},\quad n\to\infty,$$

а

$$\ln G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\ln\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}+\ln\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}-\frac{1}{\ln\lambda_{n+1}}\right)+O(1),\quad n\to\infty.$$

Легко перевірити, що

$$\left(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2}-1\right)\ln\Phi(\sigma)=2+\frac{2|\sigma|}{\varrho}>2.$$

Тому, використовуючи леми 1–2 і вибираючи $\varrho=\varrho_R+\varepsilon$ і $T=1$, отримуємо

$$\lambda_R^0=\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)=\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}(\varrho_R+\varepsilon)|\sigma|\ln\ln\mu(\sigma,F)\leqslant$$

$$\leqslant(\varrho_R^0+\varepsilon)\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}{\dfrac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}}. \tag{8}$$

Припустимо, що $\beta < 1$. Тоді існують число $\beta^* \in (\beta, 1)$ і зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел такі, що $\ln\lambda_{n_k} \leqslant \beta^* \ln\lambda_{n_k+1}$, тобто $\lambda_{n_k} \leqslant \lambda_{n_k+1}^{\beta^*} = o(\lambda_{n_k+1})$, $k \to \infty$. Тому з (8) з огляду на довільність ε отримаємо

$$\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\lambda_{n_k}}{\ln\lambda_{n_k+1}} \left(1 - \frac{\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k+1}\ln\lambda_{n_k}}\right) \leqslant \varrho_R^0\beta^*,$$

бо $\dfrac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}} = o\left(\dfrac{\ln\lambda_{n_k}}{\ln\lambda_{n_k+1}}\right)$ при $k \to \infty$. З огляду на довільність $\beta^* < \beta$ нерівність $\lambda_R^0 \leqslant \beta\varrho_R^0$ доведено. Для $\beta = 1$ ця нерівність очевидна. □

3. Аналог нерівності Уіттекера для нижнього R-типу і R-типу. Для ряду Діріхле (3) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності R -типом і нижнім R -типом називаються, відповідно, величини $T_R^0 = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$ і $t_R^0 = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$. Правильна така лема.

Лема 3. *Якщо* $\varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} < 1$ *і* $T_R^0 < \infty$, *то* $t_R^0 = t^* =: \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\} \ln\ \mu(\sigma, F)$ *і* $T_R^0 = T^* =: \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\} \ln\ \mu(\sigma, F)$.

Справді, за нерівністю Коші $t^* \leqslant t_R^0$ і $T^* \leqslant T_R^0$, а в [9, с. 16] доведено, що для кожного $\sigma < 0$ і $\varepsilon \in (0, |\sigma|)$

$$\frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \leqslant n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}) + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}}^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{2}\right\} dt,$$

де $\nu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс ряду (3), оскільки $\ln n(t) \leqslant t^\alpha$ для деякого $\alpha \in (0, 1)$ і всіх $t \geqslant t(\alpha)$, то [9, с. 21]

$$n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}) \leqslant \exp\left\{\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^\alpha \ln^\alpha \frac{\mu(\sigma+\varepsilon)}{\mu(\sigma+\varepsilon/2)}\right\}$$

і [9, с. 22]

$$\frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}}^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{2}\right\} dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left\{\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\varepsilon}}\right\} + 1 = K(\varepsilon).$$

Звідси випливає, що

$$\ln\ M(\sigma, F) \leqslant \ln\ \mu(\sigma, F) + \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^\alpha \ln^\alpha \mu(\sigma+\varepsilon) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \ln\ \mu(\sigma, F) + \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^\alpha (T^* + \delta)^\alpha \exp\left\{\frac{\alpha\varrho_R^0}{|\sigma+\varepsilon|}\right\} + o(1), \quad \sigma \uparrow 0.$$

Якщо виберемо $\varepsilon = \dfrac{(1-\alpha)}{2}|\sigma|$, то $\sigma+\varepsilon = \dfrac{1+\alpha}{2}\sigma$ і

$$\exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ M(\sigma,F) \leqslant \exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma,F)+$$
$$+\left(\frac{8(T^*+\delta)}{(1-\alpha)|\sigma|}\right)^{\alpha}\exp\left\{-\varrho_R^0\left(\frac{1}{|\sigma|}-\frac{2\alpha}{(1+\alpha)|\sigma|}\right)\right\}+o(1)=$$
$$=\exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma,F)+o(1),\quad \sigma\uparrow 0.$$

Звідси випливає, що $T_R^0 \leqslant T^*$ і $t_R^0 \leqslant t^*$. Лему 3 доведено.

Нам буде потрібна така лема [10].

Лема 4. *Функція* $\dfrac{G_1(x,b,\Phi)}{G_2(x,b,\Phi)}$ *є зростаючою на* $(0,b)$.

Використовуючи леми 3 і 4, доведемо таку теорему.

Теорема 2. *Якщо* $T_R^0<\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}<1$ *і* $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}=\gamma$, *то*

$$t_R^0 \leqslant T_R^0 g(\gamma),\quad g(\gamma)=\frac{\ln(1/\gamma)}{1-\gamma}\exp\left\{1+\frac{\ln\gamma}{1-\gamma}\right\}. \tag{9}$$

Доведення. Припустимо, що $\gamma<1$. Тоді існують число $\gamma^*\in(\gamma,1)$ і зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел такі, що $\lambda_{n_k}\leqslant\gamma^*\lambda_{n_k+1}$. За лемами 2 і 4 отримаємо

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\ \mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_k+1},\Phi)}{G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_k+1},\Phi)}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{G_1(\gamma^*\lambda_{n_k+1},\lambda_{n_k+1},\Phi)}{G_2(\gamma^*\lambda_{n_k+1},\lambda_{n_k+1},\Phi)}.$$

Позначимо $\theta=\dfrac{1}{\gamma^*}-1$ і $t_k=\gamma^*\lambda_{n_k+1}$. Тоді $\lambda_{n_k+1}=(1+\theta)t_k$, і отже,

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\ \mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{G_1(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi)}{G_2(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi)}.$$

Для функції $\Phi(\sigma)=T\exp\left\{\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}$, як доведено в [8] (формули (12) і (18)), правильні такі співвідношення:

$$\ln G_1(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi)=\ln\varrho_R+\ln t_k-2\ln\ln t_k+$$
$$+\ln\frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta}+o(1),$$

$$\ln G_2(t_k,(1+\theta)t_k),\Phi)\geqslant\ln\varrho_R+\ln t_k+\ln(1+\theta)-2\ln\ln t_k+$$
$$+\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}-1+o(1)$$

при $k\to\infty$. Тому

$$t_R^0=\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\ \mu(\sigma,F)}{\exp\left\{\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}}\leqslant$$

$$\leqslant T_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \exp\{\ln G_1(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi) - \ln G_2(t_k,(1+\theta)t_k),\Phi)\} =$$
$$= T_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \exp\left\{ \ln \frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta} - \ln(1+\theta) - \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} + 1 + o(1) \right\} =$$
$$= T_R^0 \exp\left\{ \frac{\ln(1+\theta)}{\theta(1+\theta)^{1/\theta}} \right\} = T_R^0 \frac{\ln(1/\gamma^*)}{1-\gamma^*} \exp\left\{1 + \frac{\ln\gamma^*}{1-\gamma^*}\right\}.$$

З огляду на довільність γ^* нерівність (9) для $\gamma < 1$ доведено.

Оскільки $\lim_{\gamma\to 1} g(\gamma) = 1$, то нерівність (4) при $\gamma = 1$ є очевидною. Теорему 2 доведено. □

Список використаної літератури

1. *Whittaker J.M.* The lower order of integral functions / *J.M. Whittaker* // J. London Math. Soc. – 1933. – Vol. 8. – P. 20-27.
2. *Sons L.R.* Regularity of growth and gaps / *L.R. Sons* // J. Math. Anal. and Appl. – 1968. – Vol. 24. – P. 296-306.
3. *Філевич П.В.* Про одну теорему Л. Сонс та асимптотичне поводження рядів Діріхле / *П.В. Філевич, М.М. Шеремета* // Укр. матем. вісник. – 2006. – Т. 3, №2. – С. 187-198.
4. *Ritt J.F.* On certain points in the theory of Dirichlet series / *J.F. Ritt* // Amer. Math. J. – 1928. – Vol. 50. – P. 78-83.
5. *Бойчук В.С.* О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле / *В.С. Бойчук* // Матем. сб. – 1976. – С. 238-240.
6. *Гайсин А.М.* Оценки роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости / *А.М. Гайсин* // Матем. сб. – 1982. – Т. 117, №3. – С. 412-424.
7. *Заболоцький М.В.* Узагальнення теореми Ліндельофа / *М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1177-1192.
8. *Стець Ю.В.* Про регулярне зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле / *Ю.В. Стець, М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, №5. – С. 686-698.
9. *Шеремета М.М.* Зростання рядів Діріхле / *М.М. Шеремета, Я.Я. Притула, С.І. Фединяк.* – Львів.: Наук.-учбовий центр матем. моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача, Препрінт № 18-95. – 1998. – 30 с.
10. *Сумык О.М.* Оценки максимального члена ряда Дирихле снизу / *О.М. Сумык, М.Н. Шеремета* // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 4. – С. 53-57.

Стаття: надійшла до редакції 14.12.2012
прийнята до друку 16.10.2013

ON R-ORDER AND LOWER R-ORDER OF DIRICHLET SERIES WITH NULL ABSCISSA OF ABSOLUTE CONVERGENCE

Yuliya STETS

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: yuliastets@mail.ru

We found conditions of exponents of Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence, under which $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0\beta$, where $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln\lambda_n/(\ln\lambda_{n+1})$, and $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ and $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ are according to R-order and lower R-order.

Key words: Dirichlet series, R-order, lower R-order, maximal term.

О R-ПОРЯДКЕ И НИЖНЕМ R-ПОРЯДКЕ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С НУЛЕВОЙ АБСЦИССОЙ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ

Юлия СТЕЦ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: yuliastets@mail.ru

Найдено условия на показатели ряда Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости, при которых $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0\beta$, где $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln\lambda_n/(\ln\lambda_{n+1})$, а $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ и $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ соответственно R-порядок и нижний R-порядок.

Ключевые слова: ряд Дирихле, R-порядок, нижний R-порядок, максимальный член.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 156–170
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 156–170

УДК 517.956.2

ЗАДАЧА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ У ГІПЕРБОЛІЧНІЙ СИСТЕМІ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Оксана Флюд

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: oflyud@yahoo.com

Розглянуто початково-крайову задачу для системи $n+m$ сингулярно збурених лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку на площині, причому малий параметр є множником при різних частинних похідних. Побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення довільного порядку розв'язку системи за степенями малого параметра.

Ключові слова: гіперболічна система, сингулярно збурена крайова задача, асимптотичне розвинення розв'язку, примежовий шар.

1. Вступ. Для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними мішана задача добре вивчена [1]. Однак у багатьох прикладних проблемах виникають системи рівнянь, в яких характеристики ортогональні до осей координат [2]. Такі рівняння можуть виникати безпосередньо як математичні моделі фізичних процесів, або як проміжні при дослідженні, наприклад, багатовимірних задач. Зв'язок крайових задач з характеристиками, ортогональними до осей координат і моделями, характеристики яких близькі до ортогональних, виражається через ефект примежового шару.

Ефекту примежового шару для рівнянь з частинними похідними присвячено багато літературних джерел (див., наприклад, бібл. у [3]). Зазначимо, що особливістю таких задач є те, що малий параметр зазвичай стоїть перед всією головною частиною рівняння або системи. Випадок наявності малого параметра при одній частинній похідній для гіперболічних систем рівнянь першого порядку розглядали в працях [4, 5].

Ми розглядатимемо випадок лінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку, яка містить окремо малий параметр для похідних за часовою та просторовою змінними.

Близькою за формулюванням є задача з [5], методику якої використано для побудови асимптотики розв'язку.

2. Формулювання задачі. В області $\Omega = \{(x,\, t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T < \infty\}$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_j^\varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t) v_k^\varepsilon + f_i(x,t;\varepsilon), \quad i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t) u_j^\varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t) v_k^\varepsilon + g_s(x,t;\varepsilon), \quad s = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u_i^\varepsilon(x,0) = u_i^\varepsilon(0,t) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,0) = v_s^\varepsilon(0,t) = 0, \quad s = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр. Особливістю цієї задачі є те, що параметр ε стоїть при різних похідних у перших n і в останніх m рівняннях. Це приводить до специфічних особливостей розв'язку і його асимптотики.

Ми розглядаємо класичний розв'язок задачі (1), (2), тобто розв'язок, неперервний у замиканні області $\overline{\Omega} = \{(x,\, t):\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty\}$, який має неперервні похідні першого порядку, які задовольняють систему (1), а також крайові умови (2). Для побудови та обґрунтування асимптотичного розвинення розв'язку задачі (1), (2) припускаємо, що виконуються такі умови:

(H_1) функції $a_{ij}, b_{ik}, \gamma_{sj}, \sigma_{sk} : \overline{\Omega} \to R$, f_i і $g_s : \overline{\Omega} \times R \to R$ – достатньо гладкі в області свого визначення (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики);

(H_2) умови погодження першого порядку $(\forall \varepsilon > 0)$

$$\begin{aligned} &f_i(0,0;\varepsilon) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ &g_s(0,0;\varepsilon) = 0, \quad s = \overline{1,m}. \end{aligned}$$

За умов (H_1), (H_2) при кожному фіксованому значенні параметра ε існує єдиний класичний розв'язок задачі (1), (2) [1]. Зазначимо, що для побудови обґрунтування асимптотики розв'язку жодних додаткових умов на знак a_{ij} $(j = i)$, σ_{sk} $(k = s)$ не потрібно.

Зауважимо, що розв'язок виродженої системи (в (1) формально $\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_j + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t) v_k + f_i(x,t;0), \quad i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t) u_j + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t) v_k + g_s(x,t;0), \quad s = \overline{1,m} \end{cases} \tag{3}$$

не задовольняє всіх умов (2), а саме, функції u_i $(i = \overline{1,n})$ та v_s $(s = \overline{1,m})$, взагалі кажучи, не задовольняють початкові та крайові умови, відповідно. Тому в околі границі $t = 0$ та $x = 0$ області Ω виникають примежові шари, які підправляють розв'язок виродженої задачі (система (3) із крайовими умовами для функцій u та початковими для v, про яку йтиметься далі) до виконання втрачених при виродженні умов. Особливість задачі полягає ще й у тому, що хоча примежові функції визначають як розв'язки рівнянь з частинними похідними першого порядку, а межа на якій задають крайові умови, містить кутову точку (0,0), що впливає на гладкість розв'язку, тим не менше, вдається побудувати без будь-яких інших умов погодження, крім (H_2), асимптотику розв'язку довільного порядку, рівномірну в області $\overline{\Omega}$. Для простоти записів введемо позначення

$$u^\varepsilon(x,t) = (u_1^\varepsilon(x,t),\ldots,u_n^\varepsilon(x,t)), \quad v^\varepsilon(x,t) = (v_1^\varepsilon(x,t),\ldots,v_m^\varepsilon(x,t)).$$

3. Побудова нульового наближення. Асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) на першому кроці будуємо у вигляді

$$u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar u_{i0}(x,t) \;\; (i=\overline{1,n}), \quad v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar v_{s0}(x,t) \;\; (s=\overline{1,m}), \quad (x,t)\in\Omega. \tag{4}$$

Для визначення функцій u_{i0} та v_{s0} нульового наближення регулярної частини асимптотики формулюємо таку задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar u_{i0}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar u_{j0} + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar v_{k0} + f_{i0}(x,t), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial \bar v_{s0}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar u_{j0} + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar v_{k0} + g_{s0}(x,t), \quad s=\overline{1,m}, \\ \bar u_{i0}(0,t)=0, \quad i=\overline{1,n}, \\ \bar v_{s0}(x,0)=0, \quad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{5}$$

де $f_{i0}(x,t)$, $g_{s0}(x,t)$ – перші члени розвинення функцій f_i і g_s в степеневий ряд за степенями параметра ε в околі $\varepsilon = 0$. Задача (5) для визначення $\bar u_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar v_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ за умови (H_2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду, для якої існує єдиний достатньо гладкий розв'язок. Отож, функції $\bar u_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar v_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ однозначно визначені і мають достатню гладкість. Із формулювання задачі для визначення u_{i0}, v_{s0} очевидно випливає, що не всі умови (2) виконуються. Тепер по черзі будемо підправляти побудований розв'язок задачі (5) функціями примежового шару так, щоб виконувалися втрачені при виродженні умови.

Підправимо (4) функцією примежового шару так, щоб виконувалась друга умова (2), тобто наближення розв'язку будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar u_{i0}(x,t), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar v_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t), \end{cases} \tag{6}$$

де $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$, регуляризуюча змінна в околі границі $x = 0$. Щоб записати задачу для визначення $Q_{s0}v(\xi,t)$, розвинемо коефіцієнти системи (1) в ряд за степенями ε, підставимо (6) у систему (1) та крайові умови (2), прирівнявши коефіцієнти для нульового степеня ε, отримаємо задачу для визначення $Q_{s0}v$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{s0}v}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_{s0}v}{\partial \xi} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,t) Q_{k0}v, \quad 0 < t < T,\ \xi > 0, \\ Q_{s0}v(\xi,0) = 0, \quad \xi \geqslant 0, \\ Q_{s0}v(0,t) = -\bar{v}_{s0}(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (s = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{7}$$

Отож, як випливає з (7), функції $Q_{s0}v$ ліквідують невязку, яку приносять $\bar{v}_{s0}$ у крайову умову при $x = 0$ і для визначення функцій $Q_{s0}v$ отримали крайову задачу в горизонтальній півсмузі для гіперболічної системи рівнянь першого порядку. Гладкість розв'язку задачі (7) залежить від виконання умов погодження в кутовій точці. Перевіримо виконання умов погодження нульового та першого порядків розв'язку $Q_{s0}v$ у кутовій точці $(0,0)$. Отже, для виконання умов погодження нульового порядку повинні виконуватись такі рівності:

$$Q_{s0}v(\xi,0)|_{\xi=0} = Q_{s0}v(0,t)|_{t=0} \quad (s = \overline{1,m}).$$

Очевидним є те, що ліва частина цієї рівності $\forall s = 1,\dots,m$ дорівнює нулю у кутовій точці, а з умов (7) та (5) справджується рівність

$$0 = -\bar{v}_{s0}(0,t)|_{t=0} = 0 \quad (s = \overline{1,m}).$$

Отож, умови погодження початкових і крайових умов нульового порядку задачі (7) виконуються.

Перейдемо до перевірки умови погодження першого порядку, а саме, перевіримо, чи задовольняють систему (7) умови задачі в кутовій точці. Для цього повинні виконуватись рівності

$$\left.\frac{\partial Q_{s0}v}{\partial t}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial Q_{s0}v}{\partial \xi}\right|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) \left.Q_{k0}v\right|_{(0,0)} \quad (s = \overline{1,m}).$$

Використавши умови з (7), залишиться довести, що $\left.\dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t}\right|_{(0,0)} = 0$. З умов (H_2), (5) отримаємо

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t}\right|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(0,0) \left.\bar{u}_{j0}\right|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) \left.\bar{v}_{k0}\right|_{(0,0)} + g_{s0}(0,0) = 0, \quad s = \overline{1,m}.$$

Доведені вище виконання умов погодження нульового та першого порядків крайових і початкових умов дають підставу стверджувати, що розв'язок $Q_{s0}v$ задачі (7) гладкий.

Доведемо тепер, що функції $Q_{s0}v$ $(s = \overline{1,m})$ мають примежовий характер. Справді, на підставі однорідності крайової умови (7) функції $Q_{s0}v$ $(s = \overline{1,m})$ набувають нульових значень під характеристикою $\xi = x$ рівняння (7). Для $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до вертикального положення, тобто функції $Q_{s0}v$ відмінні від нуля в околі межі $x = 0$ області Ω.

Побудову нульового наближення розв'язку задачі (1), (2) завершуємо визначенням примежового шару в околі межі $t = 0$ області Ω. За допомогою цієї функції примежового шару скоригуємо розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ так, щоб виконувалась крайова умова при $t = 0$, тому $u_i^\varepsilon, v_s^\varepsilon$ набудуть вигляду

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t). \end{cases}$$

Уведемо тепер ще одну регуляризуючу змінну в околі границі $t = 0$ області Ω

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Застосуємо стандартну процедуру теорії сингулярних збурень побудови примежового шару, для визначення функції P_0u отримаємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j0}u, \quad \tau > 0, \ \ 0 < x < l, \\ P_{i0}u(0,\tau) = 0, \quad \tau > 0, \\ P_{i0}u(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0), \quad 0 < x < l \qquad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{8}$$

Аналогічно як вище можна переконатися, що умови погодження нульового та першого порядків задачі (8) виконуються, тому це дає змогу будувати асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) вищого порядку з забезпеченням достатньої гладкості наближення.

4. Побудова наближення першого порядку. Асимптотичне розвинення першого порядку розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau) + \varepsilon\bar{u}_{i1}(x,t) + \varepsilon P_{i1}u(x,\tau) + \varepsilon Q_{i1}u(\xi,t), \ \ i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t) + \varepsilon\bar{v}_{s1}(x,t) + \varepsilon P_{s1}v(x,\tau) + \varepsilon Q_{s1}v(\xi,t), \ \ s = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{9}$$

Підставляємо (9) в систему (1), (2). Стандартною процедурою теорії сингулярних збурень отримаємо задачі для визначення функцій $Q_{i1}u$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{i1}u}{\partial \xi} = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(0,t)Q_{k0}v, \\ Q_{i1}u(\infty,t) = 0, \ \ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Проінтегрувавши рівняння для $Q_{i1}u$, з врахуванням рівності $Q_{i0}v(\xi,t) = 0$, $\xi \geqslant t$ $(i = \overline{1,n})$, одержимо розв'язок

$$Q_{i1}u(\xi,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(0,t)\int\limits_{t}^{\xi} Q_{k0}v(\varsigma,t)d\varsigma, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant t \leqslant T, \\ 0, \qquad \xi \geqslant t. \end{cases} \tag{10}$$

Аналогічно ставиться задача для $P_{s1}v$. Використавши, що $P_{s0}u(x,\tau)=0$, $\tau\geqslant x$ $(s=\overline{1,m})$, запишемо $P_{s1}v$ $(s=\overline{1,m})$ у явному вигляді

$$P_{s1}v(x,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,0)\int\limits_{x}^{\tau}P_{j0}u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant\tau\leqslant x,\\ 0, & \tau\geqslant x.\end{cases}\tag{11}$$

Зазначимо, що функції Q_1u і P_1v мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Система рівнянь для визначення першого наближення $(\bar{u}_1,\bar{v}_1)$ регулярної частини асимптотики набуде вигляду

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}_{i1}}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j1}+\sum\limits_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k1}+\bar{f}_{i1}(x,t), & i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial\bar{v}_{s1}}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j1}+\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k1}+\bar{g}_{s1}(x,t), & s=\overline{1,m},\end{cases}\tag{12}$$

де $\bar{f}_{i1}(x,t)=f_{i1}(x,t)-\dfrac{\partial\bar{u}_{i0}(x,t)}{\partial t}$, $\bar{g}_{s1}(x,t)=g_{s1}(x,t)-\dfrac{\partial\bar{v}_{s0}(x,t)}{\partial x}$, $f_{i1}(x,t)$, $g_{s1}(x,t)$ – коефіцієнти при першому степені ε розвинення функцій f_i та g_s у ряд за степенями ε, відповідно. Крім того, $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$ ліквідують невязки, які вносять примежові шари $Q_{i1}u$, $P_{s1}v$ відповідно у крайову та початкові умови. Тому функції $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$ як розв'язки системи (12) повинні задовольняти умови

$$\begin{cases}\bar{u}_{i1}(0,t)=-Q_{i1}u(0,t), & i=\overline{1,n},\\ \bar{v}_{s1}(x,0)=-P_{s1}v(x,0), & s=\overline{1,m}.\end{cases}\tag{13}$$

Задача (12), (13), аналогічно як і (5), еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, тобто є однозначно розв'язною.

Для $Q_{s1}v$ отримаємо задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q_{s1}v}{\partial t}+\dfrac{\partial Q_{s1}v}{\partial\xi}=\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,t)Q_{k1}v+q_{s1}(\xi,t), & \xi>0,\ 0<t<T,\\ Q_{s1}v(\xi,0)=0, & \xi>0,\\ Q_{s1}v(0,t)=-\bar{v}_{s1}(0,t), & 0<t<T, \qquad s=\overline{1,m},\end{cases}\tag{14}$$

де $q_{s1}(\xi,t)=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(0,t)Q_{j1}u+\xi\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial\sigma_{sk}(0,t)}{\partial x}Q_{k0}v$.

Оскільки система (14) неоднорідна, то для існування класичного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувались не лише умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0), а й існували неперервні похідні першого порядку для функцій q_{s1}. Частинні похідні існують, оскільки функції $Q_{s0}v, Q_{s1}u$ – гладкі. Доведемо виконання умов погодження нульового порядку, тобто $Q_{s1}v(\xi,0)\big|_{\xi=0}=$

$Q_{s1}v(0,t)\big|_{t=0}$. Рівність нулю лівої частини випливає з умови (14), а для правої частини використаємо умови послідовно (13),(11)

$$0 = -\bar{v}_{s1}(0,t)\big|_{t=0} = -P_{s1}v(x,0)\big|_{x=0} = 0, \qquad s=\overline{1,m}.$$

Тому крайові умови системи (14) погоджені до неперервності в кутовій точці (0,0), що означає, що розв'язок задачі (14) у смузі $\xi \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ неперервний. Щоб переконатися, що $Q_{s1}v$ у зазначеній смузі гладкі, доведемо, що $\forall s=\overline{1,m}$ виконуються рівності

$$\frac{\partial Q_{s1}v}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} + \frac{\partial Q_{s1}v}{\partial \xi}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)Q_{k1}v\bigg|_{(0,0)} + \overline{q}_{s1}\big|_{(0,0)}.$$

З умов (7),(10),(14) перейдемо до рівності

$$0 - \frac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}\cdot 0 + 0.$$

Тепер залишилось довести, що похідна $\bar{v}_{s1}$ за t дорівнює нулю. Для цього використаємо умову (12), з якої отримаємо

$$\frac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(0,0)\bar{u}_{j1}\bigg|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)\bar{v}_{k1}\bigg|_{(0,0)} + \bar{g}_{s1}\big|_{(0,0)} = 0,$$

де

$$\begin{cases} \bar{g}_{s1}(0,0) = g_{s1}(0,0) - \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial x} = 0, \\ \bar{v}_{s1}\big|_{(0,0)} = -P_{s1}v(0,0) = 0, \\ \bar{u}_{i1}\big|_{(0,0)} = -Q_{i1}u(0,0) = 0. \end{cases}$$

Оскільки, $\dfrac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} = 0$, то всі умови для існування класичного (тобто гладкого) розв'язку для задачі (14) виконуються.

Для розв'язку $P_{i1}u$ $(i=\overline{1,n})$ задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j1}u + p_{i1}(x,\tau), & 0 < x \leqslant l,\ \tau > 0, \\ P_{i1}u(0,\tau) = 0, & \tau \geqslant 0, \\ P_{i1}u(x,0) = -\bar{u}_{i1}(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l \ \ (i=\overline{1,n}), \end{cases} \tag{15}$$

де $p_{i1}(x,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,0)P_{k1}v + \tau\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial a_{ij}(x,0)}{\partial t}P_{j0}u$, аналогічно, як для розв'язку задачі (14), можна повторити всі міркування і довести існування класичного розв'язку.

Отже, як випливає з побудови нульового та першого наближення, рекурентний процес послідовного визначення функцій асимптотичного розвинення розв'язку розщеплений, тому опишемо алгоритм визначення функцій наближення довільного порядку.

5. Побудова асимптотики довільного порядку. Повне асимптотичне розвинення розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big], & i=\overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big], & s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{16}$$

Опишемо послідовність, в якій визначаються функції правих частин (16), а також запишемо задачі, розв'язками яких ці функції є. Задачі отримуємо стандартним способом теорії сингулярних збурень, аналогічно як вище, тому пропустимо опис способу їх отримання.

Спочатку визначаємо функцію $Q_h u = (Q_{1h}u, \dots, Q_{nh}u)$ $(\forall h \geqslant 1)$ як розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{ih}u}{\partial \xi} = q_{ih}^u(\xi,t), & \xi > 0,\ 0 < t \leqslant T, \\ Q_{ih}u(\infty,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T \quad (i=\overline{1,n}), \end{cases} \tag{17}$$

де

$$q_{ih}^u(\xi,t) = \sum_{r=0}^{h-1} \frac{\xi^r}{r!}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r a_{ij}}{\partial x^r}(0,t)Q_{j\,h-1-r}u + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r b_{ik}}{\partial x^r}(0,t)Q_{k\,h-1-r}v\right] - \frac{\partial Q_{i\,h-2}u}{\partial t}$$

$(i=\overline{1,n})$, ξ – регуляризуюче перетворення, як вище. Функції $q_{ih}^u(\xi,t)$ $(i=\overline{1,n}$, $h \geqslant 0)$ є відомими неперервними і дорівнюють нулю під характеристикою $\xi = t$, що випливає з їхньої структури. Тому розв'язок $Q_{ih}u$ задачі (17) для кожного $h \geqslant 1$ та $i=\overline{1,n}$ запишемо в явному вигляді

$$Q_{ih}u(\xi,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^{\xi} q_{ih}^u(\zeta,t)\,d\zeta, & 0 \leqslant \xi \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & \xi \geqslant t. \end{cases} \tag{18}$$

Аналогічно формулюється задача для $P_{sh}v$ із умовою $P_{sh}(x,\infty) = 0$ $(s=\overline{1,m}$, $h \geqslant 1)$ і $P_{sh}v$ записуються у явному вигляді

$$P_{sh}v(x,\tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{\tau} p_{sh}^v(x,\vartheta)d\vartheta, & 0 \leqslant \tau \leqslant x, \\ 0, & \tau \geqslant x, \end{cases} \tag{19}$$

де p_{sh}^v – права частина рівняння для $P_{sh}v$ і набуває вигляду

$$p_{sh}^v(x,\tau) = \sum_{r=0}^{h-1} \frac{\tau^r}{r!}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r \gamma_{sj}}{\partial t^r}(x,0)P_{j\,h-1-r}u + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r \sigma_{sk}}{\partial t^r}(x,0)P_{k\,h-1-r}v\right] - \\ - \frac{\partial P_{s\,h-2}v}{\partial x},\ s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1.$$

Тут p^v_{sh} $(s = \overline{1,m},\ h \geqslant 0)$ – відомі неперервні функції, які дорівнюють нулеві над характеристикою $\tau = x$.

Зазначимо, що гладкість функцій $Q_{ih}u$ і $P_{sh}v$ $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m},\ h \geqslant 1)$, зокрема і на характеристиках $\xi = t$ та $x = \tau$ відповідно, випливає безпосередньо з їхньої структури.

Функції регулярної частини асимптотики $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ порядку $h \geqslant 1$ є розв'язками такої задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{ih}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar{u}_{jh} + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar{v}_{kh} + \bar{f}_{ih}(x,t), & (x,t) \in \Omega \ \ (i = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{sh}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{jh} + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{kh} + \bar{g}_{sh}(x,t), & (x,t) \in \Omega \ \ (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{ih}(0,t) = -Q_{ih}u(0,t), & 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (i = \overline{1,n}), \\ \bar{v}_{sh}(x,0) = -P_{sh}v(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l \ \ (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{21}$$

де $\bar{f}_{ih}(x,t) = f_{ih}(x,t) - \dfrac{\partial \bar{u}_{i\,h-1}}{\partial t}$, $\bar{g}_{sh}(x,t) = g_{sh}(x,t) - \dfrac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}}{\partial x}$, а $f_{ih}(x,t)$, $g_{sh}(x,t)$ – коефіцієнти розвинення функцій f_i та g_s відповідно у ряд за степенями ε. Задача (20),(21) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, для якої існує єдиний розв'язок.

Для $Q_{sh}v$ $(h \geqslant 1)$ одержимо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{sh}v}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_{sh}v}{\partial \xi} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,t)Q_{kh}v + q^v_{sh}(\xi,t), & \xi > 0,\ 0 < t \leqslant 0, \\ Q_{sh}v(\xi,0) = 0, & \xi \geqslant 0, \\ Q_{sh}v(0,t) = -\bar{v}_{sh}(0,t), & 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{22}$$

де

$$q^v_{sh}(\xi,t) = \sum_{r=0}^{h} \frac{\xi^r}{r!} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r \gamma_{sj}}{\partial x^r}(0,t) Q_{j\,h-r}u + \sum_{r=1}^{h} \frac{\xi^r}{r!} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r \sigma_{sk}}{\partial x^r}(0,t) Q_{k\,h-r}v(\xi,t), \quad s = \overline{1,m}.$$

Аналогічно як у задачі (14), для доведення існування класичного розв'язку задачі (22) необхідно, щоб функція $q^v_{sh}(\xi,t)$ була гладкою й виконувались умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0). Частинні похідні функцій $q^v_{sh}(\xi,t)$ існують, оскільки функція є сумою гладких функцій. Перейдемо до перевірки виконання умов погодження, які випливають із (18) та (21)

$$0 = Q_{sh}v(\xi,0)\Big|_{\xi=0} = Q_{sh}v(0,t)\Big|_{t=0} = -v_{sh}(0,t)\Big|_{t=0},$$

$$0 = -v_{sh}(0,0) = P_{sh}v(0,0) = 0 \quad (s = \overline{1,m},\ h \geqslant 1).$$

Отже, крайові умови погоджені до неперервності в кутовій точці. Перевіримо чи початкові умови задовольняють систему (22) в точці (0,0), тобто

$$\frac{\partial Q_{sh}v}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} + \frac{\partial Q_{sh}v}{\partial \xi}\bigg|_{(0,0)} \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0)Q_{kh}v\bigg|_{(0,0)} + q_{sh}^{v}\bigg|_{(0,0)} \quad (s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1),$$

або, використавши початкову та крайові умови задачі (22), їх можна записати у вигляді

$$-\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \overset{?}{=} 0\cdot\sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)+q_{sh}^{v}(0,0) \quad (s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1).$$

Права частина останнього співвідношення дорівнює нулеві, оскільки $q_{sh}^{v}(\xi,t)=0$ $(s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1)$ при $\xi\geqslant t\geqslant 0$, що випливає з їхніх властивостей. Використавши друге рівняння (20) та умови (21), отримаємо

$$\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,0)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(0,0)Q_{jh}u(0,t)\bigg|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)P_{kh}v(\xi,0)\bigg|_{\xi=0} + \bar{g}_{sh}(0,0),$$
$$s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1.$$

На підставі (18) і (19) перші два доданки праворуч дорівнюють нулеві. Залишилось довести, що $\bar{g}_{sh}(x,t)$ у кутовій точці дорівнює нулю. Отож, з вигляду для $\bar{g}_{sh}$, умов (H_2), (21) можемо записати

$$\bar{g}_{sh}(0,0) = g_{sh}(0,0) - \frac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} =$$
$$= 0 - \frac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial P_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} = 0, \quad s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1.$$

Остання рівність правильна з огляду на те, що $P_{sh}v(x,\tau)=0$ для $\tau\geqslant x$, тому $\dfrac{\partial P_{sh}}{\partial x}(x,\tau)=0$, якщо $\tau\geqslant x$ $(s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1)$. З неперервності випливає, що на характеристиці $\tau=x$ функція $P_{s\,h-1}v(x,\tau)$ також набуває нульових значень. Виконання умови погодження першого порядку в кутовій точці (0,0) забезпечує гладкість розв'язку задачі (22) в області $\xi>0,\ 0<t\leqslant T$. Крім того, зауважимо, що функції $Q_{sh}v$ $(s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1)$ мають примежовий характер: відмінні від нуля в околі границі $x=0$ області Ω (крайова умова (22)) і при $\varepsilon\to 0$ характеристика $t=\xi$ рівняння (22) прямує до вертикального положення.

Для визначення наближень функції примежового шару $P_{ih}u$ в околі границі $t=0$ області Ω отримали крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}P_{j\,h}u(x,\tau) + p_{ih}^{u}, & 0<x<l, \quad \tau>0,\\ P_{ih}u(0,\tau)=0, & \tau\geqslant 0,\\ P_{ih}u(x,0) = -\bar{u}_{ih}(x,0), & 0\leqslant x\leqslant l, \quad i=\overline{1,n}, \quad h\geqslant 1, \end{cases} \tag{23}$$

де

$$p_{ih}^u(x,\tau) = \sum_{r=1}^{h} \frac{\tau^r}{r!} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r a_{ij}}{\partial t^r}(x,0) P_{j\,h-r} u(x,\tau) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{h} \frac{\tau^r}{r!} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r b_{ik}}{\partial t^r}(x,0) P_{k\,h-r} v(x,\tau), \quad i=\overline{1,n}, \quad h \geqslant 1.$$

Доведення існування класичного розв'язку $P_{ih}u$ для кожного $i = \overline{1,n}$ та $h \geqslant 1$ задачі (23) проводиться аналогічно як для задачі (22). Функції $P_{ih}u$ $(i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1)$ відмінні від тотожного нуля нижче характеристики $\tau = x$ рівняння (23), яка при $\varepsilon \to 0$ прямує до горизонтального положення (початкова умова (23)). Це свідчить про примежовий характер поведінки $P_{ih}u$.

Отже, формальне асимптотичне наближення довільного порядку розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) побудовано. Перейдемо до обґрунтування отриманої асимптотики.

6. Оцінка залишкового члена. Нехай N – довільне натуральне число, $N > 0$. Виділимо в асимптотиці (16) розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) частинну суму порядку N. Позначивши через $R_{iN}^\varepsilon u = R_{iN}^\varepsilon u(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$, $R_{sN}^\varepsilon v = R_{sN}^\varepsilon v(x,t)$ $(s=\overline{1,m})$ залишки асимптотичних розвинень відповідних компонент розв'язку задачі, (16) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t), \quad i=\overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t), \quad s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{24}$$

Для того, щоб отримати задачі для залишку асимптотики $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$, підставимо (24) у систему (1), умови (2) та використаємо задачі для наближень асимптотичного розвинення. Отож, залишковий член асимптотики в області Ω є розв'язок системи

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial t} + \dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) R_{jN}^\varepsilon u + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t) R_{kN}^\varepsilon v + \\ \qquad + \pi_i^u(x,t;\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t) R_{jN}^\varepsilon u + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t) R_{kN}^\varepsilon v + \\ \qquad + \pi_s^v(x,t;\varepsilon), \quad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{25}$$

задовольняє початкові та крайові умови

$$\begin{aligned} &R_{iN}^\varepsilon u(x,0) = R_{iN}^\varepsilon u(0,t) = 0, \quad i=\overline{1,n}, \\ &R_{sN}^\varepsilon v(x,0) = R_{sN}^\varepsilon v(0,t) = 0, \quad s=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{26}$$

де π_i^u $(i=\overline{1,n})$ та π_s^v $(s=\overline{1,m})$ – відомі функції, такі що $\forall(x,t)\in\Omega$ справджується

$$\pi_i^u(x,t;\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\qquad \pi_s^v(x,t;\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Наша мета – отримати рівномірну оцінку залишку асимптотики в $\overline{\Omega}$. Для цього введемо заміну у задачі (25), (26)

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t)=R_{iN}^\varepsilon u(x,t)e^{-k(x+t)}\quad(i=\overline{1,n}),\quad \rho_s^\varepsilon v(x,t)=R_{sN}^\varepsilon v(x,t)e^{-k(x+t)}\quad(s=\overline{1,m}),$$

де k – деяка додатня стала. Тоді відповідно для $\rho_i^\varepsilon u$ і $\rho_s^\varepsilon v$ отримаємо задачу

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial t}+\dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial x}=\tilde a_{ii}(x,t)\rho_i^\varepsilon u+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}(x,t)\rho_j^\varepsilon u\quad+\sum\limits_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)\rho_k^\varepsilon v+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\Pi_i^u(x,t;\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial x}=\tilde\sigma_{ss}(x,t)\rho_s^\varepsilon v+\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)\rho_j^\varepsilon u\quad+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m}\sigma_{sk}(x,t)\rho_k^\varepsilon v+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\Pi_s^v(x,t;\varepsilon),\quad s=\overline{1,m},\end{cases}\tag{27}$$

$$\begin{cases}\rho_i^\varepsilon u(x,0)=\rho_i^\varepsilon u(0,t)=0,\quad i=\overline{1,n},\\ \rho_s^\varepsilon v(x,0)=\rho_s^\varepsilon v(0,t)=0,\quad s=\overline{1,m}.\end{cases}\tag{28}$$

Тут

$$\Pi_i^u(x,t;\varepsilon)=\pi_i^u(x,t;\varepsilon)e^{-k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\ \tilde a_{ii}(x,t)=a_{ii}(x,t)-k(\varepsilon+1)\ (i=\overline{1,n}),$$
$$\Pi_s^v(x,t;\varepsilon)=\pi_s^v(x,t;\varepsilon)e^{-k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\ \tilde\sigma_{ss}(x,t)=\sigma_{ss}(x,t)-k(\varepsilon+1)\ (s=\overline{1,m}).$$

Вибираємо k достатньо великим, щоб виконувались нерівності

$$\tilde a_{ii}(x,t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}(x,t)|+\sum_{k=1}^{m}|b_{ik}(x,t)|\leqslant -1\quad(i=\overline{1,n}),\tag{29}$$

$$\tilde\sigma_{ss}(x,t)+\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{sj}(x,t)|+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m}|\sigma_{sk}(x,t)|\leqslant -1\quad(s=\overline{1,m}).\tag{30}$$

Припустимо, що кожна з функцій $|\rho_i^\varepsilon u|$ $(i=\overline{1,n})$ досягає свого максимуму в точці $T_i(x_i,t_i)\in\overline{\Omega}$, а функції $|\rho_s^\varepsilon v|$ $(s=\overline{1,m})$ – в точках $T_{n+s}(x_{n+s},t_{n+s})\in\overline{\Omega}$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що

$$\begin{aligned}&|\rho_1^\varepsilon u(T_1)|\geqslant|\rho_2^\varepsilon u(T_2)|\geqslant\ldots\geqslant|\rho_n^\varepsilon u(T_n)|\geqslant\\ &\qquad\geqslant|\rho_1^\varepsilon v(T_{n+1})|\geqslant|\rho_2^\varepsilon v(T_{n+2})|\geqslant\ldots\geqslant|\rho_m^\varepsilon v(T_{n+m})|.\end{aligned}\tag{31}$$

Розглянемо перше рівняння системи (27) в точці T_1 і перепишемо його у вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1}+\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1}-\tilde a_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1)-\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1)-\\ -\sum_{k=1}^{m}b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1)=\Pi_1(T_1;\varepsilon). \tag{32}$$

Нехай у точці T_1 функція $\rho_1^\varepsilon u$ набуває від'ємного мінімуму. Тоді в цій точці $\dfrac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\Big|_{T_1}\leqslant 0$, $\dfrac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\Big|_{T_1}\leqslant 0$ (строга нерівність можлива лише у випадку, якщо точка T_1 розташована на межі області $\overline{\Omega}$). Звідси та використовуючи (29) та (31), для правої частини (32) справджується оцінка

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1}+\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1}-\tilde a_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1)-\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1)-\sum_{k=1}^{m}b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1)\leqslant\\ \leqslant-\tilde a_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1)+\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}(T_1)||\rho_j^\varepsilon u(T_1)|+\sum_{k=1}^{m}|b_{1k}(T_1)||\rho_k^\varepsilon v(T_1)|\leqslant\\ \leqslant-\left(\tilde a_{11}(T_1)+\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}(T_1)|+\sum_{k=1}^{m}|b_{1k}(T_1)|\right)\rho_1^\varepsilon u(T_1)\leqslant\rho_1^\varepsilon u(T_1).$$

Отож, права частина (32) є величиною порядку ε^{N+1}, а ліва в точці T_1 не перевищує $\rho_1^\varepsilon u(T_1)$. Позаяк $|\rho_1^\varepsilon u(T_1)|=\max\limits_{\overline{\Omega}}|\rho_1^\varepsilon u(x,t)|=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$, то з (31) отримуємо

$$|\rho_2^\varepsilon u(T_2)|=\max_{\overline{\Omega}}|\rho_2^\varepsilon u(x,t)|=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\quad \ldots,\quad \rho_m^\varepsilon v(T_m)|=\max_{\overline{\Omega}}|\rho_m^\varepsilon v(x,t)|=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Звідки випливає

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\quad(i=\overline{1,n}),\quad \rho_s^\varepsilon v(x,t)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\quad(s=\overline{1,m})\quad\forall(x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Отже, врахувавши введену заміну, отримуємо бажану оцінку залишкового члена $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення (24) розв'язку $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ задачі (1), (2)

$$R_{iN}^\varepsilon u(x,t)=\rho_i^\varepsilon u(x,t)e^{k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\ \ (i=\overline{1,n}),\\ R_{sN}^\varepsilon v(x,t)=\rho_s^\varepsilon v(x,t)e^{k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\ \ (s=\overline{1,m}),\ \ (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Аналогічні міркування у випадку додатного максимуму.

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай N – довільне натуральне число. Припустимо, що виконуються умови:*

(H_1) a_{ij}, b_{ik}, γ_{sj}, $\sigma_{sk}\in C^{(N+2)}(\overline{\Omega})$, f_i, $g_s\in C^{(N+2)}(\overline{\Omega}\times R_+)$ $(i,j=\overline{1,n},\ s,k=\overline{1,m})$;
(H_2) $f_i(0,0;\varepsilon)=0$ $(i=\overline{1,n})$, $g_s(0,0;\varepsilon)=0$ $(s=\overline{1,m})$.

Тоді розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ *задачі* (1), (2) *допускає асимптотичне розвинення вигляду*

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t), \quad i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t), \quad s = \overline{1,m}, \end{cases}$$

де функції $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ *регулярної частини асимптотики є розв'язками задач* (20),(21), *функції примежових шарів* $(P_h u, P_h v)$ *в околі* $t = 0$ *та* $(Q_h u, Q_h v)$ *в околі* $x = 0$ *визначаються як розв'язки задач* (23), (17), (22), *відповідно. Для залишкового члена* $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ *асимптотичного розвинення правильні оцінки*

$$|R_{iN}^\varepsilon u(x,t)| \leqslant C_{1i}\varepsilon^{N+1}, \quad |R_{sN}^\varepsilon v(x,t)| \leqslant C_{2s}\varepsilon^{N+1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega},$$

де C_{1i}, C_{2s} *– незалежні від* ε *сталі* $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$.

Список використаної літератури

1. *Аболиня В.Э.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости / *В.Э. Аболиня, А.Д. Мышкис* // Матем. сб. – 1960.– Т. 50, № 4. – С. 423-442.
2. *Кирилич В.М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *В.М. Кирилич, А.М. Филимонов* // Матем. студії. – 2008. – Т. 30, № 1. – С. 42-60.
3. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов.* – М: Высш. школа, 1990. – 208 с.
4. *Мауленов О.* О смешанной задаче для полулинейной гиперборлической системы на отрезке с малым параметром при производных по времени (часть III) / *О. Мауленов, А.Д. Мышкис* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1985. – № 1. – С. 65-68.
5. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка / *В.Ф. Бутузов, А.Ф. Каращук* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, Вып. 3. – С. 338-349.

Стаття: надійшла до редакції 21.06.2013
доопрацьована 11.10.2013
прийнята до друку 16.10.2013

PROBLEM WITH A SMALL PARAMETER IN THE DERIVATIVES OF THE HYPERBOLIC SYSTEM OF EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

Oksana Flyud

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oflyud@yahoo.com

We consider the initial-boundary value problem for a system of $n+m$ singularly perturbed linear partial differential equations of the first order in the plane, the small parameter is a multiplier for various partial derivatives. Constructed and proved asymptotic expansion of arbitrary order solution with the powers of a small parameter.

Key words: hyperbolic system of singularly perturbed boundary value problem, asymptotic expansion solution, the boundary layer.

ЗАДАЧА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Оксана Флюд

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: oflyud@yahoo.com

Рассмотрено начально-краевую задачу для системы $n+m$ сингулярно возмущенных линейных уравнений с частными производными первого порядка на плоскости, причем малый параметр является множителем при различных частных производных. Построено и обосновано асимптотическое разложение произвольного порядка решения по степеням малого параметра.

Ключевые слова: гиперболическая система, сингулярно возмущенная краевая задача, асимптотическое разложение решения, пограничный слой.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 171–180
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 171–180

УДК 519.21

ОБРИВНІ КЕРОВАНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ ЗІ СКІНЧЕННИМИ АБО ЗЛІЧЕННИМИ МНОЖИНАМИ СТАНІВ І КЕРУВАНЬ

Павло ШПАК, Ярослав ЄЛЕЙКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: prshpak@gmail.com

Запропоновано новий підхід до введення ймовірнісної міри на просторі шляхів, змінено означення шляху в рамках обривного керованого марковського процесу та функцію краху. Доведено коректність означень та існування оптимальних, рівномірно оптимальних, ε-оптимальних і рівномірно ε-оптимальних стратегій в умовах нової ймовірнісної міри. Доведено достатність простих стратегій у скінченній і зліченній моделях.

Ключові слова: обривний керований марковський процес, оптимальна стратегія, ε-оптимальна стратегія, рівномірно ε-оптимальна стратегія.

1. Означення обривного керованого марковського процесу. Нехай $X_t (t = m, \ldots, n)$ та $A_t (t = m+1, \ldots, n)$ довільні не більше, ніж зліченні множини.

Означення 1. *Траєкторія* $l = x_m a_{m+1} x_{m+1} \ldots a_t x_t$ *називається шляхом, якщо* $t = n$ *або* $x_t = x^*$.

Множину всіх можливих шляхів позначатимемо $L = X \times (A \times X)^{n-m}$.

Означення 2. *Обривним керованим марковським процесом на інтервалі часу* $[m, n]$ *є* $(X, A, j, p, q, r, c, \mu) \equiv Z^*_\mu$, *де:*

1) $X = \bigcup\limits_{t=m}^{n} X_t$ – *простір станів;*
2) $A = \bigcup\limits_{t=m+1}^{n} A_t$ – *простір керувань;*
3) *відображення проектування* $j : A \to X$, *де* $j(A_{t+1}) = X_t \backslash \{x^*\}, x^* \in X_t$*;*
4) *розподіл ймовірностей* $p(\cdot|a) \equiv \mathbb{P}(x_t = x | a_t = a x_{t-1})$ *на* $\mathrm{X_t}$ *з обривними точками* $\mathbb{P}(x_{t+1} = x^* \mid a_t = a) = \mathbb{P}(x_{t+1} = x_m \mid a_t = a) \equiv p(x^* | a) \geq 0$*;*
5) *функція винагороди* $q : A \to \mathbb{R}$*;*
6) *фінальна плата* $r : X_n \to \mathbb{R}$*;*

7) функція краху c, задана в обривних точках станів

$$c(x) = \begin{cases} -\sum\limits_{i=m+1}^{t} \sup\limits_{a_i \in A_i} q(a_i), & x = x^*, \\ 0, & x \neq x^*, \end{cases}$$

$x \in X_t$, x^* – обривна точка. Функція краху задана так, що гарантує повне банкрутство – повну втрату накопиченого капіталу або й більше;

8) початковий розподіл μ на X_m. Якщо початковий розподіл μ зосереджений в точці x, то будемо писати Z_x^*.

Процес, що задовольняє (1–7) називатимемо моделлю і позначатимемо Z^*. Наша мета – знайти спосіб керування, за якого максимізується математичне сподівання оцінки шляху l

$$I(l) = \begin{cases} \sum\limits_{t=m+1}^{n} q(a_t) + r(x_n), & \forall t\, x_t \neq x^*, \\ \sum\limits_{t=m+1}^{k} q(a_t) + c(x_k), & x_k = x^*. \end{cases} \tag{1}$$

2. Обривні керовані марковські процеси для скінченних моделей. Якщо задані перехідна функція $p(\cdot\,|a)$ і стратегії $\pi(\cdot\,|h)$, то кожному початковому розподілу μ відповідає розподіл ймовірностей P^* на просторі L, який набуває такого вигляду:

$$P*(l) = \begin{cases} \mu(x_m)\pi(a_{m+1}\,|x_m)p(x_{m+1}\,|a_{m+1})...\pi(a_n\,|h_{n-1})p(x_n\,|a_n)\ , & \forall t\ x_t \neq x^* \\ \mu(x_m)\pi(a_{m+1}\,|x_m)p(x_{m+1}\,|a_{m+1})...\pi(a_k\,|h_{k-1})p(x_k^*\,|a_k)\ , & x_k = x. \end{cases} \tag{2}$$

Математичне сподівання будь-якої функції ξ з простору L набуде такого вигляду:

$$E^*(\xi) = \sum_{l \in L} \xi(l) P^*(l). \tag{3}$$

Прикладом такої функції є оцінка (1) шляху l. Її математичне сподівання позначимо через ω

$$\omega = EI(l). \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай $\{\pi_k\}$ – скінченний або зліченний набір обривних стратегій і γ_k – невід'ємні числа, сума яких дорівнює 1. Якщо для будь-якого початкового розподілу μ будемо використовувати обривну стратегію π_k з ймовірністю γ_k, то отримуємо в просторі шляхів L розподіл ймовірностей P^*, який набуває вигляду*

$$P^* = \sum_k \gamma_k P_k^*, \tag{5}$$

де розподіл P_k^* відповідає обривній стратегії π_k.

Тоді існує обривна стратегія π, якій відповідає розподіл ймовірностей P^* з (5).

Зауваження 1. Отже, при довільному змішуванні стратегій (виборі стратегій випадково з довільним розподілом ймовірностей) ми не розширимо свої можливості, а отримаємо ще деяку стратегію, яка є комбінацією даних.

Оскільки обривна стратегія π описується скінченним набором невід'ємних чисел $\pi\,(a\,|h\,)$. Набори, які задають стратегію, утворюють замкнуту обмежену множину Π в скінченновимірному просторі. Отже, Π – компакт. Функція $\omega(\pi)$ неперервна, бо виражається через $\pi\,(a\,|h\,)$ за допомогою операцій множення та додавання. За теоремою Вейерштрасса, неперервна функція на Π досягає свого максимуму. Обривна стратегія, при якій досягається максимум, є оптимальною для процесу Z^*. З іншого боку, при кожному $x \in X_m$ існує обривна стратегія π_x, оптимальна для процесу Z^*_x.

За набором обривних стратегій π_x хочемо побудувати обривну стратегію π, оптимальну для моделі Z^*.

Природно користуватися постійно стратегією π_x, якщо шлях починається в точці x. Формально

$$\overline{\pi}\,(\cdot\,|h\,) = \pi_{x(h)}\,(\cdot\,|h\,)\,, \tag{6}$$

де $x(h)$ – початковий стан історії h. Звісно, що формула (6) визначає деяку стратегію $\overline{\pi}$, яка буде оптимальною, тобто $\omega(x,\overline{\pi}) = \omega(x,\pi_x) = \upsilon(x),\ \forall x \in X_m$.

Теорема 2. *Будь-яка обривна стратегія $\overline{\pi}$, задана формулою (6), для якої*

$$\omega(x,\overline{\pi}) = \upsilon(x), \quad x \in X_m \tag{7}$$

є рівномірно оптимальною, тобто $\forall \mu\ \sup\limits_{\pi} \omega(\mu,\pi) = \omega(\mu,\overline{\pi})$.

Доведення. З формул (2)–(4) випливає, що $\forall \pi$

$$\omega(\mu,\pi) = \sum_{l\in L} I(l)P^*(l) = \sum_{X_m} \mu\,(x)\,\omega\,(x,\mu). \tag{8}$$

Зокрема, $\omega\,(\mu,\overline{\pi}) = \sum\limits_{X_m} \mu(x)\omega(x,\overline{\pi})$.

Але $\omega\,(x,\pi) \le \omega\,(x,\overline{\pi})\,,\ \forall x \in X_m$, а отже, $\omega(\mu,\pi) \le \omega(\mu,\overline{\pi})$. □

Наслідок 1. *Для рівномірно оптимальної обривної стратегії $\overline{\pi}$ і довільного початкового розподілу μ*

$$\omega\,(\mu) = \sum_{X_m} \mu(x)\upsilon(x) = \mu\upsilon. \tag{9}$$

Теорема 3. *Справджується таке рівняння*

$$\omega(x,\pi) = \sum_{A(x)} \pi(a\,|x)(q(a) + \omega'(p_a,\pi_a)), \tag{10}$$

де $p_a = p(\cdot\,|a)$, $\pi_a\,(\cdot\,|h'\,) = \pi(\cdot\,|yah')\,,\ a \in A_{m+1}$, $y = j(a)$, h – історія в моделі Z'^*. Рівняння (10) називається фундаментальним і виражає оцінку ω довільної стратегії π в моделі Z^* через оцінку ω' деяких стратегій в моделі Z'^*.

Доведення. Згідно з формулою (8) отримуємо

$$\omega'(p_a,\pi_a) = \sum_{X_{m+1}} p(y\,|a)\,\omega'(y,\pi_a). \tag{11}$$

Розглянемо простори шляхів L та L' в моделях Z^* та Z'^*. Нехай P^* – розподіл ймовірностей в L, який відповідає початковому стану x і стратегії x, P^*_a – розподіл ймовірностей в L', який відповідає початковому розподілу p_a і стратегії π_a.

Згідно з формулою (2) і (2) $\forall l' \in L'$ отримуємо

$$I(xal') = q(a) + I(l') \tag{12}$$

$$P^*(xal') = \pi(a\,|x)P^*_a\ (l'). \tag{13}$$

На підставі (3) і (4) одержуємо

$$\omega(x,\pi) = \sum_L P^*(l)I(l) \tag{14}$$

$$\omega'(p_a,\pi_a) = \sum_{L'} P^*_a(l')I(l'). \tag{15}$$

Міра $P^*(l)$ не дорівнює нулю тільки для шляхів, які починаються з точки x, тобто для шляхів вигляду xal'. Тому, підставляючи в (14) значення $I(l)$ з (12) та $P^*(l)$ з (13) і враховуючи (15), отримуємо фундаментальне рівняння (10). □

З фундаментального рівняння (10) випливає така оцінка:

$$\omega(x,\pi) \le \sup_{A(x)}[q(a) + \omega'(p_a,\pi_a)] \le \sup_{A(x)}[q(a) + \upsilon'(p_a)] \tag{16}$$

$\forall x \in X_m$ і $\forall \pi$ (υ' – оцінка моделі Z'^*). Позначимо

$$u(a) = q(a) + \upsilon'(p_a), \quad (a \in A_{m+1}). \tag{17}$$

Будемо називати цю величину – оцінкою керування a.

Згідно з (9) і рівністю $\upsilon(x^*) = c(x^*)$ отримуємо $u = U\upsilon'$, де оператор U переводить функції на точках (не обривних) у функції на керуваннях за такою формулою:

$$Uf(a) = q(a) + \sum_y p(y\,|a)f(y) + p(y^*\,|a)f(y^*)\ , \tag{18}$$

де y – необривні точки, y^* – обривна точка.

Введемо ще оператор V, який переводить функції на керуваннях у функції на точках (не фінальних та не обривних) так:

$$Vg(x) = \sup_{a\in A(x)} q(a). \tag{19}$$

Запишемо нерівність (16), використовуючи оператор $V : \omega(x,\pi) \le Vu(x)$. Тепер візьмемо $\sup\limits_{\pi}$ від лівої та правої частини й отримаємо $\upsilon \le Vu$.

Теорема 4. *Нехай $\pi = \gamma\pi'$ – добуток обривних стратегій γ та π'. Якщо π' рівномірно оптимальна для моделі Z'^*, тоді*

$$u = Vu. \tag{20}$$

Доведення. Для добутку стратегій фундаментальне рівняння (10) набуде такого вигляду:

$$\omega(x,\gamma\pi') = \sum_{A(x)} \gamma(a\,|x)\ u(a). \tag{21}$$

Оскільки π' – рівномірно оптимальна (а вона існує згідно з теоремою 2), то $\omega'(p_a,\pi') = \upsilon(p_a)$, і згідно з виглядом функції u рівняння (21) перетворюється в

$$\omega(x,\gamma\pi') = \sum_{A(x)} \gamma(a\,|x)\ u(a). \tag{22}$$

Якщо для кожного x розподіл $\gamma(\cdot\,|x)$ зосереджений на $\overline{A}(x) \subset A(x)$, де функція $u(a)$ $(a \in A(x))$ досягає свого максимуму, то це рівняння набуде такого вигляду:

$$\omega(x, \gamma\pi') = Vu(x),\ (x \in X_m). \tag{23}$$

□

Наслідок 2. *Оцінка υ моделі Z^* виражається через оцінку υ' моделі Z'^* такими формулами:*

$$\begin{aligned} \upsilon &= Vu, \\ u &= U\upsilon', \end{aligned} \tag{24}$$

де оператори U та V задані формулами (18) та (19), відповідно.

Наслідок 3. *Існує селектор ψ багатозначного відображення $A(x) : X_m \to A_{m+1}$*

$$u(\psi(x)) = \upsilon(x). \tag{25}$$

Доведення. За $\gamma(\cdot\,|x)$ можна прийняти розподіл, зосереджений в одній точці $\psi(x) \in \overline{A}(x)$. □

Наслідок 4. *Якщо π' рівномірно оптимальна для моделі Z'^* і селектор ψ – такий, як в Наслідку 3, то обривна стратегія $\psi\pi'$ – рівномірно оптимальна для процесу Z^*.*

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що в цій моделі Z^* $m = 0$. Розглянемо моделі $Z_0^*, Z_1^*, ...Z_n^*$, де $Z^* = Z_0^*$ і Z_t^* – похідна модель від Z_{t-1}^*. Оцінки υ та u моделі Z_t^* позначимо υ_t і u_{t+1}, відповідно (υ_t визначена на X_t, u_{t+1} визначена на A_{t+1}). Функцію винагороди q і перехідну функцію p на A_t позначимо q_t і p_t, відповідно.

Згідно з попередніми результатами оцінки υ_t і u_t пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \upsilon_{t-1} &= Vu_t \\ u_t &= U\upsilon_t \end{aligned} \qquad (1 \le t \le n), \tag{26}$$

де $U_t f(a) = q_t(a) + \sum\limits_{y \in X_t} p_t(y\,|a) f(y) + p_t(y^*\,|a) c(y^*)$, $(a \in A_t,\ y^* \in X_t)$,
$V_t g(x) = \sup\limits_{A(x)} g(a)$, $(x \in X_{t-1})$, причому $\upsilon_n = r$.

Рівності (26) називаються рівняннями оптимальності. Приймемо $T_t = V_t U_t$, тоді рівняння оптимальності запишемо у вигляді

$$\upsilon_{t-1} = T_t \upsilon_t. \tag{27}$$

Теорема 5. *Нехай π – довільна обривна стратегія в похідній моделі Z_k^* $(k = 1, 2, ...n)$ і ψ_t – довільні селектори багатозначного відображення $A(x)$: $X_{t-1} \to A_t$ $\quad (t = 1, 2, ...k)$, тоді:*

$$\omega_0(x, \psi_1\psi_2...\psi_k\pi) = T_{\psi_1} T_{\psi_2} ... T_{\psi_k} \omega(x, \pi). \tag{28}$$

Доведення. Випливає з фундаментального рівняння (10), формул (12), (27) і методу математичної індукції. □

3. Обривні керовані марковські процеси для зліченних моделей. Для зліченних моделей оптимальні стратегії можуть не існувати, тому вводиться поняття ε-оптимальності.

Означення 3. *Обривна стратегія π називаєтсья ε-оптимальною для процесу Z^*_μ, якщо $\omega(\mu,\pi) \geq \upsilon(\mu) - \varepsilon$.*

Означення 4. *Обривна стратегія π називається рівномірно ε-оптимальною або ε-оптимальною для моделі Z^*, якщо π-ε-оптимальна для Z^*_μ і будь-якого μ – початкового розподілу.*

Далі з'ясуємо, як результати для скінченних моделей з оптимальними стратегіями переносяться на зліченні моделі з ε-оптимальними стратегіями.

Нехай π_x-ε-оптимальна стратегія для процесу Z^*_x. Вона існує за означенням верхньої грані.

За набором обривних стратегій π_x знову хочемо побудувати одну обривну стратегію π, ε-оптимальну для моделі.

Доведемо, що формула (6) визначає деяку стратегію $\overline{\pi}$, яка буде ε-оптимальною, тобто $\omega(x,\overline{\pi}) = \omega\left(x,\pi_x\right) \geq \upsilon(x) - \varepsilon,\ \forall x \in X_m$.

Теорема 6. *Будь-яка обривна стратегія $\overline{\pi}$, задана формулою (6), для якої*

$$\omega(x,\overline{\pi}) \geq \upsilon(x) - \varepsilon,\ (x \in X_m) \tag{29}$$

рівномірно ε-оптимальна, тобто $\forall\mu\ \sup\limits_\pi \omega(\mu,\pi) \leq \omega(\mu,\overline{\pi}) + \varepsilon$.

Доведення. З формул (2)–(4) випливає, що $\forall\pi$

$$\omega(\mu,\pi) = \sum_{l\in L} I(l)P^*(l) = \sum_{X_m} \mu(x)\omega(x,\pi). \tag{30}$$

Звідси отримуємо

$$\omega(\mu,\pi) = \sum_{X_m} \mu(x)\omega(x,\pi) \leq \sum_{X_m} \mu(x)\upsilon(x) \leq \sum_{X_m} \mu(x)[\omega(x,\overline{\pi}) + \varepsilon] = \omega(\mu,\overline{\pi}) + \varepsilon. \tag{31}$$

З отриманої нерівності випливає:

$$\sup_\pi \omega(\mu,\pi) \leq \sum_{X_m} \mu(x)\upsilon(x), \tag{32}$$

$$\omega(\mu,\overline{\pi}) \geq \sum_{X_m} \mu(x)\upsilon(x) - \varepsilon. \tag{33}$$

З формул (32) і (33) отримуємо

$$\sup_\pi \omega(\mu,\pi) \leq \sum_{X_m} \mu(x)\upsilon(x) \leq \omega(\mu,\overline{\pi}) + \varepsilon. \tag{34}$$

Отже, стратегія $\overline{\pi}$ рівномірно ε-оптимальна. Оскільки це доведення можемо провести для $\forall\varepsilon$, то $\sup\limits_\pi \omega(\mu,\pi) = \sum\limits_{X_m} \mu(x)\upsilon(x) = \mu\upsilon$. ☐

Наслідок 5. *Для довільного початкового розподілу μ*

$$\upsilon(\mu) = \mu\upsilon. \tag{35}$$

Зауваження 2. Зауважимо, що фундаментальне рівняння правильне і для зліченних моделей без змін у доведенні.

Теорема 7. *Нехай $\pi = \gamma\pi'$ – добуток обривних стратегій γ та π'. Якщо π' рівномірно ε'-оптимальна для моделі Z'^*, тоді*

$$v = Vu. \tag{36}$$

Доведення. Для добутку стратегій $\gamma\pi'$ фундаментальне рівняння (10) набуде такого вигляду:

$$\omega(x, \gamma\pi') = \sum_{A(x)} \gamma(a\,|x)(q(a) + \omega'(p_a, \pi')). \tag{37}$$

Оскільки π' – рівномірно ε'-оптимальна (а вона існує $\forall\varepsilon' > 0$ згідно з теоремою 1), то $\omega'(p_a, \pi') \geq v'(p_a) - \varepsilon'$ і згідно з виглядом функції u рівняння (37) перетворюється в

$$\omega(x, \gamma\pi'0 \geq \sum_{A(x)} \gamma(a\,|x)u(a) - \varepsilon'. \tag{38}$$

Розглянемо множину $A_\chi(x) = \{a:\ a \in A(x),\ u(a) \geq Vu(x) - \chi\}\quad (x \in X_m)$, яка не порожня для будь-якого $\chi > 0$. Нехай $\gamma(\cdot\,|x)$ довільний розподіл ймовірностей на $A(x)$, зосереджений на $A_\chi(x)$. Тоді $\sum\limits_{A(x)} \gamma(a\,|x)u(a) \geq Vu(x) - \chi$.

При $\varepsilon' + \chi \leq \varepsilon$

$$\omega(x, \pi) \geq Vu(x) - \varepsilon \quad (x \in X_m). \tag{39}$$

□

Наслідок 6. *Оцінка v моделі Z^* виражається через оцінку v' моделі Z'^* такими формулами:*

$$\begin{aligned} v &= Vu, \\ u &= Uv', \end{aligned} \tag{40}$$

де оператори U та V задані формулами (18) та (19).

Наслідок 7. *Для будь-якого $\chi > 0$ існує селектор ψ багатозначного відображення $A(x):\ X_m \to A_{m+1}$*

$$u(\psi(x)) \geq v(x) - \chi. \tag{41}$$

За $\gamma(\cdot\,|x)$ можна прийняти розподіл, зосереджений в одній точці $\psi(x) \in A_\chi(x)$.

Наслідок 8. *Нехай ε' і χ – довільні невід'ємні числа. Якщо π' рівномірно ε'-оптимальна для моделі Z'^* і селектор ψ – такий, як у наслідку 7, то обривна стратегія $\psi\pi'$ – рівномірно $(\varepsilon' + \chi)$-оптимальна для моделі Z^*.*

Теорема 8. *Для фіксованого початкового розподілу μ та для довільної обривної стратегії π існує проста стратегія φ*

$$\omega(\mu, \pi) \leq \omega(\mu, \varphi). \tag{42}$$

Доведення цієї теореми випливає з таких двох теорем.

Теорема 9. *$\forall\mu$ і для будь-якої обривної стратегії π існує марковська стратегія σ така що:*

$$\omega(\mu, \sigma) = \omega(\mu, \pi). \tag{43}$$

Доведення. Розглянемо марковську стратегію σ

$$\sigma(a\,|x\,) = \mathbb{P}^*\{a_t = a \mid x_{t-1} = x\,\} = \frac{\mathbb{P}^*\{x_{t-1}a_t = xa\}}{\mathbb{P}^*\{x_{t-1} = x\}} \tag{44}$$

$$(a \in A_t, \quad x \in X_{t-1}, \quad m+1 \le t \le n),$$

де $\mathbb{P}^*$ – міра в просторі шляхів L, яка відповідає початковому розподілу μ та стратегії π.

Якщо у правій частині формули (44) при $\mathbb{P}^*\{x_{t-1} = x\} = 0$ тоді вираз втрачає зміст. Для таких x(зокрема обривних) за $\sigma(\cdot\,|x\,)$ можна вибрати довільний розподіл на $A(x)$.

Позначимо через $\mathbb{Q}^*$ – розподіл ймовірностей у просторі L, що відповідає початковому розподілу μ та обривній марковській стратегії σ. В загальному випадку розподіл $\mathbb{Q}^*$ не збігається з розподілом $\mathbb{P}^*$, але для доведення (43) достатньо, щоб кожен із елементів $x_m, ..., x_n, a_{m+1}, .., a_n$ та $x^*_{m+1}, ...x^*_n$ мав однаковий розподіл ймовірностей стосовно мір $\mathbb{P}^*$ та $\mathbb{Q}^*$. Це випливає з таких двох рівностей:

$$\omega(\mu,\pi) = \sum_{t=m+1}^{n} \mathbb{P}^* q(a_t) + \sum_{t=m+1}^{n} \mathbb{P}^* c(x^*_t) + \mathbb{P}^* r(x_n) \tag{45}$$

$$\omega(\mu,\sigma) = \sum_{t=m+1}^{n} \mathbb{Q}^* q(a_t) + \sum_{t=m+1}^{n} \mathbb{Q}^* c(x^*_t) + \mathbb{Q}^* r(x_n). \tag{46}$$

Доводити будемо за індукцією.

Твердження правильне для x_m, бо розподіл для нього

$$\mathbb{P}^* = \mathbb{Q}^* = \mu.$$

Припустимо, що твердження виконується для x_{t-1}. Перевіримо це для a_t. Оскільки обривна стратегія σ – марковська, то

$$\mathbb{Q}^*\{x_{t-1}a_t = xa\} = \mathbb{Q}^*\{x_{t-1} = x\}\sigma(a\,|x), \quad (a \in A_t, \quad x \in X_{t-1}). \tag{47}$$

Тоді з (44) та (47) отримуємо таке:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*\{a_t = a\} &= \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{P}^*\{x_{t-1}a_t = xa\} = \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{P}^*\{x_{t-1} = x\}\sigma(a\,|x\,) = \\ &= \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{Q}^*\{x_{t-1} = x\}\sigma(a\,|x\,) = \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{Q}^*\{x_{t-1}a_t = xa\} = \mathbb{Q}^*\{a_t = a\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Отже, наше твердження правильне для a_t. Доведемо тепер таке: якщо воно правильне для a_t, то й виконується для x_t.

За означенням перехідної функції

$$\mathbb{P}^*\{a_t x_t = ax\} = \mathbb{P}^*\{a_t = a\}p(x\,|a\,), \tag{49}$$

$$\mathbb{Q}^*\{atxt = ax\} = \mathbb{Q}^*\{at = a\}p(x\,|a\,). \tag{50}$$

Відразу з (49) і (50) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*\{x_t = x\} &= \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{P}^*\{a_t x_t = ax\} = \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{P}^*\{a_t = a\}p(x\,|a\,) = \\ &= \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{Q}^*\{a_t = a\}p(x\,|a\,) = \sum_{x \in X_{t-1}} \mathbb{Q}^*\{a_t x_t = ax\} = \mathbb{Q}^*\{x_t = x\}. \end{aligned} \tag{51}$$

□

Лема 1. *Нехай f – довільна функція і υ – довільний розподіл ймовірностей на зліченному просторі E. Якщо $\upsilon f < +\infty$, то множина $\Gamma = \{x : \ f(x) \geq \upsilon f\}$ має додатну міру υ, тобто $\upsilon(\Gamma) > 0$.*

Теорема 10. *Для будь-якої марковської стратегії σ існує проста стратегія φ така що:*

$$\omega(\mu, \varphi) \geq \omega(\mu, \sigma). \tag{52}$$

Доведення. Згідно з (30) умова (52) рівносильна

$$\omega(x, \varphi) \geq \omega(x, \sigma), \quad \forall x \in X_m. \tag{53}$$

Розкладемо обривну марковську стратегію σ в добуток стратегій $\sigma = \gamma\sigma'$, де γ – звуження σ на X_m, а σ' – звуження σ в на $X_{m+1} \bigcup X_{m+2} ... \bigcup X_n$. Згідно з фундаментальним рівнянням (10)

$$\omega(x, \sigma) = \gamma_x f, \tag{54}$$

де $\gamma_x(\cdot) = \gamma(\cdot\, |x\,)$ – розподіл ймовірностей на $A(x)$, і $f(a) = q(a) + \omega'(p_a, \sigma')$, $(a \in A_{m+1})$.

За лемою 1 підмножина $A(x)$, для якої $f(a) \geq \gamma_x f = \omega(x, \sigma)$, має додатню міру γ_x, а отже, є непорожньою. Якщо $\psi(x)$ – довільна точка цієї підмножини, то $f(\psi(x)) \geq \omega(x, \sigma)$. На підставі фундаментального рівняння (10), $f(\psi(x)) = \omega(x, \psi\sigma')$, а отже, $\omega(x, \psi\sigma') \geq \omega(x, \sigma)$.

Припустимо, що умова (52) правильна для похідної моделі Z'^*, тоді в цій моделі знайдеться проста стратегія φ', яка рівномірно мажорує обривну марковську стратегію σ'. З фундаментального рівняння (10) та зробленого припущення отримуємо

$$\omega(x, \psi\varphi') = q(\psi(x)) + \omega'(p_{\psi(x)}, \varphi') \geq q(\psi(x)) + \omega'(p_{\psi(x)}, \sigma') = \omega(x, \psi\sigma') \geq \omega(x, \sigma). \tag{55}$$

Отже, в моделі Z^* проста стратегія $\varphi = \psi\,\varphi'$ рівномірно мажорує σ так, що результат (52) є правильний і для моделі Z^*. □

Список використаної літератури

1. *Дынкин Е.Б.* Управляемые марковские процессы и их приложения /*Е.Б. Дынкин, А.А. Юшкевич* – М.: Наука, 1975. – 334 с.
2. *Пароля Н.Р.* Обривні керовані марковські процеси на скінченному інтервалі часу для скінченних моделей / *Н.Р. Пароля, Я.І. Єлейко* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – № 72 – С. 243–254.

Стаття: надійшла до редакції 07.10.2013
прийнята до друку 16.10.2013

KILLED MARKOV DECISION PROCESSES WITH FINITE OR COUNTABLE SETS OF STATES AND MANAGEMENTS

Pavlo SHPAK, Yaroslav YELEYKO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: prshpak@gmail.com

We present new approach to probability measure on the space of paths, redefined concept of paths and crash function. Correctness of definitions and existence of optimal, uniformly optimal, ε-optimal and uniformly ε-optimal strategies under the new probability measure is shown. Sufficient of simple strategies in finite and countable models is proved.

Key words: killed Markov desision process, optimal strategy, ε-optimal strategy, uniformly ε-optimal strategy.

ОБРЫВАЮЩИЕСЯ УПРАВЛЯЕМЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С СЧЕТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ СОСТОЯНИЙ И УПРАВЛЕНИЙ

Павло ШПАК, Ярослав ЕЛЕЙКО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: prshpak@gmail.com

Предложен новый подход к введению вероятностной меры на пространстве путей, изменено определение пути в рамках обрывающегося управляемого марковского процесса и функцию краха. Показано корректность определений и существование оптимальных, равномерно оптимальных, ε-оптимальных и равномерно ε-оптимальных стратегий в условиях новой вероятностной меры. Доказано достаточность простых стратегий в конечной и счетной моделях.

Ключевые слова: обрывающиейся управляемый марковский процесс, оптимальная стратегия, ε-оптимальная стратегия, равномерно ε-оптимальная стратегия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме на CD-RW диску (редколегія повертає авторові диск; тексти можна надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською, англійською та російською мовами, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Кравчук О.М.* Назва / О.М. Кравчук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — С. 79–90.
2. *Aramis D.K.* Title / D.K. Aramis // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — Vol. 377. — P. 450–463.
3. *Класний О.М.* Назва / О.М. Класний, М.М. Потічний // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 2, №2. — С. 4–20.
4. *Грабович А.І.* Назва / А.І. Грабович. — К., 1985.
5. *Петренко О.Б.* Назва / О.Б. Петренко, М.М. Шинк. — Л., 2001.

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / Г.Д. Михайленко. — Л.: ІППММ, 1993. — 9 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

7. *Михайленко Г.Д.* Назва / Г.Д. Михайленко, С.І. Степаняк. — Л.: ІППММ, 1993. — 9 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

8. *Колмаз Ю.А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / *Ю.А. Колмаз.* — К., 2008. — 20 с.

9. *Сеник С.М.* Назва / С.М. Сеник. — К., 1992. — 17 с. — Деп. в ДНТБ України, В2020–1995.

10. *Сеник С.М.* Назва / С.М. Сеник, І.Т. Мандрик. — К., 1992. — 17 с. — Деп. в ДНТБ України, В2020–1995.

11. *Муравський В.К.* Назва / В.К. Муравський // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня — 2 вересня 1994 р., Київ. — К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. — С. 540–551.

12. *Муравський В.К.* Назва / В.К. Муравський, С.В. Ліско // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня — 2 вересня 1994 р., Київ. — К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. — С. 540–551.