ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 79

Львівський національний університет імені Івана Франка
2014

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 79

Львівський національний університет імені Івана Франка
2014

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series
Mechanics and Mathematics

Серія
механіко-математична

Issue 79

Випуск 79

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National
University of Lviv

Львівський національний
університет імені Івана Франка

2014

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (0322) 74-11-07
ел. пошта: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk.asp

Editorial office address:
Ivan Franko National University
of Lviv,
Mechanical and Mathematical department,
Universytetska Str., 1,
UA-79000 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com
http://blues.franko.lviv.ua/publish/visnyk_en.asp

Редактор Н. ПЛИСА
Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 14,3
Наклад 200 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 5–11
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 5–11

УДК 519.21

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ РЕДУКОВАНИХ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Ірина БАЗИЛЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: i_ bazylevych@yahoo.com

Знайдено асимптотику твірної функції при $\tau \downarrow 0$, $t \downarrow 0$ і вигляд інтегрального рівняння для редукованого гіллястого процесу з неперервним часом.

Ключові слова: гіллястий процес, редукований гіллястий процес, твірна функція, інтегральне рівняння, функція розподілу, асимптотичне представлення, випадкова величина.

1. Вступ. Вперше редуковані гіллясті процеси були досліджені 1975 р. у статті А.М. Зубкова [6]. В ній досліджувалась поведінка найближчого загального предка. А К. Флейшман і Р. Зігмунд-Шультц ввели поняття "редукований процес" [12].

Розглянемо однорідний гіллястий процес $\mu(t)$ – кількість частинок у момент часу t за умови, що в початковий момент часу була одна частинка. Випадковий процес $\mu(t, t+\tau)$, який позначає кількість частинок у момент часу t, які в момент часу $t+\tau$ мають непорожнє потомство ($t \geqslant 0; \tau \geqslant 0$), називають редукованим процесом.

Дослідженню різних властивостей редукованих процесів присвячені праці [2], [3], [4], [5], [7], [11], [13], [14]. Але у всіх них досліджували гіллясті процеси з дискретним часом. Лише у працях А.Л. Якиміва розглядали редуковані гіллясті процеси з неперервним часом [9], [10].

Ми отримали такі результати:

1) процес $\mu(t, t+\tau)$ – неоднорідний марківський процес при фіксованому $t+\tau$ по t;
2) при $\tau \to 0$ скінченновимірні розподіли редукованого процесу збігаються до розподілу гіллястого процесу;
3) досліджено взаємозв'язок розподілів при $t = (t+\tau)\varepsilon$ між $\mu(t, t+\tau)$ і $\mu(t)$;
4) досліджено поведінку граничних розподілів при $\tau \to \infty$ для докритичних і надкритичних процесів.

Розглянуто гіллясті процеси загального вигляду (тобто немає врахування докритичності, критичності, надкритичності). Асимптотики при $\tau \downarrow 0$, $t \downarrow 0$ t і τ є незалежними.

2. Формулювання задачі. Розглядаємо однорідний гіллястий процес $\mu(t)$ з неперервним часом. Процес $\mu(t, t+\tau)$ – редукований гіллястий процес, який відповідає процесу $\mu(t)$.

Нехай $F(t,s)$ – твірна функція процесу $\mu(t)$, а $f(s)$ – твірна функція щільностей перехідних ймовірностей цього процесу.

Введемо твірну функцію

$$\Phi(t,\tau,s) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t,t+\tau) = k, \mu(t) > 0\} s^k$$

та твірну функцію редукованого процесу

$$\psi(t;\tau;s) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t,t+\tau) = k | \mu(t) > 0\} s^k.$$

Функція $\Phi(t,\tau,s)$ виражається через твірну функцію процесу $\mu(t)$

$$\Phi(t,\tau,s) = F(t; s(1 - F(\tau;0)) + F(\tau;0)) - F(t;0),$$

твірна функція гіллястого редукованого процесу дорівнює ([1])

$$\psi(t,\tau,s) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t,t+\tau) = k | \mu(t) > 0\} s^k =$$

$$= \frac{F(t; s(1 - F(\tau,0)) + F(\tau,0)) - F(t+\tau,0)}{1 - F(t+\tau,0)}.$$

3. Асимптотика редукованого гіллястого процесу з неперервним часом при $\tau \downarrow 0$ та при $t \downarrow 0$.

Теорема 1. *При $\tau \downarrow 0$ виконується асимптотичне зображення*

$$\Phi(t;\tau;s) = F(t; s(1 - \tau p_0) + \tau p_0) - F(t;0) + o(\tau).$$

При $t \downarrow 0$ $\Phi(t,\tau,s)$ має асимптотичне зображення

$$\Phi(t,\tau,s) = s(1 - F(\tau,0)) + F(\tau,0) + t(f[(1 - F(\tau,0))s + F(\tau,0)] - p_0) + o(t).$$

Доведення. Спочатку розглядаємо асимптотику при $\tau \downarrow 0$. Відомо [8], що при $t \downarrow 0$ асимптотика твірної функції гіллястого процесу з неперервним часом така:

$$F(t;s) = s + tf(s) + o(t).$$

За означенням $f(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n +$, тому

$$\Phi(t,\tau,s) = F(t; s(1 - F(\tau;0)) + F(\tau;0)) - F(t;0) =$$

$$= F(t; s(1 - \tau f(0) + o(\tau)) + \tau f(0) + o(\tau)) - F(t;0) =$$

$$= F(t; s(1 - \tau p_0 - o(\tau)) + \tau p_0 + o(\tau)) - F(t;0).$$

Враховуючи неперервність по s в крузі $|s| \leqslant 1$ твірної функції, отримуємо

$$\Phi(t, \tau, s) = F(t; s(1 - \tau p_0) + \tau p_0) - F(t; 0) + o(\tau).$$

Переходимо до асимптотики при $t \downarrow 0$. Позаяк [8]

$$F(t, s_1) = s_1 + tf(s_1) + o(t)$$

і $s_1 = s(1 - F(\tau, 0)) + F(\tau, 0)$,

$$\Phi(t, \tau, s) = F(t, s_1) - F(t, 0),$$
$$F(t, 0) = 0 + tf(0) + o(t),$$
$$f(0) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + ...|_{s=0} = p_0,$$
$$F(t, 0) = tp_0 + o(t),$$

то $\Phi(t, \tau, s)$ при $t \downarrow 0$

$$\Phi(t, \tau, s) = s_1 + tf(s_1) + o_1(t) - [tp_0 + o_2(t)] = s_1 + (f(s_1) - p_0)t + o(t) =$$
$$= s(1 - F(\tau, 0)) + F(\tau, 0) + t(f[(1 - F(\tau, 0))s + F(\tau, 0)] - p_0) + o(t).$$

Теорема доведена. □

Зауваження 1. Дослідимо сенс виразу:

$$f[(1 - F(\tau, 0))s + F(\tau, 0)] - p_0.$$
$$f(\tilde{s}) = p_0 + p_1(\tilde{s}) + p_2(\tilde{s}) + ...$$
$$f(\tilde{s}) - p_0 = p_1(\tilde{s}) + p_2(\tilde{s}) + ...$$

Це твірна функція щільностей перехідних ймовірностей без виродження.

Лема 1. *Нехай у початковий момент часу було k частинок. Випадкова величина η – момент першого перетворення процесу. Тоді випадкова величина η має показниковий розподіл з параметром $-kp_1$.*

Доведення. Нехай η_1 – випадкова величина, яка позначає момент першого перетворення першої частинки, η_2 – другої частинки, ..., η_k – k-ї частинки. Тоді момент першого перетворення процесу дорівнює мінімуму моментів перетворення всіх частинок, тобто

$$\eta = \min(\eta_1, \ldots, \eta_k). \tag{1}$$

Позаяк за означенням гіллястого процесу частинки розмножуються за тим самим законом і незалежно одна від одної, то і випадкові величини η_1, η_2, ..., η_k – незалежні однаково розподілені випадкові величини.

З курсу теорії ймовірностей відомо таке: якщо випадкові величини η_1, η_2, ..., η_k – незалежні і $\eta = \min(\eta_1, \ldots, \eta_k)$, то функція розподілу випадкової величини η дорівнює

$$F_\eta(x) = F_{\min(\eta_1, \ldots, \eta_k)}(x) = 1 - (1 - F_{\eta_1}(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - F_{\eta_k}(x)),$$

де $F_{\eta_j}(x)$ – функція розподілу випадкової величини η_j. Відомо [8], що для всіх j випадкові величини η_j мають показниковий розподіл з параметром $-p_1$, тому

$$F_\eta(x) = 1 - (e^{p_1 x})(e^{p_1 x}) \ldots (e^{p_1 x}) = 1 - e^{kp_1 x}.$$

Отже, випадкова величина η_j має показниковий розподіл з параметром $-kp_1$. Лема доведена. □

Лема 2. *Розглядаємо випадкову величину $\zeta(t)$ – момент першого перетворення після моменту часу t. Нехай $0 \leqslant t \leqslant v$. Позначимо $u = v - t$. Тоді функція розподілу випадкової величини $\zeta(t)$ $G_t(u)$ $(u \geqslant 0)$ визначається з рівності*

$$1 - G_t(u) = F(t, e^{p_1 u}) - F(t, 0).$$

Доведення. Нехай $\zeta(t)$ – момент першого перетворення процесу після моменту часу t. Тоді

$$1 - G_t(u) = P\{\zeta(t) \geqslant u\} = \sum_{k=1}^{\infty}\{\zeta(t) \geqslant u|\mu(t) = k\}P\{\mu(t) = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{kp_1 u} P\{\mu(t) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty}(e^{p_1 u})^k P\{\mu(t) = k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(e^{p_1 u})^k P\{\mu(t) = k\} - P\{\mu(t) = 0\} = F(t, e^{p_1 u}) - F(t, 0).$$

Лема доведена. □

Лема 3. *Твірна функція $\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau)$ дорівнює*

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau) = (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Доведення.

$$\Phi(t, \tau, s|\zeta(t) > \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t, t+\tau) = k\}s^k = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t) = k\}s^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t) = k\}s^k - P\{\mu(t) = 0\} = F(t; s) - F(t, 0).$$

Відповідно,

$$\begin{aligned}\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau) &= \Phi(t, \tau, s|\zeta(t) > \tau)P\{\zeta(t) > \tau\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t, t+\tau) = k\}s^k P\{\zeta(t) > \tau\} = \\ &= (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).\end{aligned}$$

Лема доведена. □

Теорема 2. *Для твірної функції $\Phi(t, \tau, s)$ правильне інтегральне рівняння*

$$\Phi(t, \tau, s) = \int_0^{\tau} h(\Phi(t-u; \tau; s))dG_t(u) +$$

$$+ (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)),$$

де $h(s)$ – твірна функцій щільностей умовних перехідних ймовірностей за умови, що перетворення відбулось

$$h(s) = \frac{f(s) - p_1 s}{-p_1}.$$

Доведення. Розглядаємо твірну функцію $\Phi(t, \tau, s)$. Зафіксуємо t. Нехай $\zeta(t)$ – момент першого після t перетворення. Можливі два випадки $\zeta(t) > \tau$ або $\zeta(t) \leqslant \tau$.

Розглядаємо спочатку простіший випадок $\zeta(t) > \tau$. Це означає таке: до моменту τ включно перетворення не відбулось, що еквівалентно тому, що кількість частинок в момент часу t, які в момент часу $t + \tau$ мають непорожню множину нащадків (практично, це ті самі частинки) дорівнює кількості частинок в момент часу t, тобто

$$\{\mu(t, t + \tau) = k | \mu(t) = k, \zeta(t) > \tau\}.$$

З леми 3 отримаємо, що

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau) = (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Отже, твірна функція $\Phi(t, \tau, s)$ у цьому випадку набуває вигляду

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) \geqslant \tau) = (F(t; s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Переходимо до другого випадку.

Нехай перше перетворення процесу відбулось на проміжку часу $(t + u; t + u + \triangle u]$. Припустимо, що в момент часу t кількість частинок дорівнює k. Враховуючи означення редукованого процесу, $\mu(t; t + \tau)$ позначає кількість частинок у момент часу t, які на момент часу $t + \tau$ мають непорожнє потомство (або самі ще живуть). Це означає, що $\forall\ v \in (t; t + u]\ \mu(t; t + \tau) = \mu(v; t + \tau)$.

Далі, кількість частинок у момент часу t, які в момент часу $t + \tau$ мають ненульове потомство, дорівнює кількості частинок у момент перетворення і які в момент часу $t + u$ мають ненульове потомство.

Враховуючи [8], ми отримуємо, що

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) < \tau) = \int_0^\tau [h(\Phi(t, \tau - u, s)] dG_t(u),$$

тут

$$h(s) = \frac{f(s) - p_1 s}{-p_1}.$$

Отже,

$$\Phi(t, \tau, s) = \int_0^\tau [h(\Phi(t, \tau - u, s)] dG_t(u) + (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Теорема доведена. □

Список використаної літератури

1. *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применение / *В.А. Ватутин.* – М: МИАН, 2008. – Вып. 8.
2. *Ватутин В.А.* О расстоянии до ближайшего общего предка в ветвящихся процессах Беллмана-Харриса / *В.А. Ватутин* // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, №5. – С. 733–741.
3. *Ватутин В.А.* Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде: критический случай / *В.А. Ватутин* // Теор. вероятн. и её примен. – Т. 47, №1. – С. 21–38.

4. *Ватутин В.А.* Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде / *В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова* // Теор. вероятн. и её примен. – 2007. – Т. 52, №2. – С. 271–300.
5. *Ватутин В.А.* Волны в редуцированных ветвящихся процессах в случайной среде / *В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова* // Теор. вероятн. и её примен. – 2008. – Т. 53, №4. – С. 665–683.
6. *Зубков А.М.* Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка / *А.М. Зубков* // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – Т. 20, №3. – С. 614–623.
7. *Сагитов С.М.* Общие предки в критических ветвящихся процессах Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц / *С.М. Сагитов* // Изв. АН Каз ССР Сер. физ-мат. н. – 1982. – №3. – С. 66–69.
8. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы / *Б.А. Севастьянов.* – М.: Наука, 1971.
9. *Якымив А.Л.* Докритические и надкритические редуцированные ветвящиеся процессы / *А.Л. Якымив.* – М., 1980.
10. *Якымив А.Л.* Редуцирование ветвящиеся процессы / *А.Л. Якымив* // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – Т. 25, №3. – С. 593–596.
11. *Borovkov K.A.* Reduced critical branching processes in random environment / *K.A. Borovkov, V.A. Vatutin* // Stoch. Proc. and their Appl. – 1997. – Vol. 71, №2. – P. 225—240.
12. *Fleischmann K.* The structure of reduced critical Galton-Watson processes / *K. Fleischmann, R. Siegmund-Schultze* // Math. Nachr. – 1977. – Vol. 79. – P. 233–241.
13. *Lager A.* Reduces branching processes with very heavy tails / *A. Lager, S. Sagitov* // arhiv:0710.2750 v1[math. PR], 15.10.2007.
14. *Rahimov I.* Limit distribution for generalized reduced branching processes / *I. Rahimov* // PDF version.

Стаття: надійшла до редакції 16.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

INTEGRAL EQUATION FOR PROCESSES WITH CONTINUOUS TIME

Iryna BAZYLEVYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: i_bazylevych@yahoo.com

The asymptotics of the generating function as $\tau \downarrow 0$ and $t \downarrow 0$, and the integral equation for reduced branching processes with continuous time are constructed.

Key words: branching process, reduced branching processes, generating function, integral equation, distribution function, asymptotics, random variable.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РЕДУЦИРУИМЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Ирина БАЗИЛЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: i_bazylevych@yahoo.com

Найдено асимптотику производящей функции при $\tau \downarrow 0$, $t \downarrow 0$ и интегральное уравнение для редуцируимого ветвящегося процесса с непрерывным временем.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, редуцируимый ветвящийся процесс, производящая функция, интегральное уравнение, функция распределения, асимптотическое представление, случайная величина.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 12–32
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 12–32

УДК 517.95

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПОКАЗНИКОМ НЕЛІНІЙНОСТІ $q(x,t) > 2 + \frac{2}{n}$

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Досліджено мішану задачу Діріхле для рівняння

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

у циліндричній області з $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. За умови $q(x,t) \geq q_0 > 2 + \frac{2}{n}$ доведено існування слабкого розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, мішана задача, змінний показник нелінійності, узагальнені простори Лебега, слабкий розв'язок, функція Гріна.

1. Вступ. Ми продовжуємо дослідження задачі, розглянутої в [1], [2]. Нехай $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$, $\mathcal{T} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s < t \leq T\}$, $\Lambda = \{(x,t,\xi,s) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid x \in \Omega,\ \xi \in \Omega,\ (t,s) \in \mathcal{T}\}$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T]$. Розглянемо задачу

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{3}$$

де $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_1x_1}$ – оператор Лапласа, g, q, f, u_0 – деякі функції.

Існування розв'язку задачі (1)-(3) за умови, коли змінний показник нелінійності рівняння – функція q – задовольняє умову $q(x,t) < 2$ доведено у [1]. Відповідну задачу з неоднорідною крайовою умовою замість (2) вивчено у [2]. Задачі для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності розглянуто також, наприклад, у [3]-[6]. Детальний огляд літератури за тематикою статті можна знайти у [1].

Мета нашої праці – довести існування узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) у випадку $q(x,t) > 2$.

2. Формулювання основних результатів. Для формулювання результату введемо необхідні позначення. Для кожної області $Q \subset \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ через $\mathcal{L}(Q)$ позначимо множину всіх вимірних за Лебегом підмножин Q, а через $\mathcal{ML}(Q)$ – множину всіх функцій $v : Q \to \mathbb{R}^1$, вимірних стосовно $\mathcal{L}(Q)$. Нехай $L^p(Q)$ $(p \geq 1)$ – стандартний простір Лебега (див. [7, с. 37]) з нормою

$$||u; L^p(Q)|| := \Big(\int\limits_Q |u(y)|^p \, dy \Big)^{1/p},$$

$W^{m,p}(Q)$ $(m \in \mathbb{N},\, p \geq 1)$ – простір Соболєва (див. [7, с. 44]) з нормою

$$||u; W^{m,p}(Q)|| := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D_x^\alpha u; L^p(Q)||^p \Big)^{1/p}.$$

У випадку $Q = (a, b) \subset \mathbb{R}$ писатимемо $L^p(a, b)$ замість $L^p((a, b))$, а при $Q = \Omega$ вживатимемо позначення

$$||u||_p := ||u; L^p(\Omega)||, \qquad ||u||_{m,p} := ||u; W^{m,p}(\Omega)||. \tag{4}$$

Аналогічно, як в [7, с. 145], будемо у разі потреби розглядати функцію $u = u(x, t)$, $(x, t) \in Q_{0,T}$, як функцію, яка кожному моменту часу $t \in (0, T)$ ставить у відповідність функцію змінної $x \in \Omega$ і писатимемо $u(t)$ замість $u(\cdot, t)$. Через $L^k(0, T; L^p(\Omega))$ $(k \geq 1,\, p \geq 1)$ позначимо стандартний простір Лебега (див. [7, с. 154]) з нормою

$$||u||_{p,k,T} \equiv ||u; L^k(0, T; L^p(\Omega))|| := \Big(\int\limits_0^T ||u(t)||_p^k \, dt \Big)^{1/k}. \tag{5}$$

Нехай $C^{(2,\omega)}$ – клас Діні гіперповерхонь у просторі $\mathbb{R}^n$, що відповідає деякій функції $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (див., наприклад, [2, с. 32-33]). Припустимо, що виконуються умови:

(E): $\partial\Omega \in C^{(2,\omega)}$;

(G): $g \in \mathcal{ML}(Q_{0,T})$, $|g(x, t)| \leq g^0 < +\infty$ майже для всіх $(x, t) \in Q_{0,T}$;

(Q): $q \in \mathcal{ML}(Q_{0,T})$, $2 < q_0 \leq q^0 < +\infty$, де
$q_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x, t)$, $q^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x, t)$;

(UF): $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^{\varkappa}(0, T; L^p(\Omega))$, де $p > 1$ та $\varkappa > 1$ – фіксовані числа.

Нехай $\mathtt{G}$ – функція Гріна (див. [8, с. 1118]) мішаної задачі

$$u_t - \Delta u = h(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \qquad u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Зауважимо (див. теорему 2.8 з [9, с. 136]), що при виконанні умови **(E)** така функція $\mathtt{G}$ існує і задовольняє на Λ оцінку

$$|D_x^\alpha \mathtt{G}(x, t, \xi, s)| \leq M_1 \, (t - s)^{-\frac{n+|\alpha|}{2}} \, e^{-M_2 \frac{|x-\xi|^2}{t-s}}, \quad |\alpha| \leq 2, \tag{7}$$

де $M_1, M_2 > 0$ – сталі; α – мультиіндекс, та формулу згортки

$$\mathtt{G}(x, t, \xi, s) = \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t, y, \tau)\mathtt{G}(y, \tau, \xi, s) \, dy, \quad \tau \in (s, t). \tag{8}$$

Оскільки головна частина (1) має сталі коефіцієнти, то можна довести, що

$$\mathtt{G}(x, t + \tau, \xi, s + \tau) = \mathtt{G}(x, t, \xi, s), \quad \tau \in (0, T - t). \tag{9}$$

Аналогічно як в [1] подамо означення розв'язку нашої задачі.

Означення 1. *Слабким (узагальненим) розв'язком задачі (1)-(3) називатимемо таку функцію* $u \in L^{\varkappa}(0,\tau;L^p(\Omega))$, *яка майже для всіх* $(x,t) \in Q_{0,T}$ *задовольняє рівність*

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,s)f(\xi,s)\,d\xi ds - \\ - \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,s)g(\xi,s)|u(\xi,s)|^{q(\xi,s)-2}u(\xi,s)\,d\xi ds. \tag{10}$$

Якщо $\tau = T$, *то розв'язок називатимемо глобальним. При* $\tau \in (0,T)$ *розв'язок називатимемо локальним.*

Основний результат праці – наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(E)**, **(G)**, виконується умова **(Q)** зі сталими* q_0 *і* q^0, *причому* $2+\frac{n}{2} < q_0 \le q^0 < +\infty$ *й умова **(UF)** зі сталими* $p>1$, $\varkappa \in (q^0-1,p)$. *Якщо, додатково,* $p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2$, $\varkappa \in [\frac{2p(q^0-1)}{2p-n(q^0-1)}, \frac{2p}{n(q^0-2)})$, *то мішана задача (1)-(3) має слабкий розв'язок* $u \in L^{\varkappa}(0,\tau;L^p(\Omega))$ *при виконанні однієї з умов:*

1) $\tau \in (0,T]$ *є досить малим (локальний розв'язок);*
2) *норми* u_0 *в* $L^p(\Omega)$ *та* f *в* $L^{\varkappa}(0,T;L^p(\Omega))$ *є досить малими (глобальний розв'язок для малих вихідних даних).*

Теорема 1 поширює результати праці [10] на випадок рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Її доведення подано у підрозділі 4. Деякі допоміжні твердження містить третій підрозділ цієї праці.

3. Допоміжні факти. Нехай X – деякий нормований простір з нормою $||\cdot;X||$, $B \subset X$, $\mathcal{A}: X \to X$.

Означення 2. *Оператор* $\mathcal{A}$ *називається стиском на множині* B *(див.* [11, с. 380]*), якщо існує така стала (коефіцієнт стиску)* $D \in (0,1)$, *що для всіх* $x,y \in B$ *виконується оцінка* $||\mathcal{A}x - \mathcal{A}y;X|| \le D||x-y;X||$.

Для доведення теореми 1 користуватимемося таким твердженням.

Твердження 1. *(Теорема з* [11, с. 381]*). Нехай* X *– банахів простір,* $B \subset X$ *– замкнена множина,* $\mathcal{A}: X \to X$ *– оператор, який задовольняє умови: 1)* $\mathcal{A}(B) \subset B$; *2)* $\mathcal{A}$ *– стиск на* B *з коефіцієнтом стиску* D. *Тоді оператор* $\mathcal{A}$ *має в* B *єдину нерухому точку* x^*. *Крім того, якщо* $x_0 \in B$ *та* $x_j := \mathcal{A}x_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, *то:*

i) $\forall\, j \in \mathbb{N}$: $x_j \in B$;

ii) $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ *в просторі* X;

iii) $\forall\, j \in \mathbb{N}$: $||x_j - x^*;X|| \le \frac{D^j}{1-D}\,||\mathcal{A}x_0 - x_0;X||$.

Для того, щоб використати твердження 1, подамо рівність (10) у вигляді

$$u = \mathcal{A}u, \tag{11}$$

де $\mathcal{A}$ – деякий оператор. Для зручності введемо додаткові позначення. Розглянемо двопараметричну сім'ю лінійних інтегральних операторів $\{\mathcal{I}(t,s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$, сім'ю нелінійних операторів Немицького $\{\mathcal{N}(t)\}_{t\in[0,T]}$ і лінійний інтегральний оператор $\mathcal{J}_0$ такі, що

$$(\mathcal{I}(t,s)v)(x) := \int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,s)v(\xi)\,d\xi, \quad x\in\Omega, \quad (t,s)\in\mathcal{T}, \tag{12}$$

$$(\mathcal{N}(t)v)(x) := g(x,t)|v(x)|^{q(x,t)-2}v(x), \quad x\in\Omega, \quad t\in[0,T], \tag{13}$$

$$(\mathcal{J}_0 v)(x,t) := \Big(\mathcal{I}(t,0)v\Big)(x) = \int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,0)v(\xi)\,d\xi, \ \ (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{14}$$

де v – функція змінної x. Нехай лінійний інтегральний оператор $\mathcal{J}$ такий:

$$(\mathcal{J}w)(x,t) := \int\limits_0^t \Big(\mathcal{I}(t,s)w(s)\Big)(x)\,ds = \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,s)w(\xi,s)\,d\xi ds, \ (x,t)\in Q_{0,T}. \tag{15}$$

Тут w – функція змінних (x,t). Нехай сім'я елементів $\{z_0(t)\}_{t\in[0,T]}$ є такою, що

$$(z_0(t))(x) := (\mathcal{J}_0 u_0)(x,t) + (\mathcal{J}f)(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t\in[0,T], \tag{16}$$

де u_0 і f взято з умови **(UF)**. Аргумент x часто опускатимемо, а означення введених операторів (область визначення і т.д.) уточнимо далі.

Зрозуміло, що (11) збігається з (10), якщо

$$(\mathcal{A}u)(t) := z_0(t) - \int\limits_0^t \mathcal{I}(t,s)\mathcal{N}(s)u(s)\,ds, \quad t\in[0,T]. \tag{17}$$

Для зручності потрібні нам далі числові перетворення подано у вигляді леми.

Лема 1. *Нехай числа q_0, q^0, r і p задовольняють умови $2<q_0\le q^0<+\infty$, $1<r\le p<+\infty$;*

$$\varkappa := \frac{2}{n}\frac{pr}{p-r} \quad (\textit{для } r\neq p), \qquad \phi := \frac{n}{2}(q_0-2); \tag{18}$$

функції σ і β означено так:

$$\sigma(p_1,p_2) := \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\Big), \quad p_1,p_2\ge 1, \tag{19}$$

$$\beta(s_1,s_2) := \frac{n(s_1-2)}{2s_2}, \quad s_1\ge 2, \quad s_2\ge 1. \tag{20}$$

Нехай також $\gamma>2$ – фіксоване число. Тоді виконуються такі твердження:

1) $\sigma(r,p)\ge 0$, $\varkappa=\frac{1}{\sigma(r,p)}>0$ *при* $r\neq p$, $\beta(q^0,r)=\frac{\phi}{r}\ge 0$, $\beta(\gamma,p)\le\beta(\gamma,r)$;
2) $\phi>1$ *тоді і тільки тоді, коли* $q_0>2+\frac{2}{n}$;
3) *якщо* $p>r\ge\frac{n}{2}(q^0-1)$, *то* $0<\sigma(r,p)<\frac{1}{q^0-1}$ *та* $\varkappa>q^0-1$;
4) $p>\phi$ *тоді і тільки тоді, коли* $\beta(q^0,p)\in(0,1)$;
5) $p>r(\gamma-1)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\beta(\gamma,p)\varkappa<1$;
6) $\beta(\gamma,p)\varkappa=\beta(\gamma,r)\varkappa-(\gamma-2)$;

7) *якщо* $p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2$ *і* $r \in [\frac{n}{2}(q^0-1), \frac{p}{q^0-1})$, *то* $\varkappa \in [\frac{2p(q^0-1)}{2p-n(q^0-1)}, \frac{2p}{n(q^0-2)})$.

Доведення. 1) Твердження цього пункту очевидне.

2) Такі нерівності еквівалентні: $\phi > 1$, $\frac{n}{2}(q_0-2) > 1$, $q_0 - 2 > \frac{2}{n}$, $q_0 > 2 + \frac{2}{n}$.

3) Зрозуміло, що при $p > r$ отримаємо нерівності $\varkappa > 0$, $\sigma > 0$ і тому, враховуючи рівність з пункту 1, оцінки $\sigma(r,p) < \frac{1}{q^0-1}$ та $\varkappa > q^0 - 1$ є еквівалентними.

Оскільки $r \geq \frac{n}{2}(q^0-1)$, то $r \geq \frac{n(q^0-2)(q^0-1)}{2(q^0-2)} = \phi\,\frac{q^0-1}{q^0-2}$, зокрема $r > \phi$. Тоді

$$\frac{1}{r} \leq \frac{q^0-2}{\phi(q^0-1)} = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi(q^0-1)}.$$

Отже,

$$\frac{1}{\phi(q^0-1)} \leq \frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\phi} \leq (q^0-1)\Big(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}\Big), \quad \frac{1}{\phi} - (q^0-1)\Big(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}\Big) \leq 0.$$

Тому для всіх додатних p, тобто і для $p > r$ одержуємо

$$\frac{q^0-1}{p} > \frac{1}{\phi} - (q^0-1)\Big(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}\Big) = \frac{1}{\phi} - \frac{q^0-1}{\phi} + \frac{q^0-1}{r} = \frac{2-q^0}{\phi} + \frac{q^0-1}{r} =$$

$$= \frac{2-q^0}{\frac{n}{2}(q^0-2)} + \frac{q^0-1}{r} = -\frac{2}{n} + \frac{q^0-1}{r}.$$

Поділивши отриману нерівність на $q^0 - 1 > 0$, отримаємо таке:

$$\frac{1}{p} > -\frac{2}{n(q^0-1)} + \frac{1}{r}, \quad \frac{2}{n(q^0-1)} > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{q^0-1} > \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\Big) = \sigma(r,p).$$

4) Твердження цього пункту очевидне.

5) Зрозуміло, що $p > r$ і що наступні нерівності еквівалентні

$$p > r(\gamma-1), \quad p - r > r(\gamma-2), \quad 1 > \frac{r(\gamma-2)}{p-r} = \frac{n(\gamma-2)}{2p}\,\frac{2}{n}\,\frac{pr}{p-r} = \beta(\gamma,p)\varkappa.$$

6) Оскільки

$$\beta(\gamma,p) + \sigma(r,p)(\gamma-2) = \frac{n(\gamma-2)}{2p} + \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\Big)(\gamma-2) =$$

$$= \frac{n(\gamma-2)}{2p} + \frac{n(\gamma-2)}{2r} - \frac{n(\gamma-2)}{2p} = \frac{n(\gamma-2)}{2r} = \beta(\gamma,r),$$

то з пункту 1 випливає формула $\beta(\gamma,p) + \frac{1}{\varkappa}(\gamma-2) = \beta(\gamma,r)$.

7) Зрозуміло, що $\varkappa := \frac{2}{n}\,\frac{p}{\frac{p}{r}-1}$ – зростаюча функція за r. Тоді

$$\varkappa|_{r=\frac{n}{2}(q^0-1)} = \frac{2}{n}\,\frac{p}{\frac{p}{\frac{n}{2}(q^0-1)}-1} = \frac{2p}{\frac{2p}{q^0-1}-n} = \frac{2p(q^0-1)}{2p-n(q^0-1)},$$

$$\varkappa|_{r=\frac{p}{q^0-1}} = \frac{2}{n}\,\frac{p}{\frac{p}{\frac{p}{q^0-1}}-1} = \frac{2p}{n(q^0-2)},$$

звідки і випливає твердження нашого пункту.

Лему доведено. □

Отримаємо деякі властивості введених операторів.

Лема 2. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє оцінку (7),* $\lambda \in [1, +\infty)$ *– фіксоване число,*

$$J_\lambda^\alpha(x,t,s) := \int\limits_\Omega |D_x^\alpha \mathtt{G}(x,t,\xi,s)|^\lambda \, d\xi, \qquad \widehat{J}_\lambda^\alpha(\xi,t,s) := \int\limits_\Omega |D_x^\alpha \mathtt{G}(x,t,\xi,s)|^\lambda \, dx, \tag{21}$$

$(x,t,\xi,s) \in \Lambda$, α *– мультиіндекс. Тоді існує така стала* $\mathscr{M}_1(\lambda) > 0$*, що для всіх* α *(*$|\alpha| \le 2$*) і для всіх* $(x,t,\xi,s) \in \Lambda$ *виконуються оцінки*

$$J_\lambda^\alpha \le \frac{\mathscr{M}_1(\lambda)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\lambda-1)+\frac{|\alpha|}{2}\lambda}}, \qquad \widehat{J}_\lambda^\alpha \le \frac{\mathscr{M}_1(\lambda)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\lambda-1)+\frac{|\alpha|}{2}\lambda}}. \tag{22}$$

Доведення. Використовуючи оцінку (7) та збільшивши область інтегрування з Ω до $\mathbb{R}^n$, одержимо

$$J_\lambda^\alpha \le \frac{M_1^\lambda}{(t-s)^{\lambda\frac{n+|\alpha|}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-M_2\lambda\frac{|x-\xi|^2}{t-s}} \, d\xi.$$

Зробивши заміну змінних $\xi \rightsquigarrow \eta$, де $\xi = x + \sqrt{\frac{t-s}{M_2\lambda}}\,\eta$, $d\xi = (\sqrt{\frac{t-s}{M_2\lambda}})^n \, d\eta$, одержимо

$$J_\lambda^\alpha \le \frac{M_1^\lambda}{(t-s)^{\lambda\frac{n+|\alpha|}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(t-s)^{\frac{n}{2}}}{(M_2\lambda)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-|\eta|^2} \, d\eta = \frac{\mathscr{M}_1(\lambda)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\lambda-1)+\frac{|\alpha|}{2}\lambda}},$$

де $\mathscr{M}_1(\lambda) = M_1^\lambda(\frac{\pi}{M_2\lambda})^{\frac{n}{2}}$. Другу оцінку з (22) з тією самою сталою $\mathscr{M}_1(\lambda)$ отримуємо аналогічно. Лему доведено. $\square$

Зауважимо, що у випадку $|\alpha| = 0$ оцінки (22) отримано у лемі 2 [1, с. 83]. Тепер доведемо аналог півгрупової властивості для введених операторів.

Лема 3. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє рівності (7)-(9), сім'я операторів* $\{\mathcal{I}(t,s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$ *означена у (12). Тоді для всіх* $(t_1,s_1) \in \mathcal{T}$, $(t_2,s_2) \in \mathcal{T}$ *(*$t_2 \in (0, T-t_1)$, $s_2 \in (0, t_1+t_2-s_1)$*) виконується рівність*

$$\mathcal{I}(t_1+t_2, s_1+s_2) = \mathcal{I}(t_1,s_1) \circ \mathcal{I}(t_2,s_2). \tag{23}$$

Доведення. Використавши (8) (зауважимо, що $\tau = s_1 + t_2 \in (s_1+s_2, t_1+t_2)$, бо $s_1 < t_1$, $s_2 < t_2$), (9) та теорему Фубіні, отримаємо

$$\mathcal{I}(t_1+t_2, s_1+s_2)v = \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t_1+t_2, \xi, s_1+s_2)\, v(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega \mathtt{G}(x,t_1+t_2,y,s_1+t_2)\mathtt{G}(y,s_1+t_2,\xi,s_1+s_2)\, dy\Big) v(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega \mathtt{G}(x,t_1,y,s_1)\mathtt{G}(y,t_2,\xi,s_2)\, dy\Big) v(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x,t_1,y,s_1)\Big(\int\limits_\Omega \mathtt{G}(y,t_2,\xi,s_2)\, v(\xi)\, d\xi\Big)\, dy.$$

Тому $(\mathcal{I}(t_1+t_2,s_1+s_2)v)(x) = \Big(\mathcal{I}(t_1,s_1)\,(\mathcal{I}(t_2,s_2)v)(y)\Big)(x)$ і лему доведено. $\square$

Для доведення наступної леми ми потребуватимемо такого твердження.

Твердження 2. *(Теорема з* [12, с. 293]*). Якщо* $m \in \mathbb{N}$, $\partial\Omega \in C^m$ *та* $1 < q_1 < q_2 < +\infty$, $a := \frac{n}{m}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right) \le 1$, *то існує стала* $\mathcal{C}(q_1, q_2, m) > 0$ *така, що для всіх* $v \in W^{m,q_1}(\Omega)$ *виконується (див. позначення (4)) нерівність Соболева*

$$||v||_{q_2} \le \mathcal{C}(q_1, q_2, m)\, ||v||^a_{m,q_1} ||v||^{1-a}_{q_1}. \tag{24}$$

Зауважимо також, що для всіх $\lambda > 0$, $\eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$|\eta_1 + \ldots + \eta_m|^\lambda \le m^\lambda (\max_{1\le j\le m} |\eta_j|)^\lambda \le m^\lambda (|\eta_1|^\lambda + \ldots + |\eta_m|^\lambda). \tag{25}$$

Лема 4. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє оцінку (7), сім'я операторів* $\{\mathcal{I}(t, s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$ *означена у (12),* σ *– функція з (19),* $1 < p_1 \le p_2 < +\infty$. *Тоді для всіх* $(t, s) \in \mathcal{T}$ *лінійний оператор* $\mathcal{I}(t, s) : L^{p_1}(\Omega) \to L^{p_2}(\Omega)$ *є обмеженим (тому і неперервним). Крім того, існує стала* $\mathscr{M}_2(p_1, p_2) > 0$ *така, що для всіх* $v \in L^{p_1}(\Omega)$ *та* $(t, s) \in \mathcal{T}$ *виконується нерівність*

$$||\mathcal{I}(t, s)v||_{p_2} \le \frac{\mathscr{M}_2(p_1, p_2)}{(t - s)^{\sigma(p_1,p_2)}} ||v||_{p_1}. \tag{26}$$

Нерівність (26) виконується також при $p_1 = p_2 = 1$.

Доведення. Для доведення леми достатньо довести (26). Нехай спочатку $p_1 = p_2 = 1$. Тоді з теореми Фубіні та оцінки (22) з $\alpha = 0$ і $\lambda = 1$ отримаємо таке:

$$||\mathcal{I}(t, s)v||_1 = \int\limits_\Omega \Big|\int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t, \xi, s)v(\xi)\, d\xi\Big|\, dx \le \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, |v(\xi)|\, d\xi\Big)\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, dx\Big) |v(\xi)|\, d\xi \le \mathscr{M}_1(1) \int\limits_\Omega |v(\xi)|\, d\xi = \mathscr{M}_1(1)\, ||v||_1$$

для всіх $(t, s) \in \mathcal{T}$. Нехай далі $p_1 \in (1, +\infty)$, $p_1' = \frac{p_1}{p_1 - 1}$ (тобто $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$), $v \in L^{p_1}(\Omega)$, $(t, s) \in \mathcal{T}$. Розглянемо три випадки.

1. Припустимо спочатку, що $p_2 = p_1$. Для зручності позначимо $I_1 := ||\mathcal{I}(t, s)v||_{p_1}$. Використавши нерівність Гельдера, одержимо

$$I_1^{p_1} = \int\limits_\Omega \Big|\int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t, \xi, s)v(\xi)\, d\xi\Big|^{p_1} dx \le$$

$$\le \int\limits_\Omega \Big|\int\limits_\Omega |\mathtt{G}|^{\frac{1}{p_1'}} |\mathtt{G}|^{\frac{1}{p_1}} |v|\, d\xi\Big|^{p_1} dx \le \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |\mathtt{G}|\, d\xi\Big)^{\frac{p_1}{p_1'}} \Big(\int\limits_\Omega |\mathtt{G}|\, |v|^{p_1}\, d\xi\Big)\, dx. \tag{27}$$

Використавши (22) з $\alpha = 0$ і $\lambda = 1$, рівність $\frac{p_1}{p_1'} = p_1 - 1$ та теорему Фубіні, отримаємо

$$I_1^{p_1} \le |\mathscr{M}_1(1)|^{p_1 - 1} \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, |v(\xi)|^{p_1}\, d\xi\Big)\, dx =$$

$$= |\mathscr{M}_1(1)|^{p_1 - 1} \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, dx\Big) |v(\xi)|^{p_1}\, d\xi \le |\mathscr{M}_1(1)|^{p_1} ||v||^{p_1}_{p_1},$$

звідки й одержуємо (26) з $\sigma(p_1, p_1) = 0$, $\mathscr{M}_2(p_1, p_2) = \mathscr{M}_1(1)$.

2. Нехай тепер $p_2 \in (p_1, +\infty)$ і, крім того, $\sigma(p_1, p_2) \le 1$. Для зручності позначимо $I_2 := ||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_2}$. Тоді з оцінки (24) для $a := \sigma(p_1, p_2)$, $m = 2$, $q_1 := p_1$, $q_2 := p_2$ отримаємо, що

$$I_2 \le \mathcal{C}(p_1, p_2, 2)\, ||\mathcal{I}(t,s)v||_{2,p_1}^{\sigma(p_1,p_2)} ||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_1}^{1-\sigma(p_1,p_2)} =$$

$$= \mathcal{C}(p_1, p_2, 2)\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} ||D_x^\alpha \mathcal{I}(t,s)v||_{p_1}^{p_1}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} ||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_1}^{1-\sigma(p_1,p_2)} = \mathcal{C}(p_1, p_2, 2)\ \times$$

$$\times\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\int_\Omega \Big|\int_\Omega D_x^\alpha \mathsf{G}(x,t,\xi,s)v(\xi)\,d\xi\Big|^{p_1}dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\Big(\int_\Omega\Big|\int_\Omega \mathsf{G}(x,t,\xi,s)v(\xi)\,d\xi\Big|^{p_1}dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}.$$

Застосувавши до наявних тут інтегральних виразів перетворення типу (27), отримаємо таке:

$$I_2 \le \mathcal{C}(p_1, p_2, 2)\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\int_\Omega \Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathsf{G}|\,d\xi\Big)^{\frac{p_1}{p_1'}}\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathsf{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\Big(\int_\Omega |\mathsf{G}|\,d\xi\Big)^{\frac{p_1}{p_1'}}\Big(\int_\Omega |\mathsf{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}.$$

Тому з (22) для $\lambda = 1$, рівності $\frac{p_1}{p_1'} = p_1 - 1$ та теореми Фубіні випливає, що

$$I_2 \le \mathcal{C}(p_1, p_2, 2)\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\int_\Omega \Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}}}\Big)^{p_1-1}\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathsf{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{1}\Big)^{p_1-1}\Big(\int_\Omega |\mathsf{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} =$$

$$= C_1\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}(p_1-1)}}\int_\Omega\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathsf{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\Big(\int_\Omega |\mathsf{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} =$$

$$= C_1\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}(p_1-1)}}\int_\Omega |v(\xi)|^{p_1}\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathsf{G}|\,dx\Big)\,d\xi\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega |v(\xi)|^{p_1}\Big(\int_\Omega |\mathsf{G}|\,dx\Big)\,d\xi\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}.$$

Тоді знову з (22) для $\lambda = 1$ одержимо, що

$$I_2 \le C_1\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}(p_1-1)}}\int_\Omega |v(\xi)|^{p_1}\Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}}}\Big)\,d\xi\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{\Omega} |v(\xi)|^{p_1} \Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{1}\Big)\, d\xi\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} =$$

$$= C_2\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1}} \int\limits_{\Omega} |v(\xi)|^{p_1}\, d\xi\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} \Big(\int\limits_{\Omega} |v(\xi)|^{p_1}\, d\xi\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} =$$

$$= C_2||v||_{p_1}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1}}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}. \tag{28}$$

Оскільки $|\alpha| \le 2$, $s < t \le T$, то

$$\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1}} = \frac{(t-s)^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1+(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}} = \frac{(t-s)^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{p_1}} \le \frac{T^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{p_1}}.$$

Використавши цю оцінку та (25), з (28) одержимо оцінку

$$I_2 \le C_2||v||_{p_1}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{T^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{p_1}}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} = \frac{C_2||v||_{p_1}}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} T^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} \le$$

$$\le \frac{C_3||v||_{p_1}}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}\Big(T^{p_1}+T^{\frac{p_1}{2}}+1\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} \le \frac{C_4||v||_{p_1}}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}\Big(T+\sqrt{T}+1\Big)^{\sigma(p_1,p_2)}, \tag{29}$$

де стала $C_4 > 0$ не залежить від t, s, v, T. Отже, ми отримали оцінку (26) зі сталою $\mathscr{M}_2(p_1,p_2)$, яка залежить від T, проте є обмеженою і відокремленою від нуля при $T \to +0$ (це ми використовуватимемо далі).

3. Нехай тепер $p_2 \in (p_1, +\infty)$ і $\sigma(p_1,p_2) > 1$. Оскільки $\sigma(p,q) \underset{|p-q|\to 0}{\longrightarrow} 0$, то інтервал (p_1,p_2) можна розбити на k частин так: $p_1 = r_0 < r_1 < \ldots < r_{k-1} < r_k = p_2$, $\sigma(r_{j-1},r_j) \le 1$, $j=\overline{1,k}$. З вигляду функції σ випливає, що

$$\sigma(r_0,r_1)+\sigma(r_1,r_2)+\ldots+\sigma(r_{k-1},r_k) = \sigma(r_0,r_k) = \sigma(p_1,p_2).$$

Тому, використавши формулу (23) і вже доведений частинний випадок оцінки (26) для показників r_{j-1}, r_j, одержимо таке:

$$||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_2} = ||\mathcal{I}(t,s)v||_{r_k} = \Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k}+\ldots+\frac{t}{k}, \frac{s}{k}+\ldots+\frac{s}{k}\Big)v\Big|\Big|_{r_k} =$$

$$= \Big|\Big|\underbrace{\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)\circ\ldots\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)}_{k}v\Big|\Big|_{r_k} \le \frac{\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)}{(\frac{t-s}{k})^{\sigma(r_{k-1},r_k)}}\Big|\Big|\underbrace{\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)\circ\ldots\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)}_{k-1}v\Big|\Big|_{r_{k-1}} \le$$

$$\le \frac{\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)\mathscr{M}_2(r_{k-2},r_{k-1})}{(\frac{t-s}{k})^{\sigma(r_{k-1},r_k)+\sigma(r_{k-2},r_{k-1})}}\Big|\Big|\underbrace{\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)\circ\ldots\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)}_{k-2}v\Big|\Big|_{r_{k-2}} \le \ldots \le$$

$$\le \frac{\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)\mathscr{M}_2(r_{k-2},r_{k-1})\cdot\ldots\cdot\mathscr{M}_2(r_0,r_1)}{(\frac{t-s}{k})^{\sigma(r_{k-1},r_k)+\sigma(r_{k-2},r_{k-1})+\ldots+\sigma(r_0,r_1)}}||v||_{r_0} = \frac{\mathscr{M}_2(p_1,p_2)}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}||v||_{p_1},$$

де $\mathscr{M}_2(p_1,p_2) := k^{\sigma(p_1,p_2)}\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)\mathscr{M}_2(r_{k-2},r_{k-1})\cdot\ldots\cdot\mathscr{M}_2(r_0,r_1)$. □

Зауваження 1. За певних умов аналог оцінки (26) отримано у [12, с. 293].

Лема 5. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє (7), оператор* $\mathcal{J}_0$ *означено у (14),* σ *– функція з (19),* $1 < p_1 \leq p_2 < +\infty$, $\sigma(p_1, p_2) \leq 1$, $\tau \in (0, T]$. *Тоді лінійний інтегральний оператор* $\mathcal{J}_0 : L^{p_1}(\Omega) \to L^{\mu}(0, \tau; L^{p_2}(\Omega))$ *є обмеженим (тому і неперервним), якщо виконується одна з умов: 1)* $p_2 = p_1$, $\mu \geq 1$*; 2)* $p_2 > p_1$, $\mu \in [1, \frac{1}{\sigma(p_1,p_2)})$. *Крім того, існує така незалежна від* τ *стала* $\mathscr{L}_0(p_1, p_2) > 0$, *що для всіх* $v \in L^{p_1}(\Omega)$ *виконується оцінка*

$$||\mathcal{J}_0 v||_{p_2,\mu,\tau} \leq \mathscr{L}_0(p_1, p_2)\, \tau^{\frac{1}{\mu} - \sigma(p_1,p_2)} ||v||_{p_1}, \tag{30}$$

причому $\frac{1}{\mu} - \sigma(p_1, p_2) > 0$.

Доведення. Нехай p_1, p_2 такі як у формулюванні леми, $\mu \geq 1$, $\tau \in (0, T]$, $v \in L^{p_1}(\Omega)$, $I_3 := ||\mathcal{J}_0 v||^{\mu}_{p_2,\mu,\tau}$. Використавши (26) для $s = 0$ (це законно, бо $p_1 \leq p_2$), одержуємо, що

$$I_3 = \int_0^\tau ||\mathcal{I}(t, 0)v||^{\mu}_{p_2}\, dt \leq \int_0^\tau \Big(\frac{\mathscr{M}_2(p_1, p_2)}{t^{\sigma(p_1,p_2)}} ||v||_{p_1} \Big)^{\mu} dt = |\mathscr{M}_2(p_1, p_2)|^{\mu} I_4 ||v||^{\mu}_{p_1}, \tag{31}$$

де $I_4 := \int_0^\tau \frac{dt}{t^{\sigma(p_1,p_2)\mu}}$. У випадку 1 отримаємо, що $\sigma(p_1, p_1) = 0$, тому $I_4 = \int_0^\tau dt = \tau$ для всіх μ. У випадку 2 з вибору μ випливає, що $\sigma(p_1, p_2)\mu < 1$, тому $I_4 = \frac{\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}}{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}$. В обох випадках лему доведено, бо (30) випливає з (31). □

Для подальших потреб нагадаємо таке твердження.

Твердження 3. *(Теорема 202 з* [17, с. 179]*). Якщо* $k \geq 1$, *то*

$$\int_a^b \Big| \int_c^d h(t, s)\, ds \Big|^k dt \leq \Big[\int_c^d \Big| \int_a^b |h(t, s)|^k\, dt \Big|^{\frac{1}{k}} ds \Big]^k.$$

Лема 6. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє (7), оператор* $\mathcal{J}$ *означено у (15),* σ *– функція з (19),* $1 < p_1 \leq p_2 < +\infty$, $\sigma(p_1, p_2) \leq 1$, $\tau \in (0, T]$. *Тоді лінійний інтегральний оператор* $\mathcal{J} : L^{\lambda}(0, \tau; L^{p_1}(\Omega)) \to L^{\mu}(0, \tau; L^{p_2}(\Omega))$ *є обмеженим (тому і неперервним), якщо виконується одна з умов: 1)* $p_2 = p_1$, $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$*; 2)* $p_2 > p_1$, $\lambda \geq 1$, $\mu \in [1, \frac{1}{\sigma(p_1,p_2)})$. *Крім того, існує незалежна від* τ *стала* $\mathscr{L}(p_1, p_2; \lambda, \mu) > 0$ *така, що для всіх* $v \in L^{\lambda}(0, T; L^{p_1}(\Omega))$ *виконується оцінка*

$$||\mathcal{J} w||_{p_2,\mu,\tau} \leq \mathscr{L}(p_1, p_2; \lambda, \mu) \tau^{\frac{1}{\mu} - \sigma(p_1,p_2) + \frac{\lambda-1}{\lambda}} ||v||_{p_1,\lambda,\tau}, \tag{32}$$

причому $\frac{1}{\mu} - \sigma(p_1, p_2) > 0$.

Доведення. Нехай p_1, p_2 такі як у формулюванні леми, $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$, $\tau \in (0, T]$, $v \in L^{\lambda}(0, \tau; L^{p_1}(\Omega))$, $I_5 := ||\mathcal{J} w||^{\mu}_{p_2,\mu,\tau}$. Тоді

$$I_5 = \int_0^\tau \Big|\Big| \int_0^t \mathcal{I}(t, s) w(s)\, ds \Big|\Big|^{\mu}_{p_2} dt \leq \int_0^\tau \Big[\int_0^t ||\mathcal{I}(t, s) w(s)||_{p_2}\, ds \Big]^{\mu} dt =$$

$$= \int_0^\tau \Big[\int_0^\tau \chi(t, s) ||\mathcal{I}(t, s) w(s)||_{p_2}\, ds \Big]^{\mu} dt,$$

де

$$\chi(t,s)=\begin{cases}1, & t>s,\\ 0, & t\le s.\end{cases} \tag{33}$$

Використавши оцінку з твердження 3, одержимо

$$I_5\le\Big[\int_0^\tau\Big|\int_0^\tau \chi^\mu(t,s)||\mathcal{I}(t,s)w(s)||_{p_2}^\mu\,dt\Big|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu=\Big[\int_0^\tau\Big|\int_s^\tau ||\mathcal{I}(t,s)w(s)||_{p_2}^\mu\,dt\Big|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu.$$

Використавши оцінку (26) (це законно, бо $0\le\sigma(p_1,p_2)\le 1$), отримаємо, що

$$I_5\le\Big[\int_0^\tau\Big|\int_s^\tau\Big(\frac{\mathscr{M}_2(p_1,p_2)}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}||w(s)||_{p_1}\Big)^\mu dt\Big|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu=$$

$$=|\mathscr{M}_2(p_1,p_2)|^\mu\Big[\int_0^\tau ||w(s)||_{p_1}|I_6|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu, \tag{34}$$

де $I_6=\int_s^\tau\frac{dt}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)\mu}}$. У випадку 1 одержуємо, що $\sigma(p_2,p_2)=0$, тому $I_6=\int_s^\tau dt=$ $=\tau-s\le\tau$ для всіх μ. У випадку 2 з вибору μ випливає, що $\sigma(p_1,p_2)\mu<1$, тому $I_6=\frac{\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}}{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}$. В обох випадках з (34) отримаємо оцінку

$$I_5\le C_5\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}\Big[\int_0^\tau ||w(s)||_{p_1}\,ds\Big]^\mu, \tag{35}$$

де стала $C_5>0$ не залежить від v,τ.

При $\lambda=1$ оцінка (35) збігається з (32). Якщо $\lambda>1$, то, використавши у (35) нерівність Гельдера з показниками $\lambda>1$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}>1$, одержимо таке:

$$I_5\le C_5\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}\Big[\Big(\int_0^\tau ||w(s)||_{p_1}^\lambda\,ds\Big)^{\frac{1}{\lambda}}\Big(\int_0^\tau ds\Big)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\Big]^\mu\le C_5\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu+\frac{\lambda-1}{\lambda}\mu}||w||_{p_1,\lambda,\tau},$$

звідки і випливає (32). Лему доведено. □

Зауваження 2. Аналог оцінки (30) з $\lambda=p_1=p_2$ отримано у лемі 1 з [2, с. 34], а оцінки (32) з $\lambda=\mu=p_1=p_2$ – у лемі 2 з [2, с. 35]. Зауважимо також, що на відміну від леми 4, твердження лем 6 і 5 не можна отримати при $\sigma(p_1,p_2)>1$ запропонованим тут методом, бо інтеграли I_4, I_6 з доведення цих лем є розбіжними для всіх $\mu\ge 1$.

Тепер нагадаємо декілька оцінок.

Зауваження 3. Якщо $q\ge 2$, то з теореми 1 [13, с. 2] для всіх $\xi,\eta\in\mathbb{R}$ одержуємо, що

$$\big|\,|\xi|^{q-2}\xi-|\eta|^{q-2}\eta\,\big|\le(q-1)2^{2-q}(|\xi|+|\eta|)^{q-2}|\xi-\eta|. \tag{36}$$

При розгляді рівнянь зі змінними показниками нелінійності виникає потреба працювати з узагальненими просторами Лебега, які вперше введено у [14] (деякі їхні властивості вивчено у [15]). Нехай $Q\subset\mathbb{R}^m$ ($m\in\mathbb{N}$) – обмежена область,

$$p\in\mathcal{ML}(Q),\quad p_0:=\operatorname*{ess\,inf}_{y\in Q}p(y),\quad p^0:=\operatorname*{ess\,sup}_{y\in Q}p(y). \tag{37}$$

Узагальненим простором Лебега $L^{p(y)}(Q)$ називається множина таких функцій $v \in \mathcal{ML}(Q)$, для яких $\rho_p(v,Q) < +\infty$, де

$$\rho_p(v,Q) := \int\limits_Q |v(y)|^{p(y)}\, dy.$$

Спершу припустимо, що $1 < p_0 \le p^0 < +\infty$. Тоді цей простір є (див. [15, с. 599, 600]) рефлексивним банаховим простором стосовно норми Люксембурга

$$||v; L^{p(y)}(Q)|| := \inf\{\lambda > 0 \ : \ \rho_p(v/\lambda, Q) \le 1\}.$$

Крім того, виконуються неперервні вкладення $L^{p(y)}(Q) \circlearrowleft L^{r(y)}(Q)$, якщо $p(y) \ge r(y)$ (див. [15, с. 599-600]).

Особливості узагальнених просторів Лебега, зокрема вигляд норми в них, зумовлюють певну специфіку інтегральних оцінок у таких просторах. Нагадаємо узагальнену нерівність Гельдера (див. [16, с. 175]): для всіх функцій $u \in L^{p(y)}(Q)$ та $v \in L^{p'(y)}(Q)$, де $p'(y) = \frac{p(y)}{p(y)-1}$ (тобто $1/p(y) + 1/p'(y) = 1$) майже для всіх $y \in Q$,

$$\int\limits_Q |u(y)v(y)|\, dy \le 2\, ||u; L^{p(y)}(Q)|| \cdot ||v; L^{p'(y)}(Q)||. \tag{38}$$

Справа в (38) наявний множник 2, якого немає при $p(y) \equiv const$. Крім того, наявні в (38) норми, взагалі кажучи, не дорівнюють степеневим функціям від відповідних інтегралів. Для зручності, зокрема використання (38), введемо додаткові позначення. Оператором Лавренюка назвемо відображення $\mathcal{ML}(Q) \ni p \overset{S}{\mapsto} S_p \in \mathcal{ML}(Q)$, яке діє за правилом

$$\forall\, p \in \mathcal{ML}(Q): \quad S_p(s) = \begin{cases} s^{p_0}, & s \in [0,1], \\ s^{p^0}, & s > 1, \end{cases} \tag{39}$$

де числа p_0, p^0 будують для p за правилом (37). Областю визначення оператора S є множина суттєво обмежених функцій з $\mathcal{ML}(Q)$. Проте ми використовуватимемо значення цього оператора лише на невід'ємних функціях. Принагідно зауважимо, що $S_{1/p}(s) = \begin{cases} s^{1/p^0}, & s \in [0,1], \\ s^{1/p_0}, & s > 1, \end{cases}$ при $p_0 > 0$.

Зауваження 4. (Лема 1 [5, с. 168], зауваження 3.1 [6, с. 453]). Якщо p, p_0, p^0 взято з (37), $1 < p_0 \le p^0 < +\infty$, то виконуються такі оцінки:

1) $||v; L^{p(y)}(Q)|| \le S_{1/p}(\rho_p(v,Q))$ при $\rho_p(v,Q) < \infty$;
2) $\rho_p(v,Q) \le S_p(||v; L^{p(y)}(Q)||)$ при $||v; L^{p(y)}(Q)|| < \infty$.

Наступні елементарні властивості оператора S подамо у вигляді леми.

Лема 7. *Нехай S – оператор з (39), p, p_0, p^0 взято з (37), $0 \le p_0 \le p^0 < +\infty$. Тоді:*

1) *функція $\mathbb{R}_+ \ni s \overset{S_p}{\mapsto} S_p(s) \in \mathbb{R}_+$ монотонно неспадна і неперервна, $S_p(0) = 0$;*
2) *$[S_p(s)]^r = S_p(s^r) = S_{pr}(s)$, $s \ge 0$, $r \ge 0$;*
3) *$S_p(sr) \le S_p(s)S_p(r)$, $s \ge 0$, $r \ge 0$;*
4) *$S_p(s_1 + \ldots + s_m) \le m^{p^0}(S_p(s_1) + \ldots + S_p(s_m))$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$.*

Доведення. 1), 2) Твердження цих пунктів очевидні.

3) Якщо $s = r$, то твердження цього пункту випливає з пункту 2 цієї леми. Далі, не зменшуючи загальності, припустимо, що $s < r$. Отримаємо таке:
якщо $s < r \le 1$, то $S_p(sr) = (sr)^{p_0} = s^{p_0} r^{p_0} = S_p(s)S_p(r)$;
якщо $1 < s < r$, то $S_p(sr) = (sr)^{p^0} = s^{p^0} r^{p^0} = S_p(s)S_p(r)$;
якщо $s \le 1 < r$, то отримаємо $S_p(sr) = (sr)^{p^0} = s^{p^0} r^{p^0} \le s^{p_0} r^{p^0} = S_p(s)S_p(r)$ при $sr > 1$ й одержимо $S_p(sr) = (sr)^{p_0} = s^{p_0} r^{p_0} \le s^{p_0} r^{p^0} = S_p(s)S_p(r)$ при $sr \le 1$.

4) Нехай $m \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \ge 0$. Не зменшуючи загальності припустимо, що $s_1 = \max\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Тому, використавши результати пунктів 1 та 3 цієї леми, отримаємо

$$S_p(s_1 + \ldots + s_m) \le S_p(ms_1) \le S_p(m)S_p(s_1) = m^{p^0} S_p(s_1) \le m^{p^0}(S_p(s_1) + \ldots + S_p(s_m)),$$

що і доводить твердження пункту і лему. □

Доведемо деякі елементарні властивості операторів Немицького з (13).

Лема 8. *Нехай виконуються умови* **(G)**, **(Q)**, q_0 *і* q^0 *– сталі з умови* **(Q)**, S *– оператор з формули (39),* $\{\mathcal{N}(t)\}_{t\in[0,T]}$ *– сім'я операторів з (13),* $\delta \in (0, 1]$. *Якщо* $p \in [q^0 + \delta - 1, +\infty)$, *то існує така стала* $\mathscr{N}_1(p, q_0, q^0)$, *що для всіх* $v, w \in L^p(\Omega)$ *та* $t \in [0, T]$ *виконується оцінка*

$$||\mathcal{N}(t)v - \mathcal{N}(t)w||_h \le \mathscr{N}_1(p, q_0, q^0)||v - w||_p\, S_{q-2}(||v||_p + ||w||_p), \tag{40}$$

де $h := \frac{p}{q^0+\delta-1} \ge 1$ *(стала* $\mathscr{N}_1(p, q_0, q^0)$ *не залежить від* δ*).*

Доведення. З умов **(G)**, $q_0 > 2$ та нерівності (36) отримаємо

$$I_7(t) := ||\mathcal{N}(t)v - \mathcal{N}(t)w||_h^h \le |g^0|^h \int\limits_\Omega \Big| |v(x)|^{q(x,t)-2}v(x) - |w(x)|^{q(x,t)-2}w(x)\Big|^h\, dx \le$$

$$\le |g^0|^h \int\limits_\Omega |(q(x,t)-1)2^{2-q(x,t)}|^h \Big(|v(x)| + |w(x)|\Big)^{h(q(x,t)-2)} |v(x) - w(x)|^h\, dx \le$$

$$\le C_6(\delta) \int\limits_\Omega \Big(|v| + |w|\Big)^{h(q(x,t)-2)} |v - w|^h\, dx, \quad t \in [0, T].$$

де $C_6(\delta) = |g^0(q^0-1)2^{2-q_0}|^{\frac{p}{q^0+\delta-1}}$. Нехай $C_7 := \sup\limits_{\delta\in[0,1]} C_6(\delta)$. Зрозуміло, що стала $C_7 \ge 0$ залежить тільки від g^0, p, q_0, q^0.

Використавши нерівність Гельдера з показниками $\frac{q^0+\delta-1}{q^0-2+\delta} > 1$, $q^0 + \delta - 1 > 1$, з попередньої нерівності та вигляду h одержимо

$$I_7(t) \le C_7 \Big(\int\limits_\Omega |z(x)|^{\frac{p(q(x,t)-2)}{q^0+\delta-1}\,\frac{q^0+\delta-1}{q^0-2+\delta}}\, dx\Big)^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0+\delta-1}} \Big(\int\limits_\Omega |v - w|^{\frac{p(q^0+\delta-1)}{q^0+\delta-1}}\, dx\Big)^{\frac{1}{q^0+\delta-1}}, \tag{41}$$

де $z(x) = |v(x)| + |w(x)|$, $x \in \Omega$.

Оскільки $\delta > 0$, то $\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2} \geq \frac{q^0-2+\delta}{q^0-2} > 1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$. Тому з узагальненої нерівності Гельдера для області Ω і показників $\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2} > 1$, $\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q(x,t)+\delta} > 1$ випливає оцінка

$$I_8(t) := \int\limits_\Omega |z(x)|^{\frac{p(q(x,t)-2)}{q^0-2+\delta}}\,dx \leq 2\,||z^{\frac{p(q(t)-2)}{q^0-2+\delta}}; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2}}(\Omega)|| \cdot ||1; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q(x,t)+\delta}}(\Omega)|| =$$

$$= C_8(\delta)||z^{\frac{p(q(t)-2)}{q^0-2+\delta}}; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2}}(\Omega)||,$$

де (скористаємося тут оцінками з зауваження 4 для області Ω та лемою 7)

$$C_8(\delta) := 2\,||1; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q(x,t)+\delta}}(\Omega)|| \leq 2S_{1/(\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q+\delta})}\Big(\rho_{\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q+\delta}}(1,\Omega)\Big) =$$

$$= 2S_{(q^0-q+\delta)/(q^0-2+\delta)}(|\Omega|) = \begin{cases} 2|\Omega|^{\frac{\delta}{q^0-2+\delta}}, & |\Omega| \in [0,1], \\ 2|\Omega|^{\frac{q^0-q_0+\delta}{q^0-2+\delta}}, & |\Omega| > 1, \end{cases}$$

де $|\Omega|$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ області Ω. З вигляду функції $C_8(\delta)$ випливає, що число $C_9 := \sup\limits_{\delta\in(0,1)} C_8(\delta)$ задовольняє оцінки $0 < C_9 < +\infty$. Зрозуміло також, що C_9 не залежить від δ. Тому, використавши зауваження 4 та лему 7, одержимо

$$I_8(t) \leq C_9 S_{1/\frac{q^0-2+\delta}{q-2}}\Big(\rho_{\frac{q^0-2+\delta}{q-2}}(z^{\frac{p(q(t)-2)}{q^0-2+\delta}};\Omega)\Big) = C_9 S_{(q-2)/(q^0-2+\delta)}\Big(\int\limits_\Omega |z(x)|^p\,dx\Big) =$$

$$= C_9 S_{(q-2)/(q^0-2+\delta)}(||z||_p^p).$$

Підставивши цей вираз у (41), з леми 7 отримаємо таке:

$$I_7(t) \leq C_7 |I_8(t)|^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0+\delta-1}}\Big(\int\limits_\Omega |v-w|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{q^0+\delta-1}} \leq$$

$$\leq C_7 \Big|C_9 S_{(q-2)/(q^0-2+\delta)}(||z||_p^p)\Big|^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0+\delta-1}} ||v-w||_p^{\frac{p}{q^0+\delta-1}} =$$

$$= C_{10} S_{p(q-2)/(q^0+\delta-1)}(||z||_p)||v-w||_p^{\frac{p}{q^0+\delta-1}} = C_{10} S_{h(q-2)}(||\,|v|+|w|\,||_p)||v-w||_p^h \leq$$

$$\leq C_{10} S_{h(q-2)}(||v||_p + ||w||_p)||v-w||_p^h = \Big(C_{10}^{\frac{1}{h}} S_{q-2}(||v||_p+||w||_p)||v-w||_p\Big)^h,$$

звідки і випливає оцінка (40). Лему доведено. □

Лема 9. *Нехай виконуються умови **(G)**, **(Q)**, q_0 і q^0 – сталі з умови **(Q)**, S – оператор з (39), функція $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ задовольняє оцінку (7), $\{\mathcal{I}(t,s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$ взято з (12), $\{\mathcal{N}(t)\}_{t\in[0,T]}$ означено в (13), σ – функція з (19), β – функція з (20). Якщо $p \in (q^0-1,+\infty)$, $\mu \in (\frac{p}{q^0-1},+\infty)$, то існує така стала $\mathscr{M}_3(p,q_0,q^0,\mu) > 0$, що для всіх $(t,s) \in \mathcal{T}$ і $\tau \in [0,T]$ виконується оцінка*

$$||\mathcal{I}(t,s)(\mathcal{N}(\tau)v - \mathcal{N}(\tau)w)||_\mu \leq \frac{\mathscr{M}_3(p,q_0,q^0,\mu)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)-\sigma(\mu,p)}}||v-w||_p\, S_{q-2}(||v||_p+||w||_p), \quad (42)$$

причому $\beta(q^0,p)-\sigma(\mu,p)\geq 0.$

Доведення. Позначимо через I_9 ліву частину нерівності (42). Нехай p,μ такі як у формулюванні леми. Тоді з (23) отримаємо, що

$$I_9=\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2}+\frac{t}{2},\frac{s}{2}+\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_\mu=\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_\mu.$$

Оскільки $p>q^0-1$, то $p>q^0-1+\delta$ для всіх досить малих $\delta\in(0,1]$. Нехай $h:=\frac{p}{q^0+\delta-1}$. Тоді $\mu>\frac{p}{q^0-1}>h>1$ і з оцінки (26) для $p_1:=h$, $p_2:=\mu$ (що законно), матимемо

$$I_9\leq\frac{\mathscr{M}_2(h,\mu)}{(\frac{t-s}{2})^{\sigma(h,\mu)}}\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_h,\tag{43}$$

де

$$\sigma(h,\mu)=\frac{n}{2}\Big(\frac{q^0+\delta-1}{p}-\frac{1}{\mu}\Big)=\frac{n}{2}\Big(\frac{q^0+\delta-2+1}{p}-\frac{1}{\mu}\Big)=$$

$$=\frac{n}{2}\frac{q^0+\delta-2}{p}+\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\Big)=\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)>0.\tag{44}$$

Крім того, з (26) для $p_2=p_1:=h$ (тоді $\sigma(h,h)=1$) матимемо

$$\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_h\leq\mathscr{M}_2(h,h)||\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w||_h.\tag{45}$$

Підставивши (44) і (45) в (43), одержимо таке:

$$I_9\leq\frac{C_{11}(\delta)}{(t-s)^{\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)}}||\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w||_h,$$

де

$$C_{11}(\delta):=2^{\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)}\mathscr{M}_2(h,\mu)\mathscr{M}_2(h,h)=$$

$$=2^{\frac{n}{2}\frac{q^0+\delta-2}{p}-\sigma(\mu,p)}\mathscr{M}_2\Big(\frac{p}{q^0+\delta-1},\mu\Big)\mathscr{M}_1(1).$$

З вигляду $\mathscr{M}_2$ випливає, що $C_{11}(\delta)$ є обмеженою при $\delta\to+0$. Тому, застосувавши до правої частини цієї нерівності оцінку (40) з леми 8, отримаємо

$$I_9\leq\frac{C_{12}\mathscr{N}_1(p,q_0,q^0)}{(t-s)^{\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)}}||v-w||_p\,S_{q-2}(||v||_p+||w||_p),\tag{46}$$

де стала C_{12} не залежить від δ. Оскільки стала $\mathscr{N}_1(p,q_0,q^0)$ теж не залежить від δ і $\beta(q^0+\delta,p)\underset{\delta\to+0}{\longrightarrow}\beta(q^0,p)$, то, спрямувавши в (46) $\delta\to+0$, отримаємо (42). Лему доведено. $\square$

Лема 10. *Нехай виконуються умови* ***(G)***, ***(Q)***, q_0 *і* q^0 *– сталі з умови* ***(Q)***, S *– оператор з (39),* $\mathcal{A}$ *– з (17),* β *– функція з (20). Якщо* $r>\max\{\frac{n}{2}(q^0-1),1\}$, $p>\max\{r(q^0-1),1\}$, *число* $\varkappa$ *взято з (18), то існує стала* $\mathscr{A}(r,p)>0$ *така, що для всіх* $\tau\in(0,T]$ *і* $v,w\in L^\varkappa(0,\tau;L^p(\Omega))$ *виконується оцінка*

$$||\mathcal{A}v-\mathcal{A}w||_{p,\varkappa,\tau}\leq\mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}\,||v-w||_{p,\varkappa,\tau}\,S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau}).\tag{47}$$

Доведення. Нехай виконуються припущення леми, $I_{10}(t) = ||(\mathcal{A}v)(t) - (\mathcal{A}w)(t)||_p$, $t \in [0, \tau]$. Тоді

$$I_{10}(t) = \Big|\Big| - \int\limits_0^t \mathcal{I}(t,s)(\mathcal{N}(s)v(s) - \mathcal{N}(s)w(s))\, ds\Big|\Big|_p \le$$

$$\le \int\limits_0^t \Big|\Big|\mathcal{I}(t,s)(\mathcal{N}(s)v(s) - \mathcal{N}(s)w(s))\Big|\Big|_p\, ds.$$

Використаємо оцінку (42) для $\mu = p$. Це можна зробити, бо $r > 1$, $p > r(q^0-1) > q^0-1$ та $q^0 \ge q_0 > 2$, $q^0 - 1 > 1$, $1 > \frac{1}{q^0-1}$, тобто $p > \frac{p}{q^0-1} > 1$. Врахувавши, що $\sigma(p,p) = 0$, одержимо

$$I_{10}(t) \le \int\limits_0^t \frac{\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)}{(t-s)^{\beta(q^0+\delta, p)}} I_{11}(s)\, ds = \mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p) \int\limits_0^\tau \frac{\chi(t,s)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)}} I_{11}(s)\, ds,$$

де χ взято з (33),

$$I_{11}(s) = ||v(s) - w(s)||_p\, S_{q-2}(||v(s)||_p + ||w(s)||_p), \quad s \in (0,t). \tag{48}$$

Нехай $I_{12} := ||\mathcal{A}v - \mathcal{A}w||^{\varkappa}_{p,\varkappa,\tau}$. Враховуючи наші позначення та отримані оцінки, одержимо таке:

$$I_{12} = \int\limits_0^\tau |I_{10}(t)|^{\varkappa}\, dt \le |\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa} \int\limits_0^\tau \Big| \int\limits_0^\tau \frac{\chi(t,s)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)}} I_{11}(s)\, ds \Big|^{\varkappa}\, dt.$$

Використовуючи оцінку з твердження 3, матимемо, що

$$I_{12} \le |\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa} \Big[\int\limits_0^\tau \Big| \int\limits_0^\tau \frac{\chi^{\varkappa}(t,s)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)\varkappa}} |I_{11}(s)|^{\varkappa}\, dt \Big|^{\frac{1}{\varkappa}}\, ds \Big]^{\varkappa} =$$

$$= |\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa} \Big[\int\limits_0^\tau I_{11}(s) \Big| \int\limits_s^\tau \frac{dt}{(t-s)^{\beta(q^0,p)\varkappa}} \Big|^{\frac{1}{\varkappa}}\, ds \Big]^{\varkappa}. \tag{49}$$

Зробимо деякі перетворення. Оскільки $p > r(q^0-1)$, то з пункту 5 леми 1 випливає, що $\beta(q^0,p)\varkappa < 1$. Тому з пункту 6 леми 1

$$\int\limits_s^\tau \frac{dt}{(t-s)^{\beta(q^0,p)\varkappa}} = \frac{(t-s)^{1-\beta(q^0,p)\varkappa}}{1-\beta(q^0,p)\varkappa}\Bigg|_{t=s}^{t=\tau} = \frac{(\tau-s)^{1-\beta(q^0,p)\varkappa}}{1-\beta(q^0,p)\varkappa} \le \frac{\tau^{1-\beta(q^0,p)\varkappa}}{1-\beta(q^0,p)\varkappa} =$$

$$= \frac{\tau^{1-\beta(q^0,r)\varkappa+(q^0-2)}}{1-\beta(q^0,r)\varkappa+(q^0-2)} = \frac{\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}}{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}. \tag{50}$$

Використавши (48) і (50), з оцінки (49) отримаємо таке:

$$I_{12} \le \frac{|\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa}}{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\, \tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa} \Big[\int\limits_0^\tau I_{11}(s)\, ds \Big]^{\varkappa} =$$

$$= C_{13}\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\Big[\int\limits_0^\tau ||v(s)-w(s)||_p\, S_{q-2}(||v(s)||_p+||w(s)||_p)\,ds\Big]^{\varkappa}.$$

Тому з нерівності Гельдера з показниками $\varkappa>1$, $\frac{\varkappa}{\varkappa-1}>1$ одержимо

$$I_{12}\le C_{13}\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\times$$

$$\times\int\limits_0^\tau ||v(s)-w(s)||_p^{\varkappa}\,ds\Big[\int\limits_0^\tau\Big|S_{q-2}(||v(s)||_p+||w(s)||_p)\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\Big]^{\varkappa-1}. \tag{51}$$

Нехай $\zeta(s):=||v(s)||_p+||w(s)||_p$, $s\in(0,\tau)$,

$$A:=\{s\in(0,\tau)\ \mid\ \zeta(s)>1\},\quad B:=\{s\in(0,\tau)\ \mid\ \zeta(s)\le 1\}.$$

Оскільки $p>r(q^0-1)>r\ge\frac{n}{2}(q^0-1)$, то (див. пункт 3 леми 1) $\varkappa>q^0-1$. Тому $\varkappa-1>q^0-2$, $\frac{\varkappa-1}{q^0-2}>1$ і, використавши нерівність Гельдера з показниками $\frac{\varkappa-1}{q^0-2}>1$, $\frac{\varkappa-1}{\varkappa-q^0+1}>1$, отримаємо

$$\int\limits_A\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds=\int\limits_A|\zeta(s)|^{\frac{(q^0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\le\Big(\int\limits_A|\zeta(s)|^{\varkappa}\,ds\Big)^{\frac{q^0-2}{\varkappa-1}}\Big(\int\limits_A ds\Big)^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}\le$$

$$\le||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q^0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}. \tag{52}$$

Аналогічну (52) оцінку отримаємо і для інтеграла по B

$$\int\limits_B\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds=\int\limits_B|\zeta(s)|^{\frac{(q_0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\le||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q_0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}. \tag{53}$$

З оцінок (52), (53) і нерівності трикутника в $L^{\varkappa}(0,\tau)$ випливає, що

$$\int\limits_0^\tau\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds=\int\limits_A\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds+\int\limits_B\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\le$$

$$\le||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q^0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}+||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q_0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}\le$$

$$\le\Big|S_{q-2}(||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||)\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\Big(\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}+\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}\Big)\le$$

$$\le\Big|S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau})\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\Big(\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}+\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}\Big).$$

Тоді з (51) і оцінки типу (25) матимемо, що

$$I_{12}\le C_{14}\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\times$$

$$\times||v-w||^{\varkappa}_{p,\varkappa,\tau}\Big|S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau})\Big|^{\varkappa}(\tau^{\varkappa-q^0+1}+\tau^{\varkappa-q_0+1})=$$

$$=C_{14}(1+T^{q^0-q_0})\tau^{\varkappa-\beta(q^0+\delta,r)\varkappa}||v-w||^{\varkappa}_{p,\varkappa,\tau}\Big|S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau})\Big|^{\varkappa}.$$

Звідси і випливає оцінка (47) зі сталою, яка залежить від T і відокремлена від нуля при $T\to+0$ (це ми використовуватимемо далі). Лему доведено. $\square$

4. Доведення теореми 1. Нехай $p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2$. Тоді $\frac{p}{q^0-1} > \frac{n}{2}(q^0-1)$. Приймемо довільне $r \in [\frac{n}{2}(q^0-1), \frac{p}{q^0-1})$. Нехай $\varkappa, \phi$ взято з (18), а функції σ, β – з (19), (20). Використаємо лему 1. З пункту 7 матимемо, що $\varkappa \in [\frac{2p(q^0-1)}{2p-n(q^0-1)}, \frac{2p}{n(q^0-2)})$. Приймемо максимальне $\varkappa^* = \frac{2p}{n(q^0-2)} < \frac{p}{\phi}$. Оскільки $q_0 > 2 + \frac{2}{n}$, то з пункту 2 випливає оцінка $\phi > 1$. Отже, $\varkappa^* < p$. Крім того,

$$p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2 > \frac{n}{2}(q^0-1) > \frac{n}{2}(q^0-2),$$

тобто $\varkappa^* > 1$ та $p > \frac{n}{2}(q^0-2) > \phi > 1$. З пункту 3 та умови

$$r \in \Big[\frac{n}{2}(q^0-1), \frac{p}{q^0-1}\Big) \subset \Big[\frac{n}{2}(q^0-1), p\Big)$$

випливає, що $\varkappa > q^0 - 1$. Отже, числа p і $\varkappa$, які задовольняють умови теореми 1, існують. Крім того, пункт 4 і умова $r \geq \frac{n}{2}(q^0-1) > \phi$ означають, що

$$\beta(q^0, r) < 1. \tag{54}$$

Оскільки $r < \frac{p}{q^0-1}$, то $p > r(q^0-1)$ і з пункту 5 отримаємо, що $\beta(q^0,p)\varkappa < 1$.

Доведемо, що оператор $\mathcal{A}$ з (17) задовольняє умови твердження 1. Нехай $\varepsilon > 0$, $\tau \in (0, T]$ – довільні числа,

$$\overline{B_{\varepsilon,\tau}} = \{v : (0,\tau) \to L^p(\Omega) \quad | \quad ||v||_{p,\varkappa,\tau} \leq \varepsilon\}.$$

Приймемо довільне $v \in \overline{B_{\varepsilon,\tau}}$ та використаємо оцінку (47) з цим v та з $w = 0$. Це законно, бо ми щойно довели, зокрема, що r та p задовольняють умови леми 10. Згідно з (17) одержимо рівність $(\mathcal{A}0)(t) = z_0(t)$ для всіх $t \in [0, T]$, де z_0 взято з (16), а тому (47) набуде вигляду

$$||\mathcal{A}v - z_0||_{p,\varkappa,\tau} \leq \mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}||v||_{p,\varkappa,\tau}S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}) \leq \mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon).$$

Крім того, $||\mathcal{A}v - z_0||_{p,\varkappa,\tau} \geq ||\mathcal{A}v||_{p,\varkappa,\tau} - ||z_0||_{p,\varkappa,\tau}$. Тому

$$||\mathcal{A}v||_{p,\varkappa,\tau} \leq ||z_0||_{p,\varkappa,\tau} + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon), \tag{55}$$

де додатна стала C_{15} не залежить від $u_0, f, v, \tau, \varepsilon$.

З оцінок (30), (32) для $p_1 = p_2 = p$, $\lambda = \mu = \varkappa$ (що законно) одержимо таке:

$$||z_0||_{p,\varkappa,\tau} \leq ||\mathcal{J}_0 u_0||_{p,\varkappa,\tau} + ||\mathcal{J} f||_{p,\varkappa,\tau} \leq \mathscr{L}_0(p,p)\tau^{\frac{1}{\varkappa}-\sigma(p,p)}||u_0||_p +$$

$$+\mathscr{L}(p,p;\varkappa,\varkappa)\tau^{\frac{1}{\varkappa}-\sigma(p,p)+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}||f||_{p,\varkappa,\tau} = C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}||u_0||_p + C_{17}\tau||f||_{p,\varkappa,\tau}, \tag{56}$$

де додатні сталі C_{16} та C_{17} не залежать від $u_0, f, v, \tau, \varepsilon$.

Отож, з (55) і (56) отримаємо оцінку

$$||\mathcal{A}v||_{p,\varkappa,\tau} \leq C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}||u_0||_p + C_{17}\tau||f||_{p,\varkappa,\tau} + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon).$$

Припустимо, що

$$||u_0||_p \leq \varepsilon^2, \quad ||f||_{p,\varkappa,T} \leq \varepsilon^2. \tag{57}$$

Тоді умова $\mathcal{A}(\overline{B_{\varepsilon,\tau}}) \subset \overline{B_{\varepsilon,\tau}}$ виконується, якщо

$$C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}\varepsilon^2 + C_{17}\tau\varepsilon^2 + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

тобто, коли

$$C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}\varepsilon + C_{17}\tau\varepsilon + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(\varepsilon) \le 1. \tag{58}$$

Тепер приймемо довільні $v, w \in \overline{B_{\varepsilon,\tau}}$ та використаємо оцінку (47) і лему 7

$$||\mathcal{A}v - \mathcal{A}w||_{p,\varkappa,\tau} \le \mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau} + ||w||_{p,\varkappa,\tau})||v-w||_{p,\varkappa,\tau} \le$$

$$\le D||v-w||_{p,\varkappa,\tau},$$

де $D = 2^{q^0-2}\mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(\varepsilon)$. Зрозуміло, що оператор $\mathcal{A}$ є стиском на $\overline{B_{\varepsilon,\tau}}$, якщо $D<1$, тобто, коли

$$2^{q^0-2}\mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(\varepsilon) < 1. \tag{59}$$

Підсумуємо отримані нами факти. Якщо виконуються оцінки (58), (59), то оператор $\mathcal{A}$ задовольняє умови твердження 1, тому має нерухому точку – розв'язок рівняння (11). Оцінки (58), (59) (враховуючи (57), (54) та пункт 1 леми 7) виконуються за однієї з таких умов:

1) для довільних $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^{\varkappa}(0,T;L^p(\Omega))$ вибираємо $\varepsilon > 0$ таким великим, щоб виконувалися нерівності (57), а потім вибираємо $\tau \in (0,T]$ таким малим, щоб виконувалися оцінки (58), (59); тоді маємо локальний розв'язок для всіх u_0 і f;
2) для заданого τ (точніше для $\tau = T$) вибираємо $\varepsilon > 0$ таким малим, щоб виконувалися оцінки (58), (59), а потім вибираємо $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^{\varkappa}(0,T;L^p(\Omega))$ таким, щоб виконувалися нерівності (57); тоді маємо глобальний розв'язок (11), взагалі кажучи, лише для тих u_0 і f, які мають малу норму.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 5. Результати теореми 1 можна поширити на другу і третю мішані задачі для рівняння (1) та його узагальнень.

5. Висновки. Знайдено умови існування слабкого розв'язку першої мішаної задачі для півлінійного параболічного рівняння (1) зі змінним показником нелінійності. Цей показник задовольняє лише умову **(Q)** зі сталими $2+\frac{n}{2} < q_0 \le q^0 < +\infty$.

Список використаної літератури

1. *Бугрій О.* Про існування слабкого розв'язку мішаної задачі для модельного півлінійного параболічного рівняння зі змінним степенем нелінійності / *О. Бугрій* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 79-90.
2. *Buhrii O.* On solvability of model nonhomogeneous problems for semilinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / *О. Бугрій* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 29-40.
3. *Antontsev S.* Nonlinear PDEs in Sobolev spaces with variable exponents / *S. Antontsev, S. Shmarev* // Preprint CMAF Pre-2013-015 (2013).
4. *Бокало М.* Мішана задача для еліптично-параболічних анізотропних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *М. Бокало* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 14-26.
5. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *О.М. Бугрій* // Матем. студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.

6. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii* // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
7. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас.* – М.: Мир. – 1978. – 336 с.
8. Математическая энциклопедия. В 5 т. / Гл. ред. И. М. Виноградов. – Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1984. — 1140 с.
9. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. / *М.І. Матійчук.* – Чернівці: Прут, 2003.
10. *Giga Yo.* Solutions for semilinear parabolic tquations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system / *Yo. Giga* // J. Diff. Equat. – 1986. – Vol. 61. – P. 186-212.
11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / *В.А. Треногин.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.
12. *Weissler F.B.* Semilinear evolution equations in Banach spaces / *F.B. Weissler* // J. Func. Anal. – 1979. – Vol. 32. – P. 277-296.
13. *Byström J.* Sharp constants for some inequalities connected to the p-Laplace operator / *J. Byström* // Journal of inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2005. – Vol. 6, Issue 2. – Article 56. – P. 1-8. – M., 1948. – 456 c.
14. *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen / *W. Orlicz* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
15. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *O. Kováčik, J. Rakosnik* // Czechoslovak Math. J. – 1991. – 41 (116). – P. 592-618.
16. *Fan X.* Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^n$ / *X. Fan, X. Han* // Nonlinear Analysis. – 2004. – Vol. 59. – P. 173-188.
17. *Харди Г.Г.* Неравенства / *Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа* – М., 1948. – 456 с.

Стаття: надійшла до редакції 16.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014

ON SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MODEL SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH EXPONENT OF NONLINEARITY $q(x,t) > 2 + \frac{2}{n}$

Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

The initial-boundary value Dirichlet problem for the equation

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

is considered in a cylinder domain of $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. The existence of a mild solution to the problem is proved provided the condition $q(x,t) \geq q_0 > 2 + \frac{2}{n}$ holds.

Key words: nonlinear parabolic equation,initial-boundary value problem, variable exponent of nonlinearity, generalized Lebesque spaces, mild solution, Green's function.

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОКАЗАТЕЛЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ $q(x,t) > 2 + \frac{2}{n}$

Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Исследована смешанная задача Дирихле для уравнения

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

в цилиндрической области из $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. При условии $q(x,t) \ge q_0 > 2 + \frac{2}{n}$ доказано существование слабого решения этой задачи.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, смешанная задача, переменная степень нелинейности, обобщённые пространства Лебега, слабое решение, функция Грина.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 33–47
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 33–47

УДК 517.547

ПРО ОДНОСТАЙНЕ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ МОДУЛЯ ТА АРГУМЕНТА ГОЛОМОРФНОЇ В ПРОКОЛЕНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ

Олег ВИШИНСЬКИЙ, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Розглянуто класи голоморфних у $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ функцій цілком регулярного зростання, поняття індикаторів таких функцій, і за досить загальних припущень розв'язується задача опису множин аналітичних в $\mathbb{C}^*$ функцій f, функцій зростання λ, функцій H, H_1, H_2 з $\mathbb{L}_p[0, 2\pi]$ і чисел $p \in [1, +\infty]$ таких, що:

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

або

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) - \lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

де $F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z)$, $f(a_j) = 0$,
$\tilde{f}(z) = f(z) \prod\limits_{|a_j|=1} (z - a_j)^{-1}$, $m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} dz$.

Ключові слова: голоморфна функція, функція цілком регулярного зростання, індикатор зростання, коефіцієнти Фур'є, коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса.

1. Допоміжні поняття та основні результати. Теорія цілих функцій цілком регулярного зростання стосовно функцій λ, близьких до степеневих, була побудована наприкінці 30-х років XX ст. Б.Я. Левіним та А. Пфлюгером. Її застосовували в багатьох розділах сучасного комплексного аналізу. Ця теорія та її застосування досить ґрунтовно викладені у монографії [1]. У 70-80-х роках минулого століття А.А. Кондратюк [2], [3], [4], використовуючи метод рядів Фур'є, розроблений Л.А. Рубелом і Б.А. Тейлором [5], узагальнив теорію Левіна-Пфлюгера: по-перше, він запропонував вимірювати зростання функцій стосовно довільної функції зростання λ, яка задовольняє умову $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$; по-друге, він ввів і дослідив класи мероморфних функцій цілком регулярного зростання. Детальне викладення цієї теорії подано у монографії [6].

Властивості мероморфних у багатозв'язних областях комплексної площини $\mathbb{C}$ функцій, зокрема розподіл значень, вивчало багато авторів. Один з останніх підходів запропоновано в [7], [8], [6]. Опираючись на введені в цих роботах поняття характеристичної функції типу Неванлінни, а також поняття скінченої λ-щільності у [10] було введено поняття голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$, поняття індикаторів зростання таких функцій і доведені деякі їхні властивості, зокрема ω-тригонометрична опуклість індикаторів зростання та існування кутової щільності множини нулів голоморфних функцій цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^*$ на певних послідовностях. Ми працюємо з цими класами функцій, розв'язуємо задачу опису множин голоморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій f, функцій зростання λ, функцій H з $\mathbb{L}^p[0,2\pi]$ і чисел $p \in [1,+\infty]$ таких, що:

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r\to+\infty, \tag{1}$$

або

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) - \lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r\to+\infty, \tag{2}$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r\to+\infty, \tag{3}$$

де

$$F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z),\ \ \tilde{f}(z) = f(z)\prod_{|a_j|=1}(z-a_j)^{-1},\ \ f(a_j)=0,\ \ m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}dz. \tag{4}$$

Необхідність формулювання результатів з використанням функції F, а також вищенаведений вигляд функції F зумовлені можливістю вибору однозначної гілки $\log F$ у області A^* (див. нижче) [6, Лема 4.1].

Нехай f – голоморфна функція в кільці $A = \{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}, 1 < R_0 \leqslant +\infty$, відмінна від тотожного нуля. Припустимо, що f не має нулів на одиничному колі. Через A^* позначимо A без інтервалів $\{z = \tau a, \tau \geqslant 1\}$, якщо $|a| > 1$ і $\{z = \tau a, 0 < \tau \leqslant 1\}$, якщо $|a| < 1$, де a є нулем функції.

Нехай $n_0^1(t,f)$, $n_0^2(t,f)$ це кількість нулів функції f відповідно в $\mathcal{A}_t^1 = \{z : 1 < |z| \leqslant t\}$ та $\mathcal{A}_t^2 = \{z : \frac{1}{t} \leqslant |z| < 1\}, 1 < t < R_0$, з врахуванням їхньої кратності, $n_0(t,f) = n_0^1(t,f) + n_0^2(t,f)$. Ми використовуватимемо такі позначення ([7]):

$$N_0^1(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_0^1(t,f)}{t}dt, \quad N_0^2(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_0^2(t,f)}{t}dt, \quad N_0(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t,f)}{t}dt,$$

$1 \leqslant r < R_0$. Нехай $\gamma_j = \arg a_j$, позначимо ([9])

$$n_k^1(t,f) = \sum_{1<|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j}, \ \ n_k^2(t,f) = \sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|<1} e^{-ik\gamma_j}, \ \ n_k(t,f) = \sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j}, \ \ k \neq 0,$$

а також

$$N_k^1(r,f) = \int_1^r \frac{n_k^1(t,f)}{t}dt, \quad N_k^2(r,f) = \int_1^r \frac{n_k^2(t,f)}{t}dt, \quad N_k(r,f) = \int_1^r \frac{n_k(t,f)}{t}dt, \tag{5}$$

$1 \leqslant r < R_0$. Ми будемо використовувати такі позначення для коефіцієнтів Фур'є:

$$l_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log F(re^{i\theta})d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}, \tag{6}$$

$$c_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log |F(re^{i\theta})|d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}, \tag{7}$$

$$a_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\arg F(re^{i\theta})d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}, \tag{8}$$

$$L_k(r,F) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\left(\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}\right)d\theta, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{9}$$

Означення 1. *Додатна, неспадна, неперервна, необмежена функція $\lambda(r), r \geqslant 1$ називається функцією помірного зростання, якщо $\lambda(2r) \leqslant M\lambda(r), M>0, \forall r>0$.*

Функції зростання $\lambda(r)$ та $\tilde\lambda(r)$, для яких $\lambda(r)/\tilde\lambda(r) \to 1$ при $r\to+\infty$, вважатимемо еквівалентними й ототожнюватимемо їх.

Означення 2. *Функція $L(r)$ називається повільно змінною функцією (у сенсі Карамати), якщо $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{L(cr)}{L(r)} = 1$ рівномірно на довільному проміжку $0 < a \leqslant c \leqslant b < +\infty$.*

Характеристика $T_0(r,f)$ типу Неванлінни для функцій f, мероморфних у кільці $\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, де $1 < R_0 \leq +\infty$ була введена у [7] (див. також [6]), а саме

$$T_0(r,f) = m_0(r,f) + N_0(r,f), \qquad 1<r<R_0,$$

де

$$m_0(r,f) = m(r,f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1,f),$$

$$m(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(te^{i\theta})|\,d\theta, \qquad \frac{1}{R_0}<t<R_0.$$

Означення 3 ([6]). *Нехай λ – функція зростання, f – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція. Будемо говорити, що f є функцією скінченного λ типу, і записувати $f \in \Lambda_H$, якщо $T_0(r,f) \leqslant B\lambda(Cr)$ при деяких сталих B, C для всіх $r, r \geqslant 1$.*

Означення 4 ([9]). *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f називається функцією цілком регулярного зростання (надалі, ц.р.з.), якщо f є скінченого $\lambda-$типу і $\forall k \in \mathbb{Z}$ існують границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} =: c_k^{'}$ та $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} =: c_k^{''}$ або $\forall k \in \mathbb{Z}$ існує границя $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} =: c_k^*$.*

Клас таких функцій позначатимемо Λ_H°.

Означення 5 ([9]). *Якщо $f \in \Lambda_H^\circ$, то функції $h_1(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{'} e^{ik\theta}$, $h_2(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{''} e^{ik\theta}$, $h(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^* e^{ik\theta}$, де $c_k^{'}$, $c_k^{''}$, c_k^* визначені в означенні 4 називаються індикаторами зростання функції f або коротко, індикаторами.*

Основними результатами цієї праці є такі теореми.

Теорема 1. *Нехай f – голоморфна функція в $\mathbb{C}^*$, λ – функція помірного зростання, $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, $H \in \mathbb{L}_p[0,2\pi]$. Тоді (1) виконується тоді і лише тоді, коли:*

i) $H(\theta) \equiv L_0 > 0$, $\lambda(r)$ опукла стосовно $\log r$, f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором H, і $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)} = 0$ для всіх $k \neq 0$;

або

ii) $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho > 0$, L – повільно змінна функція, f є функцією ц.р.з. щодо λ з індикатором $\mathrm{Re}\, H$, де $H(\theta) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} L_k e^{ik\theta}$, $L_k = \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)}$.

Якщо співвідношення (1) виконується для деякого $p \in [1,+\infty)$, тоді воно правильне і для будь-якого $p \in [1,+\infty)$.

Теорема 2. *Нехай f – голоморфна функція в $\mathbb{C}^*$, λ функція помірного зростання, $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, $H_1, H_2 \in \mathbb{L}_p[0,2\pi]$. Тоді (2) і (3) виконуються тоді і лише тоді, коли:*

i) $H_1(\theta) \equiv l_0^1 > 0$, $H_2(\theta) \equiv l_0^2 > 0$, $\lambda(r)$ опукла стосовно $\log r$, f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором $H = H_1 + H_2$, і $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)} = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{l_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)} = 0$ для всіх $k \neq 0$;

або

ii) $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho > 0$, L – повільно змінна функція, f є функцією ц.р.з. щодо λ з індикатором $\mathrm{Re}\, H_1 + \mathrm{Re}\, H_2$, де $H_1(\theta) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} l_k^1 e^{ik\theta}$, $H_2(\theta) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} l_k^2 e^{ik\theta}$, $l_k^1 = \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)}$, $l_k^2 = \lim\limits_{r\to+\infty} \overline{\frac{l_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}}$.

Якщо співвідношення (1), (2) виконуються для деякого $p \in [1,+\infty)$, тоді вони правильні і для будь-якого $p \in [1,+\infty)$.

2. Допоміжні результати. Для доведення теорем 1 та 2 нам потрібно декілька допоміжних тверджень, які також мають самостійне значення.

Нехай f – голоморфна функція в кільці $A = \{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, $1 < R_0 \leqslant +\infty$, відмінна від тотожного нуля, $F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z)$, де $\tilde{f}$ і m визначені в (4). Оскільки F не має нулів на одиничному колі $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, то $\log F$ голоморфна в деякому кільцевому околі одиничного кола, тому допускає розвинення в ряд Лорана

$$\log F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k.$$

Справджуються такі леми.

Лема 1.

$$l_k(r, F) = \alpha_k r^k + r^k \int\limits_1^r \frac{n_k^1(t, f)}{t^{k+1}} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{10}$$

$$l_0(r, F) - l_0(1, F) = N_0^1(r, f), \tag{11}$$

$$N_k^1(r, f) = l_k(r, F) - \alpha_k - k \int\limits_1^r \frac{l_k(t, F)}{t} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{12}$$

Лема 2.

$$l_k(\frac{1}{r}, F) = \alpha_k r^{-k} + r^{-k} \int\limits_1^r \frac{n_k^2(t, f)}{t^{-k+1}} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{13}$$

$$l_0(\frac{1}{r}, F) - l_0(1, F) = N_0^2(r, f), \tag{14}$$

$$N_k^2(r, f) = l_k(\frac{1}{r}, F) - \alpha_k + k \int\limits_1^r \frac{l_k(\frac{1}{t}, F)}{t} dt, \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{15}$$

Лема 3.

$$L_k(r, F) = (\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}}) r^k + r^k \int\limits_1^r \frac{n_k(t, f)}{t^{k+1}} dt + \frac{1}{k}(1 - r^k) n_k(\mathbb{T}), \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{16}$$

$$N_0(r, f) = L_0(r, F) - L_0(1, F) + n_0(\mathbb{T}) \log r, \tag{17}$$

$$N_k(r, f) = L_k(r, F) - (\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}}) - k \int\limits_1^r \frac{L_k(t, F)}{t} dt - n_k(\mathbb{T}) \log r, \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{18}$$

Лема 4.

$$a_k(r, F) = -ik \int\limits_1^r \frac{c_k(t, f)}{t} dt + \frac{\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}}{2i} + \frac{1}{2ki}(r^{-k} - 1) n_k(\mathbb{T}), \quad k \neq 0, \quad r > 1, \tag{19}$$

$$a_k(\frac{1}{r}, F) = ik \int\limits_1^r \frac{c_k(\frac{1}{t}, f)}{t} dt + \frac{\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}}{2i} - \frac{1}{2ki}(r^{-k} - 1) n_k(\mathbb{T}), \quad k \neq 0, \quad r > 1. \tag{20}$$

Лема 5.

$$c_k(r,F) = ik\int\limits_1^r \frac{a_k(t,F)}{t}dt + \frac{\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}}}{2} + N_k^1(r,f) + \frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^k}, \quad k\neq 0, \quad r>1, \tag{21}$$

$$c_k(\frac{1}{r},F) = -ik\int\limits_1^r \frac{a_k(\frac{1}{t},F)}{t}dt + \frac{\alpha_k+\overline{\alpha_{-k}}}{2} + N_k^2(r,f) + \frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^k}, \quad k\neq 0, \quad r>1. \tag{22}$$

3. Доведення допоміжних результатів. Співвідношення (10), (11), (13), (14) отримані в [6, с. 59-60], у процесі доведення леми 21.1, хоча окремо вони там не сформульовані. Співвідношення (12), (15) можна отримати способом аналогічним до отримання обернених коефіцієнтів Фур'є-Стільтьєса наведеним у [10].

Лема 3 випливає безпосередньо з леми 1 та леми 2, якщо враховувати співвідношення між коефіцієнтами Фур'є (6)-(9).

Доведення леми 4. Оскільки $N_k^1(r,f) = \overline{N_{-k}^1(r,f)}$, $N_k^2(r,f) = \overline{N_{-k}^2(r,f)}$, то з (12) і (15) випливає

$$0 = N_k^1(r,f) - \overline{N_{-k}^1(r,f)} =$$
$$= l_k(r,F) - \overline{l_{-k}(r,F)} - (\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}) - k\int\limits_1^r \frac{l_k(t,F)+\overline{l_{-k}(r,F)}}{t}dt, \tag{23}$$
$$0 = N_k^2(r,f) - \overline{N_{-k}^2(r,f)} =$$
$$= l_k(\frac{1}{r},F) - \overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)} - (\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}) + k\int\limits_1^r \frac{l_k(\frac{1}{t},F)+\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}}{t}dt, \tag{24}$$

для кожного цілого $k\neq 0$ та $r>1$. Використовуючи (7), (8), з (23), (24) одержуємо

$$a_k(r,F) = \frac{k}{i}\int\limits_1^r \frac{c_k(t,f)}{t}dt + \frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i} = -ik\int\limits_1^r \frac{c_k(t,F)}{t}dt + \frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i}, \quad k\neq 0,$$

$$a_k(\frac{1}{r},F) = -\frac{k}{i}\int\limits_1^r \frac{c_k(\frac{1}{t},f)}{t}dt + \frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i} = ik\int\limits_1^r \frac{c_k(\frac{1}{t},F)}{t}dt + \frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i}, \quad k\neq 0.$$

Оскільки при $k\neq 0$,

$$c_k(\tau,F) = c_k(\tau,f) - \sum_{|a_j|=1} c_k(\tau, 1-\frac{z}{a_j})$$

та

$$c_k(\tau,1-\frac{z}{a_j}) = \begin{cases} -\dfrac{\tau^k}{2k}e^{-ik\gamma_j}, & 0<\tau<1, \\ -\dfrac{e^{-ik\gamma_j}}{2k\tau^k}, & \tau>1, \end{cases} \tag{25}$$

то

$$a_k(r,F) = -ik\int\limits_1^r \frac{c_k(t,f)}{t}dt + \frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i} + \frac{1}{2ki}(r^{-k}-1)n_k(\mathbb{T}), \quad k\neq 0, \quad r>1,$$

$$a_k(\frac{1}{r},F)=ik\int_1^r \frac{c_k(\frac{1}{t},f)}{t}dt+\frac{\alpha_k-\overline{\alpha_{-k}}}{2i}-\frac{1}{2ki}(r^{-k}-1)n_k(\mathbb{T}),\quad k\neq 0,\quad r>1.$$

□

Доведення леми 5 аналогічне до доведення леми 4 з тією лише відмінністю, що замість різниці функцій $N_k^i(r,f)$ та $\overline{N_{-k}^i(r,f)}$, $i=1,2$, треба розглядати їхню суму.

4. Доведення Теореми 1. *Необхідність.* З (1) випливає існування границь $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)}$, для всіх $k\in\mathbb{Z}$. Ми позначимо ці границі L_k. Також зі співвідношення (1) випливає, що L_k дорівнюють коефіцієнтам Фур'є $c_k(H)$ функції H. Справді,

$$\left|\frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)}-c_k(H)\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[e^{-ik\theta}\frac{\log F(re^{i\theta})+\overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}}{\lambda(r)}-e^{-ik\theta}H(\theta)\right]d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\lambda(r)}\left|\log F(re^{i\theta})+\overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}-\lambda(r)H(\theta)\right|d\theta\xrightarrow{(1)}0,\quad r\to+\infty.$$

Також зі співвідношення (1) отримуємо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|F(re^{i\theta})|+\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|-\lambda(r)Re\,H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}=o(\lambda(r)),\quad r\to+\infty.\quad(26)$$

Зауважимо, що

$$\log|F(re^{i\theta})|+\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|=\log|f(re^{i\theta})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|+O(\log r),\quad r\to+\infty.$$

Врахувавши, що $\log r=o(\lambda(r))$, одержуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\theta})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-Re\,H(\theta)\right|^p d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|F(re^{i\theta})|+\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-Re\,H(\theta)\right|^p d\theta+o(1),\quad r\to+\infty.$$

Тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\theta})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)}-ReH(\theta)\right|^p d\theta=0.$$

Звідси ([9]) отримуємо, що f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором ReH.

Якщо $L_k=0$, для всіх $k\neq 0$, тоді $H(\theta)=L_0\geqslant 0$. Використовуючи (17), одержимо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N(r,f)}{\lambda(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{L_0(r,F)-L_0(1,F)+n_0(\mathbb{T})\log r}{\lambda(r)}=L_0.$$

Тому, якщо $L_0>0$, то отримаємо $\lambda(r)\sim\frac{N(r)}{L_0}, r\to+\infty$. Тобто $\lambda(r)$ є опуклою стосовно $\log r$ і ми довели (i).

Нехай тепер існує $k \neq 0$ таке, що $L_k \neq 0$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $k \in \mathbb{N}$. Оскільки f є функцією ц.р.з. в $\mathbb{C}^*$, то з [9] отримуємо існування границь

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)}, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

З огляду на (6)-(9), одержимо

$$L_k(r,F) = c_k(r,f) + ia_k(r,F) + c_k(\frac{1}{r},f) - ia_k(\frac{1}{r},F) + O(\log r), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r \to +\infty.$$

Звідси випливає, що існують границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{a_k(r,F)-a_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}, \quad k \in \mathbb{Z}$. Позначимо

$$a_k^* = \lim_{r\to+\infty} \frac{a_k(r,F)-a_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}, \quad c_k^* = \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді з леми 4, позначивши $\lambda_1(r) := \int\limits_1^r \frac{\lambda(t)}{t} dt$, отримуємо

$$a_k^*\lambda(r) = -ikc_k^*\lambda_1(r) + o(\lambda_1(r)) + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \to +\infty, \tag{27}$$

а з леми 5

$$c_k^*\lambda(r) = ika_k^*\lambda_1(r) + o(\lambda_1(r)) + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \to +\infty. \tag{28}$$

Зауважимо, що $c_k^* \neq 0$ і $a_k^* \neq 0$. Справді, якщо припустити, що хоча б одна з цих величин дорівнює 0, то з (27) або з (28) випливає, що й інша величина дорівнює 0, а отже, й $L_k = 0$, що суперечить припущенню.

З (27) або (28) отримуємо

$$\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} = -ik\frac{c_k^*}{a_k^*} + o(1), \quad r \to +\infty.$$

Звідси негайно випливає існування границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} = -ik\frac{c_k^*}{a_k^*}$. З огляду на зроблене вище зауваження $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} > 0$. Позначимо цю границю через ρ. З [11, с. 117] отримуємо $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, де L є функцією повільного зростання.

Достатність. Припустимо, що (i) або (ii) виконується. З умов накладених на λ випливає ([11, с. 85]), що існує $M > 0$ таке, що для всіх натуральних k, починаючи з деякого k_1 виконується

$$\int\limits_r^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt \leqslant \frac{M\lambda(r)}{kr^k}, \quad r > 1. \tag{29}$$

Більше того, λ має скінченний порядок ([12]), тому існує $k_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$L_k(r,F) = -r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}} dt, \quad k > k_2. \tag{30}$$

З огляду на (30) і нерівність $|n_k(r)| \leqslant N_0(er)$, а також використовуючи скінченність λ-типу, отримуємо

$$|L_k(r,F)| \leqslant r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{N(et,f)}{t^{k+1}}dt \leqslant \widetilde{M} r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} \leqslant \frac{\widetilde{M} M\lambda(r)}{k}, \quad k > \max\{k_1,k_2\}, \quad r > 1.$$

З виразів для $c_k(r,f)$ [6, лема 21.2, с. 61] одержуємо для $r > 1$

$$c_k(r,f) + c_k(\frac{1}{r},f) = \frac{1}{2}(\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}})(r^k + r^{-k}) + \frac{r^k}{2}\int\limits_1^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt -$$

$$-\frac{r^k}{2}n_k(\mathbb{T})\int\limits_1^r \frac{dt}{t^{k+1}} + \frac{r^{-k}}{2}\int\limits_1^r t^{k-1}n_k(t,f)dt - \frac{r^{-k}}{2}n_k(\mathbb{T})\int\limits_1^r t^{k-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}})(r^k + r^{-k}) + \frac{r^k}{2}\int\limits_1^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt + \frac{r^{-k}}{2}\int\limits_1^r t^{k-1}n_k(t,f)dt - \frac{1}{2k}(r^k - r^{-k}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Порівнюючи отримане співвідношення з виразом для $L_k(r,f)$ (16), одержуємо

$$L_k(r,F) = 2(c_k(r,f) + c_k(\frac{1}{r},f)) - (\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}})r^{-k} -$$

$$-\int\limits_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k(t,f)}{t}dt + \frac{r^{-k}}{k}(r^k - 1)n_k(\mathbb{T}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r > 1.$$

Тобто

$$|L_k(r,F)| \leqslant 2|c_k(r,f) + c_k(\frac{1}{r},f)| + N_0(r,f) + O(1 + \frac{1}{r^k}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r > 1.$$

Використовуючи скінченність λ-типу, одержуємо

$$|L_k(r,F)| \leqslant M_1\lambda(r), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \to +\infty.$$

З огляду на отримані вище оцінки, а також враховуючи (17), матимемо

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{M_2\lambda(r)}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad r > 1, \tag{31}$$

де M_2 – деяка стала.

Тепер розглянемо випадок $k < 0$. Інтегруючи частинами у (16), одержуємо

$$L_k(r,F) = (\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}})r^k - \frac{1}{k}\frac{r^k n_k(t,f)}{t^k}\Bigg|_1^r + \frac{1}{k}\int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_k(t,f) + \frac{1}{k}(1 - r^k)n_k(\mathbb{T}), \quad r > 1.$$

Тобто

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{A\lambda(r)}{|k|} + \frac{1}{|k|}B\lambda(r) + o(1), \quad r > 1, \quad k < 0.$$

Тому

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{M_3\lambda(r)}{|k|}, \quad k < 0, \quad r > 1. \tag{32}$$

Отже, з (31) та (32), одержуємо

$$|L_k(r,F)| \leqslant \frac{C\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 1. \tag{33}$$

Поділивши (33) на $\lambda(r)$ і спрямувавши r до $+\infty$, отримуємо

$$|L_k| \leqslant \frac{C}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Застосовуючи теорему Хаусдорфа-Юнга ([11]), можемо записати

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\frac{1}{r}e^{i\theta})}}{\lambda(r)} - H(\theta) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} \leqslant \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{L_k(r,F)}{\lambda(r)} - L_k \right|^q \right\}^{1/q},$$

при $p \geqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$. З огляду на оцінки (33) та (34), перейшовши до границі при $r \to +\infty$, одержимо (1) при $p \geqslant 2$. Використовуючи монотонність інтегральних середніх, отримуємо, що співвідношення (1) виконується для всіх $p \in [1; +\infty)$.

5. Доведення теореми 2. *Необхідність.* З (2) і (3) випливає існування границь $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)}$, $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}}{\lambda(r)}$, для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо їх відповідно l_k^1 та l_k^2. Також зі співвідношень (2), (3) випливає, що ці границі l_k^1, l_k^2 дорівнюють коефіцієнтам Фур'є функцій H_1, H_2. Окрім того, з (2), (3) отримуємо

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\log|F(re^{i\theta})| - \lambda(r) Re H_1(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})| - \lambda(r) Re H_2(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty.$$

Зауважимо, що

$$\log|F(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| + O(\log r); \quad \log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})| = \log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})| + O(\log r).$$

$r \to +\infty$. Врахувавши, що $\log r = o(\lambda(r)), r \to +\infty$, одержуємо

$$\int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\lambda(r)} - ReH_1 \right|^p dt = \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\log|F(re^{i\theta})|}{\lambda(r)} - ReH_1 \right|^p dt + o(1), \quad r \to +\infty,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)} - ReH_2 \right|^p dt = \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\log|F(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)} - ReH_2 \right|^p dt + o(1), \quad r \to +\infty.$$

Звідси ([9]) випливає, що f є функцією ц.р.з. стосовно λ з індикатором $Re\,H_1 + Re\,H_2$.

Можливі такі випадки.

I. Якщо $l_k^1 = l_k^2 = 0$, $\forall k \neq 0$, тоді $H_1(\theta) = l_0^1 \geqslant 0$, $H_2(\theta) = l_0^2 \geqslant 0$. Використовуючи (11) і (14), матимемо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N_0^1(r,f)}{\lambda(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{l_0(r,F) - l_0(1,F)}{\lambda(r)} = l_0^1,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_0^2(r,f)}{\lambda(r)}=\lim_{r\to+\infty}\frac{l_0(\frac{1}{r},F)-l_0(1,F)}{\lambda(r)}=l_0^2.$$

Отже, якщо $l_0^1>0$ або $l_0^2>0$, то отримаємо $\lambda(r)\sim\frac{N^1(r)}{l_0^1}$ або $\lambda(r)\sim\frac{N^2(r)}{l_0^2}, r\to+\infty$. Тобто, $\lambda(r)$ є опуклою стосовно $\log r$ і ми довели (i).

II. Нехай тепер $\exists k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ таке, що $l_k^1\neq 0$ і $l_k^2\neq 0$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $k\in\mathbb{N}$. Оскільки f є функцією ц.р.з. в $\mathbb{C}^*$, то з [9] випливає існування границь

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Звідси отримуємо існування границь

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{a_k(r,f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{a_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{a_k(r,f)-a_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Позначимо відповідно через a_k^1, a_k^2 границі $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{a_k(r,F)}{\lambda(r)}$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{a_k(\frac{1}{r},F)}{\lambda(r)}$, та через c_k^1, c_k^2 границі $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)}$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}$.

З леми 4, позначивши $\lambda_1(r):=\int\limits_1^r\frac{\lambda(t)}{t}dt$, отримуємо

$$a_k^1\lambda(r)=-ikc_k^1\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty,\tag{35}$$

$$a_k^2\lambda(r)=ikc_k^2\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty.\tag{36}$$

А з леми 5,

$$c_k^1\lambda(r)=ika_k^1\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty,\tag{37}$$

$$c_k^2\lambda(r)=-ika_k^2\lambda_1(r)+o(\lambda_1(r))+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad r\to+\infty.\tag{38}$$

Звідси

$$\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}=-ik\frac{c_k^1}{a_k^1}+o(1),\quad r\to+\infty,\tag{39}$$

$$\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}=ik\frac{c_k^2}{a_k^2}+o(1),\quad r\to+\infty.\tag{40}$$

Отже, існує границя $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}$. Якщо хоча б одна з величин c_k^i або a_k^i, $i=1,2$ дорівнює 0, тоді з огляду на (35)-(38) інша величина дорівнює 0, а отже, й $l_k^i=0$, $i=1,2$ що суперечить припущенню. Тому $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)}>0$. Позначимо цю границю через ρ. З [11, с. 117] отримуємо $\lambda(r)=r^\rho L(r)$, де L є функцією повільного зростання. Ми довели (ii).

III. Зауважимо, що у випадках, коли $\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad l_k^i=0$ та $\exists k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad l_k^j\neq 0$, де $i,j\in\{1,2\}, i\neq j$, використовуючи наведені міркування, отримуємо висновок аналогічний висновку для випадку II.

Достатність. Припустимо, що (i) або (ii) виконується. З умов накладених на λ випливає ([11, с. 85]) співвідношення (29). Крім того, λ має скінченний порядок ([12]), тоді

$$\exists k_3 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_3 \quad \forall r > 1: \quad l_k(r, F) = -r^k \int_r^\infty \frac{n_k^1(t, f)}{t^{k+1}} dt, \tag{41}$$

$$\exists k_4 \in \mathbb{N} \quad \forall k > k_4 \quad \forall r > 1: \quad \overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)} = -r^k \int_r^\infty \frac{n_k^2(t, f)}{t^{k+1}} dt. \tag{42}$$

З огляду на (41),(42) і нерівності $|n_k^i(t)| \leqslant N_0^i(er), i = 1, 2$, отримуємо

$$|l_k(r, F)| \leqslant \frac{M_4 \lambda(r)}{k}, \quad |l_k(\frac{1}{r}, F)| \leqslant \frac{M_5 \lambda(r)}{k}, \quad r > 1$$

для достатньо великих k і деяких сталих M_4, M_5.

З виразів для $c_k(r, f)$ (лема 21.2 [6, с. 61]) одержимо

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha_{-k}} r^{-k}) + \frac{1}{2k} \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k \right) dn_k^1(t, f) - \frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^k}, \ \ k \neq 0, \ \ r > 1,$$

$$c_k(\frac{1}{r}, f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha_{-k}} r^k) + \frac{1}{2k} \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k \right) dn_k^2(t, f) - \frac{n_k(\mathbb{T})}{2kr^{-k}}, \ \ k \neq 0, \ \ r > 1.$$

Порівнючи ці рівності з виразами для $l_k(r, f), l_k(\frac{1}{r}, f)$ (10), (13), отримуємо

$$l_k(r, F) = 2c_k(r, f) - \overline{\alpha_{-k}} r^{-k} + \frac{1}{k} \int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k^1(t, f)}{t} dt + \frac{n_k(\mathbb{T})}{kr^k}, \quad k \neq 0, \quad r > 1,$$

$$\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)} = 2c_k(\frac{1}{r}, f) - \alpha_k r^{-k} - \frac{1}{k} \int_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^{-k} \frac{n_k^2(t, f)}{t} dt + \frac{n_k(\mathbb{T})}{kr^{-k}}, \quad k \neq 0, \quad r > 1.$$

Тобто, при $k > 0$

$$|l_k(r, F)| \leqslant 2|c_k(r, f)| + 2\frac{N_0^1(r, f)}{k} + O(\frac{1}{r^k}), \quad r > 1,$$

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)}| \leqslant 2|c_k(\frac{1}{r}, f)| + 2\frac{N_0^2(r, f)}{k} + O(\frac{1}{r^k}), \quad r > 1.$$

Використовуючи скінченність λ-типу, одержуємо

$$|l_k(r, F)| \leqslant M_6 \frac{\lambda(r)}{k}, \quad |\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)}| \leqslant M_7 \frac{\lambda(r)}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \to +\infty,$$

де M_6, M_7 – деякі сталі. Враховуючи отримані нерівності та з огляду на (11), (14), матимемо

$$|l_k(r, F)| \leqslant \frac{M_8 \lambda(r)}{k+1}, \quad |\overline{l_{-k}(\frac{1}{r}, F)}| \leqslant \frac{M_9 \lambda(r)}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad r > 1. \tag{43}$$

Тепер розглянемо випадок $k < 0$. Інтегруючи частинами у співвідношеннях (10), (13), отримуємо

$$l_k(r,F) = \alpha_k r^k + \frac{1}{k}\frac{r^k n_k^1(t,f)}{t^k}\bigg|_1^r - \frac{1}{k}\int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_k^1(t,f),$$

а також

$$\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)} = \overline{\alpha_{-k}}r^k + \frac{1}{k}\frac{r^k n_k^2(t,f)}{t^k}\bigg|_1^r - \frac{1}{k}\int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_k^2(t,f).$$

Тобто

$$|l_k(r,F)| \leqslant \frac{A_1\lambda(r)}{|k|} + \frac{1}{|k|}B_1\lambda(r) + o(1), \quad k < 0,$$

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}| \leqslant \frac{A_2\lambda(r)}{|k|} + \frac{1}{|k|}B_2\lambda(r) + o(1), \quad k < 0.$$

Тому

$$|l_{-k}(r,F)| \leqslant \frac{M_{10}\lambda(r)}{|k|}, \quad k < 0, \quad r \to +\infty, \tag{44}$$

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}| \leqslant \frac{M_{11}\lambda(r)}{|k|}, \quad k < 0, \quad r \to +\infty. \tag{45}$$

Отже, з (43) і (44) випливає

$$|l_k(r,F)| \leqslant \frac{C_1\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 1. \tag{46}$$

А з (43) і (45) випливає

$$|\overline{l_{-k}(\frac{1}{r},F)}| \leqslant \frac{C_2\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 1. \tag{47}$$

Поділивши співвідношення (46), (47) на $\lambda(r)$ і спрямувавши r до $+\infty$, отримуємо

$$|l_k^i| \leqslant \frac{C_i}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i = 1,2, \quad r > 1. \tag{48}$$

Використовуючи теорему Хаусдорфа-Юнга ([11]) і (48), одержуємо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log F(re^{i\theta})}{\lambda(r)} - H_i(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{l_k(r,F)}{\lambda(r)} - l_k^i\right|^q\right\}^{1/q}, \quad i = 1,2,$$

при $p \geqslant 2, 1 < q \leqslant 2$. З огляду на оцінки (46), (47) і (48), перейшовши до границі при $r \to +\infty$, одержимо (2), (3) для $p \geqslant 2$. Монотонність інтегральних середніх завершує доведення.

Список використаної літератури

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / *Б.Я. Левин.* – М.: ГИТТЛ, 1956.
2. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста I, II, III / *А.А. Кондратюк* // Мат. сб. – 1978. – Т. 106, №3. – С. 386-408.

3. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста II / *А. А. Кондратюк* // Мат. сб. – 1980. – Т. 113, №1. – С. 118-132.
4. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста III / *А. А. Кондратюк* // Мат. сб. – 1983. – Т. 120, №3. – С. 331-343.
5. *Rubel L.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions / *L.A.Rubel, B.A. Taylor* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
6. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *A. Kondratyuk, I. Laine* – Joensuu-L'viv, 2006 (Fourier series method in complex analysis (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – Vol. 10. P. 9-111).
7. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I / *A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 23, №1. – P. 19-30.
8. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II / *A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 24, №2. – P. 57-68.
9. *Голдак М.* Голоморфні функції цілком регулярного зростання в проколеній площині / *М. Голдак, А. Христіянин* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 91-96.
10. *Голдак М.* Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій / *М. Голдак, А. Христіянин* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 71-77.
11. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *А.А. Кондратюк* // Львів, 1988.
12. *Rubel L.A.* Entire and Meromorphic Functions / *L.A. Rubel.* – New York: Springer, 1996.

Стаття: надійшла до редакції 23.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

ON THE SIMULTANEOUS REGULAR GROWTH OF THE LOGARITHM OF MODULUS AND ARGUMENT OF A HOLOMORPHIC IN THE PUNCTURED PLANE FUNCTION

Oleg VYSHYNS'KYI, Andriy KHRYSTIYANYN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: khrystiyanyn@ukr.net, vyshynskyi@ukr.net

The paper deals with the class Λ_H° of holomorphic functions in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ of the completely regular growth and the concept of growth indicators of such functions. Under general assumptions we solve the problem of description of the sets of holomorphic functions f, functions of growth λ, functions H, H_1,

H_2 from $L_p[0,2\pi]$, and numbers $p \in [1,+\infty)$ such that

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

or

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) - \lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

where $F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z)$, $f(a_j) = 0$,
$\tilde{f}(z) = f(z)\prod\limits_{|a_j|=1}(z-a_j)^{-1}$, $m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}dz$.

Key words: holomorphic function, function of completely regular growth, growth indicator, Fourier coefficients, Fourier-Stieltjes coefficients.

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОМ РОСТЕ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ГОЛОМОРФНОЙ В ПРОКОЛОТОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ФУНКЦИИ

Олег ВЫШИНСКИЙ, Андрей ХРИСТИЯНИН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Рассматривается класс $f \in \Lambda_H^{\circ}$ голоморфных в проколотой плоскости $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функций вполне регулярного роста, понятия индикаторов таких функций, и при весьма общих предположениях решена задача описания множеств голоморфных в $\mathbb{C}^*$ функций f, функций роста λ, функций H, H_1, H_2 из $\mathbb{L}_p[0,2\pi]$ и чисел $p \in [1,+\infty]$ таких, что

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) + \overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

или

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log F(re^{i\theta}) - \lambda(r)H_1(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\overline{\log F(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})} - \lambda(r)H_2(\theta)|^p d\theta\right\}^{1/p} = o(\lambda(r)), \quad r \to +\infty,$$

где $F(z) = z^{-m}\tilde{f}(z)$, $f(a_j) = 0$,
$\tilde{f}(z) = f(z)\prod\limits_{|a_j|=1}(z-a_j)^{-1}$, $m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}dz$.

Ключевые слова: голоморфная функция, функция вполне регулярного роста, индикатор роста, коэффициенты Фурье, коэффициенты Фурье-Стильтьеса.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 48–68
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 48–68

УДК 519.63

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ

Аркадій КІНДИБАЛЮК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru*

Доведено апроксимаційні властивості та умови збіжності обчислювальної схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції. Зведення задачі Коші для рівняння адвекції до системи лінійних алгебричних рівнянь забезпечує степеневу збіжність за усіма змінними, які входять до рівняння.

Ключові слова: узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, апроксимаційна схема, дискретизація, рівняння адвекції, степенева збіжність.

1. Вступ. Багато важливих явищ природознавства, задач техніки та фізики описують диференціальними рівняннями, в тім числі диференціальними рівняннями у частинних похідних (ДРЧП). Незважаючи на потужний математичний апарат, багато з таких рівнянь ми не можемо розв'язати точно. Тому є потреба у застосуванні наближених методів або аналітично-числових методів. Одним з таких підходів є метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій [2, 5, 6, 9, 11-17, 19-24].

Основною задачею дослідження у [6], [13], [2] є задача Коші для системи еволюційних рівнянь із частинними похідними

$$\begin{cases} u_t = K(t,x,\partial)u + f(t,x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^q, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi \in B, \end{cases} \tag{1}$$

де B – деякий простір Банаха.

Шляхом побудови квазізображення диференціального оператора K у просторі лінійних операторів над $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{Z}_+$ задачу (1) зводять до задачі Коші для системи ЗДР

$$\begin{cases} du_{(n)}/dt = K_{(n)}(t)u_{(n)} + f_{(n)}(t), \\ u_{(n)}|_{t=0} = \varphi_{(n)} \in B_{(n)}, \end{cases} \tag{2}$$

де $B_{(n)}$ – скінченновимірний простір ізоморфний $\mathbb{R}^N, N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_q$. Подібно до методу Калоджеро, редукція (2) задачі (1) на простір $B_{(n)}$ отримана шляхом q-вимірної алгебричної інтерполяції на q-вимірному кубі $D \supset \Omega$.

У [3] запропоновано узагальнений метод розв'язування задачі Коші для ДРЧП (1) та зредукованої задачі для системи ЗДР (2) шляхом зведення задач до системи лінійних алгебричних рівнянь.

З цією метою введено додатково тривимірну алгебру Лі $\mathcal{G}_t := \{t, \partial/\partial t, 1\}$, для якої побудовано скінченновимірні квазізображення $X_t^{(n)}, Z_t^{(n)}, I_t^{(n)}$. Оскільки оператор K є лінійним оператором, то розв'язок задач (1) і (2) можна отримати як розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь. Якщо коефіцієнти диференціального оператора не змінюються зі зміною обчислювального експерименту, а змінюються початкові умови чи функція вільного члена, то зберігаючи у пам'яті обернену матрицю, розв'язування задачі Коші зводиться до перемножування оберненої матриці на вектор [3].

Мета нашої праці – застосувати такий підхід для двовимірного рівняння адвекції, а також з'ясування питання збіжності обчислювальної схеми та доведення ознак збіжності.

У другому пункті сформульовано модельну задачу Коші для рівняння адвекції, у третьому пункті на підставі введеної алгебри Лі та побудованих квазізображень елементів алгебри Лі побудовано схему наближеного відшукання розв'язку задачі. Досліджено ранг скінченновимірного квазізображення задачі, а в четвертому пункті наведені оцінки такого квазізображення. У п'ятому пункті доведено збіжність побудованої схеми. Порівняння чисельних схем наведено у шостому пункті.

2. Формулювання задачі. Введемо область $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0,1) \times (0,1)$, часову межу $T < +\infty$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$, простори Банаха у вигляді $V = C^{1,1,1}_{x,y,t}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q_T}\right)$ та $C = C(Q_T)$, причому $V \subset L^2(Q_T), C \subset L^2(Q_T)$. Формулюємо задачу Коші для двовимірного рівняння адвеції

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнти адвекційного переносу } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ \textit{початковий розподіл шуканої величини } \varphi = \varphi(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}(\Omega) \\ \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \in V \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + c_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \tag{3}$$

Здійснивши підстановку $u(x,y,t) = v(x,y,t) + \varphi(x,y)$ у (3), отримаємо задачу Коші для функції $v(x,y,t)$ з однорідною початковою умовою

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнти адвекційного переносу } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ \textit{знайти функцію } v = v(x,y,t) \in V \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + c_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} + c_2 \dfrac{\partial v}{\partial y} = -c_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язок задачі (4) шукаємо у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$. Ввівши для задачі (4) позначення

$$A := \frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y}, \qquad f := -c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \in C(Q_T), \tag{5}$$

отримаємо задачу для операторного рівняння

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{задано оператор } A : B \to C \textit{ та елемент } f \in C, \\ \textit{знайти елемент } v \in B \textit{ такий, що } Av = f. \end{array} \right. \tag{6}$$

Задачу Коші зведено до задачі для операторного рівняння, яку розв'яжемо узагальненим методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

3. Побудова обчислювальної схеми. Введемо алгебру Гайзенберга-Вейля

$$\mathcal{G} := \{x, \partial/\partial x, 1\} \oplus \{y, \partial/\partial y, 1\} \oplus \{t, \partial/\partial t, 1\},$$

яка є алгеброю Лі. Оскільки оператор A належить до універсальної огортуючої алгебри $U(\mathcal{G})$, алгебри $\mathcal{G}$, то він є лінійною комбінацією елементів алгебри Гайзенберга-Вейля. Квазізображення A_h оператора A побудуємо як лінійну комбінацію скінченновимірних квазіпредставлень алгебри $\mathcal{G}$. Для цього зафіксуємо три натуральні числа n_x, n_y та n_t, де n_x – кількість вузлів за змінною x, n_y – кількість вузлів за змінною y, n_t – кількість вузлів за змінною t. Згідно з теоремою Вейєрштрасса [4], [10] множина всіх поліномів з дійсними коефіцієнтами є щільною множиною в просторі $C(Q_T)$, тому розв'язок (6) шукатимемо у вигляді інтерполяційного полінома.

Для кожного вузла за змінною x асоційовано поліном Лагранжа $l_j(x)$, який задовольняє умови $l_j(x_i) = \delta_{ij}$, де

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{array} \right.$$

Для кожного вузла за змінною y асоційовано поліном Лагранжа $l_j(y)$ такий, що $l_j(y_i) = \delta_{ij}$. Для кожного вузла за змінною t асоційовано поліном Лагранжа $l_j(t)$ такий, що $l_j(t_i) = \delta_{ij}$.

Нехай $M_j = (x_{jx}, y_{jy}, t_{jt})$ – вузли області Q_T, де j_x – номер вузла на осі x, j_y – номер вузла на осі y, j_t – номер вузла на осі t. Набір таких вузлів позначимо:

$$Q_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{n_x} \times \{y_j\}_{j=1}^{n_y} \times \{t_k\}_{k=1}^{n_t}.$$

Вузли занумеруємо у спосіб $j = (j_t - 1)n_x n_y + (j_y - 1)n_x + j_x$, тоді поліном Лагранжа асоційований з вузлом M_j набуває вигляду $l_j(x, y, t) = l_{jx}(x) l_{jy}(y) l_{jt}(t)$. Апроксимація розв'язку (6) набуде вигляду

$$v_h(x, t) = \sum_{j_t=1}^{n_t} \sum_{j_y=1}^{n_y} \sum_{j_x=1}^{n_x} v_j l_{j_x}(x) l_{j_y}(y) l_{j_t}(t) = \overline{v} \left(l(t) \otimes l(y) \otimes l(x) \right), \tag{7}$$

де $\overline{v} = \{v_j\}_{j=1}^{n_x n_y n_t}$ – відповідний вектор значень апроксимації, символ $\otimes$ позначає тензорний добуток. $l(x) = \{l_1(x), l_2(x), ..., l_{n_x}(x)\}^\top$, $l(y) = \left\{l_1(y), l_2(y), ..., l_{n_y}(y)\right\}^\top$, $l(t) = \{l_1(t), l_2(t), ..., l_{n_t}(t)\}^\top$ – відповідні набори поліномів Лагранжа за змінними x, y, t, $\top$– знак траспонування.

Для побудови обчислювальної схеми розв'язування задачі (4), підставимо (7) у операторне рівняння (6), отримаємо

$$\overline{v}\left(l'(t)\otimes l(y)\otimes l(x)+c_1 l(t)\otimes l(y)\otimes l'(x)+c_2 l(t)\otimes l'(y)\otimes l(x)\right)=f(x,y,t).$$

Якщо послідовно для кожної змінної x,y,t вибрати $i_x,j_x=\overline{1,n_x}$, $i_y,j_y=\overline{1,n_y}$, $i_t,j_t=\overline{1,n_t}$, то отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) вигляду $A_{1,h}v_h=F_h$, де

$$A_{1,h}:=Z_t\otimes I_y\otimes I_x+c_1 I_t\otimes I_y\otimes Z_x+c_2 I_t\otimes Z_y\otimes I_x,\quad F_h=\{f(x_{i_x},y_{i_y},t_{j_t})\}_{i_x=1,j_y=1,k_t=1}^{n_x,n_y,n_t}.$$

Скінченновимірні квазізображення Z_x,Z_y,Z_t,I_x,I_y,I_t, побудовані за такими правилами:

$$Z_{x,ij}=l'_j(x_i),\quad i,j=\overline{1,n_x},\quad Z_{y,ij}=l'_j(y_i),\quad i,j=\overline{1,n_y},\quad Z_{t,ij}=l'_j(t_i),\quad i,j=\overline{1,n_t},$$

$$I_{x,ij}=l_j(x_i)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n_x},\quad I_{y,ij}=l_j(y_i)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n_y},$$

$$I_{t,ij}=l_j(t_i)=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n_t}.$$

На підставі теореми про ранг скінченновимірного зображення [14] ранги відповідних квазіпредставлень набувають значень

$$rank(I_t)=n_t,\quad rank(Z_t)=n_t-1,\quad rank(I_x)=n_x,$$

$$rank(Z_x)=n_x-1,\quad rank(I_y)=n_y,\quad rank(Z_y)=n_y-1.$$

Лема 1. *Нехай A,B,C – квадратні матриці, тоді*

$$rank\,(A\otimes B\otimes C)=rank(A)rank(B)rank(C).$$

Доведення. Позначимо матрицю $D=B\otimes C$, тоді на підставі властивості тензорних добутків [18]

$$rank(D)=rank\,(B\otimes C)=rank(B)rank(C).$$

Визначимо ранг матриці $A\otimes D$, тоді

$$rank\,(A\otimes D)=rank(A)rank(D)=rank(A)rank(B)rank(C),$$

тобто

$$rank\,(A\otimes B\otimes C)=rank(A)rank(B)rank(C).$$

□

Ранги матриць $Z_t\otimes I_y\otimes I_x$, $I_t\otimes I_y\otimes Z_x$, $I_t\otimes Z_y\otimes I_x$ на підставі леми 1 набудуть значень

$$rank\,(Z_t\otimes I_y\otimes I_x)=n_x n_y(n_t-1),\quad rank\,(I_t\otimes I_y\otimes Z_x)=(n_x-1)n_y n_t,$$

$$rank\,(I_t\otimes Z_y\otimes I_x)=n_x(n_y-1)n_t.$$

Позаяк для побудови матриці $A_{1,h}$ ми врахували усі вузли, то кількість рядків цієї матриці становить $n_x n_y n_t$.

Оскільки початкові умови відомі й однорідні, то вважатимемо, що базисом простору апроксимації є множина поліномів Лагранжа, без поліномів асоційованих з початковим моментом часу. Множина поліномів Лагранжа для часової змінної є

$$\tilde{l}(t)=\{l_2(t),l_3(t),...,l_{n_t}(t)\},$$

причому

$$\forall l_i \in \tilde{l}(t): \quad l_i|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall l_i \in \tilde{l}(t): \quad l_i \in B, \quad i = \overline{2, n_t}.$$

Розмірність $\dim \tilde{l}(t) = n_t - 1$. Оскільки система функцій $l_x \otimes l_y \otimes \tilde{l}_t \in B$ лінійно незалежна, то вважатимемо, що ці функції є базисом простору апроксимацій B_h.

Вилучивши вузли асоційовані з початковим моментом часу, отримаємо нову систему вузлів

$$\tilde{Q}_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{n_x} \times \{y_i\}_{i=1}^{n_y} \times \{t_j\}_{j=2}^{n_t}.$$

Отже, скінченновимірні квазізображення в просторі B_h набувають вигляду

$$Z_{x,ij} = l'_j(x_i), \quad i,j = \overline{1, n_x}, \quad Z_{y,ij} = l'_j(y_i), \quad i,j = \overline{1, n_y}, \quad \tilde{Z}_{t,ij} = l'_j(t_i), \quad i,j = \overline{2, n_t},$$

$$I_{x,ij} = l_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1, n_x}, \quad I_{y,ij} = l_j(y_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1, n_y},$$

$$\tilde{I}_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{2, n_t}.$$

Ранги скінченновимірних квазізображень $Z_t \otimes I_y \otimes I_x$, $I_t \otimes I_y \otimes Z_x$, $I_t \otimes Z_y \otimes I_x$ на підставі леми 1 набули значень

$$rank\left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right) = n_x n_y (n_t - 1),$$

$$rank\left(\tilde{I}_t \otimes I_y \otimes Z_x\right) = (n_x - 1) n_y (n_t - 1),$$

$$rank\left(\tilde{I}_t \otimes Z_y \otimes I_x\right) = n_x (n_y - 1)(n_t - 1),$$

а скінченновимірне квазізображення оператора задачі (6) набуде вигляду

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x + c_1 \tilde{I}_t \otimes I_y \otimes Z_x + \tilde{I}_t \otimes Z_y \otimes I_x. \tag{8}$$

Кількість рядків у матриці (8) становить $n_x n_y (n_t - 1)$.

Лема 2. *Нехай A, B – квадратні матриці, тоді для довільного натурального числа k правильне співвідношення*

$$(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k.$$

Доведення. При $k = 1$ отримаємо очевидну рівність $A \otimes B = A \otimes B$. З властивості $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ [18] при $k = 2$ одержуємо

$$(A \otimes B)(A \otimes B) = A^2 \otimes B^2.$$

Припустимо, що справджується співвідношення для $k - 1$

$$(A \otimes B)^{k-1} = A^{k-1} \otimes B^{k-1}.$$

Доведемо за індукцією, що воно правильне за довільного k

$$(A \otimes B)^k = (A \otimes B)(A \otimes B)^{k-1} = (A \otimes B)\left(A^{k-1} \otimes B^{k-1}\right) = A^k \otimes B^k.$$

□

Лема 3. *Нехай A, B, C – квадратні матриці, тоді для довільного натурального числа k правильне співвідношення*

$$(A \otimes B \otimes C)^k = A^k \otimes B^k \otimes C^k.$$

Доведення. Позначимо матрицю $D = B \otimes C$. На підставі леми 3 отримуємо, що

$$(A \otimes D)^k = A^k \otimes D^k.$$

Скориставшись лемою 3 для матриці D одержуємо $D^k = (B \otimes C)^k = B^k \otimes C^k$, звідки

$$(A \otimes D)^k = A^k \otimes D^k = A^k \otimes B^k \otimes C^k.$$

□

Лема 4. *Нехай A, B – переставні нільпотентні матриці, тоді їхня лінійна комбінація $\alpha A + \beta B$ є нільпотентою матрицею, де α, β – довільні числа.*

Доведення. Нехай k – найменше натуральне число, за якого одночасно виконується $A^k = 0, B^k = 0$. Оскільки $AB = BA$, то

$$(\alpha A + \beta B)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i \alpha^i \beta^{2k-i} A^i B^{2k-i},$$

де C_{2k}^i– біноміальні коефіцієнти.

Розглянемо випадок, коли $i \leqslant k$, тоді $2k - i \geqslant k$ набуло значення $2k - i = k + m$, де $m \geqslant 0$– деяке число

$$B^{2k-i} = B^{k+m} = 0, \quad A^i B^{2k-i} = A^i \cdot 0 = 0.$$

Нехай $i \geqslant k$ набуло значення $i = k + m$, тоді $A^{k+m} B^{k-m} = 0 \cdot B^{k-m} = 0$. Отже,

$$(\alpha A + \beta B)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i \alpha^i \beta^{2k-i} A^i B^{2k-i} = 0.$$

□

Лема 5. *Матриці $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)$, $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)$ переставні та нільпотентні.*

Доведення. Ланцюжок перетворень доводить те, що матриці $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)$ та $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)$ переставні. Справді,

$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right) \cdot \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right) = \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes Z_x\right),$$
$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right) \cdot \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right) = \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes Z_x\right).$$

Доведемо, що матриця $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)$ – нільпотентна. На підставі теореми про ранг скінченновимірного квазізображення [14] знаходимо $Z_x^{n_x} = 0$, а з леми 3 отримуємо

$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)^{n_x} = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_x} \otimes I_y \otimes Z_x^{n_x} = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_x} \otimes I_y \otimes 0 = 0.$$

Оскільки $Z_y^{n_y} = 0$, то отримуємо

$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)^{n_y} = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_y} \otimes Z_y^{n_y} \otimes I_y = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^{n_x} \otimes 0 \otimes I_x = 0.$$

□

Лема 6. *Матриця* $c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x$ *нільпотетна.*

Доведення. Матриці $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x\right)$, $\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)$ згідно з лемою 5 переставні та нільпотентні.

Оскільки матриця $c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x$ є лінійною комбінацією переставних нільпотентних матриць, то на підставі леми 4 матриця $c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x$ також нільпотетна. □

Позначимо I^N одиничну матрицю $\tilde{I}_t \otimes I_y \otimes I_x$.

Лема 7. *Матриця* $I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x$ *має обернену матрицю і її ранг є* $n_x n_y(n_t - 1)$.

Доведення. Запишемо обернену матрицю

$$\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)^{-1}$$

у вигляді формального ряду

$$\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)^{-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)^k.$$

Оскільки на підставі леми 6 матриця $c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x$ є нільпотентною, то

$$\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)^{-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\max\{n_x, n_y\}} (-1)^k \left(c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)^k. \tag{9}$$

Оскільки ряд (9) скінченний, то матриця

$$I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x$$

має обернену матрицю і її ранг дорівнює кількості рядків у матриці, тобто

$$rank\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right) = n_x n_y (n_t - 1),$$

що доводить лему. □

Теорема 1. *Про ранг скінченновимірного квазізображення оператора задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції.*

Ранг скінченновимірного квазізображення A_h *становить*

$$n_x n_y(n_t - 1).$$

Доведення. Запишемо матрицю (8) у вигляді

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x \left(I^N + \left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right)^{-1}\left(\tilde{I}_t \otimes (c_1 I_y \otimes Z_x + c_2 Z_y \otimes I_x)\right)\right) =$$
$$= \left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right)\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right).$$

У лемі 7 з'ясовано, що

$$rank\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right) = n_x n_y\left(n_t - 1\right),$$

а згідно з лемою 1 отримаємо $rank\left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right) = n_x n_y\left(n_t - 1\right)$.

Оскільки для двох матриць A, B виконується властивість

$$rank(AB) = \min\left\{rank(A),\, rank(B)\right\},$$

то ранг скінченновимірного зображення набув значення

$$rank(A_h) = rank\left(\left(\tilde{Z}_t \otimes I_y \otimes I_x\right)\left(I^N + c_1\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_y \otimes Z_x + c_2\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_y \otimes I_x\right)\right) =$$
$$= \min\left\{n_x n_y\left(n_t - 1\right), n_x n_y\left(n_t - 1\right)\right\} = n_x n_y\left(n_t - 1\right),$$

що доводить теорему. □

Апроксимацію розв'язку (7) подамо у вигляді

$$v_h(x,y,t) = \sum_{j=n_x N y}^{n_x n_y n_t} v_j l_j(x,y,t), \quad \forall\,(x,y,t) \in Q_T,$$

або

$$v_h(M) = \sum_{j=n_x n_y}^{n_x n_y n_t} v_j l_j(M), \quad \forall M \in Q_T, \tag{10}$$

де l_j – відповідний поліном Лагранжа, асоційований з вузлом $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$.

Зазначимо, таке: оскільки $v_h|_{t=0} = 0$, то $v_h \in B_h \subset B$.

Підставивши (10) у операторне рівняння (6), отримаємо рівняння

$$\sum_{j=n_x n_y}^{n_x n_y n_t} v_j A\left(l_j(M)\right) = f(M), \quad \forall M \in Q_T.$$

Вибравши послідновно $M := M_i \in \tilde{Q}_{T,h} \subset Q_T$, отримаємо СЛАР:

$$\sum_{j=n_x n_y}^{n_x n_t} v_j A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i} = f(M_i), \quad i = \overline{n_x n_y, n_x n_y n_t} \tag{11}$$

для визначення невідомих компонент вектора $\overline{v}$. Введемо позначення

$$A_{h,ij} = A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i}, \quad f_{h,i} = f(M_i) \quad i,j = \overline{n_x n_y, n_x n_y n_t}.$$

Зазначимо, що знайдена матриця A_h збігається з скінченновимірним квазізображенням (8). Отже, ми отримали дискретне формулювання операторного рівняння

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A_h : B_h \to C_h \textit{ та елемент } f_h \in C_h, \\ \textit{знайти елемент } v_h \in B_h \textit{ такий, що } A_h v_h = f_h. \end{cases} \tag{12}$$

4. Апроксимаційні властивості схеми. Нехай N – розмірність просторів B_h, C_h, тоді введемо циліндичну норму [10] в просторах B_h, C_h

$$\|v\|_{B_h} = \|v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j^2} \tag{13}$$

причому

$$\lim_{N\to\infty}\|v\|^2_{B_h} = \int\limits_{Q_t} v^2\,dx\,dy\,dt.$$

Нехай функція v така, що

$$v \in W^{n_x n_y n_t,\infty} = \{v : Q_t \to \mathbb{R} \ \ : \ \ D^\alpha v \in L^\infty(Q_t),\ \ \forall|\alpha| \leqslant n_x n_y n_t\},$$

тобто функція v разом зі своїми всіма можливими похідними до $n_x n_y n_t$ порядку належить до простору $L^\infty(Q_t)$.

Запишемо залишковий член [1] інтерполяційного полінома Лагранжа v_I

$$v(x,t)-v_I(x,t) \approx \frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\partial^{n_x}v(\xi_1,y,t)}{\partial x^{n_x}} + \frac{\omega_{n_y}(y)}{(n_y)!}\frac{\partial^{n_y}v(x,\xi_2,t)}{\partial y^{n_y}} + \frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_t}v(x,\eta)}{\partial t^{n_t}}, \quad (14)$$

де $\omega_{n_x}(x) = \prod\limits_{i=1}^{n_x}(x-x_i)$, $\omega_{n_t}(t) = \prod\limits_{i=1}^{n_t}(t-t_i)$, $(\xi_1,\xi_2)\in\Omega, \eta\in(0,T]$.

Позначимо $\Delta x = \frac{1}{(n_x-1)}$, $\Delta y = \frac{1}{(n_y-1)}$ – крок дискретизації за змінними x та y, $\Delta t = \frac{1}{(n_t-1)}$ – крок дискретизації за часовою змінною.

Теорема 2. *Про апроксимаційні властивості обчислювальної схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції.*

Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A на елементі $v \in B\cap W^{n_x n_t,\infty}(Q_t)$, причому похибка апроксимації в нормі простору C_h у випадку рівновіддалених вузлів характеризується оцінкою

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leqslant \ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty +$$

$$+|c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-1}}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y-1}\right)^{n_{y-1}}\left\|\frac{\partial^{n_y}v}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty. \quad (15)$$

Доведення. Позаяк норма простору C_h є векторною, то подамо різницю

$$Av - A_h v, \quad \forall v \in B$$

у вигляді вектора.

Для виразу $Av \in C$ отримаємо вектор $\{Av(M_i)\}_{i=1}^N$, де $M_i \in \tilde{Q}_{T,h}$, а для елемента $v \in B$ знаходимо вектор-стовпець $\{v(M_j)\}_{j=1}^N$, де $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$. Розглянемо i-ту компоненту вектора $A_h v$

$$(A_h v)_i = (A(l_1)(M_i),...,A(l_N)(M_i)).(v(M_1),...,v(M_N)))^\top =$$

$$= \sum_{j=1}^N v(M_j)A(l_j)(M_i) = (Av_I)(M_i).$$

Врахувавши отримане співвідношення $(A_h v)_i = (Av_I)(M_i)$, у підсумку отримаємо

$$(Av - A_h v)_i = (Av(M) - Av_I(M))\,|_{M=M_i}.$$

Розглянемо $\|Av - A_h v\|_{C_h}$

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((Av(M) - Av_I(M))\,|_{M=M_i}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{M\in Q_T}|A\left(v(M) - v_I(M)\right)|\right)^2} \leqslant \|A\left(v - v_I\right)\|_{\infty}.$$

Отже, ми знайшли оцінку вигляду

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leqslant \|A\left(v - v_I\right)\|_{\infty}. \tag{16}$$

Діючи оператором $A = \partial/\partial t + c_1\partial/\partial x + c_2\partial/\partial y$ на залишковий член інтерполяційного полінома Лагранжа (14), отримаємо таке наближення:

$$A\left(v - v_I\right) \approx c_1\frac{\omega'_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\partial^{n_x}v(\xi_1, y, t)}{\partial x^{n_x}} + c_2\frac{\omega'_{n_y}(y)}{(n_y)!}\frac{\partial^{n_y}v(x, \xi_2, t)}{\partial y^{n_y}} + \frac{\omega'_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_t}v(x, \eta)}{\partial t^{n_t}}.$$

Врахувавши, що $v \in W^{n_x n_t, \infty}$, одержимо оцінку

$$\|A\left(v - v_I\right)\|_{\infty} \leqslant \frac{|\omega'_{n_t}(t)|}{(n_t)!}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_{\infty} +$$

$$+|c_1|\frac{|\omega'_{n_x}(x)|}{(n_x)!}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_{\infty} + |c_2|\frac{|\omega'_{n_y}(y)|}{(n_y)!}\left\|\frac{\partial^{n_y}v}{\partial y^{n_y}}\right\|_{\infty}.$$

Оскільки значення полінома $\omega'_{n_x}(x)$ залежить від положення вузлів, тоді у випадку рівновіддалених вузлів отримаємо, що $|\omega'_{n_x}(x)| \leqslant (n_x)!\ln(n_x)\left(\frac{1}{(n_x-1)}\right)^{n_x-1}$.

Аналогічну оцінку одержуємо для $\omega'_{n_y}(y)$ і $\omega'_{n_t}(t)$, тобто

$$|\omega'_{n_y}(y)| \leqslant (n_y)!\ln(n_y)\left(\frac{1}{(n_y-1)}\right)^{n_y-1}, \qquad |\omega'_{n_t}(t)| \leqslant (n_t)!\ln(n_t)\left(\frac{1}{(n_t-1)}\right)^{n_t-1}.$$

Отже,

$$\|A(v - v_I)\|_{\infty} \leqslant \ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t - 1}\right)^{n_{t-1}}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_{\infty} +$$

$$+|c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x - 1}\right)^{n_{x-1}}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_{\infty} + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y - 1}\right)^{n_{y-1}}\left\|\frac{\partial^{n_y}v}{\partial y^{n_y}}\right\|_{\infty}. \tag{17}$$

Врахувавши (16) та (17), приходимо до оцінки (15), що доводить теорему. □

5. Збіжність обчислювальної схеми. Для доведення збіжності апроксимаційної схеми нам потрібно довести, що схема Лі-алгебричних дискретних апроксимацій задовольняє умови **теореми Канторовича** (*про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми*) та теореми *про ознаку обмеженого оберненого оператора* [4].

Згідно з теоремою Канторовича [7] про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми, співвідношення $\lim\limits_{h\to 0}\|v - v_h\|_B = 0$ правильне, якщо виконується:

1) $\forall f \in C\ \exists! v \in B : Av = f$;
2) $\forall A_h\ \exists A_h^{-1} : \|A_h^{-1}\| \leqslant M < +\infty$;
3) $\forall v \in D(A) \subset B : \lim\limits_{h\to 0}\|Av - A_h v\|_C = 0$.

Згідно з теоремою про ознаку обмеженого оберненого оператора [4], якщо лінійний оператор $A : B \to C$ такий, що

$$\exists\alpha = const > 0 \quad \text{таке, що} \quad \|Av\|_C \geqslant \alpha\|v\|_B \quad \forall v \in D(A), \tag{18}$$

тоді існує лінійний обмежений обернений оператор.

Зрозуміло, що знаходження константи $\alpha > 0$ є нетривіальною задачею. Крім того, послідовність операторів A_h є нескінченною послідовністю. Проте для практичного застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій потрібно визначити якісь додаткові або еквівалентні ознаки існування обмеженого оператора. З огляду на важливість сформульованої проблеми доведемо теорему.

Теорема 3. *Про існування обмеженого оберненого оператора для квазізображення диференціального оператора двовимірного рівняння адвекції.*

Якщо ранг скінченновимірного матричного квазізображення диференціального оператора двовимірного рівняння адвекції A_h оператора A дорівнює розмірності простору апроксимації, тобто

$$rankA_h = dimB_h,$$

тоді існує лінійний обмежений обернений оператор A_h^{-1}, причому

$$\forall A_h \quad \exists M > 0 \quad \exists A_h^{-1} : \quad \|A_h^{-1}\| \leqslant M < +\infty. \tag{19}$$

Доведення. Оскільки норма задовольняє властивості невід'ємності та невиродженості, тобто

$$\|A_h v\|_{C_h} \geqslant 0, \quad \forall v \in D(A_h),$$

причому

$$\|A_h v\|_{C_h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0_{B_h},$$

то

$$\forall v \in D(A_h)\backslash\{0_{B_h}\} : \quad \|A_h v\|_{C_h} > 0.$$

Справді, нехай $\|A_h v\|_{C_h} = 0$. Оскільки норма задовольняє аксіому невиродженості, то такий випадок можливий лише тоді, коли $A_h v = 0_{C_h}$. Для ненульового елемента $v \in B_h$ це можливо лише тоді, коли $detA_h = 0$, тобто $rankA_h < dimB_h$. Оскільки оператор A_h такий, що $rankA_h = dimB_h, detA_h \neq 0$, тоді $\|A_h v\|_{C_h} = 0$ можливе тоді і тільки тоді, коли $v = 0_{B_h}$.

Величини $\|A_h v\|_{C_h}$ і $\|v\|_{B_h}$ строго додатні для $\forall v \in D(A_h)\backslash\{0_{B_h}\}$. Це означає, що існує стала $\alpha > 0$, для якої виконується

$$\|A_h v\|_{C_h} \geqslant \alpha\|v\|_{B_h}.$$

З того, що оператор A_h має обернений оператор, можемо довести, [4], що

$$\|A_h^{-1}\| \leqslant M < +\infty.$$

□

Теорема 4. *Про збіжність схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції.*

Послідовність u_h визначена схемою (12) відшукання наближеного розв'язку задачі (6) збігається до точного розв'язку задачі (3), причому норма похибки характеризується величиною

$$\|u-u_h\|_{B_h} \leqslant M \left(\ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}}\left\|\frac{\partial^{n_t}u}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-1}}\left\|\frac{\partial^{n_x}(u-\varphi)}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + \right.$$

$$\left. + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y-1}\right)^{n_{y-1}}\left\|\frac{\partial^{n_y}(u-\varphi)}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty\right), \tag{20}$$

де число $M>0$: таке, що $\forall A_h : \|A_h^{-1}\| \leqslant M$.

Доведення. Для розв'язування задачі (3) ми ввели заміну $u = v+\varphi$ та $u_h = v_h+\varphi_h$. Тоді похибка апроксимації розв'язку задачі (3) набула вигляду

$$\|u-u_h\|_B = \|v-v_h+\varphi-\varphi_h\|_B \leqslant \|v-v_h\|_B + \|\varphi-\varphi_h\|_B,$$

де $\|v-v_h\|_B$– норма похибки апроксимації розв'язку задачі (4), а $\|\varphi-\varphi_h\|_B$ – норма похибки інтерполювання початкової умови, яку характеризує така апріорна оцінка:

$$\|\varphi-\varphi_h\|_{B_h} \leqslant \left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left\|\frac{\partial^{n_x}\varphi}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\left\|\frac{\partial^{n_y}\varphi}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty,$$

тобто $\|\varphi-\varphi_h\|_{B_h} \leqslant O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$.

Похибку інтерполювання функції правого члена $\|f-f_h\|_B$ характеризує така апріорна оцінка:

$$\|f-f_h\|_{B_h} \leqslant \left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left\|\frac{\partial^{n_x}f}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\left\|\frac{\partial^{n_y}f}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty,$$

тобто $\|f-f_h\|_{B_h} \leqslant O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$.

Розглянемо $\|v-v_h\|_{B_h}$

$$\|v-v_h\|_{B_h} = \|A_h^{-1}A_h(v-v_h)\|_{B_h} \leqslant \|A_h^{-1}\|\|A_h(v-v_h)\|_{C_h} =$$

$$= \|A_h^{-1}\|\|A_h(v-v_h)+Av-Av\|_{C_h} = \|A_h^{-1}\|\|(A_hv-Av)+(Av-A_hv_h)\|_{B_h} \leqslant$$

$$\leqslant \|A_h^{-1}\|\left(\|Av-A_hv\|_{C_h} + \|f-f_h\|_{C_h}\right).$$

Згідно з умовою теореми виконуються (19), тоді

$$\|v-v_h\|_{B_h} \leqslant M\left(\|Av-A_hv\|_{C_h} + \|f-f_h\|_{C_h}\right).$$

Врахувавши оцінку похибки апроксимації оператора і нехтуючи доданками порядку $O(\frac{1}{n_x!}+\frac{1}{n_y!})$, отримуємо

$$\|v-v_h\|_{B_h} \leqslant M\left(\ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + \right.$$

$$\left. + |c_1|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-1}}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty + |c_2|\ln(n_y)\left(\frac{1}{n_y-1}\right)^{n_{y-1}}\left\|\frac{\partial^{n_y}v}{\partial y^{n_y}}\right\|_\infty\right).$$

Оскільки $v = u-\varphi$ та $\|\varphi-\varphi_h\|_{B_h} \leqslant O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$, нехтуючи величинами порядку $O\left(\left(\frac{1}{n_x}\right)^{n_x} + \left(\frac{1}{n_y}\right)^{n_y}\right)$, то у підсумку приходимо до оцінки 20. □

6. Оцінки швидкості збіжності. Для проведення числових експериментів вважатимемо, що область $Q_T := [0,1] \times [0,1] \times (0,1]$, тобто $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, $t \in (0,1]$. Норму похибки апроксимації точного розв'язку $u - u_h = u(x,y,t) - u_h(x,y,t)$ у просторі $L^2(Q_T)$ обчислюємо за формулою

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} (u - u_h)^2 \, dxdydt,$$

у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})} = \sup_{(x,y,t)\in Q_{T,h}} |u(x,y,t) - u_h(x,y,t)|,$$

а в просторі Соболєва $W^{1,2}(Q_T)$ [4]

$$\|u - u_h\|^2_{W^{1,2}(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} \left[(u-u_h)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}\right)^2 \right] dQ_T.$$

Порядок збіжності у нормі простору $L^2(Q_T)$ визначається формулою

$$p_{h,L^2(Q_T)} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{L^2(Q_T)}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^2(Q_T)}} \right),$$

порядок збіжності у нормі простору $L^\infty(Q_{T,h})$

$$p_{h,L^\infty(Q_{T,h})} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^\infty(Q_{T,h})}} \right),$$

а порядок збіжності у нормі простору $W^{1,2}(Q_T)$

$$p_{h,W^{1,2}(Q_T)} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{W^{1,2}(Q_T)}}{\|u - u_{h/2}\|_{W^{1,2}(Q_T)}} \right).$$

Якщо $\|u - u_h\| = 0$ і $\|u - u_{h/2}\| = 0$, то невизначеність $0/0$ подаємо у таблицях як NaN (*not a number*).

Модельні задачі для рівняння адвекції ми досліджували з використанням методу скінченних різниць (МСР), методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (МЛАДА) та узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (УМЛАДА). Зазначимо, що у випадку застосування методу МЛАДА, розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь виконано з використанням вбудованих функцій пакета символьного обчислення Mathematica.

Позначимо $\Delta x = \frac{1}{(n_x - 1)}$, $\Delta y = \frac{1}{(n_y-1)}$– крок дискретизації за змінними x та y, $\Delta t = \frac{1}{(n_t-1)}$ – крок дискретизації за часовою змінною. Якщо крок дискретизації за просторовими та часовою змінними вибрані однаковими, то $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$. У випадку методу МЛАДА h позначає крок дискретизації тільки за просторовими змінними, оскільки при розв'язуванні задачі Коші для системи ЗДР пакетом Mathematica, кількість вузлів за часовою змінною вибирається пакетом Mathematica автоматично.

Приклад 1. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,y,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = x^8 + y^8 \end{cases} \tag{21}$$

отримано числові результати, які наведені у табл. 1-4.

Точний розв'язок задачі (21) набув вигляду $u(x,y,t) = (x-t)^8 + (y-t)^8$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (21) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,y,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = -8x^7 - 8y^7, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,y,t)$ задачі (22), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,y,t)$ задачі (21) так:

$$u_h(x,y,t) = x^8 + y^8 + v_h(x,y,t),$$

де $x^8 + y^8$ – початкова умова задачі (21).

Таблиця 1

Значення норми похибок у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.304255	1.05925	2.57967
$h = 1/4$	0.0925091	4.4985	5.63376
$h = 1/8$	0.0246464	$9.39717 \cdot 10^{-7}$	0

Таблиця 2

Значення норми похибок у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	3.9375	17.625
$h = 1/4$	0	38.1445	65.695
$h = 1/8$	0	$3.52385 \cdot 10^{-5}$	0

Таблиця 3

Значення норми похибок у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.53108	3.92108	14.2869
$h = 1/4$	0.885425	23.6889	38.8586
$h = 1/8$	0.449537	$6.47009 \cdot 10^{-5}$	0

Таблиця 4

Значення порядків збіжності у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.71762	-2.0864	-1.12691
$h = 1/4$	1.90822	22.1907	$+\infty$

Таблиця 5

Значення порядків збіжності у просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	NaN	-3.27612	-1.44355
$h = 1/4$	NaN	20.0459	$+\infty$

Таблиця 6

Значення порядків збіжності у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.79011	-2.59489	-1.44355
$h = 1/4$	0.977932	18.482	$+\infty$

Зростання похибок у МЛАДА зумовлено тим, що ДРЧП зведене до системи ЗДР, яка є жорсткою і потребує великої кількості вузлів за часовою змінною для коректного розв'язання задачі.

Приклад 2. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,y,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x + \sin y \end{cases} \tag{23}$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 5-8.

Точний розв'язок задачі (23) набув вигляду $u(x,t) = \sin(x-t) + \sin(y-t)$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (23) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,y,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\cos x - \cos y, \quad \forall (x,y,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,y,t)$ задачі (24), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,y,t)$ задачі (23) так:

$$u_h(x,y,t) = \sin x + \sin y + v_h(x,y,t),$$

де $\sin x + \sin y-$ початкова умова задачі (23).

Таблиця 7

Значення норми похибок у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0262521	0.146494	0.0790902
$h = 1/4$	0.00702414	0.0103649	0.000986107
$h = 1/8$	0.00178397	$6.76182 \cdot 10^{-5}$	$4.52829 \cdot 10^{-7}$

Таблиця 8

Значення норми похибок у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h=1/2$	0	0.939041	0.13217
$h=1/4$	$1.91513 \cdot 10^{-15}$	0.102836	0.0074445
$h=1/8$	$2.85993 \cdot 10^{-13}$	0.00634505	$8.4915 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 9

Значення норми похибок у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h=1/2$	0.12938	0.62467	0.177763
$h=1/4$	0.062476	0.0612636	0.00439856
$h=1/8$	0.0309284	0.00145537	$4.67135 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 10

Значення порядків збіжності у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h=1/2$	1.90204	3.82106	6.32561
$h=1/4$	1.97723	7.26008	11.0886

Таблиця 11

Значення порядків збіжності у просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h=1/2$	$-\infty$	3.19085	4.15005
$h=1/4$	-7.22239	4.01856	9.77594

Таблиця 12

Значення порядків збіжності у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h=1/2$	1.05024	3.34999	5.33678
$h=1/4$	1.01437	5.39557	9.87898

Розглянемо задачу Коші для рівняння адвекції, коли коефіцієнт швидкості адвекційного переміщення набув значення $c_1 = c_2 = 10^7$. Особливістю задач з таким коефіцієнтом є те, що для коректного розв'язання методом скінченних різниць потрібно, щоб крок дискретизації за часовою змінною був менший, ніж $\min\{10^{-7} \cdot \Delta x, 10^{-7} \cdot \Delta y\}$. У прикладі 3 подано обчислення з однаковими кроками дискретизації.

Приклад 3. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + 10^7 \dfrac{\partial u}{\partial x} + 10^7 \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = x^8 + y^8 \end{cases} \tag{25}$$

отримано числові результати, які наведені у табл. 13-18. Точний розв'язок задачі (25) набув вигляду $u(x,y,t) = (x - 10^7 t)^8 + (y - 10^7 t)^8$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (25) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 10^7 \dfrac{\partial v}{\partial x} + 10^7 \dfrac{\partial v}{\partial y} = -8 \cdot 10^7 x^7 - 8 \cdot 10^7 y^7, \quad \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,y,t)$ задачі (26), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,y,t)$ задачі (25) так:

$$u_h(x,y,t) = x^8 + y^8 + v_h(x,y,t),$$

де $x^8 + y^8-$ початкова умова задачі (25).

Таблиця 13

Значення норми похибок у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$4.85071 \cdot 10^{55}$	$1.61351 \cdot 10^{75}$	$4.85071 \cdot 10^{55}$
$h = 1/4$	$4.85071 \cdot 10^{55}$	$1.55743 \cdot 10^{205}$	$4.85071 \cdot 10^{55}$
$h = 1/8$	$4.84167 \cdot 10^{55}$	$5.60339 \cdot 10^{237}$	0

Таблиця 14

Значення норми похибок у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$2 \cdot 10^{56}$	$4.29501 \cdot 10^{75}$	$2 \cdot 10^{56}$
$h = 1/4$	$2 \cdot 10^{56}$	$4.45614 \cdot 10^{205}$	$2 \cdot 10^{56}$
$h = 1/8$	$1.99519 \cdot 10^{56}$	$1.88994 \cdot 10^{238}$	0

Таблиця 15

Значення норми похибок у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$4.15956 \cdot 10^{56}$	$6.01048 \cdot 10^{75}$	$4.15956 \cdot 10^{56}$
$h = 1/4$	$4.15956 \cdot 10^{56}$	$5.74797 \cdot 10^{205}$	$4.15956 \cdot 10^{56}$
$h = 1/8$	$4.14732 \cdot 10^{56}$	$2.13783 \cdot 10^{238}$	0

Таблиця 16

Значення порядків збіжності у просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	-431.8	0
$h = 1/4$	0.00269021	-108.148	$+\infty$

Таблиця 17

Значення порядків збіжності у просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	-431.904	0
$h = 1/4$	0.00347135	-108.386	$+\infty$

Таблиця 18

Значення порядків збіжності у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	-431.786	0
$h = 1/4$	0.00425044	-108.196	$+\infty$

Наведені розрахунки виявили, що для УМЛАДА достатньо вибрати крок $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t = 1/8$, щоб похибка стосовно точного розв'язку дорівнювала нулю. За таких же кроків з використанням схем МСР та МЛАДА не можливо отримати такий результат.

7. Висновки. Ми запропонували застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші з двовимірним рівнянням адвекції.

Знайдено значення рангу скінченновимірного квазізображення диференціального оператора рівняння адвекції, досліджено апроксимаційні властивості та доведено факторіальну збіжність схеми узагальненого методу (УМЛАДА) за трьома змінними, що є суттєвою перевагою над іншими методами, зокрема над методом скінченних різниць чи класичним методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Знайдено ознаки існування обмеженого оберненого оператора для абстрактної апроксимаційної схеми. Визначено також умови, які гарантують збіжність схеми УМЛАДА. Проведено порівняння узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій з методом скінченних різниць і класичним методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

Для коректного розв'язання задачі методом МСР чи МЛАДА потрібно $9 \cdot 10^7$ вузлів, а для методу УМЛАДА достатньо лише дев'яти вузлів за часовою змінною. Це свідчить про те, що в методі УМЛАДА для коректного розв'язання потрібно щонайменше у 10^7 разів менше вузлів, ніж для МСР чи МЛАДА.

Такий запас точності узагальненого методу пов'язаний з тим, що дискретизація рівняння відбувається за усіма змінними, що входять до рівняння та використання двовимірного інтерполювання Лагранжа.

Ефективність узагальненого методу пов'язана з його відмінністю від рекурентних методів, оскільки рекурентні методи (МСР, МЛАДА) розв'язування задачі Коші при зміні початкових умов передбачають обчислення усіх кроків методу від початку, тоді, як у методі УМЛАДА достатньо перемножити обернену матрицю квазізображення оператора задачі на вектор квазізображення вільного члена, який відображає змінені початкові умови.

Список використаної літератури

1. *Березин И.С.* Методы вычислений. Том. 1 / *И.С. Березин, Н.П. Жидков.* – М.: Физматгиз, 1962.
2. *Бігун О.* Метод Лі-алгебричних апроксимацій у теорії динамічних систем / *О. Бігун, М. Притула* // Мат. вісник НТШ. – 2004. – Т. 1 – С. 24-31.
3. *Кіндибалюк А.А.* Узагальнення схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші /*А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XIX Всеукраїнська наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики": Тези доп. – 2013. – Львів. – С. 73-74.

4. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / *Л.А. Люстерник, В.И. Соболев.* – М.: Наука, 1965.
5. *Люстик М.* Функціонально-операторний аналіз проблеми збіжності для методу дискретних апроксимацій Ф. Калоджеро в банахових просторах / *М. Люстик, А. Прикарпатський, М. Притула, М. Вовк* // Мат. вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 168-179.
6. *Митропольский Ю.А.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики / *Ю.А. Митропольский, А.К.Прикарпатский, В.Гр. Самойленко* // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40 – С. 453-458.
7. *Рихтмайер Р.* Разностные методы решения краевых задач / *Р. Рихтмайер, К. Мортон.* – М.: Мир, 1972.
8. *Самарский А.А.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов / *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* – М.: Наука, 1989.
9. *Самойленко В.Г.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций динамических систем математической физики и оценки её точности / *В.Г. Самойленко* // Асимптотические методы в задачах мат. физики. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 144-151.
10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / *В.А. Треногин.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
11. *Bihun O.H.* Approximation properties of the Lie-algebraic scheme / *O.H. Bihun, M. Luśtyk* // Matematychni Studii. – 2003. – Vol. 20, №1. – P. 85–91.
12. *Bihun O.H.* Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations / *O.H. Bihun* // Matematychni Studii. – 2003. – Vol. 20, №2. – P. 179-184.
13. *Bihun O.H.* Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations / *O.H. Bihun, M. Luśtyk* // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. – 2003. – Issue 6. – P. 3-10.
14. *Bihun O.H.* The rank of projection-algebraic representations of some differential operators / *O. Bihun, M. Prytula* // Matematychni Studii. – 2011. – Vol. 35, №1 – P. 9-21.
15. *Calogero F.* Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension / *F. Calogero* // Lett. Nuovo Cimento. – 1983. – Vol. 38, №13. – P. 453-459.
16. *Calogero F.* Numerical tests of a novel technique to compute the eigen values of differential operators / *F. Calogero, E. Franko* // Il Nuovo Cins. 89B. – 1985. – Vol. 2. – P. 161-208.
17. *Casas F.* Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic method / *F. Casas* // J. of Comp. and Appl. Math. – 1996. – Vol. 76. – P. 159-170.
18. *Horn R.A.* Matrix Analysis / *R. A. Horn, C. R. Johnson* // Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
19. *Luśtyk M.* Lie-algebraic discrete approximation for nonlinear evolution equations / *M. Luśtyk* // J.l of Math. Sciences. – 2002. – Vol. 109, №1. – P. 1169-1172.
20. *Luśtyk M.* The Lie-Algebraic Discrete Approximation Scheme for Evolution Equations with Dirichlet/Neumann Data / *M. Luśtyk* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2002. – Vol. 40. – P. 117-124.
21. *Luśtyk M.* The solution existance and convergence analysis for linear and nonlinear differential-operator equations in Banach spaces within the Calogero type projection-algebraic scheme of discrete approximations / *M. Luśtyk, J. Janus, M. Pytel-Kudela, A.K. Prykarpatsky* // Central European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 7, №3. – P. 775-786.
22. *Prykarpatsky A.K.* The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis / *A.K. Prykarpatsky, M.M. Prytula, O.O. Yerchenko* // Volyn Mathematical Bulletin. – 1996. – Vol. 3. – P. 113-116.

23. *Wei J.* On global representations of the solution of linear differential equations as a product of exponentials / *J. Wei, E. Norman* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 15. – P. 327-334.
24. *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Foker-Plank equations / *F. Wolf* // J. Math. Phys. – 1988. – Vol. 29. – P. 305-307.

Стаття: надійшла до редакції 28.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014

APPLICATION OF GENERALIZED METHOD OF LIE-ALGEBRAIC DISCRETE APPROXIMATIONS TO SOLVING OF CAUCHY PROBLEM FOR 2D ADVECTION EQUATION

Arkadii KINDYBALIUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Approximation and convergence properties of the numerical scheme for solving of the Cauchy problem for 2D advection equation by means of the generalized method of the Lie-algebraic discrete approximations were described. The reduction of the Cauchy problem into a system of linear algebraic equations provides the power rate of convergence by all variables in the equation.

Key words: generalized method of Lie-algebraic discrete approximations, approximation scheme, discretization, advection equation, power convergence.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ЛИ-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ

Аркадий КИНДЫБАЛЮК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Доказаны аппроксимационные свойства и условия сходимости вычислительной схемы обобщенного метода Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций решения задачи Коши для двумерного уравнения адвекции. Редукция задачи Коши для уравнения адвекции к системе линейных алгебраических уравнений обеспечивает степенную сходимость за всеми переменными уравнения.

Ключевые слова: обобщенный метод Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций, аппроксимационная схема, дискретизация, уравнение адвекции, степенная сходимость.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 69–79
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 69–79

УДК 517.537.2

ПРО МОДИФІКОВАНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Любов КУЛЯВЕЦЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com

Для ряду Діріхле $F(s) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах модифікованих узагальнених порядків знайдено зв'язок між зростанням $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і поводженням коефіцієнтів a_n. Отримані результати застосовано до вивчення зростання аналітичних у крузі характеристичних функцій імовірнісних законів.

Ключові слова: ряд Діріхле, імовірнісний закон, характеристична функція, узагальнений порядок.

1. Вступ. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $\lambda_0 = 0$, а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < \sigma_a$ приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду (1), а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ – його центральний індекс.

2. Основна частина. Через L позначимо клас неперервних на $(-\infty; +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \leqslant x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ для $x_0 \leqslant x \to +\infty$. Будемо говорити: що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{ПЗ}} \subset L^0$.

Якщо $\sigma_a = +\infty$, тобто ряд Діріхле (1) є цілим, то для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком $\varrho_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім порядком $\lambda_{\alpha\beta}[F]$ цього ряду називаються [1] величини

$$\varrho_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}, \quad \lambda_{\alpha\beta}[F] = \underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)},$$

а в [1] за певних умов на $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ та показники λ_n зазначено формули для знаходження цих величин через коефіцієнти a_n. У [2-3] доведемо, що ряд умов на $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ можна усунути, якщо замість узагальнених порядку та нижнього порядку розглянути модифіковані узагальнені порядок $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і нижній порядок $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F]$, означені рівностями

$$\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right), \quad \overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right).$$

Отримані формули для знаходження $\overline{\varrho}_{\alpha,\beta}[F]$ і $\overline{\lambda}_{\alpha,\beta}[F]$ через коефіцієнти і показники ряду (1) застосованого в [3] до дослідження зростання цілих характеристичних функцій одного класу ймовірносних законів.

Припустимо тепер, що $\sigma_a = 0$, і будемо вважати, що $\mu(\sigma,F)\uparrow+\infty$ при $\sigma\uparrow 0$, а для цього необхідно і достатньо, щоб

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n| = +\infty. \tag{2}$$

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненими порядком $\varrho^o_{\alpha,\beta}[F]$ і нижнім порядком $\lambda^0_{\alpha,\beta}[F]$ ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності називаються величини

$$\varrho^o_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)}, \quad \lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(1/|\sigma|)}.$$

Приймемо $\varkappa_n(F) = \dfrac{\ln|a_n| - \ln|a_n+1|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$ і припустимо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|a_n|} = h < +\infty. \tag{3}$$

Відома [4] така теорема.

Теорема А. Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L_{\text{ПЗ}}$, $\dfrac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))} \uparrow +\infty$ і $\alpha\left(\dfrac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x_0(c) \leqslant x \to +\infty$ для кожного $c \in (0;+\infty)$. Тоді, якщо або виконується умова (3), або $\alpha(\lambda_n) = o\left(\beta\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln n}\right)\right)$ при $n\to\infty$, то

$$\varrho^o_{\alpha,\beta}[F] = k^o_{\alpha,\beta}[F] =: \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln|a_n|)}.$$

Якщо ж, крім того, послідовність $(\varkappa_n[F])$ неспадна і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n\to\infty$, то

$$\lambda^0_{\alpha,\beta}[F] = \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] =: \varliminf_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln|a_n|)}.$$

Як і у випадку цілих рядів Діріхле, умови на функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ можна дещо послабити, якщо замість узагальнених порядку та нижнього порядку розглянути модифіковані узагальнені порядок $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F]$ і нижній порядок $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F]$, які означимо формулами

$$\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right), \quad \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right).$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0;+\infty)$. Припустимо, що виконується одна з умов:*

1) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L_{\text{ПЗ}}$, *а послідовність (λ_n) задовольняє умову*
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} = h_o < +\infty, \tag{4}$$
де γ – додатна неперервна спадна до 0 на $[0;+\infty)$ функція така, що функція $t\gamma(t) \uparrow +\infty \quad (t \to +\infty)$ і $\alpha(x) = o(\beta(1/\gamma(x)))$ при $x \to +\infty$;
2) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L^0, \quad \ln n = o(\lambda_n \gamma(\lambda_n))$ *при $n \to \infty$, де функція γ така, як в умові 1);*
3) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L_{\text{ПЗ}}$ *і коефіцієнти задовольняють умову (3);*
4) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L^0$ *і* $\ln n = o(\ln |a_n|)$ *при $n \to \infty$.*

Тоді $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = k^0_{\alpha,\beta}[F]$. Якщо ж, крім того, послідовність $(\varkappa_n[F])$ неспадна і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] = \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]$.

Для доведення цієї теореми, крім нерівності Коші $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$ для всіх $\sigma < 0$, нам будуть потрібні такі результати.

Лема 1 ([5])**.** *Нехай $\sigma_a = 0$, а послідовність (λ_n) задовольняє умову (4), де γ – додатна неперервна спадна до 0 на $[0;+\infty)$ функція така, що функція $t\gamma(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $K(\varepsilon) > 0$ така, що для всіх $\sigma < 0$*
$$M(\sigma, F) \leqslant \mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\right)\left(\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\} + K(\varepsilon)\right). \tag{5}$$

Лема 2 ([6], [7, с. 33])**.** *Якщо $\sigma_a = 0$ і виконується умова (3), то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \in (\sigma_0(\varepsilon); 0)$*
$$M(\sigma, F) \leqslant \mu\left(\frac{\sigma}{h+1+\varepsilon}, F\right)^{h+1+\varepsilon}. \tag{6}$$

Лема 3 ([8, с. 184], [7, с. 21])**.** *Для $\varsigma_0 \leqslant \sigma < 0$ правильна рівність*
$$\ln \mu(\sigma, F) - \ln \mu(\sigma_0, F) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t,F)} dt. \tag{7}$$

Лема 4 ([7, с. 21])**.** *Якщо послідовність $(\varkappa_n[F])$ неспадна, то $\mu(\varkappa_n, F) = |a_n| \exp(\varkappa_n[F]\lambda_n)$ для всіх n. Якщо, крім того, $\varkappa_{n-1}[F] < \varkappa_n[F]$ для деякого $n \geqslant 1$, то $\nu(\sigma, F) = n$ і $\mu(\sigma, F) = |a_n| \exp(\sigma\lambda_n)$ для всіх $\sigma \in [\varkappa_{n-1}[F]; \varkappa_n[F])$ і цього n.*

Доведення теореми 1 проведемо в два етапи. Спочатку у термінах модифікованих узагальнених порядку та нижнього порядку знайдемо зв'язок між зростанням максимуму модуля та максимального члена, а потім такий зв'язок доведемо між зростанням максимального члена і коефіцієнтів.

Лема 5. *Для того, щоб для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності правильними були формули*
$$\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln \mu] =: \overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)} \alpha\left(\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|}\right),$$

і

$$\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] =: \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|}\right),$$

достатньо, щоб виконувалась одна з таких умов:

1) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L_{\text{ПЗ}}$*, послідовність* (λ_n) *задовольняє умову (4), де функція* γ *задовольняє умови леми 1, і* $\alpha(x) = o(\beta(1/\gamma(x)))$ *при* $x \to +\infty$*;*

2) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}, \beta \in L^0,\quad \ln n = o(\lambda_n\gamma(\lambda_n))$ *при* $n \to \infty$*, де функція* γ *задовольняє умови леми 1, і* $\alpha(x) = o(\beta(1/\gamma(x)))$ *при* $x \to +\infty$*.*

Доведення. Оскільки $t\gamma(t) \uparrow +\infty \quad (t \to +\infty)$, то $|\sigma|\gamma^{-1}(|\sigma|) \uparrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Тому з огляду на лему 1 отримаємо

$$M(\sigma,F) \leqslant (1+o(1))\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\}, \quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки

$$\ln M(\sigma,F) \leqslant \ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right) + o(1) + \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right) =$$
$$= \ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right) + (1+o(1))\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right) + |\sigma|\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right), \quad \sigma\uparrow 0,$$

тобто, для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$

$$\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|} \leqslant \frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right) + \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\max\left\{\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right), \quad \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\}. \tag{8}$$

Припустимо, що виконується умова 1). Тоді $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і з (8) при $\sigma \uparrow 0$ отримуємо

$$\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant (1+o(1))\alpha\left(\max\left\{\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right), \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\}\right) =$$
$$= (1+o(1))\max\left\{\alpha\left(\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\right), \quad \alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant (1+o(1))\left(\alpha\left(\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\right) + \alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right)\right). \tag{9}$$

З огляду на умови $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha(x) = o(\beta(1/\gamma(x)))$ при $x \to +\infty$ одержуємо

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right)}{\beta(1/|\sigma|)} = \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)\gamma(x)}\right)} = 0.$$

Тому з (9) з огляду на умови $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ отримуємо

$$\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant \frac{(1+o(1))}{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{(1+\varepsilon)\ln\mu\left(\sigma/(1+\varepsilon),F\right)}{|\sigma|(1+\varepsilon)}\right) =$$

$$= \frac{(1+o(1))}{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln\mu\,(\sigma/(1+\varepsilon),F)}{|\sigma|/(1+\varepsilon)}\right), \tag{10}$$

звідки випливає, що $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Обернені нерівності випливають з нерівності $\mu(\sigma,F) \leqslant M(\sigma,F)$. Твердження леми 5 за умови 1) доведено.

Якщо $\ln n = o(\lambda_n\gamma(\lambda_n))$ при $n\to\infty$, то $h_0 = 0$ і з (5) замість (9) отримуємо

$$\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant (1+o(1))\left(\alpha\left(\frac{1}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)\right)+\alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2\varepsilon}\right)\right)\right),$$

$\sigma\uparrow 0$, а з огляду на довільність ε

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\alpha\left(\gamma^{-1}\left(\frac{|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2\varepsilon}\right)\right)}{\beta(1/|\sigma|)} = \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2\varepsilon\gamma(x)}\right)} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\,(1/\gamma(x))} = 0.$$

Тому, як у доведенні (10),

$$\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant \frac{(1+o(1))}{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln\mu\,(\sigma/(1+\varepsilon),F)}{|\sigma|/(1+\varepsilon)}\right)\frac{\beta((1+\varepsilon)/|\sigma|)}{\beta(1/|\sigma|)},$$

$\sigma\uparrow 0$. Звідси випливає, що $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant B(\varepsilon)\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant B(\varepsilon)\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, де $B(\varepsilon) = \varlimsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta((1+\varepsilon)x)}{\beta(x)}$. Оскільки $\beta\in L^0$, то [9] $B(\varepsilon)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$, і отже, з огляду на довільність $\varepsilon>0$ правильні нерівності $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Завдяки нерівності Коші $\mu(\sigma,F)\leqslant M(\sigma,F)$ лему 5 доведено. □

Лема 6. *За умови (3) рівності $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ є правильними, якщо $\alpha\in L$ і або $\beta\in L_{\text{ПЗ}}$, або $h=0$ і $\beta\in L^0$.*

Справді, за лемою 2

$$\frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|}\right) \leqslant \frac{1}{\beta(1/|\sigma|)}\alpha\left(\frac{h+1+\varepsilon}{|\sigma|}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{h+1+\varepsilon},F\right)\right),$$

звідки звично отримуємо висновок леми 6.

Наступна лема свідчить про зв'язок між зростанням максимального члена і коефіцієнтів.

Лема 7. *Нехай або $\alpha\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta\in L^0$, або $\beta\in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha\in L^0$. Тоді, якщо*

$$\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x) \quad \textit{при} \quad x\to+\infty$$

для кожного $c\in(0;+\infty)$, то $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] = k^0_{\alpha,\beta}[F]$. Якщо ж, крім того, послідовність $(\varkappa_n[F])$ неспадна і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n\to\infty$, то $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] = \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]$.

Доведення. Припустимо, що $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] < +\infty$. Тоді $\ln\mu(\sigma,F) \leqslant |\sigma|\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|))$ для кожного $\varrho > \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$ і всіх $\sigma\in(\sigma_0(\varrho);0)$. Тому

$$\ln|a_n| \leqslant \ln\mu(\sigma,F) - \sigma\lambda_n \leqslant |\sigma|(\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|)) + \lambda_n)$$

для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in (\sigma_0(\varrho); 0)$. Виберемо $\sigma_n = \dfrac{-1}{\beta^{-1}(\alpha(\varepsilon\lambda_n)/\varrho)}$, де $\varepsilon > 0$ – довільне число. Тоді $\sigma_n \geqslant \sigma_0(\varrho)$ для $n \geqslant n_0$, і для таких n одержимо $\ln|a_n| \leqslant \dfrac{(1+\varepsilon)\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\varepsilon\lambda_n)/\varrho)}$, тобто $\dfrac{\alpha(\varepsilon\lambda_n)}{\beta\left((1+\varepsilon)\lambda_n/\ln|a_n|\right)} \leqslant \varrho$. Якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, то вибравши $\varepsilon = 1$, при $n \to \infty$ отримуємо нерівність $\dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\lambda_n/\ln|a_n|\right)} \leqslant (1+o(1))\varrho, \quad n \to \infty$. З огляду на наведений вище результат з [9] така ж нерівність є правильною і у випадку, коли $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$. Звідси випливає, що $k^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \varrho$, тобто з огляду на довільність ϱ правильна нерівність $k^0_{\alpha,\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, яка є очевидною, коли $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] = +\infty$.

Обернену нерівність доводимо від супротивного. Припустимо, що $k^0_{\alpha,\beta}[F] < \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Тоді для кожного $\varrho \in (k^0_{\alpha,\beta}[F]; \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu])$ і всіх $n \geqslant n_0 = n_0(\varrho)$ правильна нерівність $\ln|a_n| \leqslant \dfrac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$. Тому

$$\ln\mu(\sigma, F) = \max\left\{\max_{n\leqslant n_0}(\ln|a_n| + \sigma\lambda_n), \quad \max_{n\geqslant n_0}\left(\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} + \sigma\lambda_n\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n\geqslant n_0}\left\{\lambda_n\left(\frac{1}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} - |\sigma|\right)\right\} + \text{const}\,.$$

Оскільки $\ln\mu(\sigma, F) \uparrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$, то звідси випливає, що $\frac{1}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{\nu(\sigma,F)})/\varrho)} - |\sigma| \geqslant 0$ для всіх $\sigma \in (\sigma_0; 0)$, тобто $\lambda_{\nu(\sigma,F)} \leqslant \alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|))$. Тому, вважаючи $\sigma_0 > -1$, за лемою 3 отримаємо

$$\ln\mu(\sigma, F) - \ln\mu(\sigma_0, F) \leqslant \int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|x|))dx \leqslant (|\sigma_0| - |\sigma|)\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|)) <$$

$$< \alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|)).$$

Оскільки $\alpha \in L^0$, то звідси отримуємо

$$\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma, F)}{|\sigma|}\right) \leqslant (1+o(1))\alpha\left(\frac{\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma|))}{|\sigma|}\right)$$

при $\sigma \uparrow 0$, звідки, використовуючи умову $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$, одержуємо нерівність $\overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \leqslant \varrho$, що неможливо. Першу частину леми 7 доведено.

Нехай тепер $\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] > 0$. Тоді для будь-якого $\varrho \in (0; \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F])$ і всіх достатньо великих n правильна нерівність $\ln|a_n| \geqslant \dfrac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$, тобто

$$\ln\mu(\sigma, F) \geqslant \lambda_n\left(\frac{1}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} - |\sigma|\right)$$

для всіх $\sigma < 0$, близьких до 0. Виберемо $\sigma = \sigma_n = \dfrac{-1}{(1+\varepsilon)\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$, де $\varepsilon \in (0; 1)$. Тоді отримаємо $\ln\mu(\sigma_n, F) \geqslant \dfrac{\varepsilon\lambda_n}{(1+\varepsilon)\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)}$. Тому $\dfrac{\ln\mu(\sigma_n, F)}{|\sigma_n|} \geqslant \varepsilon\lambda_n$ і, якщо

$\sigma_n \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{n+1}$, то

$$\frac{\alpha\left(\dfrac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|}\right)}{\beta(1/|\sigma|)} \geqslant \frac{\alpha\left(\dfrac{\ln\mu(\sigma_n,F)}{|\sigma_n|}\right)}{\beta(1/|\sigma_{n+1}|)} = \frac{\alpha(\varepsilon\lambda_n)}{\beta((1+\varepsilon)\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{n+1})/\varrho))}.$$

Звідси за умов $\alpha \in L_{\Pi З}$ і $\beta \in L^0$, або $\beta \in L_{\Pi З}$ і $\alpha \in L^0$, завдяки довільності ε та умові $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, одержуємо $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha(\lambda_{n+1})/\varrho} = \varrho$, тобто з огляду на довільність ϱ правильна нерівність $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \geqslant \varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]$, яка є очевидною, якщо $\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] = 0$.

Обернену нерівність доводимо від супротивного. Припустимо, що $\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F] < < \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$. Тоді для будь-якого $\varrho \in (\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F]; \overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu])$ існує зростаюча послідовність (n_j) натуральних чисел така, що $\ln|a_{n_j}| \leqslant \dfrac{\lambda_{n_j}}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{n_j})/\varrho)}$. Оскільки послідовність $(\varkappa^0_{\alpha,\beta}[F])$ неспадна, то за лемою 4 для $\sigma_j = \varkappa_{n_j}[F]$ одержимо

$$\ln\mu(\sigma_j,F) = \ln|a_{n_j}| + \sigma_j\lambda_{n_j} \leqslant \frac{\lambda_{n_j}}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_{n_j})/\varrho)} + \sigma_j\lambda_{n_j} \leqslant \max_{n\geqslant 0}\left\{\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho)} + \sigma_j\lambda_n\right\}.$$

Оцінюючи останній максимум, як у доведенні нерівності $k^0_{\alpha,\beta}[F] \geqslant \overline{\varrho}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu]$, отримуємо $\alpha\left(\dfrac{\ln\mu(\sigma_j,F)}{|\sigma_j|}\right) \leqslant (1+o(1))\alpha\left(\dfrac{\alpha^{-1}(\varrho\beta(1/|\sigma_j|))}{|\sigma_j|}\right)$ при $j \to \infty$, звідки, використовуючи умову $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$, отримуємо нерівність $\overline{\lambda}^0_{\alpha,\beta}[\ln\mu] \leqslant \varrho$, що неможливо. Лему 7 повністю доведено. $\square$

Доведення теореми 1 легко отримати з лем 5-7.

3. Наслідки. Припустимо тепер, що абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (1) $\sigma_a = A \in (-\infty; +\infty)$, і розглянемо ряд Діріхле

$$F^*(s^*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{A\lambda_n} \exp(s^*\lambda_n), \quad s^* = \sigma^* + it^*. \tag{11}$$

Для $s^* = s - A$ отримаємо $F^*(s^*) \equiv F(s^*+A)$. Тому абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (11) $\sigma_a = 0$, тобто до цього ряду можна застосувати результати, отримані вище. Оскільки

$$M(\sigma^*,F^*) = \sup\{|F^*(\sigma^*+it^*)| : t^* \in \mathbb{R}\} = \sup\{|F(\sigma^*+A+it)| : t \in \mathbb{R}\} = M(\sigma^*+A,F)$$

і $-\sigma^* = A - \sigma$, то припускаючи, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n| e^{A\lambda_n} = +\infty, \tag{12}$$

з теореми 1 легко отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (1) дорівнює $A \in (-\infty; +\infty)$, а функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$. Припустимо, що виконується одна з умов:*

1) *$\alpha \in L_{\Pi З}$, $\beta \in L_{\Pi З}$, послідовність (λ_n) задовольняє умову (4), де функція γ задовольняє умову 1) теореми 1;*

2) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$, $\ln n = o(\lambda_n \gamma(\lambda_n))$ *при* $n \to \infty$, *де функція* γ *задовольняє умову 1) теореми 1;*
3) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ *і* $\ln n = O(\ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))$ *при* $n \to \infty$;
4) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$ *і* $\ln n = o(\ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))$ *при* $n \to \infty$.

Тоді

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{1}{\beta(1/(A-\sigma))} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{A-\sigma}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n / \ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))}.$$

Якщо ж, крім того, послідовність $(\varkappa_n[F])$ *неспадна і* $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1+o(1))\alpha(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{1}{\beta(1/(A-\sigma))} \alpha\left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{A-\sigma}\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n / \ln(|a_n| e^{A\lambda_n}))}.$$

Наслідок 2. *Застосуємо тепер наслідок 1 до дослідження зростання аналітичних у крузі* $\mathbb{D}_{\mathbb{R}} = \{z : |z| < R\}$ *характеристичних функцій* φ *ймовірнісних законів. Нехай* $X = (x_k)$– *така послідовність, що* $0 = x_0 < x_n \uparrow +\infty \quad (n \to \infty)$, *і, як в [3],* $\prod(X)$– *клас ймовірнісних законів* F *таких, що* $F(x) \equiv 0$ *для* $x \leqslant 0$, $F(x) = F(x_{k+1})$ *для* $x_k < x \leqslant x_{k+1}$ *і* $F(x_k) \uparrow 1$ *при* $k \to \infty$, *тобто клас зрізаних зліва східчастих імовірнісних законів.*

Приймемо $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$ *для* $r \in [0, R)$ *і* $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$ *для* $x \geqslant 0$. *Тоді, якщо* $F \in \prod(X)$, *то* $W_F(x) = 1 - F(x_k)$, $W_F(x) = F(x_{k+1})$ *для* $x_k < x \leqslant x_{k+1}$ *і, як доведено в [3],*

$$M_\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) e^{r x_k}. \tag{13}$$

Відомо [10, с. 37-38], що φ *є аналітичною в* $\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ *характеристичною функцією ймовірнісного закону* F *тоді і тільки тоді, коли* $W_F(x) = O(e^{-rx})$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $r \in [0, R)$. *Звідки випливає, що* $R = \underline{\lim}_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1}{W_{F(x)}}$. *Зрозуміло, що якщо* $F \in \prod(X)$, *то*

$$R = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{x_{k+1}} \ln \frac{1}{1 - F(x_{k+1})}.$$

Звідси випливає, що якщо $R = +\infty$, *то [3] абсциса збіжності ряду Діріхле (13) також дорівнює* $+\infty$. *Ситуація дещо інша, якщо* $R < \infty$. *Використовуючи теорему 2 з [11], для абсциси* A *збіжності ряду (13) правильна формула*

$$A = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{x_k} \ln \frac{1}{F(x_{k+1}) - F(x_k)}, \tag{14}$$

якщо тільки або $\ln k = o(x_k)$, *або* $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k)))$ *при* $k \to \infty$. *Тому для того, щоб застосувати наслідок 1 до ряду Діріхле (13), потрібно припустити, що* $A = R$, *а з огляду на (12), що*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) \exp R x_k = +\infty. \tag{15}$$

Зауваживши ще, що з умови (4) випливає співвідношення $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$, *у підсумку приходимо до такого наслідку.*

Наслідок 3. *Нехай функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(\alpha^{-1}(c\beta(x))x) = (1+o(1))c\beta(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0;+\infty)$, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ характеристична функція ймовірнісного закону $F \in \prod(X)$. Припустимо, що виконується умова (15) і $A = R$, де A задається рівністю (14). Тоді, якщо виконується одна з таких умов:*

1) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, послідовність (x_k) задовольняє умову (4), де функція γ задовольняє умову 1) теореми 1;*
2) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$, $\ln k = o(x_k\gamma(x_k))$ при $k \to \infty$, де функція γ задовольняє умову 1) теореми 1;*
3) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k)))$ і $\ln k = O(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k))e^{Rx_k})$ при $k \to \infty$;*
4) *$\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$, $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k)))$ і $\ln k = o(\ln(F(x_{k+1}) - F(x_k))e^{Rx_k})$ при $k \to \infty$, то*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{1}{\beta\left(\dfrac{1}{R-r}\right)}\alpha\left(\frac{\ln M_\varphi(r)}{R-r}\right) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\alpha(x_k)}{\beta\left(\dfrac{x_k}{\ln(F(x_{k+1}) - F(x))e^{Rx_k}}\right)}.$$

Якщо, крім того, $\alpha(x_{k+1}) = (1 + o(1))\alpha(x_k)$ при $k \to \infty$ і послідовність

$$\left(\frac{1}{x_{k+1} - x_k} \ln \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{F(x_{k+2}) - F(x_{k+1})}\right)$$

неспадна, то

$$\varliminf_{r\uparrow R} \frac{1}{\beta\left(\dfrac{1}{R-r}\right)}\alpha\left(\frac{\ln M_\varphi(r)}{R-r}\right) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha(x_k)}{\beta\left(\dfrac{x_k}{\ln(F(x_{k+1}) - F(x))e^{Rx_k}}\right)}.$$

Автор висловлює подяку Шереметі М.М. за слушні зауваження.

Список використаної літератури

1. *Пьяныло Я.Д.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле / *Я.Д. Пьяныло, М.Н. Шеремета* // Изв. вузов, Матем. – 1975. – №10. – С. 91-93.
2. *Заліско М.М.* Модифікація узагальненого порядку цілого ряду Діріхле та її застосування / *М.М. Заліско* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 66. – С. 147-152.
3. *Кулявець Л.В.* Про модифіковані узагальнені порядки цілих рядів Діріхле і характеристичні функції ймовірносних законів / *Л.В. Кулявець, М.М. Шеремета* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 124-131.
4. *Галь Ю.М.* О росте аналитических функций, заданных абсолютно сходящимися в полуплоскости рядами Дирихле / *Ю.М. Галь* // Дрогобыч, 1980. – 40 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, N 4080-80 Деп.
5. *Мулява О.М.* Про класи збіжності рядів Діріхле / *О.М. Мулява* // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 1485-1494.
6. *Шеремета М.М.* Зростання рядів Діріхле / *М.М. Шеремета, Я.Я. Притула, С.І. Фединяк* // Львів: Науково-учбовий центр матем. моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача, 1995. – Препрінт 18-95. – 30 с.
7. *Шеремета М.М.* Ряди Діріхле: текст лекцій / *М.М. Шеремета, О.М. Мулява* – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2001.
8. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент / *А.Ф. Леонтьев.* – М.: Наука, 1976.

9. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entire functions / *M.M. Sheremeta* // Matem. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 73-82.
10. *Линник Ю.В.* Разложение случайных величин и векторов / *Ю.В. Линник, И.В. Островский.* – М.:Наука, 1972.
11. *Мулява О.М.* Про абсцису збіжності ряду Діріхле / *О.М. Мулява* // Матем. студії. – 1998. – Т. 9, №2. – С. 171-176.

Стаття: надійшла до редакції 29.05.2013
прийнята до друку 11.12.2013

ON MODIFIED GENERALIZED ORDERS OF DIRICHLET SERIES WHICH ABSOLUTELY CONVERGE IN HALF-PLANE

Lyubov KULYAVEC'

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com

We study the Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with the null abscissa of absolute convergence. The connection between the growth of $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and behaviour of the coefficients a_n is established in the terms of modified generalized orders. The obtained results were applied to investigation of the growth of analytic in a disk characteristic functions of probability laws.

Key words: Dirichlet series, probability law, characteristic function, generalized order.

О МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПОРЯДКАХ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Любовь КУЛЯВЕЦ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com

Для ряда Дирихле $F(s) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ с нулевой абсциссой абсолютной сходимости в терминах модифицированных обобщённых порядков установлена связь между ростом $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ и поведением коэффициентов a_n. Полученные результаты применены к изучению роста аналитических в круге характеристических функций вероятностных законов.

Ключевые слова: ряд Дирихле, вероятностный закон, характеристическая функция, обобщённый порядок.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 80–88
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 80–88

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З ВИТОЧКОЮ ДОВІЛЬНОГО ГЛАДКОГО ОБРИСУ

Ігор КУЗЬ, Ольга КУЗЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013
e-mail: ihorkuz24@gmail.com

Проведено зіставлення розрахунків полів напружень у пружній пластині з виточкою по дузі кола, еліпса або параболи, отриманих аналітично-числовим методом на підставі комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі, та числовим варіаційно-різницевим методом. Ці поля відрізняються не більше, ніж на 2%, що, зокрема, свідчить про достовірність числової реалізації.

Ключові слова: півплощина, пластина, виточка, варіаційно-різницевий метод, поле напружень.

1. Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану пластинчастих елементів конструкцій, послаблених виточками, [1] є необхідним етапом розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій мають скінченні розміри чи криволінійну межу, то можливість застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач [2] значно обмежена, а у більшості випадків і неможлива.

Ми провели зіставлення отриманих розв'язків плоских задач теорії пружності про одновісний розтяг пластинчастого конструкційного елемента з виточкою довільного гладкого обрису аналітично-числовим методом, використовуючи комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі [3], та числовим за допомогою варіаційно-різницевого методу [4].

2. Аналітично-числовий метод розв'язування задачі. Елементу завтовшки h, який моделюємо півплощиною, на поверхні якого зроблено виточку довільного гладкого обрису [3]. Вважаємо, що півплощина розтягується на нескінченності нормальними напруженнями величини P (рис. 1), а межа півплощини з виточкою є вільною від навантаження.

Виберемо декартову систему координат Oxy, спрямувавши вісь Ox уздовж прямолінійної межі, а вісь ординат – догори. Лінію, яку окреслює виточка, позначимо через L, прямолінійну частину межі півплощини – через L'. Нижню півплощину площини xOy позначимо через S^-, верхню – через S^+.

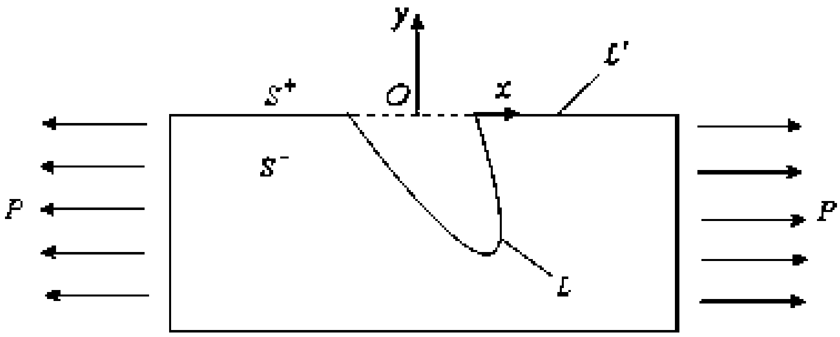


Рис. 1. Пластинчастий елемент з виточкою за одновісного розтягу

Згідно з формулюванням задачі будемо мати такі крайові умови:

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad x \in L'; \quad N = T = 0, \quad t \in L,$$

де N і T – нормальна й дотична компоненти вектора напруження на L, відповідно.

Для розв'язування задачі введемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ [2], які подамо у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \frac{p}{4}, \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) - \frac{p}{2}.$$

Тут $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ – комплексні потенціали, які голоморфні у нижній півплощині, та повинні забезпечити виконання нульових крайових умов на осі $y = 0$, а коригувальні комплексні потенціали $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ відповідають за виконання крайових умов на поверхні виточки.

Аналітично продовживши функцію $\Phi_2(z)$ з області S^- в область S^+ та розв'язавши відповідну задачу лінійного спряження, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння [1], яке розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [5].

3. Варіаційно-різницевий метод розв'язування задачі. Розглядається плоска задача теорії пружності в скінченній області V з криволінійною межею Σ (див. рис. 1), яка моделює напружено-деформований стан у пластинчастому елементі з виточкою довільної гладкої форми. З математичного погляду вона полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластинчастому елементі [6]

$$\left(C_{ijkl}u_{k,l}\right)_{,j} = 0 \tag{1}$$

з використанням мішаних крайових умов на його поверхні Σ

$$C_{ijkl}u_{k,l}n_j \mid_{\Sigma} = P_i. \tag{2}$$

Тут C_{ijkl} – компоненти тензора модулів пружності; $u_i,\ P_i, n_j$ – компоненти векторів переміщень, поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ відповідно; $u_{i,j} \equiv \partial u_i/\partial x_j$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

Для числового розв'язування задачі (1) – (2) зручно використовувати її варіаційне формулювання [7], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$L = \int_V W dV - \int_\Sigma P_i u_i d\Sigma, \tag{3}$$

де $W = \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}$ – питома енергія пружної деформації.

Запишемо лагранжіан (3) у канонічній області V_0, якою може бути прямокутник або область, складена з них. Для цього використаємо дискретне взаємно однозначне відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку $N_1 \times N_2$ області V_0 (рис. 2)

$$x_i = x_i(\beta^1, \beta^2) \quad (i = 1, 2). \tag{4}$$

Тоді $J = \det(A_i^j)$, $g_{ij} = A_i^{\,m} A_{\ j}^{m}$, де$A_i^j = \partial x_i / \partial \beta^j$ – матриця Якобі цього відображення. За допомогою (4) запишемо питому енергію деформації W у координатах $\vec{\beta}$

$$W = \frac{1}{2} C^{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \frac{1}{2} C^{ijkl}(\vec{\beta}) B_j^m B_l^n u_{\,i|m} u_{\,k|n} = \frac{1}{2} D^{imkn}(\vec{\beta}) u_{\,i|m} u_{\,k|n},$$

де $u_{\,i|m} \equiv \partial u_i / \partial \beta^m,\ B_j^m = \partial \beta^m / \partial x_j,\ D^{imkn} = C^{ijkl} B_j^m B_l^n$.

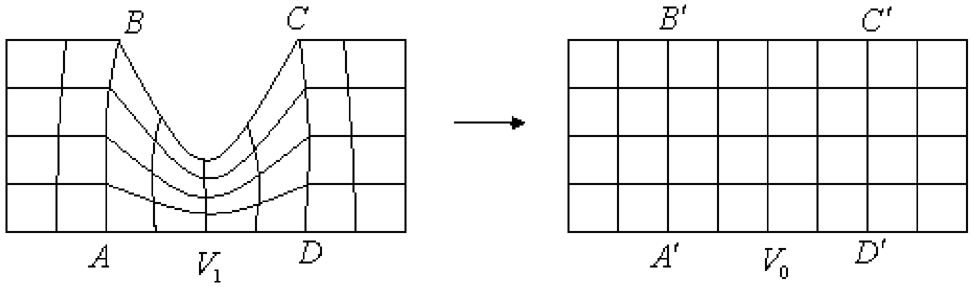


Рис. 2. Відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0

Отже, лагранжіан у прямокутнику V_0 набуде вигляду

$$L_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} J D^{imkn} u_{i|m}\, u_{k|n}\, dv - \int_{\Sigma_0} q\left(\vec{\beta}\right) P_i u_i d\Sigma, \tag{5}$$

де $q(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}, \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$

Замінивши в (5) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченними сумами, похідні – різницевими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h за допомогою дискретного аналога відображення (4), яке не мусить бути задане аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну відповідність між вузлами сітки в криволінійній V_1 та в модельній V_0 областях. Для визначення стаціонарної точки L_0^h матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\partial L^h / \partial v_\beta^h(i_1, i_2) = 0, \quad i_\alpha = 1, 2, ..., N_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{6}$$

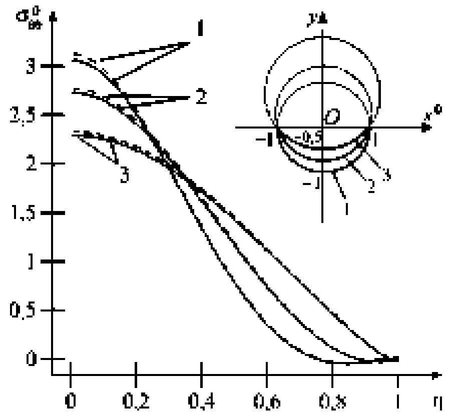


Рис. 3. Напруження $\sigma_{\theta\theta}^0$ на виточці по дузі кола для $l = 1$ за різних значень δ

Такий підхід спричиняє неможливість використання прямих методів розв'язування системи (6) через накопичення похибок заокруглень. Однак це вдалося зробити за допомогою комбінованого дворівневого ітераційного процесу, який реалізує схему ґрадієнтного методу та методу з чебишовським набором ітераційних параметрів [8]. Складністю його практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів.

Описаний варіаційно-різницевий метод в областях з криволінійною межею реалізований у вигляді пакета програм на алгоритмічній мові FORTRAN з підпрограмою побудови сітки на DELPHI.

4. Результати. Наприклад, обчислення компонент тензора напружень на виточці та поблизу неї виконано, якщо її межею є дуга кола, еліпса або параболи.

На рис. 3 та 4 зображено графіки безрозмірних напружень $\sigma_{\theta\theta}^0 \equiv \sigma_{\theta\theta}/P$, $\sigma_{xx}^0 \equiv \sigma_{xx}/P$ та $\sigma_{yy}^0 \equiv \sigma_{yy}/P$ для виточок по дузі кола. Тут і надалі $2l$ – ширина виточки (вздовж осі Ox); δ – висота виточки (вздовж осі Oy); $a = \delta/l$ – безрозмірний параметр відносної заглибленості виточки; $\sigma_{\theta\theta}^0$ – безрозмірні кільцеві напруження на виточці; σ_{xx}^0, σ_{yy}^0 – безрозмірні нормальні напруження на відрізку $x^0 \equiv x/l = 0$, $y^0 \equiv y/\delta \in [-5, -1]$ (вздовж осі Oy нижче виточки). Штрихованими лініями зображено напруження, отримані аналітично-числовим методом, а суцільними – варіаційно-різницевим методом.

На рис. 3 криві *1* побудовані при $\delta = 1$, криві *2* – при $\delta = 0,75$, криві *3* – при $\delta = 0,5$. Як видно з цього рисунка, напруження $\sigma_{\theta\theta}^0$ (фактично коефіцієнт концентрації напружень) у вершині виточки ($\eta = 0$) найбільшого значення набуває у випадку виточки по півколу (криві *1*). Причому воно лише дещо перевищує властиве для задачі Кірша значення 3.

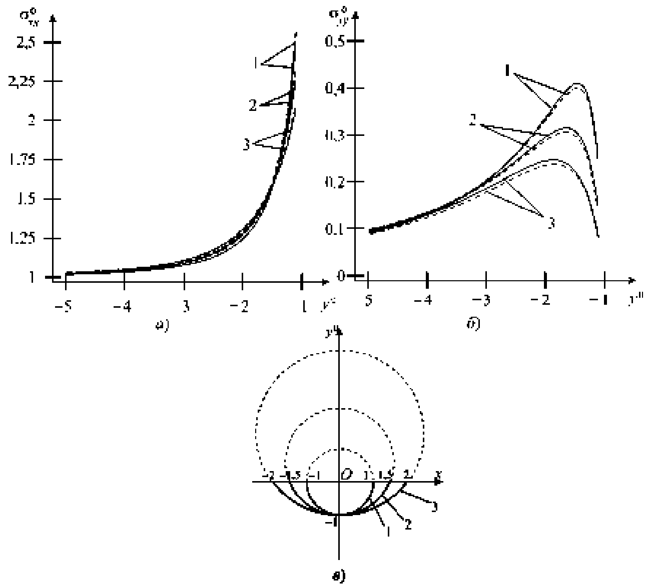


Рис. 4. Напруження σ^0_{xx} та σ^0_{yy} на продовженні осі симетрії виточки по дузі кола для $\delta = 1$ за різних значень l

Тут і надалі точність отриманих результатів становить чотири значущі цифри (похибка порядку 0,1%). Контроль збіжності та точності аналітично-числового і числового розв'язку проводимо за допомогою порівняння досліджуваних величин на сітках з одинарною та подвійною кількістю вузлів.

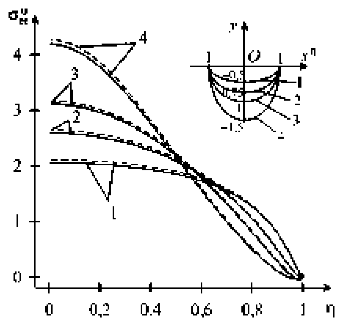


Рис. 5. Напруження $\sigma^0_{\tau\tau}$ на виточці по дузі еліпса для $l = 1$ за різних значень δ

На рис. 4 криві *1* побудовані при $l = 1$, криві *2* – при $l = 1,5$, криві *3* – при $l = 2$. Як видно з рис. 4, нормальне напруження σ^0_{xx} значно нижче виточки ($y = -5$) практично дорівнює P, а у вершині виточки – очевидно, що $\sigma^0_{xx} = \sigma^0_{\theta\theta}$.

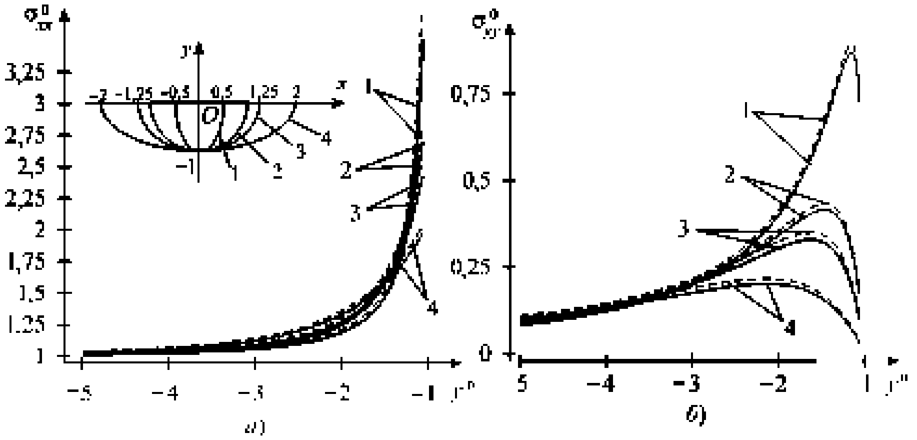


Рис. 6. Напруження σ^0_{xx} та σ^0_{yy} на продовженні осі симетрії виточки по дузі еліпса для $\delta = 1$ за різних значень l

На рис. 5 та 6 зображено відповідні графіки напружень $\sigma^0_{\theta\theta}$, σ^0_{xx} та σ^0_{yy} для виточок по дузі еліпса.

На рис. 5 криві *1* побудовані при $\delta = 0,5$, криві *2* – при $\delta = 0,75$, криві *3* – при $\delta = 1$, криві *4* – при $\delta = 1,5$.

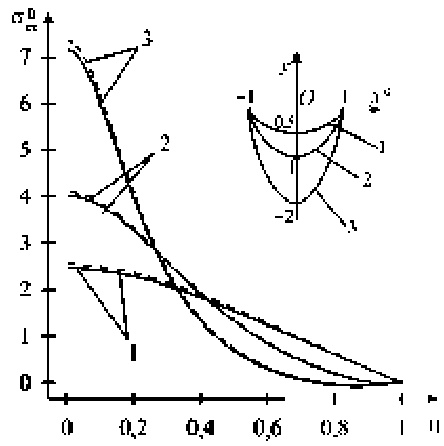


Рис. 7. Напруження $\sigma^0_{\tau\tau}$ на виточці по дузі параболи для $l = 1$ за різних значень δ

На рис. 6 криві *1* побудовані при $l = 0,5$, криві *2* – при $l = 1$, криві *3* – при $l = 1,25$, криві *4* – при $l = 2$.

На рис. 7 та 8 зображено графіки напружень $\sigma^0_{\tau\tau}$, σ^0_{xx} та σ^0_{yy} для виточок по дузі параболи.

На рис. 7 криві *1* побудовані при $\delta = 0,5$, криві *2* – при $\delta = 1$, криві *3* – при $\delta = 2$.

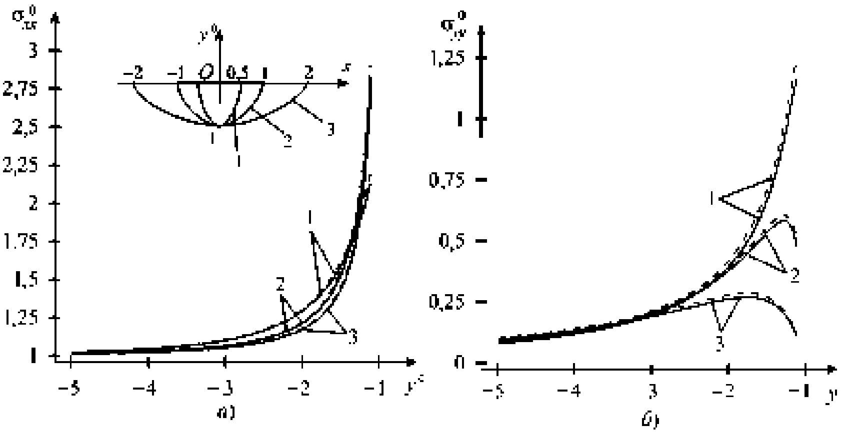


Рис. 8. Напруження σ^0_{xx} та σ^0_{yy} на продовженні осі симетрії виточки по дузі параболи для $\delta = 1$ за різних значень l

На рис. 8 криві *1* побудовані при $l = 0,5$, криві *2* – при $l = 1$, криві *3* – при $l = 2$.

На рис. 9 зображено зміну напруження $\sigma^0_{\tau\tau}$ для трьох типів виточок однакової заглибленості (дуг кола, параболи та еліпса, які проходять через три фіксовані точки), що дає змогу виявити вплив форми виточки на напружений стан пластини.

На рис. 9 крива *1* подана для кола, крива *2* – для параболи, крива *3* – для еліпса.

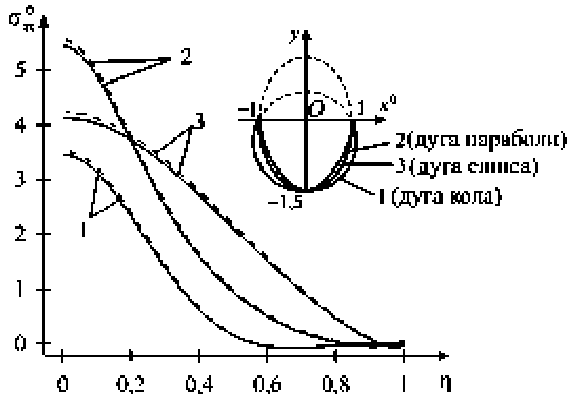


Рис. 9. Напруження $\sigma^0_{\tau\tau}$ на поверхні виточок однакової заглибленості по дузі кола, параболи та еліпса для $l = 1$, $\delta = 1,5$

5. Висновки. Як видно з рис. 5-8, подані напруження у вершині виточки по дузі еліпса чи параболи значно зростають зі збільшенням відносної глибини виточки (зі збільшенням її глибини або зменшенням ширини). Як видно з рис. 9, гострота виточки, очевидно, також збільшує рівень напружень.

Як видно з рис. 3-9, поля напружень, отримані аналітично-числовим і числовим методами, різняться між собою не більше як на 2%. Цю розбіжність можна пояснити тим, що в аналітичному розв'язку область вважається безмежною, а числовий розрахунок проводився, очевидно, для скінченної області.

Отож, розвинута методика числового визначення напружень та їхніх концентрацій добре справджується для розв'язування плоских задач теорії пружності в пластинах з виточкою.

Список використаної літератури

1. *Kuz O.* Stress state of semiplane with cut under uniform extension / *O. Kuz* // Abstract of The Sixth Polish-Ukrainian Conference "Current problems of mechanics of nonhomogeneous media" (Warsaw, September, 6-10, 2005). – Warsaw, 2005. – P. 76-77.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / *Н.И. Мусхелишвили.* – М.: Наука, 1966.
3. *Savruk M.P.* Stress concentration near a rounded v-notch with arbitrary vertex curvature / *M.P. Savruk, A. Kazberuk* // Acta mechanica et automatica. – 2007. – Vol. 1, №1. – P. 99-102.
4. *Кузь І.* Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно-жорстким включенням / *І. Кузь, І. Тімар* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 148-154.
5. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / *В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин.* – К.: Наук. думка, 1976.
6. *Сулим Г.Т.* Теорія пружності. Т. 1: Загальні питання / *В.В. Божидарнік, Г.Т. Сулим.* – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2012.
7. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности / *Б.Е. Победря.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
8. *Шешенин С.В.* О прикладных итерационных методах / *С.В. Шешенин, И.С. Кузь* // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Вып. 1. – С. 63-74.

Стаття: надійшла до редакції 31.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014

STRESS-STRAIN STATE ELASTIC PLATE WITH NOTCH OF AN ARBITRARY SMOOTH CONTOUR

Ihor KUZ, Olga KUZ

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
National University "Lviv Polytechnic",
Bandery Str., 12, Lviv, 79013
e-mail: ihorkuz24@gmail.com

The paper contains comparing calculations of the stress fields in an elastic plate with notch along the arc of a circle, ellipse, and parabola obtained by the analytic-numerical method based on the complex Kolosov-Mushelishvili potentials and by the numerical variation-difference method. These fields differ by no more than 2%, which, in particular, indicates the reliability of such numerical implementation.

Key words: semi-plane, plate, notch, variation-difference method, stress field.

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ВЫРЕЗКОЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ГЛАДКОГО КОНТУРА

Ігор КУЗЬ, Ольга КУЗЬ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
Национальный университет “Львовская политехника”,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013
e-mail: ihorkuz24@gmail.com

Выполнено сравнение расчетов полей напряжений в упругой пластине с вырезкой по дуге окружности, эллипса или параболы, полученых аналитически-числовым методом с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили, и числовым вариационно-разностным методом. Эти поля отличаются не более чем на 2%, что, в частности, свидетельствует о правдивости чисельной реализации.

Ключевые слова: полуплоскость, пластина, вырезка, вариационно-разностный метод, поле напряжений.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 89–96
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 89–96

УДК 517.55

НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У БІКРУЗІ

Андрій КУРИЛЯК, Олег СКАСКІВ, Людмила ШАПОВАЛОВСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: kurylyak88@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua, shap.ludmila@gmail.com

Доведено аналог нерівності Вімана для функцій, аналітичних у бікрузі $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Отримані нерівності є точними.

Ключові слова: максимум модуля, максимальний член, аналітична функція в бікрузі, нерівність типу Вімана.

1. Вступ. За теоремою Вімана-Валірона (див., наприклад, [1]-[4]) для кожної не тотожно сталої цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри ($\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E$ виконується нерівність Вімана

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r).$$

Тут $M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n \colon n \geqslant 0\}$. З іншого боку, для кожної аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \colon |z| < 1\}$ функції f вигляду (1) і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [0, 1)$ скінченної логарифмічної міри на інтервалі $[0, 1)$ (тобто, $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$) така, що для всіх $r \in [0, 1) \setminus E$ виконується нерівність (див., наприклад, [5]-[9])

$$M_f(r) \leqslant \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

У [6] зазначено, що для функції $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \exp\{n^\varepsilon\} z^n$, $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\varliminf_{r \to 1-0} \frac{M_g(r)}{\frac{\mu_g(r)}{1-r} \ln^{1/2} \frac{\mu_g(r)}{1-r}} \geqslant C > 0.$$

У [10] доведено аналог нерівності Вімана для аналітичних в області $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z_1|<1, z_2\in\mathbb{C}\}$ функцій, степеневе розвинення яких у цій області набуває вигляду

$$f(z)=f(z_1,z_2)=\sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm}z_1^n z_2^m. \tag{2}$$

Ми розглянемо задачу доведення нерівностей типу Вімана в класі функцій аналітичних у бікрузі $\mathbb{D}^2=\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z_1|<1, |z_2|<1\}$, степеневе розвинення яких набуло вигляду (2).

Через $\mathcal{A}^2$ позначимо клас таких функцій.

2. Нерівність Вімана для аналітичних функцій у бікрузі. Для $r\in[0,1)^2$ і функції $f\in\mathcal{A}^2$ ми позначимо

$$\triangle_r=[r_1,1)\times[r_2,1),\quad \mathfrak{M}_f(r)=\sum_{n+m=0}^{+\infty}|a_n|r^n,$$
$$M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z_1|\leqslant r_1,\ |z_2|\leqslant r_2\},\quad \mu_f(r)=\max\{|a_{nm}|r_1^n r_2^m\colon (n,m)\in\mathbb{Z}_+^2\}.$$

Нехай $D_f(r)$ – 2×2 матриця така, що

$$D_{ij}=r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)=\partial_i\partial_j\ln\mathfrak{M}_f(r),\quad \partial_i=r_i\frac{\partial}{\partial r_i},\quad i,j\in\{1,2\}.$$

Наступне твердження доводиться практично дослівним повтором міркувань доведення теореми 3.1 з праці [11], зважаючи на це, опустимо її доведення.

Теорема 1. *Нехай $f\in\mathcal{A}^2$. Існує абсолютна стала C_0 така, що*

$$\mathfrak{M}_f(r)\leqslant C_0\mu_f(r)(\det(D_f(r)+I))^{1/2},$$

де I – 2×2 одинична матриця.

Будемо казати, що $E\in[0,1)^2$ – *множини асимптотичної скінченної логарифмічної міри на* $[0,1)^2$, якщо існує $r_0\in[0,1)^2$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E\cap\triangle_{r_0}):=\iint\limits_{E\cap\triangle_{r_0}}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}<+\infty,$$

тобто множина $E\cap\triangle_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$.

Лема 1. *Нехай $\delta>0$, $h\colon\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$ – зростаюча стосовно обидвох змінних функція така, що*

$$\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{du_1du_2}{h(u_1,u_2)}<+\infty.$$

Тоді існує множина $E \subset [0,1)^2$ асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ матимемо

$$\det(D_f(r)+I) \leqslant \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r) \leqslant (\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \cdot \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)^{\delta}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r) \leqslant (\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \cdot \frac{1}{(1-r_1)^{\delta}(1-r_2)}. \tag{5}$$

Доведення. Нехай $E_0 \subset [0,1)^2$ – множина, на якій не виконується нерівність (3). Доведемо, що E_0 є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри. Оскільки функція $r_j \frac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r)$ є зростаючою за кожною змінною, тоді існує $r^0 \in [1/2,1)^2$ таке, що для довільного $j \in \{1,2\}$ і всіх $r \in \triangle_{r^0}$ отримаємо

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j > 1.$$

Тоді

$$\nu_{\ln}(E_0 \cap \triangle_{r^0}) = \iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I)(1-r_1)(1-r_1)}{h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big)} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I)dr_1 dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big)} \leqslant \iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I)2r_1 2r_2 dr_1 dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r), r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big)} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}} \frac{\det(D_f(r)+I)r_1 r_2 dr_1 dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_1, r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_2\Big)}.$$

Нехай $U\colon [0,1)^2 \to \mathbb{R}_+^2$ – відображення таке, що $U=(u_1,u_2)$ і $u_j = r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j,\ j\in\{1,2\}$. Якщо $i \neq j$, то

$$\frac{\partial u_j}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j\Big) = \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r)\Big) = \frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r);$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\ln \mathfrak{M}_f(r)+\ln r_i\Big) = \frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r) + \frac{1}{r_i}, \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Якобіан матриці переходу

$$J_0 = \frac{D(u_1,u_2)}{D(r_1,r_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} & \frac{\partial u_1}{\partial r_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r_2} & \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \end{vmatrix} = r_1 r_2 \det(D_f(r)+I).$$

Тоді $E_0 \cap \triangle_{r^0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри

$$\nu_{\ln}(E_0 \cap \triangle_{r^0}) = 4 \iint\limits_{U^{-1}(E_0\cap\triangle_{r^0})} \frac{du_1 du_2}{h(u_1,u_2)} < 4\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \frac{du_1 du_2}{h(u_1,u_2)} < +\infty.$$

Позначимо через $E_1 \subset [0,1)^2$ – множину, на якій нерівність (4) не виконується. Виберемо $r^0 \in [1/2,1)^2$ таке, що $r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) > 1$ для кожного $j \in \{1,2\}$

$$\nu_{\ln}(E_1 \cap \triangle_{r^0}) = \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leqslant \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) \cdot (1-r_1)}{\frac{1}{(1-r_2)^\delta} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Розглянемо відображення $V\colon [0,1)^2 \to [0,1) \times \mathbb{R}_+$, де $V = (v_1(r), v_2(r))$ і $v_1 = \ln \mathfrak{M}_f(r)$, $v_2 = r_2$

$$J_1 = \frac{D(v_1,v_2)}{D(r_1,r_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) & \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r).$$

Логарифмічна міра множини $E_1 \cap \triangle_{r^0}$ скінченна

$$\nu_{\ln}(E_1 \cap \triangle_{r^0}) = \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r)}{\frac{1}{(1-r_2)^\delta} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_2}{1-r_2} dr_1 =$$

$$= \iint\limits_{V^{-1}(E_1 \cap \triangle_{r^0})} \frac{1}{u_1^{1+\delta} \frac{1}{(1-u_2)^\delta}} \cdot \frac{du_2}{1-u_2} du_1 \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{du_1}{u_1^{1+\delta}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{du_2}{(1-u_2)^{1-\delta}} < +\infty.$$

Нехай $E_2 \subset [0,1)^2$ – множина, на якій не виконується нерівність (5). Аналогічно E_2 є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$.

Зауважимо, що $E = \cup_{j=0}^2 E_j$ є також множиною асимптотичної скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$. □

Теорема 2. *Нехай $f \in \mathcal{A}^2$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(f,\delta) \subset [0,1)^2$ асимпточично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r) \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta}. \tag{6}$$

Доведення. Позначимо через E виняткову множину з леми 1. Тоді для $h(r) = (r_1 r_2)^{1+\delta}$ і всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ отримаємо

$$\mathfrak{M}_f(r) \leqslant C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \mu_f(r) \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \Big) \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_0\mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{1-r_i}\Big(\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)^{1+\delta}\right)^{1/2}\leqslant C_0\mu_f(r)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln^{2(1+\delta)^2}\mathfrak{M}_f(r)\Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)^{(1+\delta)^2}\right)^{1/2}=C_0\mu_f(r)\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)^{1+\delta+\delta^2/2}\ln^{(1+\delta)^2}\mathfrak{M}_f(r)<\mu_f(r)\Big(\frac{\ln\mathfrak{M}_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\Big)^{1+\delta_1}, \qquad (7)$$

де $\delta_1=2(\delta+\delta^2)$. З нерівності (7) випливає, що для всіх $r\in\triangle_{r^0}\setminus E$

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)<\ln\mu_f(r)+(1+\delta_1)\Big(\ln\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}+\ln_2\mathfrak{M}_f(r)\Big),$$

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)-(1+\delta_1)\ln_2\mathfrak{M}_f(r)<\ln\mu_f(r)+(1+\delta_1)\ln\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Тоді існує $r^1\in[0,1)^2$ таке, що для всіх $r\in\triangle_{r^1}\setminus E$ матимемо

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)<2\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)},$$

$$M_f(r)\leqslant\mathfrak{M}_f(r)\leqslant\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}2\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta_1}\leqslant$$

$$\leqslant\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta_2},$$

де $\delta_2=2\delta_1$. □

3. Приклади на точність нерівності (6). З теореми 2 випливає, що для кожного $\delta>0$ множина

$$E=E(f,\delta)=\left\{r\in[0,1)^2:\ M_f(r)>\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta}\right\}$$

є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$. Доведемо, що показник $1+\delta$ у нерівності (6) не можна замінити числом меншим за 1.

Розглянемо функцію

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\sqrt{n}}z_1^n\cdot\sum_{m=1}^{+\infty}e^{\sqrt{m}}z_2^m.$$

Позначимо $f_0(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\sqrt{n}}z^n$. Для функції $f(z)=f_0(z_1)f_0(z_2)$ отримаємо $M_f(r)=M_{f_0}(r_1)M_{f_0}(r_2)$, $\mu_f(r)=\mu_{f_0}(r_1)\mu_{f_0}(r_2)$.

Як доведено в [6] для функції $f_0(z_1)$ існує стала $C_0\in(0,1)$ така, що

$$C_0\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}\leqslant\frac{M_{f_0}(r_1)}{\sqrt{\ln M_{f_0}(r_1)}}\leqslant\frac{1}{C_0}\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1},\quad r_1\to1-0. \qquad (8)$$

З нерівності (8) випливає, що для $r_1 \geqslant r_1'$ існує стала $C_1 < C_0$ така, що

$$M_{f_0}(r_1) \geqslant C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \ln^{1/2} \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}. \tag{9}$$

Доведемо нерівність

$$g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - g^{-1}(3g(r_1)), \quad r_1 \to 1-0, \quad g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}. \tag{10}$$

Функція $g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}$ є додатною зростаючою на $(1/2, 1)$, і $\lim\limits_{r_1 \to 1-0} g(r_1) = +\infty$. Тоді існує зростаюча обернена до g функція $g^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to (1/2, 1)$.

Для фіксованого r розглянемо функцію $l(x) = \sqrt{x} - x \ln \frac{1}{r_1}$. $x_{\max} = \frac{1}{4\ln^2 \frac{1}{r_1}}$ – єдина точка максимуму цієї функції. $l_{\max} = \frac{1}{4\ln \frac{1}{r_1}}$. Тоді

$$g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \sim \ln \mu_{f_0}(r_1) \sim \frac{1}{4\ln \frac{1}{r_1}} \sim \frac{1}{4(1-r_1)}, \quad r_1 \to 1-0.$$

З останнього співвідношення випливає, що $g(r_1) < 3g(2r_1-1)$, $r_1 \to 1-0$. Отож,

$$g(2r_1-1) > \frac{g(r_1)}{3}, \quad 2r_1 - 1 > g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big), \quad r_1 - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - r_1$$

і використовуючи $g^{-1}(3g(r_1)) > g^{-1}(g(r_1)) = r_1$, одержимо при $r_1 \to 1-0$

$$g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > r_1 - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - r_1 > 1 - g^{-1}(3g(r_1)).$$

Нерівність (10) доведена.

З (9) отримаємо, що існує стала $C_1 \in (0,1)$ і $r^* \in (1/2, 1)$ такі, що для кожного $i \in \{1,2\}$ і всіх $z \in \{z\colon r^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1,2\}\}$ виконуються нерівності

$$M_{f_0}(r_i) \geqslant C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i} \sqrt{\ln \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}}, \quad g^{-1}\Big(\frac{g(r^*)}{3}\Big) > r^0. \tag{11}$$

Отже, для всіх $z \in \{z\colon r^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1,2\}\}$ отримаємо

$$\prod_{i=1}^{2} M_{f_0}(r_i) \geqslant \prod_{i=1}^{2} \Bigg(C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i} \sqrt{\ln \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}} \Bigg),$$

$$M_f(r) \geqslant C_1^2 \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Bigg(\ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \ln \frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2} \Bigg)^{1/2}. \tag{12}$$

Для $r_1 \in (r^*, 1)$ визначимо x і y так:

$$x = x(r_1) = g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big), \ y = y(r_1) = g^{-1}(3g(r_1)).$$

Позначимо $E^* = \{r \in [0,1)^2 \colon r_1 \in (r^*, 1),\ r_2 \in (x, y)\}$. Зафіксуємо $r_1 \in (r^*, 1)$. Тоді x і y є також фіксованими і $g(x) = g(r_1)/3$, $g(y) = 3g(r_1)$, $g(y) = 9g(x)$, $r_2 \in (x, y)$. Оскільки $r_1 > x$, то для всіх $r \in E^*$ отримаємо

$$g(r_1)g(r_2) \geqslant g^2(x) = \frac{g^2(y)}{81} = \frac{1}{324}(g(y) + g(y))^2 \geqslant \frac{1}{324}(g(r_1) + g(r_2))^2.$$

Тоді з нерівності (12) отримаємо для всіх $r \in E^*$

$$M_f(r) \geqslant \frac{C_1^2}{324} \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \left(\ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} + \ln \frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2} \right) = \\ = \frac{C_1^2}{324} \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Доведемо, що множина E^* є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Оскільки $g^{-1}\left(\frac{g(r^*)}{3}\right) > r^0$, то $E^* \cap \triangle_{r^0} = E^*$. Використавши нерівність (10), отримаємо

$$\nu_{\ln}(E^* \cap \triangle_{r^0}) = \nu_{\ln}(E^*) = \iint\limits_{E^*} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} =$$

$$= \int\limits_{r^*}^{1} \int\limits_{x}^{y} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} = \int\limits_{r^*}^{1} \left(\ln \frac{1}{1-y} - \ln \frac{1}{1-x} \right) \frac{dr_1}{1-r_1} =$$

$$= \int\limits_{r^*}^{1} \left(\ln \frac{1}{1-g^{-1}(3g(r_1))} - \ln \frac{1}{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})} \right) \frac{dr_1}{1-r_1} = \int\limits_{r^*}^{1} \ln \frac{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))} \frac{dr_1}{1-r_1} =$$

$$= \int\limits_{r^*}^{1} \ln\left(1 + \frac{g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))}\right) \frac{dr_1}{1-r_1} > \int\limits_{r^*}^{1} \ln 2 \cdot \frac{dr_1}{1-r_1} = +\infty.$$

Список використаної літератури

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere / *G. Valiron* // Ann Fac. Sci. Univ. Toulouse. – 1914. – Vol. 5. – P. 117-257.
2. *Wiman A.* Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliebe der zugehörigen Taylorischen Reiche / *A. Wiman* // Acta Math. – 1914. – Vol. 37. – P. 305-326.
3. *Valiron G.* Fonctions analytiques / *G. Valiron.* – Paris: Press. Univer. de France, 1954.
4. *Wittich H.* Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen / *H. Wittich.* – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.
5. *Kővari T.* On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc / *T. Kővari* // J. London Math. Soc. – 1966. – Vol. 41. – P. 129-137.
6. *Сулейманов Н.В.* Оценка типу Вимана–Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность / *Н.В. Сулейманов* // Докл. Акад. наук СССР. – 1980. – Т. 253, №4. – С. 822-824.
7. *Куриляк А.О.* Нерівність типу Вімана для аналітичних в крузі функцій і категорії Бера / *А.О. Куриляк, О.Б. Скасків* // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Серія: математика. – 2011. – Т. 1, №4. – С. 73-79.
8. *Kuryliak A.O.* Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions / *A.O. Kuryliak, O.B. Skaskiv, I.E. Chyzhykov* // Bull. Soc. Sc. et des letters de Lodz. – 2012. – Vol. 62, №3. – P. 17-33.

9. *Овчар І.Є.* Один аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра / *І.Є. Овчар, О.Б. Скасків* // Карпатські мат. публ. – 2013. – Т. 5, №2. – С. 305-309.
10. *Kuryliak A.O.* Wiman's type inequality for some double power series / *A.O. Kuryliak, L.O. Shapovalovska, O.B. Skaskiv* // Mat. Stud. – 2013. – Vol. 39, №2. – P. 134–141.
11. *Gopala Krishna J.* Generalised inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$ / *J. Gopala Krishna, I.H. Nagaraja Rao* // Jour. of the Indian Math. Soc. – 1977. – Vol. 41. – P. 203-219.

Стаття: надійшла до редакції 31.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014

WIMAN'S TYPE INEQUALITY FOR ANALYTIC FUNCTIONS IN THE BIDISC

Andriy KURYLIAK, Oleh SKASKIV, Ludmyla SHAPOVALOVSKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: kurylyak88@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua, shap.ludmila@gmail.com

In this paper we prove some analogue of Wiman's type inequality for analytic functions in the bidisc $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. The obtained inequality is sharp.

Key words: maximum modulus, maximal term, analytic functions in the polydisc, Wiman's type inequality.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ВИМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БИКРУГЕ

Андрей КУРИЛЯК, Олег СКАСКИВ, Людмила ШАПОВАЛОВСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: kurylyak88@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua, shap.ludmila@gmail.com

Доказано аналог неравенства Вимана для функций, аналитических в бикруге $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Полученное неравенство является точным.

Ключевые слова: максимум модуля, максимальный член, аналитическая функция в бикруге, неравенство типа Вимана.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 97–110
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 97–110

УДК УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОБЕРНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Інститут математики, Ряшівський університет,
ал. Рейтана, 16 А, Ряшів, 35-959, Польща
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Доведено існування та єдиність розв'язку (u, a) крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \quad \Omega_0 \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2,$$

$$a(t) > 0, \ \ t \in [0,T],$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \quad a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0$$

з регуляризованою похідною $D_t^\beta u$ порядку $\beta \in (0,1)$ та заданою точкою $x_0 \in \partial\Omega_0$.

Ключові слова: похідна дробового порядку, обернена крайова задача, вектор-функція Гріна, операторне рівняння.

1. Вступ. Умови класичної розв'язності першої крайової задачі для рівняння

$$D_t^\beta u(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F_0(x,t), \quad a^2 = const > 0$$

з регуляризованою похідною ([1], [2]) функції u порядку $\beta \in (0;1)$

$$D_t^\beta u(x,t) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^t \tfrac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\tfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \tfrac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \tfrac{u(x,0)}{t^\beta} \right]$$

одержані в [3], [4]. Розв'язки побудовано у вигляді рядів Фур'є за власними функціями відповідних задач Штурма-Ліувілля.

В [5]-[8] було доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівняння

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t), \quad (x,t) \in R^N \times (0,T]$$

з регуляризованою похідною функції u порядку $\beta \in (m-1;m)$, $m = 1, 2, \ldots$, де $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з гладкими (залежними від просторової змінної $x \in \mathbb{R}^n$) коефіцієнтами та $\beta \in (0,1)$ у [5]-[7],

$A(x,D) = \Delta$ у [8], у [9], [10] одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші у випадку $A(x,D) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$.

Ми доводимо існування розв'язку (u,a) оберненої крайової задачі

$$D^\beta u_t - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \tag{1}$$

$$a(t) > 0, \ \ t \in [0,T],$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \tag{2}$$

$$a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0, \tag{4}$$

де Ω_0 – обмежена область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ з гладкою межею $\Omega_1 = \partial\Omega$; x_0 – довільно задана точка на Ω_1; ν_x – орт внутрішньої нормалі до поверхні Ω_1 в точці $x \in \Omega_1$; F_0-F_2 – задані функції.

Зауважимо, що у випадку $\beta = 1$, $N = 1$ такого типу обернені крайові коефіцієнтні задачі вивчали у [11]-[12], де доведено теореми існування та єдиності.

2. Вектор-функція Гріна першої крайової задачі. Надалі використовуємо позначення

$Q_i = \Omega_i \times (0,T]$, $i = 0,1$,

$\mathfrak{D}(R^N)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в R^N ([13], с. 13), $i = 0,1,2$,

$\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, \quad k = 0,1,\dots\}$,

$\mathfrak{D}'(R^N)$ та $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{D}(R^N)$ та $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$,

(f,φ) – значення $f \in \mathfrak{D}'(R^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{D}(R^N)$, а також значення $f \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$.

Позначаємо через $\hat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ ([13], с. 111): $(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$, через $*$ позначаємо операцію згортки узагальнених функцій f і g, тобто узагальнену функцію $f * g$

$$(f * g, \varphi) = (f, g\hat{*}\varphi) \text{ для кожної основної функції } \varphi.$$

Використовуємо функцію $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(R) = \{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \tfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \leqslant 0,$$

де $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Правильні такі співвідношення:

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нехай

$C(Q_0)$, $C(\overline{Q}_0)$, $C[0,T]$ – класи неперервних відповідно в Q_0, $\overline{Q}_0$ та на $[0,T]$ функцій,
$C_+[0,T]$ – клас неперервних на $[0,T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій,
$C_\beta(0,T] = \{v \in C(0,T] \mid \ t^\beta v \in C[0,T], \ \ v_0 = \inf\limits_{(t)\in Q} t^\beta |v(t)| > 0\}$,

$C_{2,\beta}(Q_0)$ – клас неперервних функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_0$, які дорівнюють нулю при $t \geq T$ та з неперервними функціями Δv, $D^\beta_t v$ в Q_0.

Нагадаємо, що похідна $v^{(\beta)}_t(x,t)$ Рімана-Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначається формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

$$D_t^\beta v(x,t) = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0) \text{ для } v \in C_{2,\beta}(Q_0),\ (x,t) \in Q_0, \quad \beta \in (0;1).$$

Означення 1. *Розв'язком задачі (1)-(4) називається пара функцій*

$$(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta := C_{2,\beta}(Q_0)) \times C_+[0,T],$$

що задовольняє рівняння (1) в Q_0 та умови (2)-(4).

Нехай
$X(\overline{Q}_0) = \{v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)\ :\ \ v(x,t) = 0,\ \ x \in \Omega_1,\ \ t \in [0,T]\}.$

Введемо оператори

$$L: \quad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - a(t)\Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \qquad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0),$$

$$L^{reg}: \ (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) - a(t)\Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in C_{2,\beta}(Q_0).$$

$$\hat{L}: \quad (\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}\hat{*}v(x,t) - a(t)\Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0).$$

Як у [15] доводимо, що для $v \in C^{2,\beta}(Q_0)$, $\psi \in X(\bar{Q}_0)$ правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_0} v(y,\tau)(\hat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_{Q_0} (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau + \tag{5}$$

$$+\int\limits_{Q_1} v(y,\tau)\frac{\partial\psi(y,\tau)}{\partial\nu}dSd\tau + \int\limits_{\Omega_0} v(y,0)dy\int\limits_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau.$$

Означення 2. *Вектор-функція $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y,\tau), G_2(x,t,y))$ така, що при достатньо гладких g_0, g_1, g_2 функція*

$$v(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy + \tag{6}$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_1} G_1(x,t,y,\tau)g_1(y,\tau)dS_y + \int\limits_{\Omega} G_2(x,t,y)g_3(y)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(Q_0)$) розв'язком першої крайової задачі

$$D^\beta u_t - a(t)\Delta u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \tag{7}$$

$$u(x,t) = g_1(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \tag{8}$$

$$u(x,0) = g_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0 \tag{9}$$

(з відомою функцією $a(t)$), називається вектор-функцією Гріна цієї задачі.

З означення випливає, що

$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0$ де δ – дельта-функція Дірака,
$(L^{reg}G_2)(x,t,y) = 0, \quad (x,t) \in Q_0, y \in \Omega_0, \quad G_2(x,0,y) = \delta(x-y), \quad x,y \in \Omega_0.$

Лема 1. $G_1(x,t,y,\tau)=\frac{\partial G_0(x,t,y,\tau)}{\partial\nu_y}, \quad (x,t)\in\overline{Q}_0,\ (y,\tau)\in Q_1,$

$$G_2(x,t,y)=f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t,y,0), \quad (x,t)\in Q_0,\ y\in\Omega_0.$$

Лема доводиться за схемою [15].

Лема 2. *При $a\in C_+[0,T]$ вектор-функція Гріна першої крайової задачі (7)-(9) існує.*

Доведення. Враховуючи лему 1, достатньо довести існування головної функції Гріна $G_0(x,t,y,\tau)$. Як у [5]-[7] для задачі Коші та у [16] для загальних параболічних крайових задач, існування $G_0(x,t,y,\tau)$ можна довести методом Леві. Її існування можна також довести методом рядів Фур'є. Справді, вибираючи у формулі (5) за функції $\psi_k\in X(\overline{Q}_0)$ розв'язки рівнянь $(\hat{L}\psi_k)(y,t)=\varphi_k(x,t,y,\tau)$, де послідовність $\varphi_k(x,t,y,\tau)$ $(k\to\infty)$ є δ-видною, із формули (5) після граничного переходу при $k\to\infty$ одержуємо зображення (6) розв'язку задачі (7)-(9), де $G_0(x,t,y,\tau)$ (границя послідовності ψ_k у $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$) як функція (y,τ) є розв'язком задачі

$$(\hat{L}_{y,\tau}G_0)(x,t,y,\tau)=\delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau)\in Q_0, \tag{10}$$

$$G_0|_{y\in\overline{Q}_1}=0, \qquad G_0(x,t,y,T)=0.$$

Шукаємо G_0 у вигляді

$$G_0(x,t,y,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}S_m(x,t,\tau)\omega_m(y), \tag{11}$$

де $\omega_m(y)$ – ортонормовані власні функції стаціонарної крайової задачі

$$\Delta\omega_m+\lambda_m\omega_m=0, \quad y\in\Omega_0, \quad \omega|_{\Omega_1}=0.$$

Підставляючи (11) у рівняння задачі (10), матимемо

$$\sum_{m=1}^{\infty}\big[f_{-\beta}(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau)+\lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau)\big]\omega_m(y)=\sum_{m=1}^{\infty}(\delta(x-y),\omega_m(y))\omega_m(y)\delta(t-\tau),$$

звідки, враховуючи, що $(\delta(x-y),\omega_m(y))=\omega_m(x)$, одержуємо задачі для функцій $S_m(x,t,\tau)$:

$$f_{-\beta}(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau)+\lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau)=\omega_m(x)\delta(t-\tau),\ S_m(x,t,T)=0,\ m=1,2,\ldots \tag{12}$$

Кожна з задач (12) зводиться до лінійного інтегрального рівняння Вольтерра

$$S_m(x,t,\tau)+\lambda_m a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau)=f_\beta(t-\tau)\omega_m(x). \tag{13}$$

Методом послідовних наближень знаходимо розв'язок рівняння (13) у вигляді рівномірно збіжного при $t>\tau$ ряду

$$S_m(x,t,\tau)=\Big[f_\beta(t-\tau)+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}(-\lambda_m)^p\underbrace{a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}}_{p}\,f_\beta(t-\tau))\Big)\Big)\Big)\Big]\omega_m(x).$$

Зокрема, у випадку $a(\tau) = a = const > 0$ матимемо

$$S_m(x,t,\tau) = \sum_{p=0}^{\infty}(-a\lambda_m)^p f_{(p+1)\beta}(t-\tau)\omega_m(x) =$$

$$= (t-\tau)^{\beta-1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[-a\lambda_m(t-\tau)^\beta]^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}\omega_m(x) = (t-\tau)^{\beta-1}E_\beta(-a\lambda_m(t-\tau)^\beta)\omega_m(x),$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція, $E_\beta(z) = E_{\beta^{-1}}(z,\beta) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}$ – функція Міттаг-Лефлера [2], що має оцінку $E_\beta(z) \le \frac{C}{|z|}$, $C = C(\beta)$ – певна додатна стала. Тоді у випадку $a(\tau) = a = const > 0$ мажорантним для ряду (11) буде рівномірно збіжний ряд

$$\frac{C}{a(t-\tau)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\omega_m(x)\omega_m(y)|}{\lambda_m}, \quad x,y\in[0,l], \quad 0\le\tau<t\le T.$$

В загальному випадку, оцінивши різницю двох сусідніх доданків у виразі для $S_m(x,t,\tau)$

$$\lambda_m^{2k}\underbrace{a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}}_{2k}\,f_\beta(t-\tau))\Big)\Big)\Big)-$$

$$-\lambda_m^{2k+1}\underbrace{a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}}_{2k+1}\,f_\beta(t-\tau))\Big)\Big)\Big) \le$$

$$\le \lambda_m^{2k}\Big[A_0^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m a_0^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]$$

$$\le \lambda_m^{2k}\Big[c^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m c^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]$$

при деякому $c < a_0 = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t) \le A_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} a(t)$, що можливо при

$$\lambda_m \ge \frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k}-c^{2k}}\cdot\frac{f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)}{f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)} = A_0c^2\frac{1-(\frac{c}{A_0})^{2k}}{(\frac{a_0}{A_0})^{2k+1}-(\frac{c}{A_0})^{2k+1}}\cdot\frac{\Gamma(2k\beta+\beta)}{\Gamma(2k\beta+2\beta)(t-\tau)^\beta}$$

або

$$\lambda_m(t-\tau)^\beta \ge A_0c^2(2k\beta)^{-\beta}\frac{1-(\frac{c}{A_0})^{2k}}{(\frac{a_0}{A_0})^{2k+1}-(\frac{c}{A_0})^{2k+1}}$$

при великих k (тоді $\frac{\Gamma(2k\beta+\beta)}{\Gamma(2k\beta+2\beta)} = O((2k\beta)^{-\beta})$ [14], с. 67), одержуємо

$$|S_m(x,t,\tau)| \le (t-\tau)^{\beta-1}E_\beta(-c\lambda_m(t-\tau)^\beta)|\omega_m(x)|.$$

Отже, при $a \in C_+[0,T]$ матимемо аналогічну до випадку сталої функції a оцінку ряду (11) і головна функція Гріна задачі (7)-(9) існує. □

Лема 3. *Правильні оцінки*

$$|G_i(x,t+\Delta t,y,\tau)-G_i(x,t,y,\tau)|\le A_i(x,t,y,\tau)|\Delta t|^{\gamma}\quad \forall (x,t)\in\overline{Q}_0,(y,\tau)\in\overline{Q}_i, \quad (14)$$

$$|\frac{\partial G_i(x,t+\Delta t,y)}{\partial \nu_x}-\frac{\partial G_i(x,t,y)}{\partial \nu_x}|\le B_i(x,t,y,\tau)|\Delta t|^{\gamma}\ \forall (x,t)\in\overline{Q}_1,(y,\tau)\in\overline{Q}_i, \quad (15)$$

$i=0,2$, де $0<\gamma<\beta$, невід'ємні функції $A_i(x,t,y,\tau)$ та $B_i(x,t,y,\tau)$ мають такі самі оцінки, як $G_i(x,t,y,\tau)$ та $\frac{\partial G_i(x,t,y)}{\partial \nu_x}$, $i=0,2$ відповідно з заміною β на $\beta-\gamma$.

Доведення. Використовуючи зображення (11), матимемо

$$G_0(x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}[S_m(x,t+\Delta t,\tau)-S_m(x,t,\tau)]\omega_m(y). \quad (16)$$

Для функцій

$$Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t)=S_m(x,t+\Delta t,y,\tau)-S_m(x,t,y,\tau)$$

одержуємо інтегральні рівняння вигляду (13) із правими частинами

$$[f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)]\omega_m(x).$$

Оскільки

$$f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)=f_{-\lambda}(t)*[f_{\beta+\lambda}(t+\Delta t-\tau)-f_{\beta+\lambda}(t-\tau)],$$

при $1-\beta<\lambda<1$ отримаємо $\beta+\lambda-1=\gamma\in(0,1)$ та $\beta-\gamma=1-\lambda>0$,

$$|(t+\Delta t-\tau)^{\gamma}-(t-\tau)^{\gamma}|=(t-\tau)^{\gamma}|(1+\frac{\Delta t}{t-\tau})^{\gamma}-1|\le|\Delta t|^{\gamma},$$

то одержуємо

$$|f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)|\le f_{1-\lambda}(t-\tau)|\Delta t|^{\gamma}=f_{\beta-\gamma}(t-\tau)|\Delta t|^{\gamma}.$$

Як при доведенні леми 2, знаходимо функції $Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t)$, що матимуть такі самі оцінки, як розв'язки рівнянь (13) із заміною β на $\beta-\gamma>0$ та множником $|\Delta t|^{\gamma}$. Враховуючи зображення (16), одержуємо оцінку (14) при $i=0$, де функція A_0 має таку саму оцінку, як $G_0(x,t,y,\tau)$, але з заміною β на $\beta-\gamma$. Інші оцінки в лемі одержуємо з таких самих міркувань та враховуючи лему 1. □

Зауваження 1. Для загальних параболічних крайових задач (у нашому випадку при $\beta=1$) оцінки вигляду (14), (15), які отримав Івасишен С.Д. (див. [16]), у випадку задачі Коші для $N=1$ ($\Omega_0=\mathbb{R}$) – у [6] (див. також [7]).

Використовуємо далі позначення

$G_i(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_i(x,t,y,\tau)$, $i=0,1$, $\quad G_2(x,t,y,a)$ замість $G_2(x,t,y)$.

Із принципу максимуму випливає додатність функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$ і $G_2(x,t,y,a)$ при $(x,t),(y,\tau)\in Q_0$ та $\frac{\partial G_0(x,t,y,\tau,a)}{\partial\nu_x}$ і $\frac{\partial G_2(x,t,y,a)}{\partial\nu_x}$ при $(x,t)\in Q_1$, $(y,\tau)\in Q_0$.

Згідно з методом Леві, для функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$ та $G_2(x,t,y,a)$ правильні такі самі оцінки, як для параметриксів $G(x-y,t-\tau,a(\tau))$, $f_{1-\beta}(t)*G(x-y,t,a(0))$, відповідно.

Із результатів [10] випливає, що фундаментальна функція $G(x,t,a)$ оператора вигляду L зі сталим коефіцієнтом $a>0$ набуває вигляду

$$G(x,t,a)=\frac{\pi^{N/2}t^{\beta-1}}{|x|^N}H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\Big|\begin{matrix}(\beta,\beta) & \\ (1,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right), \tag{17}$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z\Big|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$–H-функція Фокса ([17]).

Використовуючи властивості H-функцій Фокса, як у [15], знаходимо оцінки

$$|G(x,t,a)|\le\frac{C_0^*}{at|x|^{N-2}},$$

$$\Big|\frac{\partial G(x,t,a)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{C_1^*}{at|x|^{N-1}},\quad |f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)(x,t,a)|\le\frac{C_2^*}{at^\beta|x|^{N-2}},$$

$$\Big|\frac{\partial\big(f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)\big)}{\partial\nu_{x_0}}\Big|\le\frac{C_3^*}{at^\beta|x|^{N-1}},\quad |x|^2<4at^\beta,\quad N\ge3,$$

$$|G(x,t,a)|\le\frac{C_0^*}{at}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},\quad \Big|\frac{\partial G(x,t,a)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{C_1^*}{at|x|}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},$$

$$|f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)|\le\frac{C_2^*}{at^\beta}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},$$

$$\Big|\frac{\partial\big(f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)\big)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{C_3^*}{at^\beta|x|}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},\quad |x|^2<4at^\beta,\quad N=2,$$

$$|G(x,t,a)|\le\frac{\hat{C}_0t^{\beta-1}}{|x|^N}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{1+\frac{N}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_0}{t^{1-\beta}|x|^N},$$

$$\Big|\frac{\partial G(x,t,a)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{\hat{C}_1t^{\beta-1}}{|x|^{N+1}}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{1+\frac{N}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_1}{t^{1-\beta}|x|^{N+1}},$$

$$|f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)|\le\frac{\hat{C}_2}{|x|^N}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{N}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_2}{|x|^N},$$

$$\Big|\frac{\partial\big(f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)\big)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{\hat{C}_3}{|x|^{N+1}}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{N+2}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_3}{|x|^{N+1}},\ |x|^2>4at^\beta,$$

$c, C_i^*, C_i,\quad i=0,1,2,3$ – певні додатні сталі.

Зауваження 2. Насправді, оцінки в лемі 3 правильні без заміни β на $\beta-\gamma$. Це можна довести, використавши наявність експоненти в асимптотиці функцій $G_i(x,t,y,\tau,a)$ та $\frac{\partial G_i(x,t,y,\tau)}{\partial\nu_x}$ у випадку малих значень $t-\tau$, $i=0,2$.

3. Зведення задачі до операторного рівняння. Використовуватимемо оператори Гріна

$$(\mathfrak{G}_0\varphi)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(y,\tau)dy, \quad v \in D(Q_0),$$

$$(\mathfrak{G}_2\varphi)(x,t) = \int\limits_{\Omega_2} G_2(x,t,y)\varphi(y)dy, \quad v \in D(Q_2).$$

У [5]-[10] досліджено властивості таких операторів у випадку $\Omega_0 = \mathbb{R}^N$.

Нехай виконуються умови:

(F0) $F_0 \in C(Q_0)$, обмежена та для кожного $t \in (0,T]$ локально гельдерова за змінними x функція, $||F_0||_{C(Q_0)} := \sup\limits_{(x,t)\in Q_0} |F_0(x,t)|$,

$(F1)$ $F_1 \in C_{\beta/2}(0,T]$ та позначаємо $\inf\limits_{t\in(0,T]} t^{\beta/2}|F_1(t)| = b_0 \ (> 0)$,

(F2) $F_2 \in C(\overline{\Omega}_0)$, $F_2|_{\Omega_1} = 0$, $||F_2||_{C(\Omega_0)} := \sup\limits_{x\in\Omega_0} |F_2(x)| > 0$,

(F) $F_0(x,t) > 0$, $(x,t) \in Q_0$, $F_1(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $F_2(x) \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}_0$ або всі ці функції від'ємні, відповідно, в $Q_0, (0,T], \Omega_0$.

Теорема 1. *За умов (F0), (F2) при кожній відомій $a \in C_+[0,T]$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\beta}(Q_0)$ задачі (1), (2), (4), він визначений формулою*

$$u(x,t) = \big(\mathfrak{G}_0F_0\big)(x,t) + \big(\mathfrak{G}_2F_2\big)(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{18}$$

Теорема доводиться так само, як у [5]-[7] із використанням оцінок компонент вектор-функції Гріна та їхніх похідних. Єдиність розв'язку задачі є наслідком принципу максимуму [3].

Підставимо функцію (18) в умову (3). Одержуємо

$$a(t)\Big[\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_0F_0\big)(x_0,t) + \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2F_2\big)(x_0,t)\Big] = F_1(t), \quad t \in [0,T]$$

або

$$h(t) = t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial}{\partial\nu_x}\big(\mathfrak{G}_0F_0\big)(x_0,t) + \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2F_2\big)(x_0,t)\Big] \cdot [t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}, \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

де $h(t) = [a(t)]^{-1}$.

Результатом теореми 1 та додатності функцій $\frac{\partial G_0(x,t,y,\tau)}{\partial\nu_x}$, $\frac{\partial G_2(x,t,y)}{\partial\nu_x}$ при $(x,t)\in Q_1$, $(y,\tau) \in Q_0$ є така теорема.

Теорема 2. *За припущень (F0) - (F) пара функцій $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ є розв'язком задачі (1)-(4) тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція $h(t)$, $t \in [0,T]$ є розв'язком рівняння (19).*

4. Теореми існування та єдиності.

Теорема 3. *За припущень (F0) - (F) розв'язок $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ задачі (1)-(4) існує: функція $u(x,t)$ визначена формулою (18), $a(t) = [h(t)]^{-1}$, де $h(t)$ – розв'язок операторного рівняння (19).*

Доведення. Враховуючи наведені вище міркування, перетворення, теореми 1, 2, для доведення існування розв'язку задачі залишається довести розв'язність рівняння (19) у класі додатних неперервних функцій $h(t)$, $t \in [0,T]$. Доведемо спочатку його розв'язність у класі

$$M_R = \{h \in C[0,T] \quad | \quad ||h||_{C[0,T]} \leq R\}.$$

Це повний банахів простір – замкнений підпростір банахового простору $C[0,T]$ із нормою

$$||h||_{C[0,T]} = \max_{t\in[0,T]} |h(t)|.$$

Використаємо принцип Шаудера. Розглядаємо випадок $N \geq 3$. У випадку $N = 2$ доведення аналогічне. На M_R розглянемо оператор

$$(Ph)(t) := t^{\beta/2}\Big[\tfrac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_0 F_0\big)(x_0,t) + \tfrac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(x_0,t)\Big] \cdot [t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

Використовуючи оцінки компонент вектор-функції Гріна та їхніх похідних, при $h \in M_R$, $t \in [0,T]$ одержуємо

$$|(Ph)(t)| \leq b_0^{-1} t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h)}{\partial\nu_{x_0}} \cdot |F_0(y,\tau)| dy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h)}{\partial\nu_{x_0}} \cdot |F_2(y)| dy\Big] \leq$$

$$\leq b_0^{-1} t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t \Big(\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0 : |y-x_0| < \frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h)}{\partial\nu_{x_0}} dy +$$

$$+ \int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0 : |y-x_0| > \frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h)}{\partial\nu_{x_0}} dy\Big) d\tau\Big] \cdot ||F_0||_{C(Q_0)} +$$

$$+ b_0^{-1} t^{\beta/2}\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0 : |y-x_0| < \frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h)}{\partial\nu_x} dy +$$

$$+ \int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0 : |y-x_0| > \frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h)}{\partial\nu_{x_0}} dy\Big] \cdot ||F_2||_{C(\Omega_0)} \leq$$

$$\leq b_0^{-1} t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t \Big(\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0 : |y-x_0| < \frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{C_0^* R dy}{(t-\tau)|y-x_0|^{N-1}} +$$

$$+ \int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0 : |y-x_0| > \frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{C_0 dy}{(t-\tau)^{1-\beta}|y-x_0|^{N+1}}\Big) d\tau\Big] \cdot ||F_0||_{C(Q_0)} +$$

$$+b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|<\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}}\frac{C_2^*Rdy}{t^\beta|y-x_0|^{N-1}}+$$

$$+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_1:|y-x_0|>\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}}\frac{C_2dy}{|y-x_0|^{N+1}}\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)}\leq$$

$$\leq k_1b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[2\sqrt{R}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}d\tau+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}d\tau\int\limits_{\frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{diam\Omega_0}r^{-2}dr\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+$$

$$+k_2b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[2t^{-\beta/2}\sqrt{R}+\int\limits_{\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{diam\Omega_0}r^{-2}dr\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)}=$$

$$=k_1b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\frac{4\sqrt{R}t^{\beta/2}}{\beta}+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}\Big(\frac{\sqrt{R}}{2}(t-\tau)^{-\beta/2}-\frac{1}{diam\Omega_0}\Big)d\tau\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+$$

$$+k_2b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[(2\sqrt{R}+\frac{\sqrt{R}}{2})t^{-\beta/2}-\frac{1}{diam\Omega_0}\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)}=$$

$$=k_1b_0^{-1}\beta^{-1}t^\beta\Big[5\sqrt{R}-\frac{t^{\beta/2}}{diam\Omega_0}\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+k_2b_0^{-1}\Big[5\sqrt{R}/2-\frac{t^{\beta/2}}{diam\Omega_0}\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)},$$

де k_1,k_2 – додатні числа, $k_1=k_1(C_1,C_1^*)$, $k_2=k_2(C_2,C_2^*)$.

Якщо вибрати $\sqrt{R_1}-\frac{2T^{\beta/2}}{5diam\Omega_0}>0$, то для всіх $t\in[0,T]$, $R>R_1$ матимемо

$$|(Ph)(t)|<5b_0^{-1}\sqrt{R}\Big[\frac{k_1}{\beta}T^\beta\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+\frac{k_2}{2}||F_2||_{C(\Omega_0)}\Big].$$

За властивістю функції $A\sqrt{R}$ при довільному додатному числі A існує таке $R_2=R_2(A)>0$, що для всіх $R>R_2$ виконується $A\sqrt{R}<R$. Отже, існує таке $R_0=\max\{R_1,R_2\}>0$, що для всіх $R>R_0$, $h\in M_R$

$$||Ph||_{C[0,T]}<R, \text{ а отже, } \quad P:M_R\to M_R.$$

Оператор P неперервний на M_R. Справді, при $h_1,h_2\in M_R$

$$(Ph_1)(t)-(Ph_2)(t)=$$

$$=t^{\beta/2}[t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}\Big[\frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h_1)}{\partial\nu_{x_0}}-\frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h_2)}{\partial\nu_{x_0}}\Big]F_0(y,\tau)dy+$$

$$+[t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}\int\limits_{\Omega_0}t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h_1)}{\partial\nu_{x_0}}-\frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h_2)}{\partial\nu_{x_0}}\Big]F_2(y)dy.$$

Підінтегральні вирази мають інтегровні особливості та дорівнюють нулю при $h_1(t) = h_2(t)$. Тому значення $|(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t)|$ малі для всіх $t \in [0,T]$ при малих значеннях $|h_1(t) - h_2(t)|$, $t \in [0,T]$.

Подібно одержуємо, що оператор P компактний на M_R: вище було доведено рівномірну обмеженість множини $\{(Ph)(t), t \in [0,T]\}$ при $h \in M_R$, її одностайна неперервність випливає з рівномірної збіжності інтегралів у виразі $(Ph)(t)$ при $h \in M_R$ та леми 3.

Було показано скінченність правої частини в (19) для всіх $t \in [0,T]$. Також із оцінок і додатності функцій $\frac{\partial G_0(x,t,y,\tau)}{\partial \nu_x}$, $\frac{\partial G_2(x,t,y)}{\partial \nu_x}$ при $(x,t) \in Q_1$, $(y,\tau) \in Q_0$ випливає, що за умов щодо F_0, F_2

$$t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial \nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_0 F_0\big)(x_0,t) \geq 0, \quad t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial \nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(x_0,t) > 0.$$

Звідси, враховуючи також умови щодо функції F_1, одержуємо, що $(Ph)(t) > 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $h \in M_R$. Отже, враховуючи рівняння (19), додатність $h(t)$ забезпечується умовами (F0)-(F). $\square$

Зауваження 3. Насправді, з теореми випливає існування функції $a(t)$ з класу

$$C_+^\gamma[0,T] = \{v \in C_+[0,T] \quad | \quad |v(t) - v(\tau)| \leq A|t-\tau|^\gamma \quad \forall t,\tau \in [0,T]\}$$

з деякими сталими $A > 0$, $\gamma \in (0,1)$.

Справді, за умов теореми одержуємо обмеженість знизу деяким числом $h_0 > 0$ всіх функцій $(Ph)(t)$ при $h \in M_R$, а тоді й обмеженість знизу числом $h_0 > 0$ розв'язку $h \in M_R$ рівняння (19).

Оскільки $|a(t) - a(\tau)| = \frac{|h(t)-h(\tau)|}{h(t)h(\tau)} \leq \frac{|h(t)-h(\tau)|}{h_0^2}$ для довільних $t, \tau \in [0,T]$, то $a \in C_+^\gamma[0,T]$, якщо $h \in C_+^\gamma[0,T]$.

З вигляду виразу $(Ph)(t+\Delta t) - (Ph)(t)$ та леми 3 за умов теореми одержуємо, що функція $h = Ph \in M_R$ (розв'язок рівняння (19)) задовольняє умову Гельдера.

Теорема 4. *За умови (F1) розв'язок* $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ *задачі (1)-(4) єдиний.*

Доведення. Якщо (u_1,a_1), $(u_2,a_2) \in \mathfrak{M}_\beta$ – два розв'язки задачі, $v = u_1 - u_2$, $a = a_1 - a_2$, то

$$D_t^\beta v - a_1(t)\Delta v = a(t)\Delta u_2, \quad (x,t) \in Q_0, \tag{20}$$

$$v_{|Q_1} = 0, \quad v_{|t=0} = 0, \tag{21}$$

$$a_1(t)\frac{\partial v(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_1(t), \quad t \in [0,T] \tag{22}$$

та для функції v, як розв'язку першої крайової задачі (20)-(21), правильне зображення

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau,a_1)\cdot a(\tau)\Delta u_2(y,\tau)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{23}$$

Підставляючи функцію (23) в умову (22), одержуємо

$$a_1(t)\int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,a_1)}{\partial \nu_{x_0}}\cdot a(\tau)\Delta u_2(y,\tau)dy = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_1(t),$$

тобто

$$a(t)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}\frac{a_1(t)a_2(t)}{F_1(t)}\cdot\frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,a_1)}{\partial\nu_{x_0}}\cdot a(\tau)\Delta u_2(y,\tau)dy=0,\quad t\in[0,T].$$

Одержали, що функція $a(t)$ задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерра з інтегровним ядром (за умови теореми), яке однозначно розв'язне. Отже, $a(t)=0$, $t\in[0,T]$. Тоді з (23) одержуємо $v(x,t)=0$, $(x,t)\in\overline{Q}_0$. □

Зауваження 4. Випадок $N=1$ розглядається аналогічно. Задаючи умову (3) лише в одній точці $(x_0,t_0)\in\overline{Q}_1$, знаходимо (u,a), де a – стала.

Список використаної літератури

1. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost friequency independent / *M. Caputo* // II. Geofis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529-539.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / *М.М. Джрбашян.* – М.: Наука, 1999.
3. *Luchko Yu.* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order / *Yu. Luchko* // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2009. – Vol. 12, №4. – P. 409-422.
4. *Meerschaert M.M.* Fractional Cauchy problems on bounded domains / *M.M. Meerschaert, Nane Erkan, P. Vallaisamy* // Ann. Probab. – 2009. – Vol. 37. – P. 979-1007.
5. *Kochubei A.N.* Fractional-order diffusion / *A.N. Kochubei* // Differential Equations. – 1990. – Vol. 26. – P. 485-492.
6. *Кочубей А.Н.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии / *А.Н. Кочубей, С.Д. Эйдельман* // Доп. НАН України. – 2002. – №12. – С. 11-16.
7. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei.* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.
8. *Ворошилов А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / *А.А. Ворошилов, А.А. Килбас* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 414, №4. – С. 1-4.
9. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas / *V.V. Anh, N.N. Leonenko* // J. of Statistical Physics. – 2001. – Vol. 104 (5/6). – P. 1349-1387.
10. *Jun Sheng Duan.* Time- and space-fractional partial differential equations / *Jun Sheng Duan* // J. Math. Phis. – 2005. – Vol. 46 (013504).
11. *Іванчов М.І.* Inverse problems of heat conduction with nonlocal conditions / *M.I. Іванчов* // Доп. НАН України. – 1995. – №5. – P. 15-21.
12. *Іванчов М.І.* Про обернену задачу для параболічного рівняння / *М.І. Іванчов* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 65-71.
13. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальний курс / *Г.Е. Шилов.* – М.: Наука, 1965.
14. *Титчмарш Е.* Теория функций / *Е. Титчмарш.* – М.: Наука, 1980.
15. *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій / *Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський* // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, №8. – С. 1067-1080.
16. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *С.Д. Ивасишен.* – К.: Вища шк., 1990.

17. *Kilbas A.A.* H-Transforms / *A.A. Kilbas, M. Sajgo.* – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004.

Стаття: надійшла до редакції 19.04.2013
прийнята до друку 11.12.2013

SOLVABILITY OF INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

Andrii LOPUSHANSKYJ

Institute of Mathematics, Rzeszów University,
Al. Rejtana, 16 A, Rzeszo'w, 35-959, Poland
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

We prove existence and uniqueness of a solution (u, a) to the boundary value problem

$$D_t^\beta u - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \quad \Omega_0 \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2,$$
$$a(t) > 0, \;\; t \in [0,T],$$
$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \quad a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in [0,T],$$
$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0$$

with the regularized fractional derivative $D_t^\beta u$ of the order $\beta \in (0,1)$ and a given point $x_0 \in \partial\Omega$.

Key words: fractional derivative, inverse boundary value problem, the Green vector function, operator equation.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Андрей ЛОПУШАНСКИЙ

Институт математики, Жешовский университет,
ал. Рейтана, 16 А, Жешов, 35-959, Польша
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Доказано существование и единственность решения (u, a) краевой задачи

$$D_t^\beta u - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \quad \Omega_0 \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2,$$
$$a(t) > 0, \;\; t \in [0,T],$$

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega_0\times[0,T],\quad a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial\nu_{x_0}}=F_1(t),\quad t\in[0,T],$$
$$u(x,0)=F_2(x),\quad x\in\overline{\Omega}_0$$
с регуляризованной производной $D_t^\beta u$ порядка $\beta\in(0,1)$ и заданной точкой $x_0\in\partial\Omega_0$.

Ключевые слова: производная дробного порядка, обратная краевая задача, вектор-функция Грина, операторное уравнение.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 111–118
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 111–118

УДК 515.12

IDEMPOTENT ULTRAMETRIC FRACTALS

Nataliya MAZURENKO[1], **Mykhailo ZARICHNYI**[2]

[1] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,*
Shevchenka Str., 57, Ivano-Frankivsk, 76025
e-mail: natali-maz@yahoo.com
[2] *Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mzar@litech.lviv.ua

The notion of invariant measure is defined for the idempotent measures (Maslov measures) in the ultrametric setting. We prove that the ultrametric space of the idempotent measures on a complete ultrametric space is also complete and use this fact to prove the existence of the invariant idempotent measure for the IFSs. We also discuss the case of the upper-semicontinuous capacities, of the max-min measures, and also of idempotent measures on metric spaces.

Key words: idempotent measure, Maslov measure, ultrametric space.

1. Introduction. The invariant probability measures for the iterated function systems (IFS) were first defined by Hutchinson [5]. They found various applications in mathematics, quantum mechanics, image processing etc.

A Maslov measure (an idempotent measure) is a measure m on X defined as follows: $m(A) = \sup_{x\in A} \psi(x)$, where $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ is a function. The notion of idempotent measure belongs to the so-called Idempotent Mathematics, i.e., a part of mathematics in which the usual arithmetical operations are replaced by idempotent ones (like $x \oplus y = \max\{x, y\}$). The informal Correspondence principle asserts that to every meaningful and interesting notion of ordinary mathematics there corresponds a meaningful and interesting notion of the Idempotent Mathematics.

Recall that a metric d on a set X is called an ultrametric (a non-Archimedean metric) if it satisfies the following strong triangle inequality:

$$d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \quad x, y, z \in X.$$

The aim of this note is to define a counterpart of the invariant measures [5] for the idempotent measures and for the ultrametric spaces. We prove the existence of the invariant idempotent measures and consider an example of such a measure on an ultrametric Cantor set. Since the idempotent measures are special examples of non-additive measures, we discuss a possibility to define invariant objects in another classes of measures. Actually, we focus on the class of the upper semi-continuous capacities and the max-min measures in the ultrametric setting. We also discuss some metrizations of the idempotent measures for all metric spaces.

2. Idempotent measures. By $\exp X$ we denote the set of all nonempty compact subsets in a topological space X. If X is a metric space, we endow $\exp X$ with the Hausdorff metric.

Denote by $C(X)$ the set of continuous functions on a compact Hausdorff space X. Given $c \in \mathbb{R}$, we denote by $c_X \in C(X)$ the constant function which takes the value c on X. Let $c \odot \varphi$ denote the function $c_X + \varphi$ and let $\varphi \oplus \psi$ denote the function $\max\{\varphi, \psi\}$. Also, $\odot$ and $\oplus$ mean the addition and max in the set of reals $\mathbb{R}$ respectively.

Definition 1. *Let X be a compact Hausdorff space. A functional $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ is called an* idempotent measure *if it satisfies the following properties:*

1) $\mu(c_X) = c$;
2) $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$;
3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

By $I(X)$ we denote the set of all idempotent measures on X. The following is an example of an idempotent measure. Let $x_1, \ldots, x_n \in X$ and let $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [-\infty, 0]$ be such that $\oplus_{i=1}^n \alpha_i = 0$; then define $\mu = \oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot \delta_{x_i} \in I(X)$ as follows:
$\mu(\varphi) = \oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot \varphi(x_i)$.

Every continuous map $f\colon X \to Y$ of compact Hausdorff spaces induces a map $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ by the formula $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f)$. We obtain a functor acting from the category of compact Hausdorff spaces and a known procedure by Chigogidze [4] allows us to extend this functor onto the category of Tychonov spaces and continuous maps. We keep the notation I for this extension. Note that there is a natural definition of support for the functor I.

Thus, for a Tychonov space X, the set $I(X)$ consists of the idempotent measures on X with compact supports.

Given an ultrametric space (X, d), for every $r > 0$, we denote by $\mathcal{F}_r(X)$ the set of real-valued functions on X which are constant onto the balls of radius r. We endow $I(X)$ with the following metric $\hat{d}$:

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 \quad | \quad \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ for all } \varphi \in \mathcal{F}_r\}$$

(see [1] for details).

Theorem 1. *Let (X, d) be a complete ultrametric space. Then $I(X)$ is also a complete ultrametric space.*

Proof. Let (μ_i) be a Cauchy sequence in the space $I(X)$. Then $(A_i = \mathrm{supp}(\mu_i))$ is a Cauchy sequence in the space $\exp X$ (see [1]) and there exists the limit $A = \lim_{i\to\infty} A_i$. Without loss of generality, one may assume that $X = A \cup \bigcup_{i=1}^\infty A_i$.

Let $\varphi \in C(X)$. We are going to show that $(\mu_i(\varphi))$ is a Cauchy sequence. Let $\varepsilon > 0$. Since the function φ is uniformly continuous, there exists $\delta > 0$ such that $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta$, whenever $d(x, y) < \varepsilon$. Then there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\hat{d}(\mu_i, \mu_j) < \delta$ for all $i, j \geq N$. Denote by $\mathcal{D}_\delta = \{B_\delta(x_k)\}$ the decomposition of X into the balls of radius δ. Then

$\varphi = \oplus_k \varphi_k$, where $\varphi_k | B_\delta(x_k) = \varphi | B_\delta(x_k)$ and $\varphi_k | (X \setminus B_\delta(x_k)) = c_k$, for small enough c_k. Then

$$|\mu_i(\varphi) - \mu_j(\varphi)| = | \oplus_k \mu_i(\varphi_k) - \oplus_k \mu_j(\varphi_k)| = |\mu_i(\oplus_k \varphi_k) - \mu_j(\oplus_k \varphi_k)| \leq \delta$$

as $a_k \leq \varphi_k \leq a_k + \delta$, for some constant a_k.

Thus, the sequence $(\mu_i(\varphi))$ is a Cauchy sequence and we denote its limit by $\mu(\varphi)$. We are going to show that $\mu \colon C(X) \to \mathbb{R}$ is an element of $I(X)$. Note first that $\mu(c_X) = c_X$.

Note also that

$$\mu(\varphi \oplus \psi) = \lim_{i \to \infty} \mu_i(\varphi \oplus \psi) = \lim_{i \to \infty} \mu_i(\varphi) \oplus \lim_{i \to \infty} \mu_i(\psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi).$$

Therefore, $\mu \in I(X)$.

In order to show that $\mu = \lim_{i \to \infty} \mu_i$ let $\varepsilon > 0$. Since (μ_i) is a Cauchy sequence, there is $N \in \mathbb{N}$ such that, for every $i, j \geq N$, $\mu_i(\varphi) = \mu_j(\varphi)$, for every $\varphi \in \mathcal{F}_\varepsilon$. Then $\mu(\varphi) = \mu_i(\varphi)$, for every $\varphi \in \mathcal{F}_\varepsilon$ and $i \geq N$.

Thus, $I(X)$ is complete.

2.1. IFSs and invariant idempotent measures. Recall that a map $f \colon X \to Y$ of metric spaces (X, d) and (Y, ϱ) is called a contraction if there is $\lambda \in (0, 1)$ (called a contraction coefficient) such that $\varrho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$, for all $x, y \in X$.

Let X be a complete ultrametric space and $f_1, \dots, f_n \colon X \to X$ a family of contractions (we call it an iterated function system (IFS)). Let also $a = \oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot \delta_i \in I(\{1, \dots, n\})$, where $\alpha_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, and $\oplus_{i=1}^n \alpha_i = 0$. Define the map $\Phi \colon I(X) \to I(X)$ as follows: $\Phi(\mu) = \oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot I(f_i)(\mu)$. Note that, clearly, $\Phi(\mu) \in I(X)$.

Proposition 1. *The map Φ is a contraction.*

Proof. Let $\lambda \in (0, 1)$ be a contraction coefficient for the IFS $f_1, \dots, f_n$ (e.g., the maximal of the contraction coefficients for f_i, $i = 1, \dots, n$).

Given $\mu, \nu \in I(X)$ with $\hat{d}(\mu, \nu) < c$, we obtain $\hat{d}(I(f)(\mu), I(f)(\nu)) < \lambda c$. Then, for any $x \in X$, we have

$$I(f_i)(\mu)(B_{\lambda a}(x)) = I(f_i)(\nu)(B_{\lambda a}(x)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Therefore $\oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot I(f_i)(\mu) = \oplus_{i=1}^n \alpha_i \odot I(f_i)(\nu)$ and we conclude that Φ is a contraction.

Since the metric space $(I(X), \hat{d})$ is complete, there exists a unique fixed point of the map Φ. We call this fixed point the *invariant idempotent measure* of the ISF $f_1, \dots, f_n$ and $a \in I(\{1, \dots, n\})$.

2.2. Example. Let $C = 2^\omega$ be the Cantor set. We consider the following metric d on C:

$$d((x_i), (y_i)) = \inf\{1/k \quad | \quad x_i = y_i \text{ for all } i < k\}.$$

Clearly, d is an ultrametric on C. In the sequel, we identify every $(x_1, \dots, x_n) \in 2^n$ with $(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in 2^\omega = C$.

Consider the IFS $f_1, f_2 \colon X \to X$ defined by

$$f_1(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad f_2(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots).$$

Let $a = 0 \odot \delta_1 \oplus (-1) \odot \delta_2 \in I(\{1, 2\})$.

Consider $\mu_0 = 0 \odot \delta_{(0,0,\dots)} \in I(C)$. Then, for every natural n, we obtain

$$\Phi^n(\mu_0) = \bigoplus \left\{ -\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \odot \delta((x_i)) \mid (x_i) \in 2^n \subset 2^\omega \right\}.$$

Then the unique fixed point of the map Φ is

$$\mu = \bigoplus \left\{ \left(-\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) \odot \delta((x_i)) \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty \right\}.$$

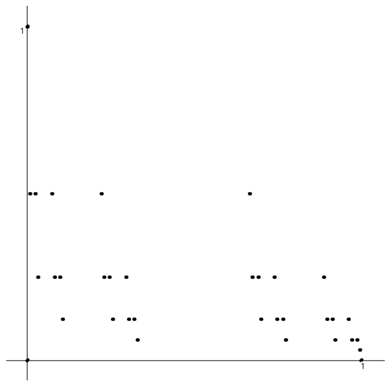
Indeed, it is enough to verify that $\hat{d}(\Phi(\mu_0), \mu) < 1/n$. Note that $\mathcal{F}_{1/n}$ consists of the functions which are constant on the sets of the form

$$K_{(x_1,\dots,x_n)} = \{(y_i)_{i=1}^{\infty} \mid y_i = x_i \text{ for every } i = 1, \dots, n\},$$

where $(x_1, \dots, x_n) \in 2^n$. Let $\varphi \in \mathcal{F}_{1/n}$. Let $B \subset X$ be an open ball of radius $1/n$. Then there exists $(x_1, \dots, x_n) \in 2^n \subset 2^\omega = C$ such that $B = B_{1/n}((x_1, \dots, x_n))$. Then, clearly, for any $m \geq n$,

$$\Phi^m(\mu_0)(\varphi) = \bigoplus \left\{ \varphi(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} x_i \in 2^n \subset 2^\omega \right\},$$

whence $\hat{d}(\Phi^n(\mu_0), \Phi^m(\mu_0)) < 1/n$ for all $m \geq n$.



Pic. 1. Visualization of the measure $\Phi^n(\mu_0)$.

In the picture, the measure $\Phi^n(\mu_0)$ is visualized as follows. First, we represent C as the middle-third Cantor set. Actually, we plot the graph of the (partial) function $y_i \mapsto 2^{\alpha_i}$ in order to represent $\mu = \oplus \alpha_i \odot \delta_{y_i}$.

2.3. Remark. A metric in the spaces of idempotent measures of compact metric spaces is defined in [8]. One can formulate the problem of existence of invariant idempotent measures for this metric.

3. Discussion. Here we discuss a possibility to extend the results of the previous section onto another classes of non-additive measures as well as onto the case of metric (not necessarily ultrametric) spaces.

3.1. Capacities. We first consider the case of the upper-semicontinuous capacities.

An upper-semicontinuous capacity of a compact Hausdorff space X is a function c defined on the closed subsets of X and satisfying the properties:

1) $c(\emptyset) = 0$, $c(X) = 1$;
2) $c(A) \leq c(B)$, whenever $A \subset B$;
3) if $c(A) < a$, then there is a neighborhood U of A such that $c(B) < a$, for every $B \subset U$.

The set of all upper-semicontinuous capacities on X is denoted by $M(X)$. It is known (see, e.g., [3]) that M is a functor on the category of compact Hausdorff spaces. Similarly as above, one can define the ultrametric space of upper-semicontinuous capacities with compact supports on an ultrametric space X.

There are metrizations of the space $M(X)$ which are counterparts of the Hutchinson and Prohorov metric respectively. In [6], an ultrametrization of $M(X)$, for an ultrametric X, is defined. Given an ultrametric space (X, d), for every $r > 0$, we denote by $\mathcal{F}_r(X)$ the set of real-valued functions on X which are constant onto the balls of radius r. We endow $M(X)$ with the following metric $\hat{d}$:

$$\hat{d}(c_1, c_2) = \inf\left\{ r > 0 \ \mid \ \int\limits_X \varphi dc_1 = \int\limits_X \varphi dc_2 \text{ for all } \varphi \in \mathcal{F}_r \right\},$$

where $\int_X \varphi dc$ is the Choquet integral defined as follows:

$$\int\limits_X \varphi dc = \int\limits_0^\infty c(\varphi \geq t)dt + \int\limits_{-\infty}^0 (c(\varphi \geq t) - 1)dt,$$

where $(\varphi \geq t)$ stands for the set $\{x \in X \mid \varphi(x) \geq t\}$.

However, one cannot proceed as in the previous section in order to define the invariant measure, because the obtained ultrametric space $(M(X), \tilde{d})$, in general, is not complete (see [6] for an example).

In [6], the following ultrametric on $M(X)$ is considered:

$$\tilde{d}(c_1, c_2) = \max\{\hat{d}(c_1, c_2), \ \ d_H(\mathrm{supp}(c_1), \mathrm{supp}(c_2))\}.$$

Clearly, the map (supp: $M(X) \to \exp X$ is nonexpanding. In [6], it is proved that the ultrametric space $(M(X), \tilde{d})$ is complete if so is (X, d). However, this construction does not satisfy the following property: if $f\colon X \to Y$ is a nonexpanding map of ultrametric spaces, then so is the map $M(f)\colon M(X) \to M(Y)$.

Indeed, consider a set $X = \{x, y, z, w\}$ endowed with the metric d:

$$d(x, y) = d(y, z) = d(x, z) = 1, \quad d(x, w) = d(y, w) = d(z, w) = 2.$$

Clearly, d is an ultrametric. Let $Y = \{x, y, w\}$ be endowed with the subspace metric. Denote by $f\colon X \to Y$ a retraction sending z to x. The map f is nonexpanding.

Let $c_1, c_2\colon \{\emptyset\} \cup \exp X \to [0, 1]$ be defined as follows:

$$c_1(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } |A \cap \{x, y, w\}| \geq 2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad c_2(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } |A \cap \{x, z, w\}| \geq 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $M(f)(c_1)(A)$ equals 1, whenever $|A| \geq 2$ and 0 otherwise. It is easy to see that $\mathrm{supp}(M(f)(c_2)) = \{x\}$. This implies

$$\tilde{d}(c_1, c_2) = 1, \quad \tilde{d}(M(f)(c_1), M(f)(c_2)) = 2$$

and therefore the map $M(f)$ is not nonexpanding.

We see that the reason of lack of the non-expanding property is connected with the property of preservation of preimages. One can speculate whether a kind of the Open Set Condition can repair the situation. We leave this as an open problem.

3.2. Max-min measures. The results of this note can be extended on the case of the so-called max-min measures on ultrametric spaces (see [7]). Every max-min measure of finite support is of the form $\oplus_{i=1}^n \alpha_i \otimes \delta_{x_i}$, where $\otimes$ stand for the min operation, $\alpha_i \in [-\infty, \infty]$, for all $i = 1, \dots, n$, and $\oplus_{i=1}^n \alpha_i = \infty$. In [7], the max-min measures on the complete ultrametric spaces are defined as the elements of the completion of the space of the max-min measures of finite supports with respect to the ultrametric which is a counterpart of that used above for the idempotent measures.

3.3. Idempotent measures on metric spaces. Let (X, d) be a compact metric space. By $I(X)$ we denote the set of all idempotent measures of compact support on X.

By $\mathrm{LIP}_n = \mathrm{LIP}_n(X, d)$ we denote the set of Lipschitz functions with the Lipschitz constant $\leq n$ from $C(X)$.

Fix $n \in \mathbb{N}$. For every $\mu, \nu \in I(X)$, let

$$\hat{d}_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \quad | \quad \varphi \in \mathrm{LIP}_n\}.$$

It is proved in [8] that the function $\hat{d}_n$ is a continuous pseudometric on $I(X)$. We let $\tilde{d}_n = (1/n)\hat{d}_n$. In [8], the following metric was defined on the set $I(X)$:

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{d}_i(\mu, \nu)}{2^i}. \tag{1}$$

One can also show that the following is a metric on $I(X)$:

$$\check{d}(\mu, \nu) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{d}_i(\mu, \nu)}{2^i}. \tag{2}$$

One can easily prove the following fact for the metric $\check{d}$.

Proposition 2. *Let $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (-\infty, 0]$ be such that $\oplus_{i=1}^n \alpha_i = 0$. Let $\mu_i, \nu_i \in I(X)$, $i = 1, \dots, n$, be such that $\hat{d}(\mu_i, \nu_i) \leq K$, for all $i = 1, \dots, n$. Then the map*

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) \mapsto \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \odot \mu_i \colon I(X)^n \to I(X)$$

(we consider the max-metric on the product) is nonexpanding.

Now, in order to prove that the map Φ defined as above for an IFS is a contraction, we have to show that the functor I preserver the class of contractions, i.e. that $I(f)$ is a contraction, whenever so is f. However, this is not the case, as the following example demonstrates.

Let $X = \{a, b\}$ with $d(a, b) = K > 0$. Let

$$\mu = 0 \odot \delta_a \oplus \alpha \odot \delta_b, \quad \nu = 0 \odot \delta_a \oplus \beta \odot \delta_b \in I(X).$$

Without loss of generality, one may assume that $\varphi(a) = 0$ for all Lipschitz functions φ. Then, if $\alpha, \beta > -K$, then $\check{d}(\mu, \nu) = |\alpha - \beta|$, i.e., $\check{d}(\mu, \nu)$ does not depend on K. This easily implies that the map $I(f)$, where f the identity map of (X, d) onto (X, ϱ) with $\varrho(a, b) = K/2$ is not a contraction.

We conclude that the map Φ is not a contraction and one should apply methods other than Banach's contracting principle in order to examine the question of existence and uniqueness of invariant measure.

References

1. *Hubal O.* Idempotent probability measures on ultrametric spaces / *O. Hubal, M. Zarichnyi* // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 343, No. 2. – P. 1052-1060.
2. *den Hartog J.I.* Metric semantics and full abstractness for action refinement and probabilistic choice / *J.I. den Hartog, E.P. de Vink, J.W. de Bakker.* In T. Hurley, M. Mac and Airchinnigh, M. Schellekens, A. Seda (Eds.), Proceedings of The First Irish Conference on the Mathematical Foundations of Computer Science and Information Technology (MFCSIT2000, Cork, Ireland, July 20-21, 2000) // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. – 2001. – Vol. 40. – P. 72-99.
3. *Zarichnyi M.M.* Capacity functor in the category of compacta / *M.M. Zarichnyi, O.R. Nykyforchyn* // Sbornik: Mathematics. – 2008. – Vol. 199, №2. – P. 159-184.
4. *A. Chigogidze* On extension of normal functors / *Chigogidze A.* // Vestnik Mosk. Univ. Mat. Mekh. – 1984. – Vol. 6. – P. 23-26.
5. *Hutchinson J.E.* Fractals and self-similarity / *J.E. Hutchinson* // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – Vol. 30. – P. 713-747.
6. *Hubal' O.* Capacity functor on the category of ultrametric spaces / *O. Hubal'* // Mat. Stud. – 2009. Vol. 32. – P. 132-139.
7. *Cencelj M.* Max-min measures on ultrametric spaces / *M. Cencelj, D. Repovš, M. Zarichnyi* // Topology and its Applications. – 2013. – Vol. 160, №5. – P. 673-681.
8. *Bazylevych L.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces / *L. Bazylevych, D. Repovš, M. Zarichnyi* // Topology and its Applications. – 2010. – Vol. 157, №1. – P. 136-144.

Стаття: надійшла до редакції 03.11.2013
прийнята до друку 28.02.2014

ІДЕМПОТЕНТНІ УЛЬТРАМЕТРИЧНІ ФРАКТАЛИ

Наталія МАЗУРЕНКО[1], **Михайло ЗАРІЧНИЙ**[2]

[1]*Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,*
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025
e-mail: natali-maz@yahoo.com
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mzar@litech.lviv.ua

Для ідемпотентних мір (мір Маслова) означено поняття інваріантної міри для ітерованої системи функцій на ультраметричному просторі. Доводимо, що ультраметричний простір ідемпотентних мір на повному ультраметричному просторі є також повним і використовуємо цей факт для доведення існування інваріантної ідемпотентної міри для ітерованих систем функцій. Також обговорюється випадок напівнеперервних згори ємностей.

Ключові слова: ідемпотентна міра, міра Маслова, ультраметричний простір.

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Наталия МАЗУРЕНКО[1], Михаил ЗАРИЧНЫЙ[2]

[1]*Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника, ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76025*
e-mail: natali-maz@yahoo.com
[2]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1, Львов, 79000*
e-mail: mzar@litech.lviv.ua

Для идемпотентных мер (мер Маслова) определено понятие инвариантной меры для итерованной системы функций на ультраметрическом пространстве. Доказано, что ультраметрическое пространство идемпотентных мер на полном ультраметрическом пространстве полно и этот факт использован для доказательства существования инвариантной идемпотентной меры для итерированной системы функций. Также рассматривается случай полунепрерывной свёртки ёмкостей.

Ключевые слова: идемпотентная мера, мера Маслова, ультраметрическое пространство.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 119–126
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 119–126

УДК 512.553.2

ПРО КЛАСИЧНО-ПЕРВИННИЙ СПЕКТР КЛАСИЧНО-ГІЛЬБЕРТОВИХ МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНИХ МОДУЛІВ

Марта МАЛОЇД-ГЛЄБОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Описано властивості класично-топологічного, Гільбертового та класично-гільбертового модулів. Доведено аналог теореми Де Марко-Орсатті для *lcpm*-модулів, сформульовано наслідки з цієї теореми.

Ключові слова: первинний підмодуль, класично-топологічний модуль, класично-гільбертів модуль, теорема Де Марко-Орсатті.

1. Вступ. Узагальнено деякі класи первинних модулів і підмодулів, і на цій підставі досліджено класично-первинний спектр деяких типів мультиплікаційних модулів. Зазвичай у публікаціях користуються кількома модульними узагальненнями первинного ідеалу. Найчастіше перевагу надають первинним підмодулям, визначеним так: власний підмодуль P модуля M називається *первинним підмодулем*, якщо з того, що $aRm \subseteq P$ для $a \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $m \in P$ або $a \in (N : M)$, [6], [9], [3]. Історично поняття первинного модуля вперше використали у праці Р.Е. Джонсона [13], потім первинні модулі розглядали С. Пейж в [19], В.А. Андрунакієвич в [1], а подальші дослідження таких модулів проводили П.Ф. Сміт, М.Е. Мур, Р.Л. Мак Касланд ([18]) та ін. Останнім часом ці модулі та їхні різноманітні узагальнення привертають увагу математиків багатьох країн світу. Серед математиків, які отримали найліпші результати при вивченні первинних модулів варто відзначити Р. Вісбауера ([22]) та Дж. Даунса ([9]), які зробили детальний аналіз існуючих означень первинного модуля та провели систематичне дослідження властивостей таких модулів. Широко використовують означення первинних модулів, які ґрунтуються на основі теорії ануляторних ідеалів підмодулів. Зокрема, розпочались й інтенсивно продовжуються дослідження класично-первинних підмодулів [7], [2], [4] та строго-первинних модулів. У цьому напрямі можна виділити праці А. Розенберга ([21]) та А. Каучікаса ([14], [16], [15]).

Пропонуємо одне узагальнення поняття класично-топологічного модуля, раніше введеного М. Бехбуді в праці [7], доводимо найпростіші властивості цих модулів.

Фінальна частина замітки присвячена доведенню одного аналога відомої теореми Де Марко-Орсатті [10], сформульованого автором для випадку $lcpm$-модулів.

2. Попередні дані. Нехай R асоціативне кільце з $1 \neq 0$, M – лівий унітарний R-модуль. Той факт що, N є підмодулем M, символічно запишемо у вигляді $N \subseteq M$ і використаємо позначення $(N : M) = \{r \in R | rM \leqslant N\}$. Ненульовий правий (лівий) модуль M називається *первинним модулем*, якщо $Ann(K) = Ann(M)$ для кожного ненульового підмодуля K модуля M, [5]. Власний підмодуль P лівого модуля M називатиметься *первинним*, якщо M/P буде первинним лівим модулем, тобто $Ann(K/P) = Ann(M/P)$ для кожного ненульового підмодуля K/P модуля M/P, [19], [9]. Власний підмодуль P лівого модуля M називатиметься *класично-первинним підмодулем*, якщо з включення $abRm \subseteq P$ для $a, b \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $am \in P$ або $bm \in P$ (див. [6], де в оригіналі для таких модулів використовують термін "слабко-первинний модуль"). Це поняття (для комутативного контексту) всебічно вивчав М. Бехбуді, починаючи з 2006 року, [6]. За М. Бехбуді через $Cl.Spec(M)$ позначимо множину всіх класично-первинних підмодулів лівого модуля M, [5], [7]. В класичній алгебричній геометрії важливу роль відіграє топологія Зариського на спектрі комутативного кільця $Spec(R)$. Тепер вже зрозуміла її роль і у теорії модулів. Конспективно нагадаємо принцип побудови топології Зариського в обох випадках просторів первинних ідеалів кільця та первинних підмодулів лівого модуля. Для кожного ідеалу I кільця R поставимо у відповідність множину $V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$. Тому множини $V(I)$, де I пробігає ідеали кільця R, задовольняють аксіоми замкнених множин деякої топології на $Spec(R)$, яку називають *топологією Зариського.* У випадку лівого модуля M, нехай $Spec(M)$ – множина всіх первинних підмодулів модуля M, яку називаємо *первинним спектром* модуля M. Для кожного підмодуля N лівого модуля M розглянемо множину $V(N) = \{P \in Spec(M) | N \subseteq P\}$. Лівий модуль M називатиметься *топологічним модулем*, якщо його первинний спектр задовольняє такі властивості: множина $\xi(M) := \{V(N) | N \subseteq M\}$ замкнена стосовно скінченних об'єднань (детальнішу інформацію можна почерпнути в [18]). Зауважимо, що $\xi(M)$ утворюватимуть систему замкнених множин в топології Зариського на $Spec(M)$. Зауважимо також, що ця властивість притаманна спектру самого кільця: $Spec(R)$. Багато дослідників, наприклад, Р. Л. Мак Касланд, М. Е. Мур, П. Ф. Сміт ([18]) інтенсивно намагалися систематизувати вивчення спектрів первинних підмодулів. Зокрема, вони довели, що для комутативного випадку, якщо $_RM$ – скінченно-породжений, то модуль M буде топологічним модулем тоді і лише тоді, коли M мультиплікаційний модуль. Нехай M ненульовий лівий R-модуль. Для його підмодуля N означимо *класичний многовид* як множину $\mathbb{V}(N) = \{P \in Cl.Spec(M) | N \subseteq P\}$. Множина всіх таких многовидів має такі властивості:

1) $\mathbb{V}(M) = \emptyset$ і $\mathbb{V}(0) = Cl.Spec(M)$;
2) $\bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{V}(N_i) = \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i \in I} N_i\right)$ для довільної множини індексів I;
3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) \subseteq \mathbb{V}(N \cap L)$ для підмодулів $N, L, N_i \subseteq M$.

Позначимо через $\mathbb{C}(M)$ сім'ю всіх підмножин вигляду $\mathbb{V}(N)$ з $Cl.Spec(M)$. Тоді $\mathbb{C}(M)$ містить порожню множину і весь простір $Cl.Spec(M)$, і $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно довільних перетинів, проте в загальному $\mathbb{C}(M)$ не замкнена стосовно скінченних об'єднань, див. наприклад, [7]. Цим мотивується таке означення: лівий R-модуль M називається *класично-топологічним модулем*, якщо $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підмодулів N і L модуля M існує такий підмодуль K, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(K)$. В такому разі сім'я $\mathbb{C}(M)$ задовольняє аксіоми замкнених підмножин топологічного простору, а отже, визначає топологію на $Cl.Spec(M)$. Нехай M довільний лівий R-модуль. Для кожного його підмодуля N позначимо $\mathbb{U}(N) = Cl.Spec(M) \backslash \mathbb{V}(N)$ і $\mathbb{B}(M) = \{\mathbb{U}(N) : N \subseteq M\}$. Через $\mathbb{T}(M)$ позначимо набір всіх об'єднань скінченних перетинів елементів з $\mathbb{B}(M)$. Тоді $\mathbb{T}(M)$ утворює топологію на $ClSpec(M)$ з підбазою $\mathbb{B}(M)$. У такому випадку $\mathbb{T}(M)$ називається *топологією типу Зариського.*

Зауваження 1. Для M довільного лівого R-модуля, сім'я множин $\{\mathbb{U}(N_1) \cap \ldots \cap \mathbb{U}(N_k) : N_i \subseteq M, 1 \leqslant i \leqslant k$ для деякого $k \in \mathbb{N}\}$ утворює базу топології типу Зариського на M.

Підмодуль C модуля M називається *напівпервинним* (*класично-напівпервинним*), якщо C є перетином первинних (класично-первинних) підмодулів. Первинний (класично-первинний) підмодуль P лівого модуля M називається *екстраординарним*, якщо як тільки N і L є напівпервинними (класично-напівпервинними) підмодулями модуля M, то з умови $N \cap L \subseteq P$ випливає, що $N \subseteq P$ і $L \subseteq P$ ([7]). Лівий R-модуль M називається мультиплікаційним модулем, якщо для кожного підмодуля N модуля M існує такий ідеал B кільця R, що $N = BM$. Більше інформації про мультиплікаційні модулі можна знайти в монографії [20]. Нехай $\mathcal{X}$ − топологічний простір, $\mathcal{A}$ − його підпростір, $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ − тотожне відображення. Якщо існує таке відображення $r : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$, що $r|_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то r називається ретракцією $\mathcal{X}$ на $\mathcal{A}$, а підпростір $\mathcal{A}$ називається ретрактом простору $\mathcal{X}$.

3. Властивості класично-топологічних модулів.

Лема 1. *Для лівого R-модуля M такі твердження еквівалентні:*

1) *M є класично-топологічним модулем;*
2) *кожен класично-первинний підмодуль модуля M є екстраординарним;*
3) *$\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(N \cap L)$ для будь-яких класично-напівпервинних підмодулів N і L модуля M.*

Доведення проводиться аналогічними міркуваннями до тих, які подають Бехбуді і Ноорі в [7]. З цієї леми прямо випливає висновок.

Наслідок 1. *Кожен класично-топологічний модуль є топологічним модулем.*

Доведення. Нехай M довільний класично-топологічний модуль. За попередньою лемою кожен класично-первинний підмодуль M буде екстраординарним. Оскільки кожен класично-первинний підмодуль M є первинним, то первинний підмодуль M теж буде екстраординарним. За [7], M буде топологічним модулем. □

Проте досі не знайдено прикладу топологічного модуля, який би не був класично-топологічним модулем. Автори через брак таких контрприкладів разом з тим фактом, що два поняття топологічного та класично-топологічного модуля є еквівалентними для таких класів кілець як скінченно-породжені та Артінові модулі, висувають гіпотезу і доводять таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай M довільний R-модуль над комутативним кільцем. M буде топологічним модулем у тому і лише в тому випадку, коли він буде класично-топологічним модулем.*

Проте для випадку некомутативного кільця це твердження неправильне.

Твердження 1. *Нехай M лівий класично-топологічний R-модуль. Тоді кожен гомоморфний образ M буде класично-топологічним модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль класично-топологічного модуля M. Нехай $M' = M/N$. Припустимо, що $Cl.Spec(M') \neq \emptyset$. Очевидно, що класично-первинними підмодулями M' будуть підмодулі вигляду P/N, де P – класично-первинний підмодуль модуля M і $N \subseteq P$. Отже, довільний класичний напівпервинний підмодуль модуля M' набуде вигляду C/N, де C – класично-напівпервинний підмодуль, що містить N. Використовуючи лему 1, отримаємо потрібний результат. □

Випадок, коли $Cl.Spec(M') \neq 0$ тривіальний.

4. Гільбертові та класично-гільбертові модулі: означення та деякі властивості. Не обов'язково комутативне кільце R називається *кільцем Гільберта*, якщо кожен первинний ідеал кільця буде перетином максимальних ідеалів. Узагальнивши на випадок модулів, отримаємо те, що модуль називається *гільбертовим*, якщо кожен первинний підмодуль буде перетином максимальних підмодулів. Модуль M називається *класично-гільбертовим*, якщо кожен класично-первинний підмодуль буде перетином максимальних підмодулів.

Загалом кожен первинний підмодуль модуля M буде класично-первинним, а у випадку, коли $M = R$ є комутативним кільцем, класично-первинні підмодулі, первинні підмодулі і первинні ідеали збігаються (рівні) ([2]).

Зауваження 2. Включення в іншу сторону неправильне, тобто існує підмодуль N модуля M, що є класично-первинним підмодулем, але не є первинним підмодулем. Якщо R – область і P – ненульовий первинний ідеал, то $P \oplus (0)$, $(0) \oplus P$ і $P(1,1)$ є класичними первинними підмодулями вільного модуля $M = R \oplus R$, проте всі вони не є первинними підмодулями (інформація міститься в [2]).

Твердження 2. *Кожен класично-гільбертів модуль є Гільбертовим модулем, але обернене твердження хибне.*

Доведення. Нехай M класично-гільбертів модуль. За лемою 1, кожен класично-первинний підмодуль модуля M – екстраординарний. Оскільки кожен класично-первинний підмодуль модуля M є первинним підмодулем, то кожен первинний підмодуль є екстраординарним. Тоді за ([18], Lemma 2.1), M є Гільбертовим модулем. □

Теорема 1. *R-модуль M буде класично-гільбертовим модулем тоді і лише тоді коли кожен класично-первинний підмодуль M, що не є максимальним, буде перетином власних більших класично-первинних підмодулів.*

Доведення проводиться аналогічно до міркувань, які подано в [2] для комутативного випадку.

Зауваження 3. Якщо M – довільний R-модуль і $K \subseteq M$, то легко довести, що власний підмодуль P з M, де $K \subseteq P$ – класично-первинний підмодуль (відповідно максимальний) підмодуля M, якщо P/K є класично-первинним (максимальним) підмодулем M/K. Це зауваження можна використати як означення класично-первинного підмодуля.

Твердження 3. *Кожен гомоморфний образ класично-гільбертового модуля буде класично-гільбертовим модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль класично-гільбертового модуля M. Позначимо через M' фактор-модуль $M' = M/N$. Припустимо, що $Cl.Spec(M') \neq 0$. Очевидно, класично-первинні підмодулі модуля M' набувають вигляду P/N, де P – класично-первинний підмодуль модуля M і $N \subseteq M$. Отже, кожен класичний напівпервинний підмодуль модуля M' набуде вигляду C/N, де C – класично-напівпервинний підмодуль, що містить N. Для завершення доведення достатньо використати Лему 1. □

З твердження випливає такий висновок.

Наслідок 3. *Нехай R-кільце, M – довільний R-модуль. Такі властивості еквівалентні:*

1) *M – класично-гільбертів R-модуль;*
2) *M/N – класично-гільбертів R-модуль для кожного підмодуля N модуля M.*

Зауваження 4. Мінімальні класично-первинні підмодулі визначають природно. Очевидно, якщо $\{P_i\}_{i \in I}$ – довільний ланцюг класично-первинних підмодулів R-модуля M, то $\cap_{i \in I} P_i$ очевидно буде класично-первинним підмодулем. Тому за лемою Цорна кожен класично-первинний підмодуль міститиме мінімальний класично-первинний підмодуль.

Нехай R не обов'язково комутативне кільце. Лівий модуль M над кільцем R називається *lcpm-модулем*, якщо кожен класично-первинний підмодуль P міститься в єдиному максимальному підмодулі модуля M. Аналогічно можна подати означення *rcpm-модуля.* Тепер можна довести аналог теореми Де Марко-Орсатті для випадку класично-первинних підмодулів.

Теорема 2. *Нехай M мультиплікаційний R-модуль, і $Max(M)$ ретракт простору $Cl.Spec(M)$. Тоді M є lcpm-модулем.*

Доведення. Припустимо, що $\varphi : Cl.Spec(M) \to Max(M)$ неперервна ретракція і $\varphi(K) = H$ для деякого класично-первинного підмодуля P і максимального підмодуля H модуля M. Тоді замкнена множина $\varphi^{-1}(H)$ буде містити $\{\bar{P}\}$, тобто довільний максимальний підмодуль H', що міститиме P. Оскільки відображення φ буде неперервною ретракцією, тому $H = \varphi(H') = H'$. Отже, $H' = H$ буде єдиним максимальним підмодулем, який міститиме P. □

Наслідок 4. *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lcpm-модуля M містить єдиний мінімальний класично-первинний підмодуль.*

Наслідок 5. *Простір $Min(M)$ мінімальних класично-первинних підмодулів буде ретрактом простору $Cl.Spec(M)$.*

Наслідок 6. *Нехай R – кільце і $\{M_i\}_{i\in I}$ набір R-модулів. Якщо $\bigoplus_{i\in I} M_i$ – класично-гільбертовий модуль, то кожен $M_i (i \in I)$ буде класично-гільбертовим модулем.*

Твердження 4. *Нехай R – область, M – класично-гільбертів R-модуль. Якщо N є таким довільним підмодулем M, що M/N є модулем без скруту, то N буде класично-гільбертовим R-модулем.*

Доведення. Припустимо, що R є областю і M є класично-гільбертовим R-модулем. Припустимо, що $N \subset M$ і M/N є модулем без скруту. Більше інформації про модулі без скруту можна почерпнути з [11], [12], [17]. Також припустимо, що $P \subset N$ – класично-первинні підмодулі. Доведемо, що P є перетином максимальних підмодулів з N. Спершу доведемо, що P – класично-первинний підмодуль M. Припустимо, що $rsRm \subseteq P$ для деякого $m \in M$ і $r, s \in R$. Якщо $m \in M$, оскільки P класичнопервинний підмодуль N, ми доведемо, що або $rm \in P$, або $sm \in P$. Тепер припустимо, що $m \in M$. Нагадаємо, що $rsRm \subseteq P \subseteq N$. Оскільки M/N є модулем без скруту і $m \notin N$, випливає, що $r = 0$ чи $s = 0$. Також у цьому випадку або $rm \in P$, або $sm \in P$. Отже, P – класично-первинний підмодуль M.

Оскільки P – класично-первинний підмодуль M і $P = \cap_{i\in I} M_i$, де кожен M_i – максимальний підмодуль. M. Для кожного i нехай $P_i := M_i \cap N$. Оскільки $P \subseteq N$ легко побачити, що $P = \cap_{i\in I} P_i$. Окрім того, можемо припустити без втрати загальності, що кожен P_i повністю міститься в N. Припустимо, що $i \in I$ є довільним. Щоб завершити доведення, достатньо довести, що P_i є максимальним підмодулем N. Тому припустимо, що $m \in N \backslash P_i$. Доведемо, що $(P_i, m) \in N$. Отже, $m_i \notin M_i$. Оскільки M_i – максимальний підмодуль M, то отримаємо $(M_i, m) = M$. Нехай $x \in N$ – довільний елемент. Доведемо, що $x \in (P_i, m)$. Оскільки $M = (M_i, m)$, $x = m_i + rm$ для деяких елементів $m_i \in M$, $r \in R$. Позаяк $x \in N$ і $m \in N$, то робимо висновок, що $m_i \in N$. Тому $m_i \in P_i$, з цього випливає, що $x \in (P_i, m)$. Ми довели, що $(P_i, m) \in N$, а це доводить, що P_i є максимальними підмодулями N. □

Наслідок 7. *Нехай R – область і M класично-гільбертів R-модуль. Тоді істинні такі твердження:*

1) *якщо $T(M)$ – періодичний модуль, то $T(M)$ також класично-гільбертів R-модуль;*
2) *якщо M – модуль без скруту і N – чистий підмодуль модуля M, то N є класично-гільбертовим R-модулем.*

Доведення. 1) Випливає з попереднього твердження.

2) Для доведення припустимо, що N є чистим підмодулем класично-гільбертового модуля без скруту M. За попереднім твердженням достатньо довести таке: якщо $m \in M \backslash N$ і $r \in R$, де $rRm \in N$, то $r = 0$. Тому припустимо, що $m \in M \backslash N$ і $rRm \in N$. Оскільки N є чистим, то $rM \cap N = rN$. Отже, $rRm \in rN$, тому існує деякий елемент $n \in N$, що $rRm = rRn$. Отже, $rR(m - n) = 0$. Оскільки $m \notin N$, то бачимо, що $m - n \neq 0$. Позаяк M є модулем без скруту, то робимо висновок, що $r = 0$. □

Список використаної літератури

1. *Andrunakievich V.A.* Prime modules and Baer radical / *V.A. Andrunakievich* // Siberian Mathematical Journal – 1961. – Vol. 2. – №6. – P. 801-806.
2. *Arabi-Kakavand M., Behboodi M.* Modules Whose Classical Prime Submodules Are Intersections of Maximal Submodules / *M. Arabi-Kakavand, M. Behboodi* // Glasgow Math. J. – 2006. – Vol. 48. – P. 343-346.
3. *Azizi A.* Weakly prime submodules and prime submodules / *A. Azizi* // J. Algebra – 2007. – Vol. 307. – P. 454-460.
4. *Behboodi M.R.* Classical prime submodules / *M.R. Behboodi* // Ph. D Thesis, Chamran University Ahvaz Iran, 2004.
5. *Behboodi M.R., Haddadi M.R.* Classical Zarisky topology of modules and spectral spaces I / *M.R. Behboodi, M.R. Haddadi* // International Electronic Journal of Algebra – 2008. – Vol. 4. – P. 104-130.
6. *Behboodi M.R., Koohy H.* Weakly prime modules / *M.R. Behboodi, H. Koohy* // Vietnam J. Math. – 2004. – Vol. 32, №2. – P. 185-195.
7. *Behboodi M.R., Noori M.J.* Zariski-like topology on the classical prime spectrum of a module / *M.R. Behboodi, M.J. Noori* // Bulletian of the Iranian Mathematical society. – 2009. – Vol. 35, №1. – P. 253-269.
8. *Behboodi M.R., Shojaee S.* On divins of classical prime submodules and dimension theory of modules / *M.R. Behboodi, S. Shojaee* // Bulletian of the Iranian Mathematical society. – 2010. – Vol. 36, №1. – P. 149-166.
9. *Dauns J.* Prime modules / *J. Dauns* // J. Reine Angew. Math. – 1978. – Vol. 298. – P. 156-181.
10. *De Marco G., Orsatti A.* Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal / *G. De Marco, A. Orsatti* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 459-466.
11. *Golan J.S.* Topologies on the Torsion-Theoretic Spectrum of a Noncommutatie Ring / *J.S. Golan* // Pacific Journal of Math. – 1974. – Vol. 51, №. 2. – P. 439-450.
12. *Golan J.S.* Torsion theories / *J.S. Golan.* – Harlow: Longman Scientific & Technical, 1986.
13. *Johnson R.E.* Representations of prime rings / *R.E. Johnson* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 74, №. 2. – P. 351-357.
14. *Kaučikas A.* On the left strongly prime modules and ideals / *A. Kaučikas* // Liet.Mat. Rink. Special Issue. – 2001. – Vol. 41. – P. 84–87.
15. *Kaučikas A.* On the left strongly prime modules and their radicals / *A. Kaučikas* // Lietuvos matematikos rinkinys. – 2010. – Vol. 51. – P. 31–34.
16. *Kaučikas A., Wisbauer R.* On strongly prime rings and ideals / *A. Kaučikas, R. Wisbauer* // Comm. Algebra. – 2000. – Vol. 28, №11. – P. 5461-5473.
17. *Maloid-Glebova M.O.* About torsion-theoretic spectrum of left-invariant ring and weakly-multiplication and pure-multiplicayion modules / *M.O. Maloid-Glebova* // Applied Problems of Mech. and Math. – 2011. – №. 9. – P. 87-94.
18. *McCasland R.L.* On the spectrum of the module over a commutative ring / *R.L. McCasland, M.E. Moore, P.F. Smith* // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, №1. – P. 79-103.
19. *Page S.* Properties of quotient rings / *S. Page* // Can. J. Math. – 1972. – Vol. 24, №6. – P. 1122-1128.
20. *Tuganbaev A.A.* Multiplication Modules / *A. A. Tuganbaev* // J. of Math. Sciences. – 2004. – Vol. 123, №2. – P. 3839-3905.
21. *Rosenberg A.* Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras / *A. Rosenberg.* – Kluwer Academic Publishers, 1995.

22. *Wisbauer R.* On prime modules and rings / *R. Wisbauer* // Commun. Algebra. – 1983. – Vol. 11. – P. 2249-2265.

Стаття: надійшла до редакції 30.10.2013
прийнята до друку 28.02.2014

ON CLASSICAL-PRIME SPECTRUM OF CLASSICAL-HILBERT MULTIPLICATION MODULES

Marta MALOID-GLEBOVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Properties of classical-topological, Hilbert and classical-Hilbert modules are described. The analogue of De Marco-Orsatti's theorem for *lcpm*-modules is proven and some consequences of this theorem are given.

Key words: prime module, classical-topological module, classical-Hilbert module, theorem of De Marco-Orsatti.

О КЛАССИЧЕСКИ-ПЕРВИЧНОМ СПЕКТРЕ КЛАССИЧЕСКИ-ГИЛЬБЕРТОВЫХ МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫХ МОДУЛЕЙ

Марта МАЛОИД-ГЛЕБОВА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Описано свойства классически-топологического, гильбертового и классически-гильбертового модулей. Доказано аналог теоремы Де Марко-Орсатти для *lcpm*-модулей и сформулированы следствия из этой теоремы.

Ключевые слова: первичный модуль, классически топологический модуль, классически-гильбертов модуль, теорема Де Марко-Орсатти.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 127–133
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 127–133

УДК 519.21 + 517.37

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Марта ПЛАЦИДЕМ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: marta0691@rambler.ru

Для аналітичних в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристичних функцій φ ймовірнісних законів F знайдено зв'язок між зростанням $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0, R)$ і спаданням $W_F(x) = 1 - F(x) + +F(-x), x \geqslant 0$. Отримані результати застосовано для знаходження умов на $W_F(x)$, за яких правильні асимптотичні рівності $\ln M(r,\varphi) = (1+o(1))Tr^\rho$ при $r \to \infty$, де $T > 0$, $\rho > 1$ для цілих характеристичних функцій і $M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)^\rho}$ при $r \uparrow R$, де $T > 0$, $\rho > 0$ для аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ характеристичних функцій.

Ключові слова: аналітична функція, характеристична функція, ймовірнісний закон, узагальнений порядок.

1. Вступ. Нехай φ – аналітична в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $R > 0$, характеристична функція ймовірнісного закону F, $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0, R)$, а $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x), x \geqslant 0$. Зв'язок між зростанням $M(r,\varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ досліджували багато математиків. Для цілих характеристичних функцій цей зв'язок у термінах порядку і типу отримав Б. Рамачандран (див. [1, с. 54]), а для аналітичних в одиничному крузі такий самий зв'язок знайшов В.М. Сороківський [2]. У термінах узагальнених порядків М.М. Шеремети залежність зростання $M(r,\varphi)$ від спадання $W_F(x)$ вивчали Н.І. Яковлєва [3-4] для цілих характеристичних функцій і В.М. Сороківський [2] для аналітичних в одиничному крузі характеристичних функцій. Найзагальніші результати для цілих і для аналітичних у скінченному крузі функцій наведено в [5].

Природним стало питання, за яких умов на $W_F(x)$ для цілих характеристичних функцій $\ln M(r,\varphi) = (1+o(1))Tr^\rho$ при $r \to \infty$, де $T > 0$ і $\rho > 1$, а для аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ характеристичних функцій правильна асимптотична рівність $M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)^\rho}$ при $r \uparrow R$, де $T > 0$ і $\rho > 0$.

Відповідь на це питання буде отримано з доведеного нижче загального результату.

Через $\Omega(0,R)$ позначимо клас додатних необмежених на $[r_0,R)$ для деякого $r_0\in(0\ ,R)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $[r_0,R)$, і нехай ϕ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(r)=r-\dfrac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Будемо досліджувати умови на функції W_F і Φ, за яких

$$\ln M(r,\varphi)=(1+o(1))\Phi(r),\quad r\uparrow R. \tag{1}$$

Для цього приймемо $\mu(r,\varphi)=sup\,\{W_F(x)e^{rx}:x\geqslant 0\}$ і знайдемо спочатку умови на Φ, за яких співвідношення (1) рівносильне співвідношенню

$$\ln\mu(r,\varphi)=(1+o(1))\Phi(r),\quad r\uparrow R. \tag{2}$$

Оскільки [6, с. 55] $\mu(r,\varphi)\leqslant 2M(r,\varphi)$ при $r\to\infty$, то $\ln\mu(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\ln M(r,\varphi)$, і нам залишилось отримати оцінку $\ln M(r,\varphi)$ через $\ln\mu(r,\varphi)$ зверху. Але [6, с. 55] $M(r,\varphi)\leqslant rI(r,\varphi)+const$, де $I(r,\varphi)=\int_0^\infty W_F(x)\exp\{rx\}dx$. Тому, якщо $\varphi\not\equiv const$ – ціла характеристична функція, то $\dfrac{\ln M(r,\varphi)}{r}\to\sigma\in(0,+\infty]$ при $r\to+\infty$, і отже, $\ln M(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\ln I(r,\varphi)$, при $r\to+\infty$, якщо φ аналітична в крузі $\mathbb{D}_R=\{z:|z|<R\}$, $R<+\infty$, то $M(r,\varphi)\leqslant RI(r,\varphi)+const$ і знову

$$\ln M(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\ln I(r,\varphi)\quad \text{при}\quad r\uparrow R.$$

Отже, задача звелась до оцінки $I(r,\varphi)$ через $\mu(r,\varphi)$ зверху. Матимемо

$$I(r,\varphi)=\int_0^\infty W_F(x)\exp\{(r+\eta(r))x\}\exp\{-\eta(r)x\}\,dx\leqslant\frac{\mu(r+\eta(r),\varphi)}{\eta(r)}$$

для будь-якого $\eta(r)\in(0,R-r)$, тобто $r+\eta(r)<R$. Звідси випливає, що

$$\ln I(r,\varphi)\leqslant\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)+\ln\frac{1}{\eta(r)}. \tag{3}$$

Тому з (2) випливає, що

$$\ln I(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\Phi(r+\eta(r))+\ln\frac{1}{\eta(r)},\quad r\uparrow R, \tag{4}$$

і отже, треба вибрати $\eta(r)$ так, щоб $\Phi(r+\eta(r))=(1+o(1))\Phi(r)$ і $\ln\eta(r)=o(\Phi(r))$ при $r\uparrow R$. Найпростішим є вибір $\eta(r)=\dfrac{1}{\Phi(r)}$ з вимогою $\Phi\left(r+\dfrac{1}{\Phi(r)}\right)=(1+$ $+o(1))\Phi(r)$ при $r\uparrow R$. Якщо $R=+\infty$, то ця вимога не є обтяжливою, оскільки її задовольняють степенева та показникова функції, а також функція $\Phi(r)=\exp_k r$, де $\exp_1 r=e^r$, $\exp_k r=\exp\{\exp_{k-1} r\}$ $(k\geqslant 2)$. Ситуація дещо інша, якщо $R\in(0,+\infty)$. Розглянемо, наприклад, $\Phi(r)=\dfrac{1+\gamma}{R-r},\gamma>0$. Тоді $r+\dfrac{1}{\Phi(r)}=r+\dfrac{R-r}{1+\gamma}<R$, але $\Phi\left(r+\dfrac{1}{\Phi(r)}\right)=\dfrac{(1+\gamma)^2}{\gamma(R-r)}\neq(1+o(1))\Phi(r)$ при $r\uparrow R$. Щоб включити цей випадок до розгляду, виберемо $\eta(r)=\dfrac{1}{\Phi'(r)}$. Тоді, якщо $\Phi'(r)\geqslant\dfrac{1+\gamma}{R-r}$ для $r\geqslant r_0$, то

$r + \eta(r) < R$ (зрозуміло, що ця умова є зайвою, якщо $R = +\infty$). Припускаючи ще, що $\Phi\left(r + \dfrac{1}{\Phi'(r)}\right) = (1 + o(1))\Phi(r)$ і $\ln \Phi'(r) = o(\Phi(r))$ при $r \uparrow R \in (0, +\infty]$, з (2) і (4), отримуємо оцінку

$$\ln I(r, \varphi) \leqslant (1 + o(1))\Phi(r), \quad r \uparrow R. \tag{5}$$

З проведених міркувань отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $0 < R \leqslant +\infty$, а функція $\Phi \in \Omega(0, R)$ така, що $\Phi'(r) \geqslant \dfrac{1+\gamma}{R-r}$ з $\gamma > 0$ для всіх $r \in [r_0, R)$, $\ln \Phi'(r) = o(\Phi(r))$ і $\Phi\left(r + \frac{1}{\Phi'(r)}\right) = (1 + o(1))\Phi(r)$ при $r \uparrow R$. Тоді для кожної аналітичної в $\mathbb{D}_R$ характеристичної функції φ співвідношення (1) і (2) рівносильні.*

Зауваження 1. У випадку, коли $R = +\infty$, тобто φ – ціла характеристична функція, умови теореми задовольняють, наприклад, функції $\Phi(r) = \sigma r^\rho (r \geqslant r_0)$ з $\rho > 1$ і $\sigma > 0$, $\Phi(\sigma) = \sigma e^{\rho r} (r \geqslant r_0)$ з $\sigma > 0$ і $\rho > 0$, а також функція $\Phi(r) = \exp_k r$ з $k \geqslant 2$.

Зауваження 2. Якщо припустити, що $\Phi(r) = B(\frac{1}{R-r})$, то можна довести, що Φ задовольняє умови твердження 1, якщо, наприклад, $B(x) = x^\rho$ з $p > 0$ $B(x) = \exp_k x$ з $k \geqslant 1$, $B(x) = \sigma \ln^p x$ з $\sigma > 0$ і $p > 1$. В останньому прикладі $p > 1$ замінити на $p = 1$ не можна.

Для знаходження умов на W_F, за яких правильна асимптотична рівність (2), можна використати результати з [7-8]. Для цього через $\Omega(-\infty, R)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, R)$ функцій Φ_* таких, що похідна Φ'_* неперервна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, R)$, і нехай функції Ψ_* і ϕ_* визначені як вище. Припустимо, що P – будь-яка функція, задана на $[0, +\infty)$ і відмінна від $+\infty$ (вона може набувати значень $-\infty$, але $P \not\equiv -\infty$). Тоді функція $Q(\sigma) = \sup\{P(t) + \sigma t : t > 0\}$ називається спряженою з P за Юнгом, а для неї з Теореми 2.5 з [8] випливає така лема.

Лема 1. *Нехай $\Phi_* \in \Omega(-\infty, R), 0 < R \leqslant +\infty$. Для того, щоб $Q(\sigma) = (1 + o(1))\Phi_*(\sigma)$ при $\sigma \uparrow R$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $x_0 = x_0(\varepsilon)$ таке, щоб $P(x) \leqslant -x\Psi_*(\phi_*(\frac{x}{1+\varepsilon}))$ для всіх $x \geqslant x_0$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) додатних чисел така, що $P(x_k) \geqslant -x_k\Psi_*(\phi_*(\frac{x_k}{1-\varepsilon}))$ для всіх $k \geqslant 1$ і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi_*)}{G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi_*)} = 1, \tag{6}$$

де

$$G_1(x_k, x_{k+1}, \Phi_*) = \frac{x_k x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\Phi_*(\phi_*(t))}{t^2} dt,$$

$$G_2(x_k, x_{k+1}, \Phi_*) = \Phi_*(\frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_*(t) dt).$$

Оскільки $\ln\mu(r,\varphi) = \sup\{\ln W_F(x) + rx : x \geqslant 0\}$, то для $P(x) = \ln W_F(x)$ матимемо $\ln\mu(r,\varphi) = Q(r)$ для $r \geqslant 0$ і, вибираючи $\Phi_* \in \Omega(-\infty, R)$ так, щоб $\Phi_*(r) = \Phi(r)$ для $r \geqslant r_0$, за лемою 1 приходимо до такого твердження.

Твердження 2. *Нехай $0 < R \leqslant +\infty$ і $\Phi \in \Omega(0,R)$. Для того, щоб асимптотична рівність (2) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $x_0 = x_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln W_F(x) \leqslant -x\Psi(\phi(\frac{x}{1+\varepsilon}))$ для всіх $x \geqslant x_0$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) додатних чисел така, що $\ln W_F(x_k) \geqslant -x_k\Psi(\phi(\frac{x_k}{1-\varepsilon}))$ для всіх $k \geqslant 1$ і виконувалась рівність (6) з $\Phi_* = \Phi$.

Об'єднуючи твердження 1 і 2, отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $0 < R \leqslant +\infty$, функція $\Phi \in \Omega(0,R)$ задовольняє умови твердження 1, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірнісного закону F. Для того, щоб асимптотична рівність (1) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ виконувались умови 1) і 2) твердження 2.*

Наведемо два наслідки, які стосуються цілих та аналітичних в $\mathbb{D}_R$ функцій скінченного порядку.

Наслідок 1. *Нехай φ – ціла характеристична функція ймовірнісного закону F порядку $\rho > 1$. Для того, щоб $\ln M(r,\varphi) = (1+o(1))Tr^\rho$ при $r \to +\infty$, де $T \in (0,+\infty)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $x_0 = x_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln W_F(x) \leqslant -(1-\varepsilon)T(\rho-1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho-1}}$ для всіх $x \geqslant x_0(\varepsilon)$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) така, що

$$\ln W_F(x_k) \geqslant -(1+\varepsilon)T(\rho-1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho-1}} \quad і \quad \frac{x_{k+1}}{x_k} \to 1 \quad при \quad k \to \infty.$$

Доведення. Легко перевірити, що функція $\Phi(r) = Tr^\rho (r \geqslant r_0)$ задовольняє умови твердження 1. Для цієї функції $x\Psi(\phi(x)) = T(\rho-1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho-1}}$. Тому з огляду на довільність ε з наведених в умовах 1) і 2) нерівностях з твердження 2 для $\ln W_F(x)$ випливають відповідні нерівності в умовах 1) і 2) наслідку 1. Нарешті, як доведено в [9] рівність (6) у випадку, коли функція $\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}$ не зростає, рівносильна рівності $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = 1$. □

Наслідок 2. *Нехай φ – аналітична в $\mathbb{D}_R, 0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F порядку $\rho > 0$. Для того, щоб $\ln M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)\rho}$ при $r \uparrow R$, де $T > 0$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $x_0 = x_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln(W_F(x)e^{Rx}) \leqslant (T+\varepsilon)(\rho+1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho+1}}$ для всіх $x \geqslant x_0$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) додатних чисел така, що $\ln(W_F(x_k)e^{Rx_k}) \geqslant (T-\varepsilon)(\rho+1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho+1}}$ і $\frac{x_{k+1}}{x_k} \to 1$ при $k \to \infty$.

Доведення. Як видно зі зауваження 2, функція $\Phi(r) = \frac{T}{(R-r)^\rho}$ задовольняє умови твердження 1. Для цієї функції $\phi(x) = R - (\frac{T\rho}{x})^{\frac{1}{\rho+1}}$, $\Psi(r) = r - \frac{R-r}{\rho}$, $x\Psi(\phi(x)) = Rx - T(\rho+1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho+1}}$. Тому з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ з наведених в умовах 1) і

2) нерівностях для $\ln W_F$ у твердженні 2 випливають відповідні нерівності в умовах 1) і 2) наслідку 2. Залишилось довести, що умова (6) у випадку, коли $\Phi(r) = \frac{T}{(R-r)^\rho}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\frac{x_{k+1}}{x_k} = 1, \quad k \to \infty$, тобто, якщо приймемо $x_{k+1} = (1+\theta_k)x_k$, то $\theta_k \to 0, k \to \infty$.

Неважко перевірити, що

$$G_1(x_k, x_k(1+\theta_k), \Phi) = (\rho+1)T^{\frac{1}{\rho+1}}\rho^{-\frac{\rho}{\rho+1}}x_k^{\frac{\rho}{\rho+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1 - \frac{1}{(1+\theta_k)^{\frac{1}{\rho+1}}}\right)$$

і

$$G_2(x_k, x_k(1+\theta_k), \Phi) = (\rho+1)^{-\rho}T^{\frac{1}{\rho+1}}\rho^{\frac{\rho^2}{\rho+1}}x_k^{\frac{\rho}{\rho+1}}\left(\frac{(1+\theta_k)^{\frac{\rho}{\rho+1}-1}}{\theta_k}\right)^{-\rho},$$

тобто

$$\frac{G_1(x_k, x_k(1+\theta_k), \Phi)}{G_2(x_k, x_k(1+\theta_k), \Phi)} = \frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1 - \frac{1}{(1+\theta_k)^{\frac{1}{\rho+1}}}\right)\left(\frac{(1+\theta_k)^{\frac{\rho}{\rho+1}}-1}{\theta_k}\right)^\rho. \tag{7}$$

Якщо тепер $\theta_k \to 0$, то

$$\frac{G_1(x_k, x_k(1+\theta_k), \Phi)}{G_2(x_k, x_k(1+\theta_k), \Phi)} = \left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^{\rho+1}\frac{1+\theta_k}{\theta+k}\left(1 - \left(1 - \frac{\theta_k}{\rho+1} + O(\theta_k^2)\right)\right) \times$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{\rho}{\rho+1}\theta_k + O(\theta_k^2)}{\theta_k}\right)^\rho = \frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}(1+o(1))\frac{1}{\rho+1}\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^\rho = 1+o(1), \quad k \to \infty,$$

тобто виконується (6).

Навпаки, нехай виконується (6). Припустимо спочатку, що $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\theta_k = +\infty$. Тоді існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty$ $(j \to \infty)$, а для цієї послідовності з (7) отримаємо

$$\frac{G_1(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi)}{G_2(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi)} = \frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}\theta_{k_j}^{-\frac{\rho}{\rho+1}} \to 0 \quad (j \to \infty),$$

що неможливо. Якщо ж $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то для відповідної послідовності θ_{k_j} матимемо

$$\frac{G_1(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi)}{G_2(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi)} = \frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1 - \frac{1}{(1+\theta)^{\frac{1}{\rho+1}}}\right)\left(\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho}{\rho+1}}-1}{\theta}\right)^\rho(1+o(1)),$$

$j \to \infty$ і з (6) випливає, що

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho}{\rho+1}}}{\theta^{\rho+1}}((1+\theta)^{\frac{1}{\rho+1}}-1)((1+\theta)^{\frac{1}{\rho+1}}-1)^\rho = \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}}.$$

В [8, с. 100] доведено, що єдиним невід'ємним розв'язком цього рівняння є $\theta = 0$. Тому $\theta_k \to 0 (k \to \infty)$ і наслідок 2 повністю доведено. □

Список використаної літератури

1. *Ramacshandran B.* On the order and the type of entire characteristic functions / *B. Ramacshandran* // Ann. Math. – 1962 – Vol. 33, №4. – P. 1238-1255.
2. *Сорокивский В.М.* О росте характеристических функций вероятностных законов / *В.М.Сорокивский* // Изв. вузов. Матем. – 1979. – №9. – С. 48-52.
3. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Теория функций и их приложения. – 1971. – Вып. 15. – С. 43-49.
4. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Вопросы математической физики и функц. анализа. – Киев: Наук. думка, 1976.
5. *Кінаш О.М.* Зростання характеристичних функцій ймовірносних законів / *О.М. Кінаш, О.М. Пароля, М.М. Шеремета* // Доп. НАН України. – 2012. – №8. – С. 13-17.
6. *Линник Ю.В.* Разложение случайных величин и векторов / *Ю.В. Линник, Н.В. Островський.* – М.: Наука, 1972.
7. *Шеремета М.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / *М.М. Шеремета, О.М. Сумик* // Матем. студії. – 1999. – Т. 11, №1. – С. 41-47.
8. *Сумик О.М.* Асимптотичне поводження спряжених за Юнгом функцій та застосування до рядів Діріхле: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / *О.М. Сумик.* – Львів, 2002. – 150 с.
9. *Заболоцький М.В.* Узагальнення теореми Ліндельофа / *М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1177-1192.

Стаття: надійшла до редакції 24.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

ON REGULAR GROWTH OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS

Marta Platsydem

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: marta0691@rambler.ru

For analytic in $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, characteristic functions φ of probability laws F a relations between the growth of $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0, R)$ and decrease of $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, $x \geqslant 0$ are established. The results are used to find the conditions on $W_F(x)$ for which the correct asymptotic equalities $\ln M(r, \varphi) = (1 + o(1))Tr^\rho$ at $r \to \infty$, where $T > 0$, $\rho > 1$ for entire characteristic functions and $M(r, \varphi) = \dfrac{(1 + o(1))T}{(R - r)^\rho}$ at $r \uparrow R$, where $T > 0$, $\rho > 0$ for analytic in the circle $\{z : |z| < R\}$ haracteristic functions.

Key words: analytic function, characteristic function, probability law, generalized order.

О РЕГУЛЯРНОМ РОСТЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Марта ПЛАЦИДЕМ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: marta0691@rambler.ru

Для аналитических в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристических функций φ вероятностных законов F найдена связь между ростом $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0,R)$ и убыванием $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x), x \geqslant 0$. Полученные результаты применены для нахождения условий на $W_F(x)$, при каких верны асимптотические равенства $\ln M(r,\varphi) = (1+o(1))Tr^{\rho}$ при $r \to \infty$, где $T > 0$, $\rho > 1$ для целых характеристических функций и $M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)^{\rho}}$ при $r \uparrow R$, где $T > 0$, $\rho > 0$ для аналитических в круге $\{z : |z| < R\}$ характеристических функций.

Ключевые слова: аналитическая функция , характеристическая функция, вероятностный закон, обобщённый порядок.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 134–147
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 134–147

УДК 517.53

ЗРОСТАННЯ І РОЗПОДІЛ НУЛІВ ТА ПОЛЮСІВ МЕРОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ В ОКОЛІ ІСТОТНО ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ

Наталія СОКУЛЬСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: natalya.sokulska@gmail.com

Введено характеристику Неванлінни $T_0(r, F)$ мероморфної в зовнішності одиничного круга функції та доведено її основні властивості. Отримано критерій скінченності λ-типу голоморфних в зовнішності одиничного круга функцій F у термінах коефіцієнтів Фур'є $\log|F|$. Знайдено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для функцій, які мають мероморфне продовження в $\mathbb{C}$. Описано послідовності нулів голоморфних і полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

Ключові слова: голоморфна функція, мероморфна функція, функція скінченного λ-типу, послідовність зі скінченною λ-щільністю, λ-допустима послідовність.

1. Вступ. У класичній теорії Неванлінни вивчають розподіл значень мероморфних функцій у всій площині. Ми будуємо аналог цієї теорії для функцій мероморфних лише в деякому поколеному околі фіксованої точки. Без втрати загальності вважатимемо цю точку ∞, а її околом зовнішність деякого круга, зокрема, одиничного.

Для функцій мероморфних зовні одиничного круга розв'язано такі задачі:

i) доведено аналог формули Єнсена;
ii) введено характеристику Неванлінни $T_0(r, F)$;
iii) проведено порівняння $T_0(r, F)$ і $T(r, F)$ для функцій, які мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$;
iv) описано клас мероморфних при $|z| \geqslant 1$ функцій F таких, що їхня характеристика Неванлінни $T_0(r, F) = O(\log r)$;
v) розглянуто класи функцій з довільним обмеженням на зростання їхніх неванліннових характеристик $T_0(r, F)$, що задаються додатними, неспадними, неперервними, необмеженими при $r \geqslant 1$ функціями λ;

vi) описано послідовності нулів голоморфних і полюсів мероморфних в зовнішності одиничного круга функцій.

2. Теорема Єнсена для мероморфних в зовнішності одиничного круга функцій. Нехай відмінна від тотожного нуля функція F – мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z: \ |z| \ \geqslant 1\}$. Нехай $n_0(t,F)$ – лічильна функція її полюсів у кільці $\{z: \ 1< \ |z| \ \leqslant t\}$. Позначимо

$$N_0(r,F)=\int\limits_1^r \frac{n_0(t,F)}{t}dt, \quad r\geqslant 1 \tag{1}$$

і

$$c_0(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{it})|dt, \quad r\geqslant 1. \tag{2}$$

Наступна лема є аналогом теореми Єнсена.

Лема 1. *Нехай функція F мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z:|z|\geqslant 1\}$. Тоді*

$$N_0(r,\frac{1}{F})-N_0(r,F)= \tag{3}$$

$$=c_0(r,F)-\frac{\log r}{\log r_0}c_0(r_0,F)+(\frac{\log r}{\log r_0}-1)c_0(1,F), \quad r\geqslant r_0>1.$$

Доведення. В [5] ми вивчали функції f мероморфні в замиканні півсмуги

$$S=\{s=\sigma+it: \ \sigma>0, \ 0\leqslant t<2\pi\}$$

такі, що $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma\geqslant 0$. Відобразивши $\overline{S}$ у зовнішність одиничного круга $\{z:|z|\geqslant 1\}$ за допомогою відображення $z=e^s$, отримаємо такі співвідношення між мероморфною в $\{z:|z|\geqslant 1\}$ функцією F та мероморфною в $\overline{S}$ функцією f такою, що $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma\geqslant 0$,

$$f(s)=F(e^s).$$

Очевидно, що за допомогою відображення $z=e^s, z=re^{it}, s=\sigma+it$ отримуємо співвідношення $r=e^{\sigma}$, а також

$$n_0(r,F)=n(\log r,f)=n(\sigma,f), \quad r\geqslant 1, \quad \sigma\in S, \tag{4}$$

де $n(\sigma,f)$ – лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику $\{\eta+it:0<\eta\leqslant\sigma, 0\leqslant t<2\pi\}$.

З огляду на (1)

$$N_0(r,F)=\int\limits_1^r \frac{n_0(t,F)}{t}dt= \tag{5}$$

$$=\int\limits_1^{e^{\sigma}} \frac{n(\log t,f)}{t}dt=\int\limits_0^{\sigma} n(\eta,f)d\eta=N(\sigma,f),$$

для $r\geqslant 1$ і $\sigma\geqslant 0$.

А також,

$$c_0(\sigma, f) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(\sigma+it)|dt = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(e^{\sigma+it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{it})|dt = c_0(r, F), \quad r \geqslant 1.$$

Співвідношення, доведене в [5], є аналогом теореми Єнсена-Літтлвуда [2] для мероморфної в замиканні півсмуги S функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geqslant 0$

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = \tag{7}$$

$$= c_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)c_0(0, f), \quad \sigma \geqslant \sigma_0 > 0.$$

Із (7) та рівностей (5), (6), отримуємо (3). $\square$

3. Характеристика Неванлінни мероморфних зовні одиничного круга функцій. Нехай відмінна від тотожного нуля функція F мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z : \ |z| \ \geqslant 1\}$. Позначимо

$$m_0(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+|F(re^{it})|dt,$$

де $x^+ = \max\{0, x\}$.

Означення 1. *Функція*

$$T_0(r, F) = m_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0}m_0(r_0, F) + \tag{8}$$

$$+\left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right)m_0(1, F) + N_0(r, F), \quad r \geqslant r_0 > 1,$$

називається характеристикою Неванлінни функції F.

Елементарні властивості $T_0(r, F)$ описані в теоремі.

Теорема 1. *Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Тоді:*

i) $T_0(r_0, F) = 0$;
ii) $T_0(r, F)$ *невід'ємна, неспадна й опукла стосовно* $\log r$ *при* $r \geqslant r_0$;
iii) $T_0(r, F) = T_0(r, \frac{1}{F})$ *при* $r \geqslant r_0$.
iv) $T_0(r, F_1F_2) \leqslant T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r)$, $r \geqslant r_0$,
$T_0(r, F_1 + F_2) \leqslant T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r)$, $r \geqslant r_0$.

Доведення. Твердження i) негайно випливає з (8).

Далі, нехай F частка двох голоморфних функцій $H(z)$ і $G(z)$ в $\{z : |z| \geqslant 1\}$, $F = \frac{H}{G}$, де H і G не мають спільних нулів. Застосувавши (3) до G, отримаємо

$$N_0(r, \frac{1}{G}) = c_0(r, G) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0, G) + (\frac{\log r}{\log r_0} - 1) c_0(1, G) = N_0(r, F), \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

Зауважимо $(a-b)^+ + b = max(a, b)$. Тому, зважаючи на (8), характеристику Неванлінни $F = \frac{H}{G}$ можна записати так:

$$T_0(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \max(\log |H(re^{i\theta})|, \log |G(re^{i\theta})|) d\theta -$$

$$-\frac{\log r}{\log r_0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \max(\log |H(r_0 e^{i\theta})|, \log |G(r_0 e^{i\theta})|) d\theta +$$

$$+ \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1 \right) \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \max(\log |H(e^{i\theta})|, \log |G(e^{i\theta})|) d\theta, \quad r \geqslant r_0 > 1. \tag{9}$$

Позначимо

$$I(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \max(\log |H(re^{i\theta})|, \log |G(re^{i\theta})|) d\theta, \quad r \geqslant r_0 > 1. \tag{10}$$

Функція $u(z) = \max(\log |H(z)|, \log |G(z)|)$ є субгармонійною в $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Тому $I(r, F)$ є опуклою стосовно $\log r$ [6, p. 28]. З рівностей (8), (9) і (10) отримуємо співвідношення

$$T_0(r, F) = I(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} I(r_0, F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1 \right) I(1, F), \quad r \geqslant r_0. \tag{11}$$

Правий бік рівності (11) є сумою опуклої стосовно $\log r$ і лінійної $A \log r + B$ функцій. Тому $T_0(r, F)$ є опуклою стосовно $\log r$ для $r \geqslant r_0$.

З опуклості $I(r, F)$ стосовно $\log r$ випливає

$$I(r_0, F) \leqslant \frac{\log r - \log r_0}{\log r} I(1, F) + \frac{\log r_0}{\log r} I(r, F), \quad 1 < r_0 \leqslant r.$$

Отож,

$$0 \leqslant I(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} I(r_0, F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1 \right) I(1, F), \quad 1 < r_0 \leqslant r.$$

З огляду на (11) отримуємо $T_0(r, F) \geqslant 0, \quad r \geqslant r_0$. Отже, $T_0(r, F)$ – невід'ємна.

Оскільки кожна опукла функція має похідну справа [6, с. 28], то

$$\lim_{r \to r_0 + 0} \frac{T_0(r, F) - T_0(r_0, F)}{\log r - \log r_0} = \lim_{r \to r_0 + 0} \frac{T_0(r, F)}{\log r - \log r_0} = T'_{0+}(r_0, f) \geqslant 0.$$

Оскільки ця похідна неспадна [6, p. 28], то $0 \leqslant T'_0(r_0, F) \leqslant T'_0(r, F), \quad r \geqslant r_0$. Тому характеристика (8) є неспадною при $r \geqslant r_0$, і властивість (ii) доведена.

Застосовуючи (3) до функції $\frac{1}{F}$, ми отримаємо

$$N_0(r,F) - N_0(r,\frac{1}{F}) = \tag{12}$$
$$= c_0(r,\frac{1}{F}) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0,\frac{1}{F}) + (\frac{\log r}{\log r_0} - 1)c_0(1,\frac{1}{F}), \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

Твердження (iii) випливає негайно з (12), (2) і властивості $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Використовуючи нерівності

$$\log^+ xy \leqslant \log^+ x + \log^+ y, \quad \log(x+y) \leqslant \log^+ x + \log^+ y + \log 2,$$

для додатних x, y і

$$n_0(r,F_1F_2) \leqslant n_0(r,F_1) + n_0(r,F_2), \quad n_0(r,F_1+F_2) \leqslant n_0(r,F_1) + n_0(r,F_2),$$

отримаємо (iv), що завершує доведення. □

4. Зв'язок між $T_0(r,F)$ і класичною характеристикою Неванлінни $T(r,F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно подовжуються в $\mathbb{C}$. Якщо мероморфна в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ функція F мероморфно продовжується в $\mathbb{C}$, то її класична характеристика Неванлінни $T(r,F)$ також визначена. Тоді

$$N(r,F) - N_0(r,F) =$$
$$= \int\limits_0^r \frac{n(t,F) - n(0,F)}{t} dt + n(0,F)\log r - \int\limits_1^r \frac{n_0(t,F)}{t} dt =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{n(t,F) - n(0,F)}{t} dt + \int\limits_1^r \frac{n(t,F) - n(0,F) - n_0(t,F)}{t} dt + n(0,F)\log r =$$
$$= N(1,F) + \int\limits_1^r \frac{n(1,F)}{t} dt.$$

Оскільки $n(1,F) = n(t,F) - n_0(t,F)$ при $t \geqslant 1$ і $N(1,F) = \int\limits_0^1 \frac{n(t,F)-n(0,F)}{t} dt$, тому $N(r,F) - N_0(r,F) = N(1,F) + n(1,F)\log r$ при $r \geqslant r_0 > 1$.

Отож,

$$T(r,F) - T_0(r,F) = N(r,F) + m(r,F) - \tag{13}$$
$$-N_0(r,F) - m_0(r,F) + \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0,F) - \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1,F) =$$
$$= N(1,F) + \log r \left[\frac{m_0(r_0,F) - m_0(1,F)}{\log r_0} + n(1,F)\right] + m_0(1,F), \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

Зауважимо, що

$$N(1,F) + m_0(1,F) = N(1,F) + m(1,F) = T(1,F), \quad r \geqslant r_0 > 1. \tag{14}$$

Використовуючи співвідношення (13) і (14), отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай мероморфна в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ функція F має мероморфне продовження в $\mathbb{C}$. Тоді*

$$T_0(r,F) = T(r,F) - T(1,F) + \tag{15}$$
$$+\log r\left[\frac{m_0(1,F)-m_0(r_0,F)}{\log r_0} - n(1,F)\right], \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

5. Випадок $T_0(r,F) = O(\log r)$. Розглянемо випадок

$$T_0(r,F) = O(\log r), \quad r \geqslant r_0. \tag{16}$$

Теорема 2. *Нехай F мероморфна в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ функція. Властивість $T_0(r,F) = O(\log r)$, $r \geqslant r_0$ виконується тоді і лише тоді, коли*

$$F(z) = \mathcal{R}(z)e^{h(z)}, \tag{17}$$

де $\mathcal{R}(z)$ – раціональна і $h(z)$ – голоморфна і обмежена при $|z| \geqslant 1$ функція.

Доведення. Нехай F набуло вигляду (17). Тоді з огляду на властивість (iv) Теореми 1

$$T_0(r,F) \leqslant T_0(r,\mathcal{R}) + T_0(r,e^h) + O(\log r), \quad r \geqslant r_0. \tag{18}$$

Оскільки $m_0(r,\mathcal{R}) = O(\log r)$ і $N_0(r,\mathcal{R}) = O(\log r)$, $r \geqslant r_0$. Отримуємо

$$T_0(r,\mathcal{R}) = O(\log r), \quad r \geqslant r_0. \tag{19}$$

Крім того, оскільки h є обмежена при $|z| \geqslant 1$, то $m_0(r,e^h) = O(1)$, $r \geqslant r_0$. Отож, отримуємо $T_0(r,e^h) = m_0(r,e^h) + O(\log r) = O(\log r)$, $r \geqslant r_0$. З цього співвідношення та з (18) і (19) випливає (16).

Навпаки, нехай виконується (16). Тоді

$$N_0(r,F) + m_0(r,F) = \tag{20}$$
$$T_0(r,F) + \frac{\log r}{\log r_0}m_0(r_0,F) - (\frac{\log r}{\log r_0} - 1)m_0(1,F) = O(\log r), \quad r \geqslant r_0.$$

Отже, $N_0(r,F) = O(\log r)$ і $m_0(r,F) = O(\log r)$, $\quad r \geqslant r_0$, бо обидва доданки зліва (20) невід'ємні.

Зі співвідношення $N_0(r,F) = O(\log r)$, $\quad r \geqslant r_0$ випливає, що $n_0(r,F) \leqslant const$. Тому число полюсів F скінченне.

За властивістю (iii) Теореми 1 кількість нулів F також скінченна.

Нехай $\mathcal{R}(z)$ – раціональна функція, нулі і полюси якої збігаються з нулями та полюсами F з урахуванням їхньої кратності.

Функція $g(z) = \frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}$ немає ні нулів, ні полюсів у $\{z : |z| \geqslant 1\}$. За Лемою 4.1. з [1] існує $m \in \mathbb{Z}$ таке, що гілка $\log G(z)$, $G(z) = z^{-m}g(z)$ визначена в $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Розглянемо її ряд Лорана

$$\log G(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k. \tag{21}$$

Тоді

$$\log|G(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Re(c_k z^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k z^k + \overline{c}_{-k}\overline{z}^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k r^k + \overline{c}_{-k}r^{-k})e^{ik\theta}, \quad r \geqslant 1,$$

і

$$\frac{1}{2}(c_k r^k + \overline{c}_{-k} r^{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|G(re^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta, \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Оскільки $|\log|G(z)|| \leqslant |\log|g(z)| + |m||\log z|, \quad |z| \geqslant 1$, то зі співвідношень (16) і (22) випливає

$$c_k r^k + \overline{c}_{-k} r^{-k} = O(\log r), \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Оскільки $r \geqslant 1$, то співвідношення (23) виконується тоді і лише тоді, коли $c_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тому ряд Лорана (21) можна записати так:

$$\log G(z) = \log\left(z^{-m}\frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}\right) = c_0 + \frac{\overline{c}_{-1}}{z} + ... + \frac{\overline{c}_{-k}}{z^k} + ..., \quad k \in \mathbb{N}.$$

Позначимо

$$c_0 + \frac{\overline{c}_{-1}}{z} + ... + \frac{\overline{c}_{-k}}{z^k} + ... = h(z), \quad |z| \geqslant 1.$$

Тоді

$$\log\left(z^{-m}\frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}\right) = h(z), \quad |z| \geqslant 1. \tag{24}$$

Оскільки ряд Лорана абсолютно збіжний на $\{z : |z| = 1\}$, то отримаємо $|h(z)| = |c_0| + |c_{-1}| + ... + |c_{-k}| + ... = const$.

Отож, з (24) випливає

$$F(z) = z^m \mathcal{R}(z) e^{h(z)},$$

де $h(z)$ обмежена при $|z| \geqslant 1$, що завершує доведення. □

6. Коефіцієнти фур'є мероморфної в зовнішності одиничного круга функції. Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Припустимо, що F не має ні нулів, ні полюсів на $|z| = 1$.

Означення 2. *k-м коефіцієнтом Фур'є функції $\log|F(re^{it})|$ називається*

$$c_k(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \log|F(re^{it})| dt, \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 2. *Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в $\{z : 1 \leqslant |z| < t, t > 1\}$. Нехай $\{a_j\}$ послідовність нулів F в $\{z : 1 \leqslant |z| < t, t > 1\}$ і $\{b_j\}$ – послідовність її полюсів. Нехай F не має ні нулів, ні полюсів на колі $\{z : |z| = 1\}$. Тоді виконуються такі співвідношення:*

$$c_k(r, F) = \frac{r^k}{2k}\alpha_k(F) - \frac{r^{-k}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(F) + \tag{25}$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|\geqslant 1}\left[\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_j}}{r}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{|b_j|\geqslant 1}\left[\left(\frac{r}{b_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_j}}{r}\right)^k\right],$$

$$c_{-k}(r, F) = \overline{c}_k(r, F), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\alpha_k(F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{F'(e^{it})}{F(e^{it})}dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Найперше нагадаємо результат, доведений в [5]. Нехай f, $f \not\equiv 0$, мероморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : 0 < \eta \leqslant \sigma,\ 0 \leqslant t < 2\pi\}$ функція така, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Нехай $\{s_j\}$ – послідовність нулів f в R_σ і $\{p_j\}$ – послідовність її полюсів. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R_σ.

Приймемо

$$c_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma + it)|dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 3 ([5]). *За вище зроблених припущень виконуються такі співвідношення:*

$$c_k(\sigma, f) = \frac{e^{k\sigma}}{2k}\alpha_k(f) - \frac{e^{-k\sigma}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(f) +$$
$$+\frac{1}{2k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{p_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{p_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],$$
$$c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c}_k(\sigma, f), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

де $\alpha_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Доведення леми 2. Використовуючи співвідношення $z = re^{it} = e^s = e^{\sigma+it}$ і $f(s) = F(e^s)$, отримуємо

$$\alpha_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{F'(e^{it})}{F(e^{it})}dt = \alpha_k(F), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{27}$$

$$c_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma + it)|dt = \tag{28}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|F(re^{it})|dt = c_k(r, F), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Застосовуючи цю ж підстановку до (26), отримуємо рівності (25), де $c_k(r, F)$ і $\alpha_k(F)$ визначені співвідношеннями (28), (27), відповідно.

7. Мероморфні функції скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

Означення 3. *Додатна, неспадна, неперервна і необмежена при* $r > 1$ *функція* $\lambda(r)$ *називається функцією зростання.*

Означення 4. *Нехай* $\lambda(r)$ *функція зростання і* F *мероморфна в* $\{z : |z| \geqslant 1\}$. *Функція* F *називається функцією скінченного* λ*-типу, якщо існують додатні сталі* $A > 0$, $B > 0$ *такі, що* $T(r, F) \leqslant A\lambda(Br)$, $r \geqslant r_0 > 1$.

Позначимо через $\Lambda(\infty)$ клас мероморфних функцій скінченного λ-типу в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ і через $\Lambda_H(\infty)$ – клас голоморфних функцій скінченного λ-типу в $\{z : |z| \geqslant 1\}$.

Перш ніж перейти до опису послідовностей нулів функції з класу $\Lambda_H(\infty)$, нагадаємо означення з [5].

Означення 5 ([5]). *Нехай $\lambda_1(\sigma)$ функція зростання і f – мероморфна в $\overline{S}$, $S = \{\sigma + it, \sigma > 0, 0 \leqslant t < 2\pi\}$ така, що $f(\sigma + 2\pi i) = f(\sigma)$. Функція f називаеться функцією скінченного λ_1-типу, якщо $T(\sigma, f) \leqslant A\ \lambda_1(\sigma + B)$, для деяких додатних сталих $A > 0, B > 0$ і всіх σ, $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, де $T(\sigma, f)$ характеристика Неванлінни функції f.*

Позначимо через $\Lambda(S)$ клас мероморфних функцій скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$ і через $\Lambda_H(S)$ клас голоморфних функцій скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$.

Лема 4. *Голоморфна функція F в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ є функцією скінченного λ-типу тоді і лише тоді, коли функція $f(s) = F(e^s)$ є функцією скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$, де $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\quad \sigma > 0$.*

Доведення. Нехай $F \in \Lambda_H(\infty)$. Це означає, що $T_0(r, F) \leqslant A\lambda(Br)$ для деяких сталих $A, B > 0$ і всіх $r \geqslant r_0$.

Використовуючи вище описані співвідношення $z = re^{it} = e^s = e^{\sigma+it}$ і $F(z) = F(e^s) = f(s)$, отримаємо

$$T_0(r, F) = m_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0, F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1, F) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt - \frac{\log r}{\log r_0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(r_0 e^{it})| dt +$$

$$+ \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(e^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma + it)| dt -$$

$$- \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma_0 + it)| dt + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(it)| dt = T(\sigma, F), \quad \sigma \geqslant \sigma_0.$$

Оскільки $T_0(r, F) \leqslant A\lambda(Br)$ для деяких сталих $A, B > 0$ і всіх $r \geqslant r_0$, то $T(\sigma, f) \leqslant A\lambda(Be^\sigma) = A\lambda(e^{\sigma + \log B}) = A\lambda_1(\sigma + C)$, де $C = \log B$.

Навпаки, якщо $T(\sigma, f) \leqslant A\lambda_1(\sigma + C)$ для деяких $A, C > 0$ і всіх $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, тоді $T_0(r, F) \leqslant A\lambda_1(\log r + C) = A\lambda_1(\log r + \log e^C) = A\lambda_1(\log e^C \cdot r) = A\lambda(Br)$, де $B = e^C$. $\square$

8. Послідовності нулів голоморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга. Нехай $Z = \{z_j\}$ – послідовність комплексних чисел із $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Через $n(t, Z)$ позначимо лічильну функцію послідовності Z в кільці $\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant t\}$.

Нехай λ – функція зростання.

Означення 6. *Послідовність* $Z = \{z_j\}$ *із* $\{z : |z| \geqslant 1\}$ *має скінченну* λ*-щільність, якщо*

$$N(r, Z) \leqslant A\lambda(Br), \tag{29}$$

для деяких додатних сталих A, B *і всіх* r, $r \geqslant 1$, *де* $N(r, Z) = \int\limits_1^r \frac{n(t,Z)}{t} dt$.

Означення 7. *Послідовність* $Z = \{z_j\}$ *із* $\{z : |z| \geqslant 1\}$ *називається* λ*-допустимою, якщо вона має скінченну* λ*-щільність й існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1<r\leqslant r_2}\left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для всіх r_1, r_2, $r_0 \leqslant r_1 < r_2$ *і кожного* $k \in \mathbb{N}$.

Крім того, для послідовностей комплексних чисел $Q = \{s_j\}$ із $\overline{S}$ аналогічно визначаються такі поняття.

Означення 8. *Послідовність комплексних чисел* $Q = \{s_j\}$ *з* $\overline{S}$ *має скінченну* λ_1*-щільність, якщо існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$N(\sigma, Q) \leqslant A\lambda_1(\sigma + B), \quad \sigma \geqslant \sigma_0 > 0,$$

де

$$N(\sigma, Q) = \int\limits_0^\sigma n(\eta, Q) d\eta,$$

$n(\eta, Q)$ *– кількість членів послідовності* Q *в прямокутнику* R_η *і* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\sigma > 0$.

Означення 9. *Послідовність комплексних чисел* $Q = \{s_j\}$ *з* $\overline{S}$ *називається* λ_1*-допустимою, якщо вона має скінченну* λ_1*-щільність та існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1<Res_j\leqslant\sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \leqslant \frac{A\lambda_1(\sigma_1 + B)}{e^{k\sigma_1}} + \frac{A\lambda_1(\sigma_2 + B)}{e^{k\sigma_2}},$$

$k \in \mathbb{N}$ *і* $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2$, *де* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\sigma > 0$.

Наступна теорема описує послідовності нулів функцій із класу $\Lambda_H(\infty)$.

Теорема 3. *Для того, щоб послідовність* Z *із* $\{z : |z| \geqslant 1\}$ *була послідовністю нулів функції з* $\Lambda_H(\infty)$ *необхідно і достатньо, щоб вона була* λ*-допустимою.*

Перше, ніж доводити цю теорему, доведемо таке твердження.

Лема 5. *Нехай* $Z = \{z_j\}$ *– послідовність комплексних чисел із* $\{z : |z| \geqslant 1\}$ *і* $Q = \{s_j\}$ *– послідовність комплексних чисел із* $\overline{S}$ *таких, що* $z_j = e^{s_j}$, $j \in \mathbb{N}$. *Послідовність* $\{z_j\}$ *є* λ*-допустимою тоді і лише тоді, коли послідовність* $\{s_j\}$ *є* λ_1*-допустимою, де* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\sigma > 0$.

Доведення. Нехай послідовність комплексних чисел $\{z_j\}$ є λ-допустимою. Тоді виконуються такі нерівності:

$$N_0(r,Z)\leqslant A\lambda(Br)$$

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1<r\leqslant r_2}\left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right|\leqslant\frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k}+\frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для деяких додатних сталих A,B і всіх r_1,r_2, $r_0\leqslant r_1<r_2$ та кожного $k\in\mathbb{N}$. Приймемо в обох нерівностях $z=e^s$, $z=re^{it}$, де $e^{\sigma+it}=re^{it}$, $\sigma=\log r$, і використаємо співвідношення (5). Отож, отримаємо

$$N_0(r,Z)=N(\sigma,Q)\leqslant A\lambda(Be^{\sigma})=A\lambda(e^{\sigma+\log B})=A\lambda_1(\sigma+D)$$

і

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1<r\leqslant r_2}\left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right|=\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1<Res_j\leqslant\sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right|\leqslant\frac{C\lambda(e^{\sigma_1+\log D})}{e^{k\sigma_1}}+\frac{C\lambda(e^{\sigma_2+\log D})}{e^{k\sigma_2}}=$$

$$=\frac{C\lambda_1(\sigma_1+\widetilde{A})}{e^{k\sigma_1}}+\frac{C\lambda_1(\sigma_2+\widetilde{A})}{e^{k\sigma_2}},$$

для деяких $A,B,C,D>0$, $\widetilde{A}=\log D$, $D=\log B$ і всіх σ_1,σ_2, $\sigma_0\leqslant\sigma_1<\sigma_2$, для всіх $k\in\mathbb{N}$.

Отже, $\{s_j\}$ задовольняє означення λ_1-допустимості.

Нехай тепер $\{s_j\}$ – λ_1-допустима. Аналогічними міркуваннями отримуємо λ-допустимість послідовності $\{z_j\}$, $z_j=e^{s_j}$ із $\{z:|z|\geqslant 1\}$.

Доведення теореми 3. Нехай $\{z_j\}$ – послідовність нулів із $\{z:|z|\geqslant 1\}$ голоморфної функції F скінченного λ-типу. Зважаючи на лему 4, отримаємо, що голоморфна функція $f(s)=F(e^s)$ є функцією скінченного λ_1-типу, де $\lambda_1(s)=\lambda(e^s)$, $\sigma>0$. Нехай послідовність $Q=\{s_j\}, e^{s_j}=z_j$ є послідовністю нулів голоморфної функції $f\in\Lambda_H$.

Розглянемо різницю

$$\frac{c_k(\sigma_2,f)}{e^{k\sigma_2}}-\frac{c_k(\sigma_1,f)}{e^{k\sigma_1}}=\frac{\alpha_k e^{k\sigma_2}-\overline{\alpha_{-k}}e^{-k\sigma_2}}{2ke^{k\sigma_2}}+\frac{1}{2ke^{k\sigma_2}}\left[\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\sigma_2}}{e^{s_j}}\right)^k-\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k\right]-$$

$$-\frac{\alpha_k e^{k\sigma_1}-\overline{\alpha_{-k}}e^{-k\sigma_1}}{2ke^{k\sigma_1}}-\frac{1}{2ke^{k\sigma_1}}\left[\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\sigma_1}}{e^{s_j}}\right)^k-\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k\right]=$$

$$=\frac{\overline{\alpha_{-k}}}{2k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}-\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}\right]+\frac{1}{2k}\left[\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\frac{1}{(e^{s_j})^k}-\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\frac{1}{(e^{s_j})^k}\right]+$$

$$+\frac{1}{2ke^{k\sigma_1}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k-\frac{1}{2ke^{k\sigma_2}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k,$$

де $0\leqslant\sigma_1<\sigma_2$.

Отримаємо

$$\frac{1}{k}\sum_{\sigma_1<\Re s_j\leqslant\sigma_2}\frac{1}{(e^{s_j})^k}=\frac{2c_k(\sigma_2,f)}{e^{k\sigma_2}}-\frac{2c_k(\sigma_1,f)}{e^{k\sigma_1}}+\frac{\overline{\alpha_{-k}}}{k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}-\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right]+ \\ +\frac{1}{ke^{k\sigma_2}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k-\frac{1}{ke^{k\sigma_1}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k. \tag{30}$$

Оскільки в прямокутниках $R_{\sigma_i}, i=1,2,$ для деяких сталих $A_1, B_1>0$ виконується

$$\sum_{s_j\in R_{\sigma_i}}\left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_i}}\right|^k\leqslant\sum_{s_j\in R_{\sigma_i}}1\leqslant n(\sigma_i+1,\frac{1}{f})\leqslant N(\sigma_i+1,\frac{1}{f})\leqslant A_1\lambda_1(\sigma_i+1+B_1),$$

$\sigma_i>\sigma_0$, $i=1,2$, то лівий бік рівності (30) оцінимо так:

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1<\Re s_j\leqslant\sigma_2}\frac{1}{e^{ks_j}}\right|\leqslant\frac{A_2\lambda_1(\sigma_2+B_2)}{e^{k\sigma_2}}+\frac{A_2\lambda_1(\sigma_1+B_2)}{e^{k\sigma_1}}+ \\ +\frac{|\overline{\alpha_{-k}}|}{k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}+\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right]+\frac{1}{ke^{k\sigma_2}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right|^k+\frac{1}{ke^{k\sigma_1}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right|^k\leqslant \\ \leqslant\frac{A_2\lambda_1(\sigma_2+B_2)}{e^{k\sigma_2}}+\frac{A_2\lambda_1(\sigma_1+B_2)}{e^{k\sigma_1}}+C\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}+\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right]+ \\ +\frac{1}{ke^{k\sigma_2}}N(\sigma_2+1,\frac{1}{f})+\frac{1}{ke^{k\sigma_1}}N(\sigma_1+1,\frac{1}{f})\leqslant\frac{A\lambda_1(\sigma_2+B)}{e^{k\sigma_2}}+\frac{A\lambda_1(\sigma_1+B)}{e^{k\sigma_1}}, \\ k\in\mathbb{N},\quad \sigma_2>\sigma_1\geqslant\sigma_0, \tag{31}$$

де $A=\max\{A_1,A_2,C\}, B=\max\{B_1+1,B_2\}$.

За теоремою 2 з [5] послідовність нулів Q функції f має скінченну λ-щільність. Разом із (31) отримуємо, що $Q=\{s_j\}$ – λ_1-допустима.

За лемою 5 отримуємо λ-допустимість послідовності $\{z_j\}$, $\quad z_j=e^{s_j}$.

Навпаки, якщо послідовність $\{z_j\}$ є λ-допустимою, то згідно з теоремою Рубела-Тейлора [3, ст. 84] ([4, ст. 29]) існує ціла функція $F(z)$ скінченного λ-типу з послідовністю нулів $Z=\{z_j\}$, що завершує доведення. □

9. Послідовності полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга. Нехай $W=\{w_j\}$ – послідовність комплексних чисел із $\{z:|z|\geqslant1\}$. Нехай λ – функція зростання.

Теорема 4. *Послідовність $W=\{w_j\}$ із $\{z:|z|\geqslant1\}$ є послідовністю полюсів функції F із класу $\Lambda(\infty)$ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Перше, ніж довести цю теорему, доведемо таке твердження.

Теорема 5. *Послідовність $Z=\{z_j\}$ із $\{z:|z|\geqslant1\}$ є послідовністю нулів функції F із класу $\Lambda(\infty)$ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Доведення. Якщо $Z = \{z_j\}$ є послідовністю нулів функції F, $F \in \Lambda(\infty)$, тоді з (8) отримаємо

$$N_0(r, Z) = N_0(r, \frac{1}{F}) \leqslant T_0(r, F) \leqslant A\lambda(Br),$$

для всіх $r \geqslant r_0 > 1$ і деяких сталих $A, B > 0$.

Нехай тепер $Z = \{z_j\}$ – послідовність зі скінченною λ-щільністю. Тоді за теоремою Рубела-Тейлора [3] (див. також [4, p. 35]) існує мероморфна в $\mathbb{C}$ функція F скінченного λ-типу з послідовністю нулів Z. □

Застосовуючи теорему 5 до функції $\frac{1}{F}$, отримуємо твердження теореми 4.

Список використаної літератури

1. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains, Fourier series method in complex analysis / *A. Kondratyuk, I. Laine* // (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – Vol. 10. – P. 9-111.
2. *Littlewood J.E.* On the zeros of the Riemann zeta-function / *J.E. Littlewood* // Proc. Camb. Philos. Soc. – 1924. – Vol. 22. – P. 295-318.
3. *Rubel L.A.* Fourier series method for meromorphic functions / *L.A. Rubel, B.A. Taylor* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
4. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *А.А. Кондратюк.* – Л., 1988.
5. *Сокульська Н.Б.* Мероморфні функції скінченного λ-типу у півсмузі / *Н.Б. Сокульська* // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, №2. – С. 328-339.
6. *Хейман У.* Субгармонические функции / *У. Хейман, П. Кеннеди.* – М.: Мир, 1980.

Стаття: надійшла до редакції 23.10.2013
прийнята до друку 28.02.2014

GROWTH AND DISTRIBUTION OF ZEROES AND POLES OF MEROMORPHIC FUNCTION IN NEIGHBORHOOD OF ESSENTIAL SINGULARITY

Natalia SOKULSKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: natalya.sokulska@gmail.com

The Nevanlinna characteristic $T_0(r, F)$ of a meromorphic function in the exterior of unit disk is introduced, and its main properties are investigated. A criterion of λ-type finiteness of holomorphic in the exterior of unit disk functions F in terms of Fourier coefficients of $\log|F|$ is obtained. The comparison between $T_0(r, F)$ and the classical Nevanlinna characteristic $T(r, F)$ for functions which have the meromorphic continuation into $\mathbb{C}$ is done. Zero sets of holomorphic and pole sets of meromorphic functions of finite λ-type in the exterior of the unit disk are described.

Key words: holomorphic function, meromorphic function, function of finite λ-type, sequence of finite λ-density, λ-admissible sequence.

РОСТ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ СУЩЕСТВЕННО ОСОБОЙ ТОЧКИ

Наталья СОКУЛЬСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: natalya.sokulska@gmail.com

Введено характеристику Неванлинны $T_0(r, F)$ мероморфной во внешности единичного круга функции и доказаны ее основные свойства. Получен критерий конечности λ-типа голоморфных во внешности единичного круга функций F в терминах коэффициентов Фурье $\log|F|$. Установлена связь между $T_0(r, F)$ и классической характеристикой Неванлинны $T(r, F)$ для функций, которые имеют мероморфное продолжение в $\mathbb{C}$. Описаны последовательности нулей голоморфных и полюсов мероморфных функций конечного λ-типа во внешности единичного круга.

Ключевые слова: голоморфная функция, мероморфная функция, функция конечного λ-типа, последовательность с конечной λ-плотностью, λ-допустимая последовательность.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 148–153
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 148–153

УДК 517.95

ОБМЕЖЕНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ СЕРЕДНІХ ЛОГАРИФМІВ ЛОКСОДРОМНИХ ФУНКЦІЙ

Святослав ТАРАСЮК, Ольга ГУЩАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: svt.tarasyuk@gmail.com, olya_khyl@ukr.net

Доведено, що інтегральні середні $m_s(r, f)$ логарифма локсодромної функції f обмежені і при $s = 2$ неперервні.

Ключові слова: локсодромна функція, еліптична функція, інтегральні середні, коефіцієнти Фур'є.

1. Вступ. Допоміжні поняття та твердження. Систематичне вивчення мультиплікативно періодичних мероморфних функцій розпочав О. Раузенбер ([1]). Валірон ([2]) назвав ці функції локсодромними, бо точки, в яких така функція набуває однакових значень, лежать на логарифмічних спіралях, а образи логарифмічних спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під однаковим кутом. Локсодромні мероморфні функції дають просту конструкцію еліптичних функцій ([2], [3]).

Означення 1 ([2], [3]). *Нехай* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Функція* $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *називається локсодромною з мультиплікатором* q, $0 < |q| < 1$, *якщо* f *мероморфна в* $\mathbb{C}^*$ *і* $\forall z \in \mathbb{C}^*$ *виконується рівність* $f(qz) = f(z)$.

Нагадаємо деякі властивості локсодромних функцій ([2], [3], [7]).

Кожна відмінна від нуля локсодромна функція з мультиплікатором q має не менше, ніж два полюси в кільці $A_r = \{z : |q|r < |z| \leqslant r\}$. Кількість полюсів функції f однакова в кожному кільці A_r.

Порядком m, $m \geqslant 2$, локсодромної функції f називають кількість її полюсів у кільці A_r.

Означення 2 ([4]). *Нехай* f *– мероморфна в кільці* $A = \{z : \frac{1}{r_0} < |z| < r_0\}$ *функція, де* $1 < r_0 \leqslant +\infty$. *Функція*

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) + N_0(r, f), \quad 1 \leqslant r < r_0,$$

називається характеристикою Неванлінни функції f, *де*

$$m_0(r,f)=m(r,f)+m(\frac{1}{r},f)-2m(1,f),\quad m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi,$$

$$a^+=\max(a,0),\quad N_0(r,f)=\int_1^r\frac{n_0(t,f)}{t}dt,$$

$n_0(r,f)$ – *лічильна функція полюсів функції* f *в кільці* $\{z:\frac{1}{r}<|z|\leqslant r\}$.

Теорема А ([5]). *Нехай* f – *локсодромна функція порядку* m. *Тоді*

$$T_0(r,f)=\frac{m}{\log\frac{1}{|q|}}\log^2 r+Q(\log r),\quad r>1,$$

де $Q(t)$ – *така, що*

$$|Q(t)|\leqslant 2mt+C,\quad t>0,$$

а C – *деяка стала.*

Означення 3 ([4]). *Нехай* λ – *додатна, неспадна, неперервна, необмежена на* $[1,+\infty)$ *функція і* f – *мероморфна функція в* $\mathbb{C}^*$. *Функцію* f – *називають функцією скінченого* λ*-типу, якщо* $T_0(r,f)\leqslant B\lambda(Cr)$ *за деяких сталих* B,C, *для всіх* $r\geqslant 1$.

Теорема Б ([4]). *Нехай функція* f *мероморфна в* $\mathbb{C}^*$,

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\log|f(re^{i\theta})|d\theta,\quad r>0,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Такі твердження еквівалентні:

а) f *є функцією скінченого* λ*-типу;*

б) $(\exists B,C)$ $(\forall r\geqslant 1)$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$*:* $|c_k(r,f)|+|c_k(\frac{1}{r},f)|\leqslant B\lambda(Cr)$;

в) $(\exists B,C)$ $(\forall r\geqslant 1)$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$*:* $|c_k(r,f)|+|c_k(\dfrac{1}{r},f)|\leqslant\dfrac{B\lambda(Cr)}{|k|+1}$.

Теорема В (Гаусдорфа-Юнга). *Нехай* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{s}=1$, $1<p\leqslant 2$, *а*

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}dx,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Якщо $f\in L_p[0,2\pi]$, *то*

$$\|f\|_{l_s}\stackrel{def}{=}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^s\right)^{1/s}\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}\stackrel{def}{=}\|f\|_{L_p}.$$

Якщо $\|f\|_{l_p}<\infty$, *то існує функція* $f\in L_s[0,2\pi]$, *для якої* $c_k=c_k(f)$, $k\in\mathbb{Z}$, *і* $\|f\|_{L_s}\leqslant\|f\|_{l_p}$.

2. Властивості інтегральних середніх логарифмів локсодромних функцій. У цьому підрозділі доведено деякі властивості інтегральних середніх логарифмів локсодромних функцій.

Теорема 1. *Нехай $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ – локсодромна функція. Тоді для будь-якого фіксованого $s \geqslant 1$ інтегральні середні*

$$m_s(t, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(te^{i\theta})||^s d\theta \right)^{1/s}$$

обмежені на $\mathbb{R}_+$.

Доведення. З теореми А випливає, що

$$T_0(r, f) \leqslant C_1 \log^2(r+1), \quad r > 1,$$

де C_1 – деяка стала. Тому f є функцією скінченого λ-типу при $\lambda(r) = \log^2(r+1)$.

За теоремою Б

$$|c_k(r, f)| \leqslant \frac{B\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 0,$$

за деякого $B > 0$.

Нехай $1 < r \leqslant \frac{1}{|q|}$. Тоді

$$|c_k(r, f)| \leqslant \frac{B \log^2(\frac{1}{|q|}+1)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

З огляду на теорему В, при $s \geqslant 2$ одержимо

$$m_s(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(re^{i\theta})||^s d\theta \right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(r, f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{B \log^2\left(\frac{1}{|q|}+1\right)}{|k|+1} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{p} = 1.$$

Нехай $t > 0$, а $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $n \in \left[\frac{-\log t}{\log|q|} - 1, \frac{-\log t}{\log|q|}\right)$. Тоді $1 < |q|^n t \leqslant \frac{1}{|q|}$. З локсодромності функції f випливає, що

$$(\forall n \in \mathbb{Z}): \quad m_s(|q|^n t, f) = m_s(t, f), \quad t > 0.$$

Тому

$$m_s(t, f) \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|k|+1)^p} \right)^{\frac{1}{p}} B \log^2\left(\frac{1}{|q|}+1\right), \quad t > 0.$$

Отже, обмеженість інтегральних середніх $m_s(t, f)$ при $s \geqslant 2$ доведено.

Оскільки інтегральні середні $m_s(t, f)$ монотонно неспадні функції змінної s, то при $1 \leqslant s < 2$ їхня обмеженість також випливає з останньої нерівності.

Теорему 1 доведено. □

Теорема 2. *Нехай $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ – локсодромна функція. Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}$ функції $c_k(r, f)$ і $m_2(r, f)$ – неперервні на $(0, +\infty)$.*

Доведення. Нехай q – мультиплікатор функції f. Тоді

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\log|f(q^n re^{i\varphi})|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\log|f(|q|^n re^{in\alpha}e^{i\varphi})|d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(|q|^n re^{i\theta})|d\theta=c_k(|q|^n r,f),$$

тобто

$$c_k(|q|^n r,f)=c_k(r,f),\quad r>0,\quad n\in\mathbb{Z},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Це означає, що коефіцієнти $c_k(r,f)$ мультиплікативно періодичні на $\mathbb{R}^+$ з мультиплікатором $|q|$.

Доведемо неперервність $c_k(r,f),\quad k\neq 0$.

Нехай $A=\{z:|q|\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{|q|}\}$. Через A^* позначимо A з розрізами $\{z=\tau a,\quad \tau\geqslant 1\}$, якщо $|a|>1$, і $\{z=\tau a,\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1\}$, якщо $|a|<1$, де a є нулем чи полюсом функції f.

Нехай $F(z)=\frac{f(z)}{z^p}$, де $p=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, і виберемо деяке значення $\log F(1)$. Як і в ([4]) приймемо

$$\log F(z)\overset{def}{=}\log F(1)+\int\limits_1^z\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}d\xi,\quad z\in A^*.$$

Якщо $1<r\leqslant\frac{1}{|q|}$, тоді, як і в [4] та [7], отримаємо

$$c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)=\frac{1}{2}(\alpha_k r^k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-k}+\alpha_k r^{-k}+\overline{\alpha}_{-k}r^k)+$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right)+\frac{1}{2k}\sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|\leqslant 1}\left((\overline{a}_j r)^k-\left(\frac{1}{a_j r}\right)^k\right)-$$

$$-\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{b_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{b}_j}{r}\right)^k\right)-\frac{1}{2k}\sum_{\frac{1}{r}\leqslant|b_j|\leqslant 1}\left((\overline{b}_j r)^k-\left(\frac{1}{b_j r}\right)^k\right)-\frac{n_k(\mathbf{T})}{2k}\left(\frac{1}{r^k}+r^k\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha}_k)(r^k+r^{-k})+\frac{1}{2k}\int_1^r\left[\left(\frac{r}{t}\right)^k-\left(\frac{t}{r}\right)^k\right]dn_k(t,f)-\frac{n_k(\mathbb{T})}{2k}\left(\frac{1}{r^k}+r^k\right),\quad k\neq 0,$$

де $\mathbb{T}$ – одиничне коло,

$$n_k(\mathbb{T})\overset{def}{=}\sum_{|a_j|=1}e^{-ik\gamma_j},\quad n_k(t,f)=\sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|\leqslant t}e^{-ik\gamma_j},\quad a_j=|a_j|e^{i\gamma_j},$$

a_j і b_j – відповідно послідовність нулів і полюсів функції f, α_k – коефіцієнти розвинення в ряд Лорана функції $\log F(z)$ в деякому кільці з центром у точці $z=0$, яке містить одиничне коло.

Подібно як в [7], інтегруючи частинами, отримаємо

$$c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)=\frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha}_k)(r^k+r^{-k})+\frac{1}{2}\int_1^r\left[\left(\frac{r}{t}\right)^k-\left(\frac{t}{r}\right)^k\right]\frac{n_k(t,f)}{t}dt-\frac{r^k}{k}n_k(\mathbb{T})=$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha}_k)(r^k+r^{-k})+\frac{r^k}{2}\int_1^r \frac{1}{t^{k+1}}n_k(t,f)dt-\frac{1}{2r^k}\int_1^r t^{k-1}n_k(t,f)dt-\frac{r^k}{k}n_k(\mathbb{T}),\ k\neq 0.$$

Отже, $\forall k \neq 0$ коефіцієнти $c_k(r,f)$ неперервні на $\left[1, \frac{1}{|q|}\right]$ як сума неперервних функцій та інтегралів зі змінною верхньою межею. Оскільки $c_k(r,f)$ мультиплікативно періодичні, то вони неперервні на $\mathbb{R}^+$.

Доведемо неперервність $c_0(r,f)$. Довільну мероморфну функцію f можна записати як частку двох голоморфних функцій g і h

$$f(re^{i\theta}) = \frac{g(re^{i\theta})}{h(re^{i\theta})}.$$

Звідси

$$\log|f(re^{i\theta})| = \log|g(re^{i\theta})| - \log|h(re^{i\theta})|.$$

За означенням

$$c_0(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|h(re^{i\theta})|d\theta.$$

Логарифм модуля голоморфної функції є субгармонійною функцією. Оскільки інтеграл від субгармонійної функції є опуклою функцією стосовно $\log r$ ([6]), тому і неперервною, то коефіцієнт $c_0(r,f)$ – неперервна функція.

Отже, для всіх $k \in \mathbb{Z}$ коефіцієнти $c_k(r,f)$ неперервні на $\mathbb{R}_+$.

Неперервність $m_2(r,f)$ отримуємо з рівності Парсеваля

$$m_2(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(re^{i\theta})||^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r,f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

оскільки з (1) випливає рівномірна збіжність ряду у співвідношенні (2). □

Список використаної літератури

1. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der periodischen functionen einer Variabeln / *O. Rausenberger.* – Leipzig: Druck und Ferlag von B.G. Teubner, 1884.
2. *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique. Theorie des fonctions: 2nd Edition. / *G. Valiron.* – Paris: Masson et. Cie., 1947.
3. *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles / *Y. Hellegouarch.* – San Diego: Academic Press, 2002.
4. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *A. Kondratyuk, I. Laine* // Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – Vol. 10. – P. 9-111.
5. *Khrystiyanyn A.Ya.* Growth characteristics of loxodromic and elliptic functions / *A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk, N.B. Sokul's'ka* // Mat. Stud. – 2012. – Vol. 37, №1. – P. 52-57.
6. *Хейман У.* Субгармонические функции / *У. Хейман, П. Кеннеди.* – М.: Мир, 1980.
7. *Голдак М.* Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій / *М. Голдак, А. Христіянин* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 71-77.

Стаття: надійшла до редакції 23.10.2013
прийнята до друку 21.01.2014

BOUNDEDNESS OF INTEGRAL MEANS OF LOXODROMIC FUNCTION LOGARITHMS

Svyatoslav TARASYUK, Olha HUSHCHAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: tidisi.dt@gmail.com, olya_khyl@ukr.net

It is proved that the integral means $m_s(r, f)$ of a loxodromic function logarithm are bounded and in the case $s = 2$ they are continuous.

Key words: loxodromic function, elliptic function, integral means, Fourier coefficients.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ЛОГАРИФМОВ ЛОКСОДРОМНЫХ ФУНКЦИЙ

Святослав ТАРАСЮК, Ольга ГУЩАК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tidisi.dt@gmail.com, olya_khyl@ukr.net

Доказано, что интегральные средние $m_s(r, f)$ логарифма локсодромной функции f ограничены и при $s = 2$ непрерывны.

Ключевые слова: локсодромная функция, эллиптическая функция, интегральные средние, коэффициенты Фурье.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 154–162
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 154–162

УДК 517.956

УКОРОЧЕННЯ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Тарас ФІРМАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: tarasfirman91@ukr.net

До мішаної задачі в прямокутнику для зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними побудовано вкорочену задачу.

Ключові слова: гіперболічна система, лінійні рівняння, укорочена задача, метод характеристик.

1. Вступ. Зліченні системи, тобто диференціальні рівняння в просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей [1], мають властивості, які дають змогу застосовувати їх для дослідження багатьох математичних моделей, зокрема, при використанні методу Фур'є до розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основні проблеми дослідження зліченних систем для звичайних диференціальних рівнянь наведено в працях [1-4].

Питання укорочення зліченних систем актуальне, оскільки для скінченних систем розроблено методи їхнього розв'язання. Тому для вкороченої системи достатньо довести, що її розв'язки майже не відрізняються від розв'язків зліченної системи.

У цій праці до мішаної задачі в прямокутнику для зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними застосовано деякий аналог методу вкорочення зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь [4]. Подібний підхід використано в [5,6].

2. Формулювання задачі. У прямокутнику $\Pi = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ розглянемо зліченну гіперболічну систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, записану в інваріантах

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x,t)u_j(x,t) + f_i(x,t), \quad i \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Нехай $I^+ = \{2k-1 |\, k \in \mathbb{N}\}$, а $I^- = \mathbb{N}/I^+$ і, крім того, впорядковані в кожній точці прямокутника Π так:

$$\lambda_1(x,t) \geqslant \lambda_3(x,t) \geqslant ... \geqslant \lambda_{2k-1}(x,t) \geqslant ...,$$

$$\lambda_2(x,t) \leqslant \lambda_4(x,t) \leqslant ... \leqslant \lambda_{2k}(x,t) \leqslant ...,$$

де λ_i з непарними індексами будуть додатними величинами, а з парними – від'ємними.

Для системи (1) задамо початкову

$$u_i(x,0) = g_i(x), \quad x \in [0,l], \quad i \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

та крайові

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \sum_{j \in I^-} \alpha_{ij}(t) u_j(0,t) + h_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i \in I^+, \\ u_i(l,t) &= \sum_{j \in I^+} \beta_{ij}(t) u_j(l,t) + r_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i \in I^- \end{aligned} \tag{3}$$

умови.

Задачу (1)–(3) будемо розглядати у просторі C^∞, елементом якого є зчисленна сукупність неперервних функцій, рівномірно обмежених деякою сталою. В просторі C^∞ визначимо норму для вектора $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ...)$

$$||u|| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \max_{(x,t) \in \Pi} \{|u_i(x,t)|\}.$$

Надалі будемо використовувати позначення $u = (u_1, u_2, ...)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$, $g = (g_1, g_2, ...)$.

Через $\varphi_i(\tau; x, t)$ позначимо розв'язок задачі

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \qquad i \in \mathbb{N} \tag{4}$$

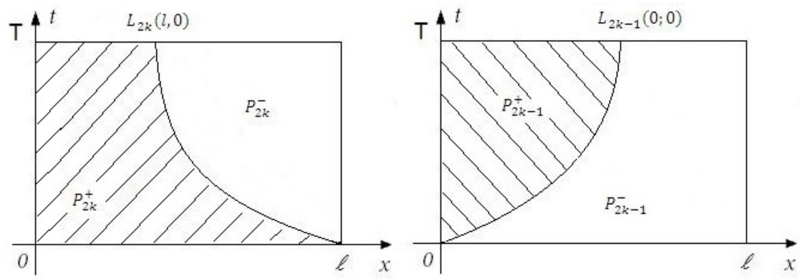
з початковими умовами

$$\xi|_{\tau=t} = x. \tag{5}$$

Нехай $L_i(x,t)$ – інтегральна крива, задана рівнянням $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$, яка виходить з точки (x,t), а $t_i(x,t)$ – ордината перетину i-ї характеристики з прямою $x = 0$ або $x = l$ у напрямі спадання t.

3. Основні результати. Достатньо розглядати прямокутник $[0,l] \times [0,T]$, де T вибрано так, що $L_1(0,0)$ і $L_2(l,0)$ не перетинаються [7]. Це забезпечує те, що усі характеристики, які виходять з нижніх кутових точок, не будуть перетинатися в Π.

Нехай $P_{2k}^+ = \{(x,t) : x \leqslant L_{2k}(l,0), (x,t) \in \Pi\}$, а $P_{2k}^- = \Pi \backslash P_{2k}^+$. Аналогічно визначимо $P_{2k-1}^+ = \{(x,t) : x \leqslant L_{2k-1}(0,0), (x,t) \in \Pi\}$ і $P_{2k-1}^- = \Pi \backslash P_{2k-1}^+$ (див рис.).



Області P_{2k}^+ і P_{2k}^-, P_{2k-1}^+ і P_{2k-1}^-

Будемо вважати, що функція $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x в Π, якщо $\lambda_i \in Lip_x(\Pi)$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Поряд з системою (1) розглянемо вкорочену систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x,t)u_j^n(x,t) + f_i(x,t), \quad i \in \{1,...,n\}, \tag{6}$$

де $u_i^n(x,t)$ для $i \in \{n+1,...\}$ визначені так:

$$u_{2k}^n(x,t) = \begin{cases} g_{2k}(\varphi_{2k}(0;x,t)), \quad \text{при } (x,t) \in P_{2k}^+, \\ \sum\limits_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t))u_{2j-1}^n(l,t_{2k}(x,t)) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=[\frac{n+1}{2}]+1}^{\infty} \beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t))g_{2j-1}(\varphi_{2j-1}(0;l,t_{2k}(x,t))) + \\ \qquad\qquad + r_{2k}(t_{2k}(x,t)), \quad \text{при } (x,t) \in P_{2k}^-, \end{cases} \tag{7}$$

$$u_{2k-1}^n(x,t) = \begin{cases} g_{2k-1}(\varphi_{2k-1}(0;x,t)), \quad \text{при } (x,t) \in P_{2k-1}^-, \\ \sum\limits_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} \alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))u_{2j}^n(0,t_{2k-1}(x,t)) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))g_{2j}(\varphi_{2j}(0;0,t_{2k-1}(x,t))) + \\ \qquad\qquad + h_{2k-1}(t_{2k-1}(x,t)), \quad \text{при } (x,t) \in P_{2k-1}^+, \end{cases} \tag{8}$$

з початковою умовою (2) та крайовими умовами (3).

Задачу (6), (2), (3) назвемо укороченою мішаною задачею, що відповідає задачі (1)-(3).

Інтегруванням кожного з рівнянь системи (1) вздовж відповідних характеристик зведемо задачу (1)-(3) до системи інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \omega_i[u](x,t) + \int\limits_{\max\{t_i(x,t),0\}}^{t} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j + f_i\Big)[(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)]d\tau, \quad i \in \mathbb{N} \tag{9}$$

де

$$\omega_i[u](x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{j\in I^-} \alpha_{ij}(t_i(x,t))u_j(0,t_i(x,t)) + h_i(t_i(x,t)), \ \text{при } \varphi_i(t_i(x,t);x,t) = 0, \\ g_i(\varphi_i(0;x,t)), \\ \sum\limits_{j\in I^+} \beta_{ij}(t_i(x,t))u_j(l,t_i(x,t)) + r_i(t_i(x,t)), \ \text{при } \varphi_i(t_i(x,t);x,t) = l. \end{cases} \tag{10}$$

Для вкороченої системи отримаємо

$$u_i^n(x,t) = \sigma_i[u^n](x,t) + \int\limits_{\max\{t_i(x,t),0\}}^{t} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j^n + f_i\Big)[(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)]d\tau, \quad i \in \{1,...,n\}, \tag{11}$$

де

$$\sigma_{2k}[u^n](x,t) = \begin{cases} g_{2k}(\varphi_{2k}(0;x,t)), \quad \text{при } (x,t) \in P_{2k}^+, \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t)) u_{2j-1}^n(l, t_{2k}(x,t)) + r_{2k}(t_{2k}(x,t)), \\ \qquad \text{при } (x,t) \in P_{2k}^-, \end{cases} \tag{12}$$

$$\sigma_{2k-1}[u^n](x,t) = \begin{cases} g_{2k-1}(\varphi_{2k-1}(0;x,t)), \quad \text{при } (x,t) \in P_{2k-1}^-, \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t)) u_{2j}^n(0, t_{2k-1}(x,t)) + h_{2k-1}(t_{2k-1}(x,t)), \\ \qquad \text{при } (x,t) \in P_{2k-1}^+. \end{cases} \tag{13}$$

Означення 1. *Неперервну функцію* $u : \Pi \to \mathfrak{M}$, *яка задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (9), *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (1)-(3).

Аналогічно визначимо узагальнений розв'язок укороченої задачі як неперервний розв'язок системи (11). Позначимо $a_i \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(x,t)|$, $\alpha_{2i-1} \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\alpha_{2i-1,2j}(t)|$, $\beta_{2i} \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\beta_{2i,2j-1}(t)|$.

Теорема 1. *Нехай вихідні дані задачі* (1)-(3) *задовольняють умови:*

1) $\lambda \in C^{\infty}(\Pi) \cap \mathrm{Lip}_x(\Pi)$;

2) для довільного $i \in \mathbb{N}$, *функції* $a_i \in C(\Pi)$, $\alpha_{2i-1} \in C[0,T]$, $\beta_{2i} \in C[0,T]$ *обмежені*

$$a_i(x,t) \leqslant a(x,t),$$
$$\alpha_{2i-1}(t) \leqslant \alpha(t),$$
$$\beta_{2i}(t) \leqslant \beta(t),$$

де $a(x,t), \alpha(t), \beta(t)$ *– деякі неперервні функції;*

3) для довільної $u \in D$, *де* D *– обмежена область простору* C^{∞}, *виконуються обмеження:*

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x,t) u_j(x,t) + f_i(x,t)\Big| \leqslant A_i,$$

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{2i-1,2j}(t) u_{2j}(0,t)\Big| \leqslant \Lambda_{2i-1},$$

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{2i,2j-1}(t) u_{2j-1}(l,t)\Big| \leqslant B_{2i},$$

де $A_i, \Lambda_{2i-1}, B_{2i}$ *– деякі сталі, причому* $A_i, \Lambda_{2i-1}, B_{2i} \to 0$, *при* $i \to \infty$;

4) виконуються умови погодження нульового порядку:

$$g_{2i-1}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{2i-1,2j}(0) g_{2j}(0) + h_{2i-1}(0), \qquad i \in \mathbb{N},$$

$$g_{2i}(l)=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{2i,2j-1}(0)g_{2j-1}(l)+r_{2i}(0),\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Тоді розв'язок задачі (1)-(3) *та задачі для вкороченої системи* (6), (2),(3) *будуть як завгодно близькі при достатньо великому, але скінченному значенні n.*

Доведення. Нехай $A=\max\limits_{(x,t)\in\Pi}\{|a(x,t)|\}$, $\Lambda=\max\limits_{t\in[0,T]}\{|\alpha(t)|\}$ та $B=\max\limits_{t\in[0,T]}\{|\beta(t)|\}$.

Оцінимо різницю $|u_i(x,t)-u_i^n(x,t)|$ для $i\in\{n+1,...\}$. Нехай спочатку $i=2k$ та $(x,t)\in P_{2k}^{+}$. Одержимо оцінку

$$|u_{2k}(x,t)-u_{2k}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k}[u](x,t)-g_{2k}(\varphi_{2k}(0;x,t))|+\int\limits_0^t A_{2k}d\tau\leqslant TA_{2k}\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Якщо $i=2k$ та $(x,t)\in P_{2k}^{-}$, то матимемо

$$|u_{2k}(x,t)-u_{2k}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k}[u](x,t)-\sum_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]}\beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t))u_{2j-1}^n(l,t_{2k}(x,t))-$$

$$-\sum_{j=[\frac{n+1}{2}]+1}^{\infty}\beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t))g_{2j-1}(\varphi_{2k}(0;l,t_{2k}(x,t)))-r_{2k}(t_{2k}(x,t))|+\int\limits_{t_{2k}(x,t)}^{t}A_{2k}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant TA_{2k}+2B_{2k}\to 0, \text{ при } k\to\infty.$$

Тепер нехай $i=2k-1$, та $(x,t)\in P_{2k-1}^{-}$. Тоді

$$|u_{2k-1}(x,t)-u_{2k-1}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k-1}[u](x,t)-g_{2k-1}(\varphi_{2k-1}(0;x,t))|+$$

$$+\int\limits_0^t A_{2k-1}d\tau\leqslant TA_{2k-1}\to 0, \text{ при } k\to\infty.$$

Якщо $i=2k-1$, та $(x,t)\in P_{2k-1}^{+}$, то

$$|u_{2k-1}(x,t)-u_{2k-1}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k-1}[u](x,t)-\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}\alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))u_{2j}^n(0,t_{2k-1}(x,t))-$$

$$-\sum_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty}\alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))g_{2j}(\varphi_{2k-1}(0;0,t_{2k-1}(x,t)))-h_{2k-1}(t_{2k-1}(x,t))|+$$

$$+\int\limits_{t_{2k-1}(x,t)}^{t}A_{2k-1}d\tau\leqslant TA_{2k-1}+2\Lambda_{2k-1}\to 0, \text{ при } k\to\infty.$$

Отже, для $i\in\{n+1,...\}$ та довільного $\delta>0$ при досить великому значенні n буде виконуватися

$$|u_i(x,t)-u_i^n(x,t)|<\delta,$$

для довільного $(x,t)\in\Pi$.

Нехай $U(t)=\sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ x,\tau\leqslant t}}\{|u_i(x,\tau)-u_i^n(x,\tau)|\}$.

Оцінимо різницю $|u_i(x,t)-u_i^n(x,t)|$ для $i\in\{1,...,n\}$. Для $i=2k$ та $(x,t)\in P_{2k}^+$ правильна оцінка

$$|u_{2k}(x,t)-u_{2k}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k}[u](x,t)-\sigma_{2k}[u^n](x,t)|+$$
$$+\int\limits_0^t\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\big(a_{2k,j}(u_j-u_j^n)\big)[(\varphi_{2k}(\tau;x,t),\tau)]\Big|d\tau\leqslant TA\delta+A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau.$$

Якщо $i=2k$ та $(x,t)\in P_{2k}^-$, то

$$|u_{2k}(x,t)-u_{2k}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k}[u](x,t)-\sigma_{2k}[u^n](x,t)|+$$
$$+\int\limits_{t_{2k}(x,t)}^t\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\big(a_{2k,j}(u_j-u_j^n)\big)[(\varphi_{2k}(\tau;x,t),\tau)]\Big|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t))(u_{2j-1}(l,t_{2k}(x,t))-u_{2j-1}^n(l,t_{2k}(x,t)))\Big|+TA\delta+A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant TA\delta+A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau+B(\delta+\max_{\substack{1\leqslant j\leqslant[\frac{n+1}{2}],\\ (x,t)\in P_{2k}^-}}\{|u_{2j-1}(l,t_{2k}(x,t))-u_{2j-1}^n(l,t_{2k}(x,t))|\}).$$

Нехай тепер $i=2k-1$ та $(x,t)\in P_{2k-1}^-$. Тоді

$$|u_{2k-1}(x,t)-u_{2k-1}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k-1}[u](x,t)-\sigma_{2k-1}[u^n](x,t)|+$$
$$+\int\limits_0^t\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\big(a_{2k,j}(u_j-u_j^n)\big)[(\varphi_{2k-1}(\tau;x,t),\tau)]\Big|d\tau\leqslant TA\delta+A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau.$$

Якщо $i=2k-1$ та $(x,t)\in P_{2k-1}^+$, то

$$|u_{2k-1}(x,t)-u_{2k-1}^n(x,t)|\leqslant|\omega_{2k-1}[u](x,t)-\sigma_{2k-1}[u^n](x,t)|+$$
$$+\int\limits_{t_{2k-1}(x,t)}^t\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\big(a_{2k,j}(u_j-u_j^n)\big)[(\varphi_{2k-1}(\tau;x,t),\tau)]\Big|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))(u_{2j}(0,t_{2k-1}(x,t))-u_{2j}^n(0,t_{2k-1}(x,t)))\Big|+TA\delta+A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant TA\delta+A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau+\Lambda(\delta+\max_{\substack{1\leqslant j\leqslant[\frac{n}{2}],\\ (x,t)\in P_{2k-1}^+}}\{|u_{2j}(0,t_{2k-1}(x,t))-u_{2j}^n(0,t_{2k-1}(x,t))|\}).$$

Оцінимо різниці $|u_{2j-1}(l,t_{2k}(x,t))-u_{2j-1}^n(l,t_{2k}(x,t))|$ та $|u_{2j}(0,t_{2k-1}(x,t))-$ $-u_{2j}^n(0,t_{2k-1}(x,t))|$. Якщо $(x,t)\in P_{2k}^-$, то

$$|u_{2j-1}(l,t_{2k}(x,t))-u_{2j-1}^n(l,t_{2k}(x,t))|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t_{2k}(x,t)} \Big|\sum_{p=1}^{\infty} \big(a_{2j-1,p}(u_p - u_p^n)\big)[(\varphi_{2j-1}(\tau; l, t_{2k}(x,t)), \tau)]\Big| d\tau \leqslant TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau.$$

Для $(x,t) \in P^+_{2k-1}$ одержимо

$$|u_{2j}(0, t_{2k-1}(x,t)) - u^n_{2j}(0, t_{2k-1}(x,t))| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t_{2k-1}(x,t)} \Big|\sum_{p=1}^{\infty} \big(a_{2j,p}(u_p - u_p^n)\big)[(\varphi_{2j}(\tau; 0, t_{2k-1}(x,t)), \tau)]\Big| d\tau \leqslant TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau.$$

Тому для всіх $(x,t) \in \Pi$ та $i = 2k$ матимемо

$$|u_{2k}(x,t) - u^n_{2k}(x,t)| \leqslant B\delta + TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau + B(TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau).$$

Для $i = 2k-1$ та $(x,t) \in \Pi$ одержимо

$$|u_{2k-1}(x,t) - u^n_{2k-1}(x,t)| \leqslant \Lambda\delta + TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau + \Lambda(TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau).$$

Звідси одержимо, що для всіх $i \in \{1, ..., n\}$ та $(x,t) \in \Pi$

$$|u_i(x,t) - u^n_i(x,t)| \leqslant (B+\Lambda)\delta + TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau + (B+\Lambda)(TA\delta + A\int\limits_0^t U(\tau)d\tau).$$

Тому для функції $U(t)$ матимемо

$$U(t) \leqslant (TA(\Lambda + B + 1) + \Lambda + B)\delta + A(\Lambda + B + 1)\int\limits_0^t U(\tau)d\tau.$$

За лемою Гроноулла-Беллмана отримаємо

$$U(t) \leqslant (TA(\Lambda+B+1)+\Lambda+B)\delta e^{A(\Lambda+B+1)t} \leqslant (TA(\Lambda+B+1)+\Lambda+B)\delta e^{A(\Lambda+B+1)T}.$$

Вибравши досить мале значення δ, завдяки вибору досить великого n, можна досягнути того, що для всіх $i \in \{1, ..., n\}$ буде виконуватися

$$|u_i(x,t) - u^n_i(x,t)| < \varepsilon,$$

а це означає, що для довільного $i \in \mathbb{N}$,

$$|u_i(x,t) - u^n_i(x,t)| < \varepsilon.$$

Теорема доведена. □

Список використаної літератури

1. *Самойленко А.М.* Счетные системы дифференциальных уравнений / *А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинський.* – К.: Ин-т математики, 1993. – 308 с.

2. *Камбулов В.Ф.* Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике / *В.Ф. Камбулов, А.Ю. Колесов* // Матем. моделирование. – 1996.– Т. 8, №1. – С. 93-102.
3. *Недокіс В.А.* Зліченноточкові крайові задачі для диференціальних рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / *В.А. Недокіс.* – Київ, 2006. – 25 с.
4. *Яцюк В.Т.* К исследованию счетных систем дифференциальных уравнений в пространстве C^∞ / *В.Т. Яцюк*: Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. – К.: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1971. – С. 218-239.
5. *Хома Г.П.* Вкорочення зчисленної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних / *Г.П. Хома, В.Т. Яцюк* // Укр. мат. журн. – 1972. – Т. 24, №3. – С. 417-420.
6. *Фірман Т.І.* Розв'язність задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку / *Т.І. Фірман* // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2013. – Вип. 24, №2. – С. 206-213.
7. *Аболиня В.Э.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости / *В.Э. Аболиня, А.Д. Мышкис* // Матем. сб. – 1960. – Т. 50, Вып. 4. – С. 423-442.

Стаття: надійшла до редакції 21.02.2014
прийнята до друку 28.02.2014

TRUNCATION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR COUNTABLE LINEAR HYPERBOLIC SYSTEM

Taras FIRMAN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: tarasfirman91@ukr.net

We study the initial-boundary problem for a countable hyperbolic system of the first order linear equations with two independent variables in a rectangle. The corresponding truncated problem was constructed.

Key words: hyperbolic system, linear equation, truncated problem, method of characteristic.

УСЕЧЕНИЕ СМЕШАНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЧЁТНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тарас ФИРМАН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tarasfirman91@ukr.net

К смешанной задачи в прямоугольнике для счетной гиперболической системы линейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными построено укороченную задачу.

Ключевые слова: гиперболическая система, линейные уравнения, укороченная задача, метод характеристик.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 163–168
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 163–168

УДК 512.552.13

BEZOUT MORPHIC RINGS

Bohdan ZABAVSKY, Oksana PIHURA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: b_ strannik@ukr.net

In this paper we established that the finite homomorphic images of a commutative Bezout domain are morphic rings. We described the commutative Bezout domains, whose finite homomorphic images are the Kasch rings. Moreover, we presented an example of a commutative morphic ring which is not a clean ring.

Key words: morphic ring, Bezout ring, Kasch ring.

The concept of morphic ring was introduced by Nicholson and Sanchez Campos in [11]. This class of rings is rather important and they are of particular interest in modern research. It is known that the commutative morphic rings are Bezout rings.

In this paper we will prove that finite homomorphic images of a commutative Bezout domain are morphic rings. We will describe the commutative Bezout domains whose finite homomorphic images are Kasch rings. In addition, we construct an example of a commutative morphic ring which is not a clean ring.

We will recall all the necessary definitions and facts. We denote $U = U(R)$ for the group of units of R, denote left and right annihilators of a subset $X \subseteq R$ by $l(X)$ and $r(X)$ respectively, and we write $\mathbb{Z}$ for the ring of integers and $\mathbb{Z}_n$ for the ring of integers modulo n.

If R is a commutative ring then $l(a) = r(a)$ for all elements a in R, where $l(a)$ and $r(a)$ are left and right annihilators of an element a respectively, and in this case we write $\mathrm{Ann}(a) = l(a) = r(a)$.

All necessary definitions and facts can be found in [1], [2], [11]-[15].

Definition 1. *An element a in a ring R is called left morphic if $R/Ra \cong l(a)$ as left R-modules. The ring R is called left morphic if every its element is left morphic. The right morphic rings are defined analogously. The ring R is called morphic if it is left and right morphic* [2], [11]-[15].

Lemma 1. [11] *The following statements are equivalent for an element a in a ring R:*

1) *An element a is left morphic, i. e. $R/Ra \cong l(a)$.*
2) *There exists an element b in a ring R such that $Ra = l(b)$ and $l(a) = Rb$.*

3) *There exists an element b in a ring R such that $Ra = l(b)$ and $l(a) \cong Rb$.*

Definition 2. *A ring R is called uniquely morphic if for any element a in the ring R there exists a unique element b in the ring R such that $Ra = l(b)$ and $l(a) = Ra$* [15].

Definition 3. *A commutative ring R is called P-injective if for any element a in the ring R we have that* $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(aR)) = aR$ [14].

Definition 4. *A ring R is called a Bezout ring if all finitely generated ideals are principal* [16].

Theorem 1. [2, 11] *Let R be a commutative morphic ring. Then:*

1) *for any element a in a ring R we have* $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(aR)) = aR$ *(i. e., a ring R is a P-injective ring);*
2) *for any finite set of elements $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in a ring R there exists an element b in R such that $a_1R \cap a_2R \cap \ldots \cap a_nR = bR$ (that is finite intersection of principal ideals is again principal one);*
3) *for any finite set of elements $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in a ring R there exists an element b in R such that $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = bR$ (that is R is Bezout ring).*

Definition 5. *A commutative ring R is said to be coherent if*

1) *the annihilator of any element a in R is a finitely generated ideal, and*
2) *finite intersection of any finitely generated ideals is again finitely generated* [14].

Thus from previous theorem we obtain that morphic rings are coherent.

Definition 6. *A commutative ring R is called almost Baer if for any element x there exists an element y such that* $\operatorname{Ann}(xR) = yR$ [16].

Gathering known facts about Bezout rings we have:

Theorem 2. *Let R be a commutative Bezout domain. Then for any nonzero element $a \in R$ we have:*

1) *R/aR is a coherent ring;*
2) *R/aR is a P-injective ring;*
3) *R/aR is a morphic ring.*

Proof. 1) From [16] we know that ring R/aR is almost Baer ring and using Theorem 1 we obtain that R is a coherent ring.

2) This is proved in [14].

3) Let $\overline{b}$ be an element in the ring $\overline{R} = R/aR$. Then we have $\operatorname{Ann}(\overline{bR}) = \overline{cR}$, because $\overline{R}$ is an almost Baer ring. As $\overline{R}$ is a P-injective ring, then we have $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(\overline{bR})) = \overline{bR}$ and finally $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(\overline{bR})) = \operatorname{Ann}(\overline{cR})$. Hence we have $\overline{bR} = \operatorname{Ann}(\overline{cR})$.

Therefore for any element $\overline{b}$ there exists $\overline{c}$ such that $\operatorname{Ann}(\overline{b}) = \overline{cR}$ and $\operatorname{Ann}(\overline{c}) = \overline{bR}$ that is $\overline{R}$ is a morphic ring (according to Lemma 1).

Definition 7. *An element a in a ring R is called clean if it is the sum of an idempotent and a unit in R. If all elements in R are clean then R called clean* [2, 8, 10].

Note that the clean rings are PM-rings (that means that any its prime ideal belongs to a unique maximal ideal) [4, 10].

As a consequence of this fact we can give an example of a commutative morphic ring that is not clean. It is a negative answer to a question in the article [11].

Let R be Henriksen ring [9], namely $R = \{z_0 + a_1x + a_1x^2 + \ldots | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots\}$. It is known that R is a commutative Bezout domain [9]. The factor ring R/xR according to Theorem 2 is a morphic ring but it is not clean since any homomorphic image of the ideal $N = \{a_1x + a_1x^2 + \ldots | a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots\}$ is an ideal N/xR that is prime, but belongs to all maximal ideals in the factor ring R/xR. That is why R/xR is not clean because any clean ring has to be a PM-ring. Note that $xR \neq N$ whereas $1/2 \in N$ but $1/2 \notin xR$.

So we have a negative answer to the problem in [11].

Definition 8. *A ring R is called a left Kasch ring if every simple left R-module embeds in ${}_RR$ that is $r(L) \neq 0$ for every (maximal) left ideal L in a ring R* [14].

Theorem 3. *Let R be a commutative Bezout domain R and a is some nonzero element in R. The following statements are equivalent:*

1) *R/aR is a Kasch ring;*
2) *Any maximal ideal M that contains the element a is principal.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Let us consider a Kasch ring R/aR and let $\overline{M}$ be a maximal ideal in this ring. We can write $\mathrm{Ann}(\overline{M}) = \overline{H}$ where $\overline{H}$ is an ideal in R/aR and $\overline{H} \neq \{\overline{0}\}$. Since $\overline{H}$ annihilates the maximal ideal $\overline{M}$, we can write $\overline{HM} = \{\overline{0}\}$. Since the maximal ideal $\overline{M}$ belongs to $\mathrm{Ann}(\overline{H})$, by maximality of $\overline{M}$, we have that $\overline{M} = \mathrm{Ann}(\overline{H}) \neq \overline{R}$.

Since $\overline{M}$ is a maximal ideal, then for every element $\overline{d} \neq \overline{0}$ which belongs to the ideal $\overline{H}$ we have the equality $\overline{dM} = \{\overline{0}\}$. Thus we obtain that the maximal ideal $\overline{M}$ belongs to $\mathrm{Ann}(\overline{d})$, where $\overline{d}$ is a nonunit.

Hence $\overline{M} = \mathrm{Ann}(\overline{d}) = \overline{bR}$ because R/aR is a morphic ring. Therefore, $\overline{M} = \overline{bR}$ and $M = bR + aR = cR$, because R is a commutative Bezout domain for some $c \in R$.

Hence M is a maximal ideal which is a principal ideal.

(2) $\Rightarrow$ (1). Suppose that any maximal ideal M that contains an element a, is a principal one. Considering its homomorphic image we have $\overline{M} = \overline{m}\overline{R} = \mathrm{Ann}(\overline{n}\overline{R})$ because R/aR is a morphic ring. Since $\overline{m} \notin U(\overline{R})$, we have $\mathrm{Ann}(\overline{n}\overline{R}) \neq \overline{R}$ and then $\overline{n}\overline{R} \neq \{\overline{0}\}$.

Then $\mathrm{Ann}(\overline{M}) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\overline{n}\overline{R})) = \overline{n}\overline{R} \neq \{\overline{0}\}$, therefore $\mathrm{Ann}(\overline{M})$ is a nonzero principal ideal, and this proves that R/aR is a Kasch ring.

Corollary 1. *If R is a commutative principal ideal domain, then R/aR is a Kasch ring, for any nonzero $a \in R$.*

Theorem 4. [15] *Any uniquely morphic ring R is one of the following types:*

1) *R is a division ring;*
2) *R is a boolean ring;*
3) *$R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$;*
4) *$R \cong \mathbb{Z}_4$;*
5) *$R \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.*

Definition 9. *A ring R is called a ring of stable range 1 if for any pair of elements $a, b \in R$ such that $aR + bR = R$ there is an element $t \in R$ such that $a + bt \in U(R)$* [1, 8].

Theorem 5. *Any uniquely morphic ring has stable range 1.*

Proof. According to Theorem 4 we may assume that a ring R is one of the five mentioned types.

We are going to prove that the stable range of each of these rings is equal to 1.

Firstly we consider case (2). A ring R is a boolean ring, which means that $x^2 = x$ for any $x \in R$. Then for any $a \in R$ we have $a \cdot 1 \cdot a = a$, that is R is a unit-regular ring. According to [5] the stable range of unit-regular ring equals 1.

Since $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}\}$ is a semilocal ring and $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ is a local ring with maximal ideal $M = (\overline{2})$. All the rings of type (1), (3) and (4) have stable range 1, due to [1].

In case when $R \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ we have a finite ring, so it is a ring with stable range 1.

Theorem is proved.

Definition 10. *We say that a ring R is an elementary divisor ring if any matrix A over R admits a diagonal reduction, that is for the matrix A there exist invertible matrices P and Q of appropriate sizes such that $PAQ = D = (d_i)$ is diagonal matrix such that $Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \cap Rd_i$* [7].

If only 1×2 (2×1) matrices over a ring R admit a diagonal reduction then R is said to be a right (left) Hermite ring. An Hermite ring is a ring which is both right and left Hermite ring [7, 17].

Theorem 6. [17] *A right Bezout ring of stable range 1 is a right Hermite ring.*

Since uniquely morphic rings are morphic and they are Bezout rings, then according to Theorem 5 we can conclude that uniquely morphic rings are Bezout rings of stable range 1. Finally we have obtained next result.

Theorem 7. *Any uniquely morphic ring is an Hermite ring.*

Theorem 8. *Any uniquely morphic ring is an elementary divisor ring.*

Proof. Let R be a uniquely morphic ring. Note that if R is either a boolean ring, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ or $\mathbb{Z}_4$ then R is commutative Bezout ring of stable range 1, since, according to [16] is an elementary divisor ring.

The case when R is a division ring is obvious.

As the field $\mathbb{Z}_2$ is an elementary divisor ring and any matrix ring over an elementary divisor ring is again an elementary divisor ring then in the case of $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ we are done.

Theorem is proved.

References

1. *Bass H.* Algebraic K-Theory. / *H. Bass.* – New York, 1968.
2. *Camillo V.* Left quasi-morphic rings / *V. Camillo, W.K. Nicholson, Z. Wang* // J. Algebra Appl. – 2008. – Vol. 7, №6. – P. 725-733.
3. *Camillo V.* Exchange, rings, units and idempotents / *V. Camillo, H.-P. Yu* // Comm. Algebra. – 1994. – Vol. 22. – P. 4737-4749.

4. *Contessa M.* On certain classes of PM-rings / *M. Contessa* // Com. Algebra. – 1984. – Vol. 12. – P. 1447-1469.
5. *Goodearl K.R.* Von Neumann Regular Rings: Second edition / *K.R. Goodearl* – Malabar: Robert E. Krieger Publishing Co., 1991.
6. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings / *M. Henriksen* // Michigan Math. J. – 1955. – Vol. 156. – P. 159-163.
7. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *I. Kaplansky* // Trans. Amer. Mat. Sven. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
8. *Lam T.Y.* A First Course in Noncommutative Rings / *T.Y. Lam.* – New York: Springer-Verlag, 1991.
9. *Larsen M.* Elemetary divisor rings and finitely presented modules / *M. Larsen, W. Lewis, T. Shores* // Trans. Amer. Mat. Sven. – 1974. – Vol. 187. – P. 231-248.
10. *Nicholson W.K.* Lifting idempotents and exchange rings / *W.K. Nicholson* // Trans. Amer. Mat. Sven. – 1977. – Vol. 229. – P. 269-279.
11. *Nicholson W.K.* Rings with the dual of the isomorphism theorem / *W.K. Nicholson, E. Sanchez Campos* // J. Algebra. – 2004. – Vol. 271. – P. 391-406.
12. *Nicholson W.K.* Mininjective rings / *W.K. Nicholson, M.F. Yousif* // J. Algebra. – 1997. – Vol. 184. – P. 548-578.
13. *Nicholson W.K.* Principally injective rings / *W.K. Nicholson, M.F. Yousif* // J. Algebra. – 1995. – Vol. 174. – P. 77-93.
14. *Nicholson W.K.* Quasi-Frobenius Rings / *W.K. Nicholson, M.F. Yousif.* – Cambridge University Press, 2003.
15. *Tamer Kosan M.* Uniquely morphic rings / *M. Tamer Kosan, Tsin-Knen Ice, Yigiang Thoun* // J. Algebra. – 2010. – Vol. 217. – P. 1072-1085.
16. *Zabavsky B.V.* Fractionally regular Bezout rings / *B.V. Zabavsky* // Mat. Stud. – 2009. – Vol. 32 – P. 76-80.
17. *Zabavsky B.V.* Diagonal reduction of matrices over rings / *Zabavsky B.V.* – Mat. Studies Monograph Series Vol. 6, 2012.

Стаття: надійшла до редакції 11.02.2014
прийнята до друку 28.02.2014

МОРФІЧНІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ, Оксана ПІГУРА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: b_strannik@ukr.net

Доведено, що скінченний гомоморфний образ комутативної області Безу є морфічним кільцем. Описано комутативні області Безу, скінченні гомоморфні образи яких є кільцями Каша. Наведено приклад комутативного морфічного кільця, яке не є чистим.

Ключові слова: морфічне кільце, кільце Безу, кільце Каша.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79

МОРФИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСКИЙ, Оксана ПИГУРА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: b_strannik@ukr.net

Доказано, что конечный гомоморфный образ комутативной области Безу является морфичным кольцом. Описано комутативные области Безу, конечные гомоморфные образы которых являются кольцами Каша. Наведено пример комутативного морфического кольца, которое не является чистым.

Ключевые слова: морфическое кольцо, кольцо Безу, кольцо Каша.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 169–176
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 169–176

УДК 515.12

PAIRS OF COMPACT CONVEX SETS: CATEGORICAL PROPERTIES

Lidiya BAZYLEVYCH[1], **Oleksandr SAVCHENKO**[2], **Mykhailo ZARICHNYI**[3]

[1] *National University "Lviv Polytechnica", 12 Stepana Bandery Str., 79000 Lviv, e-mail: izar@litech.lviv.ua*
[2] *Kherson State Agrarian University, 23 Rozy Liuksemburg Str., 73006 Kherson, e-mail: savchenko1960@rambler.ru*
[3] *Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, 79000 Lviv, e-mail: izar@litech.lviv.ua*

The main result of this note is to demonstrate that the construction of the space of pairs of compact convex subsets in normed spaces determines a monad in the category of normed spaces and bounded linear operators.

Key words: compact convex set, Banach space, category, monad, lattice.

1. Introduction

The pairs of convex subsets in linear spaces find numerous applications in different areas of mathematics. In particular, they are used in the quasidifferential calculus [4], mathematical economics (in investigations of the Aumann integral [2]).

Different authors (see, e.g., [5, 6, 7]) considered the linear space of the (equivalence classes of) pairs of convex sets. This construction was considered from the categorical point of view in the realm of fuzzy metric spaces by the second named author [10]. In [10], a fuzzy norm on the mentioned linear space was defined and it was proved that the functor of the pairs of polyhedral convex sets (i.e., the convex hulls of finite subsets) determines a monad in a suitable category.

The aim of the present paper is to demonstrate that the construction of the (normed) linear space of the (equivalence classes of) pairs of compact convex sets generates a monad in the category of normed linear spaces. We also discuss the category of algebras determined by this monad.

2. Preliminaries

2.1. **Pairs of compact convex sets.** For every linear topological space X, let $\mathrm{cc}(X)$ denote the set of nonempty compact convex subsets in X. As usual, $+$ stands also for the Minkowski addition: $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$, for every $A,B\in \mathrm{cc}(X)$.

Consider the following equivalence relation $\sim$ on the set $\mathcal{L}(X)=\mathrm{cc}(X)\times\mathrm{cc}(X)$:

$$(A,B)\sim(C,D),\ \text{if } A+D=B+C.$$

The equivalence class containing (A,B) is denoted by $[A,B]$. The quotient set $\mathcal{K}(X)=\mathcal{L}(X)/\sim$ is a linear space with respect to the addition

$$[A,B]+[C,D]=[A+C,B+D]$$

and multiplication by scalar defined by the formula

$$\lambda[A,B]=\begin{cases}[\lambda A,\lambda B], & \text{if } \lambda>0,\\ [-\lambda B,-\lambda A], & \text{if } \lambda<0\end{cases}$$

(see [7]).

Suppose now that $(X,\|\cdot\|)$ is a normed space. Denote by d_H the Hausdorff metric on $\mathrm{cc}(X)$ with respect to the metric d induced by the norm $\|\cdot\|$. It is known (see, e.g., [7]) that the following function $\|\cdot\|'$ is a norm on $\mathcal{K}(X)$: $\|[A,B]\|'=d_H(A,B)$.

Let $\tilde{\mathcal{K}}(X)$ denote the completion of $\mathcal{K}(X)$ with respect to the norm $\|\cdot\|'$. Given a bounded linear operator $f\colon X\to Y$, let a map $\tilde f\colon \mathcal{K}(X)\to\mathcal{K}(Y)$ be defined as follows: $\tilde f([A,B])=[f(A),f(B)]$. It is easy to check that $\tilde f$ is a well-defined linear operator.

For the seek of notational simplicity, in the sequel we will denote all the norms simply by $\|\cdot\|$.

Лема 1. *$\tilde f$ is bounded and $\|\tilde f\|=\|f\|$.*

Доведення. Let $\|[A,B]\|\le 1$. Then $d_H(A,B)\le 1$ and therefore $d_H(f(A),f(B))\le\|f\|$, which is equivalent to $\|[f(A),f(B)]\|\le\|f\|$. Thus $\|\tilde f\|\le\|f\|$. The reverse inequality is obvious. □

This allows us to extend $\tilde f$ and to obtain a bounded linear operator $\tilde{\mathcal{K}}(X)\to\tilde{\mathcal{K}}(Y)$. We denote it by $\tilde{\mathcal{K}}(f)$.

Denote by **Ban** the category of Banach spaces and bounded linear operators. We therefore obtain a functor $\tilde{\mathcal{K}}\colon \mathbf{Ban}\to\mathbf{Ban}$.

2.2. **Monads and algebras.** Recall some necessary definitions concerning the monads; see, e.g., [1] for details.

Означення 1. *A monad $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ in a category $\mathcal{C}$ consists of an endofunctor $T\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ and natural transformations $\eta\colon 1_{\mathcal{C}}\to T$ (unit), $\mu\colon T^2=T\circ T\to T$ (multiplication) that satisfy the following relations: $\mu\circ T\eta=\mu\circ\eta T=\mathbf{1}_T$ and $\mu\circ\mu T=\mu\circ T\mu$. In other* *words, the following two diagrams are commutative:*

$$\begin{tikzcd} T^3(X) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T^2(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "T(\eta_X)"] \arrow[dr, "1"'] & T^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] & T(X) \arrow[l, "\eta_{T(X)}"'] \arrow[dl, "1"] \\ & T(X) & \end{tikzcd}$$

The left side diagram is referred to as the associativity and the second one as the two-side unit.

Означення 2. *Let $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ be a monad on a category $\mathcal{C}$. A pair (X, ξ), where X is an object of $\mathcal{C}$ and $\xi\colon T(X) \to X$ a morphism of is called a $\mathbb{T}$-algebra if the diagrams*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "1"'] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ & X \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "T\xi"'] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ TX \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

are commutative.

Означення 3. *A morphism $\varphi\colon X \to Y$ is said to be a morphism of $\mathbb{T}$-algebras $(X, f) \to (Y, g)$, if the diagram*

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "T\varphi"] \arrow[d, "f"'] & TY \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1}$$

commutes.

$\mathbb{T}$*-algebras and their morphisms form a category which we denote by $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$.*

3. Result

Given a Banach space X, denote by $\eta_X : X \to \mathcal{K}(X)$ the map acting by the formula: $\eta_X(x) = [\{x\}, \{0\}]$.

Твердження 1. $\eta = (\eta_X)$ *is a natural transformation*

Доведення. We first note that, for any $x, y \in X$, we have

$$d(\eta_X(x), \eta_X(y)) = \|[\{x\}, \{0\}] - [\{y\}, \{0\}]\| = \|[\{x\}, \{y\}]\| = d_H(\{x\}, \{y\}) = d(x, y).$$

Clearly, η_X is a linear map. Given a bounded linear operator $f\colon X \to Y$, we obtain, for any $x \in X$,

$$\mathcal{K}(f)\eta_X(x) = \mathcal{K}(f)([\{x\}, \{0\}]) = [\{f(x)\}, \{0\}] = \eta_Y f(x),$$

i.e., η is a natural transformation. □

By completing, one also obtains a natural transformation from the identity functor to the functor $\tilde{\mathcal{K}}$. We keep the notation η for this transformation.

By $\mathrm{conv}(A)$ we denote the convex hull of a set A in a linear space. If $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, then we denote it convex hull by $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. For any linear space X, let $\mathcal{K}_p(X)$ denote the set of equivalence classes of pairs of convex polyhedra in X, i.e., convex hulls of nonempty finite sets in X.

Лема 2. *Let Y be a dense set in $\mathrm{cc}(X)$, where X is a Banach space. Then the set $\{[A,B]\in\mathcal{K}(X)\mid A,B\in Y\}$ is dense in $\mathcal{K}(X)$. In particular, if Z is a dense subset in X, then the set*

$$\{[A,B]\in\mathcal{K}(X)\mid A,B \text{ are convex polyhedra with vertices in } Z\}$$

is dense in $\mathcal{K}(X)$.

Доведення. The proof follows that of the corresponding result from from [9]. □

For any subsets $A,B\subset X$, let $A\vee B=\mathrm{conv}(A\cup B)$.
For any $[A,B],[C,D]\in\mathcal{K}(X)$ let

$$[A,B]\oplus[C,D]=[(A+D)\vee(B+C),B+D].$$

The space $\mathcal{K}(X)$ forms a vector lattice with respect to the operation $\oplus$.
Recall the construction from [10]. Suppose that $[\mathcal{A},\mathcal{B}]\in\mathcal{K}_p^2(X)$, then there exist

$$[A_i,C_i],[B_j,D_j]\in\mathcal{K}_p(X),\ i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,l,$$

such that

$$\mathcal{A}=\langle[A_1,C_1],\dots,[A_k,C_k]\rangle,\ \mathcal{B}=\langle[B_1,D_1,],\dots,[B_l,D_l]\rangle.$$

Then we let

$$\mu_X([\mathcal{A},\mathcal{B}])=([A_1,C_1]\oplus\dots\oplus[A_k,C_k])+([D_1,B_1,]\oplus\dots\oplus[D_l,B_l]).$$

The following lemma is proved in [10].

Лема 3. *Let*

$$M=\langle[A_1,B_1],\dots,[A_k,B_k]\rangle\subset L_p(X).$$

Then

$$\begin{aligned}\sup M=&[(A_1+B_2+\dots+B_k)\vee(B_1+A_2+B_3\dots+B_k)\\&\vee(B_1+B_2+\dots+A_k),B_1+\dots+B_k].\end{aligned}$$

This lemma implies the following formula (see [10]):

$$\mu_X([\mathcal{A},\mathcal{B}])=\max(\mathcal{A})-\max(\mathcal{B}).$$

Лема 4. *The map μ_X is a linear operator of norm 1.*

Доведення. This is proved in [10]. □

Now note that $\mathcal{K}_p(X)$ is a dense subset of the space $\mathcal{K}(X)$ and therefore in $\tilde{\mathcal{K}}(X)$. Using Lemma 2 we conclude that the set $\mathcal{K}_p^2(X)=\mathcal{K}_p(\mathcal{K}_p(X))$ is dense in $\tilde{\mathcal{K}}^2(X)$. Therefore one can extend the natural transformation μ to a unique natural transformation from $\tilde{\mathcal{K}}^2(X)$ to $\tilde{\mathcal{K}}(X)$. We keep the same notation μ also for this extended transformation.

Теорема 1. *The triple $\mathbb{K}=(\tilde{\mathcal{K}},\eta,\mu)$ is a monad on the category* **Ban**.

Доведення. The commutativity of the diagrams from the definition of monads is proved in [10] for the case of the classes of equivalence of pairs of polyhedral compact convex sets. Since these classes form, by Lemma 2, a dense subset in the spaces $\tilde{\mathcal{K}}^3(X)$, one can conclude that the diagram representing the associativity property of the multiplication is also commutative.

□

Let X be a Banach lattice. We refer to [8] for the basic facts concerning Banach lattices. We denote the supremum of $x, y \in X$ by $x \oplus y$. Recall that X is an AM-space if $\|x \oplus y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ for all $x, y \geq 0$.

Теорема 2. *The category of* $\mathbb{K}$*-algebras is isomorphic to the category of Banach lattices and linear lattice homomorphisms.*

Доведення. Let (X, ξ) be a $\mathbb{K}$-algebra. Define an operation $\oplus\colon X \times X \to X$ by the formula

$$x \oplus y = \xi(\eta_X(x) \oplus \eta_X(y)) = \xi([\langle x, y\rangle, \{0\}]).$$

Note that

$$\begin{aligned}\|x \oplus y\| \leq & d_H(\langle x, y\rangle, \{0\}) \leq \max\{d(tx + (1-t)y, 0) \mid t \in [0,1]\} \\ \leq & \max\{t\|x\| + (1-t)\|y\| \mid t \in [0,1]\} \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}.\end{aligned}$$

Clearly, $x \oplus x = x$, for any $x \in X$.

Let $x, y, z \in X$. We are going to prove that $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$. Consider the element

$$\alpha = [\langle [\langle x, y\rangle, \{0\}], [\{z\}, \{0\}]\rangle, \mathcal{K}(\eta_X)(\eta_X(0))] \in \mathcal{K}^2(X).$$

Then

$$\begin{aligned}\mu_X(\alpha) = & \max\{[\langle x, y\rangle, \{0\}], [\{z\}, \{0\}]\} - \max \mathcal{K}(\eta_X)(\eta_X(0))] = [\langle x, y, z\rangle, \{0\}] - [\{0\}, \{0\}] \\ = & [\langle x, y, z\rangle, \{0\}].\end{aligned}$$

On the other hand,

$$\mathcal{K}(\xi)(\alpha) = [\langle \xi([\langle x, y\rangle, \{0\}]), \xi([\{z\}, \{0\}])\rangle, \eta_X(0))] = [\langle x \oplus y, z\rangle, \{0\}].$$

Therefore, from the definition of algebra it follows that

$$(x \oplus y) \oplus z = \xi([\langle x \oplus y, z\rangle, \{0\}]) = \xi([\langle x, y, z\rangle, \{0\}]).$$

One can similarly prove that

$$x \oplus (y \oplus z) = \xi([\langle x, y, z\rangle, \{0\}]).$$

One can easily prove that $(X, \oplus)$ is a Banach lattice.

Now let $(X, \oplus)$ be a Banach lattice. Define $\xi\colon \mathcal{K}(X) \to X$ by the formula: $\xi([A, B]) = \max A - \max B$. First note that ξ is well-defined. Indeed, if $[A, B] = [C, D]$, then $A + D = B + C$ and therefore

$$\max A + \max D = \max(A + D) = \max(B + C) = \max B + \max C.$$

We have $\xi\eta_X(x) = \xi([\{x\}, \{0\}]) = x - 0 = x$, for every $x \in X$.

Now let $\alpha = [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \in \mathcal{K}_p^2(X)$,

$$\mathcal{A} = \langle [A_1, B_1], \ldots, [A_m, B_m]\rangle,\ \mathcal{B} = \langle [C_1, D_1], \ldots, [C_n, D_n]\rangle.$$

Then

$$\mu_X(\alpha) = \max\mathcal{A} - \max\mathcal{B} = [A_1, B_1] \oplus \cdots \oplus [A_m, B_m] - [C_1, D_1] \oplus \cdots \oplus [C_n, D_n]$$

and, since ξ is a lattice homomorphism,

$$\xi\mu_X(\alpha) = \max_i(\max A_i - \max B_i) - \max_j(\max C_j - \max D_j).$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\xi)(\alpha) = [&\langle \max A_1 - \max B_1, \dots, \max A_m - \max B_m\rangle,\\ &\langle \max C_1 - \max D_1, \dots, \max C_n - \max D_n\rangle]\end{aligned}$$

and therefore

$$\xi\mathcal{K}(\xi)(\alpha) = \max_i(\max A_i - \max B_i) - \max_j(\max C_j - \max D_j) = \xi\mu_X(\alpha).$$

Note that any nonexpanding lattice preserving linear operator generates a morphism of the corresponding $\mathbb{K}$-algebras.

We are going to show that the described correspondences between the Banach lattices and $\mathbb{K}$-algebras are inverse to each other. We temporarily denote by $\oplus_\xi$ the lattice operation on X that corresponds to the $\mathbb{K}$-algebra (X, ξ) and by $\xi_\oplus$ the structure map of the $\mathbb{K}$-algebra that corresponds to the lattice operation $\oplus$.

Given $(X, \oplus)$, for any $x, y \in X$ we obtain

$$x \oplus_\xi y = \xi([\langle x, y\rangle], \{0\}]) = \max\langle x, y\rangle - \max\{0\} = x \oplus y.$$

On the other hand, given (X, ξ), for any $A = \langle a_1, \dots, a_m\rangle \subset X$, $A = \langle b_1, \dots, b_n\rangle \subset X$ we obtain

$$\begin{aligned}\xi_\oplus([A, B]) =& \max\langle a_1, \dots, a_m\rangle - \max\langle b_1, \dots, b_n\rangle = a_1 \oplus \cdots \oplus a_m - b_1 \oplus \cdots \oplus b_n\\ =&\xi([\langle a_1, \dots, a_m\rangle, \{0\}]) - \xi([\langle b_1, \dots, b_b\rangle, \{0\}]) = \xi([A, B]).\end{aligned}$$

This finishes the proof of the theorem. □

4. Pairs of compact convex subsets of constant width

A compact convex subset A in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is said to be a set of constant width $d > 0$ if $A - A = \overline{B_d(0)}$ (the closed ball of radius d centered at the origin). Topology of the hyperspace of compact convex sets of constant width in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, was studied in [3].

Let S^{n-1} denote the unit sphere in $\mathbb{R}^n$. Given a compact convex body $A \subset \mathbb{R}^n$, define the support function $h_A\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ by the formula: $h_A(v) = \max\{\langle x, v\rangle \mid x \in A\}$, for $v \in S^{n-1}$ (here $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stands for the inner product in $\mathbb{R}^n$). Then one can reformulate the definition of the bodies of constant width, namely, A is of constant width $\lambda > 0$ if $|h_A(v) - h_A(-v)| = \lambda$, for every $v \in S^{n-1}$.

Denote by $\mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$ the family

$$\{[A, B] \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \mid [A, B] = [C, D], \text{ where } C, D \text{ are of constant width}\}.$$

Твердження 2. *The set $\mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$ is a closed linear subspace in $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.*

Доведення. Suppose that $[A_i, B_i] \in \mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$. Then there exist compact convex sets C_i, B_i of constant width in $\mathbb{R}^n$ such that $[A_i, B_i] = [C_i, D_i]$, $i = 1, 2$. We obtain

$$[A_1, B_1] + [A_2, B_2] = [C_1, D_1] + [C_2, D_2] = [C_1 + C_2, D_1 + D_2] \in \mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n),$$

because the Minkowski sum of bodies of constant width is again of constant width. It is also easy to demonstrate that $\alpha[A, B] \in \mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$, for any $[A, B] \in \mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$ and $\alpha \in \mathbb{R}$.

Closedness of $\mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ easily follows from the fact that the set $\mathrm{cw}(\mathbb{R}^n)$ of compact convex bodies of constant width is closed in the hyperspace $\mathrm{cc}(\mathbb{R}^n)$.

□

Let $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$ denote the completion of the space $\mathcal{K}_{\mathrm{cw}}(\mathbb{R}^n)$. We obtain a functor $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathrm{cw}}$ from the category of finite-dimensional Euclidean spaces and orthoprojectors to the category **Ban**. This follows from the fact that the orthogonal projection of any body of constant width is also a body of constant width.

5. Remarks and open questions

It looks plausible that the results of this note can be generalized, on one hand, to the case of locally convex spaces and, on the other hand, to the case of convex bounded subsets in normed (locally convex) spaces.

Список використаної літератури

1. *Barr M.* Toposes, triples and theories. / *M. Barr., Ch. Wells* – Berlin: Springer, 1985.
2. *Baier R.* Computing Aumann's integral / *R. Baier, F. Lempio* – In: Modeling techniques for uncertain systems, Proceedings of a conference held in Sopron, (Ed. A. Kurzhanski, et al.), Sopron, Hungary, July 6–10, 1992, Birkhauser. Prog. Syst. Control Theory. 18, 71–92.
3. *Bazylevych L.E.* On convex bodies of constant width /*L.E. Bazylevych, M.M. Zarichnyi* // Topol. Appl. – 2006. – Vol. 153, №11. P. 1699-–1704.
4. *Demyanov V.F.* Quasidifferential calculus / *V.F. Demyanov, A.M. Rubinov* – Optimization Software Inc., Publications Division, New York, 1986.
5. *Godet-Thobie Ch.,* Sur le plongement de l'ensemble des convexes, fermés, bornés d'un espace vectoriel topologique localement convexe dans un espace vectoriel topologique localement convexe. / *Ch. Godet-Thobie, Pham The Lai* // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. – 1970. – Vol. 271, P. A84–A87.
6. *Hörmander L.* Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convex / *L. Hörmander* // Ark. Mat. – 1954. – Vol. 3, P. 181–186.
7. *Pinsker A. G.* The space of convex sets of a locally convex space / *A.G. Pinsker* // Leningrad. Inzh.-Ekonom. Inst. Trudy. – 1966, Vyp. 63, P. 13–17.
8. *Schaefer H.H.* Banach lattices and positive operators /*H.H. Schaefer* New York: Springer-Verlag, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 215.
9. *Schmidt K.D.* Embedding theorems for classes of convex sets / *K.D. Schmidt* // Acta Appl. Math. – 1986. – Vol. 5, №3, P. 209–237.
10. *Савченко О.* Пари опуклих множин у розмитих нормованих просторах / *О. Г. Савченко* // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9, С. 285–296.

Стаття: надійшла до редакції 10.06.2014
прийнята до друку 14.10.2014

ПАРИ КОМПАКТНИХ ОПУКЛИХ МНОЖИН: КАТЕГОРНІ ВЛАСТИВОСТІ

Лідія БАЗИЛЕВИЧ[1], Олександр САВЧЕНКО[2], Михайло ЗАРІЧНИЙ[3]

[1] Національний університет "Львівська політехніка", вул. Степана Бандери, 12, Львів, 79000, e-mail: izar@litech.lviv.ua
[2] Херсонський державний аграрний університет, вул. Рози Люксембург, 23, Херсон, 73006, e-mail: savchenko1960@rambler.ru
[3] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: mzar@litech.lviv.ua

Основний результат полягає в тому, що конструкція пар компактних опуклих підмножин у нормованих просторах визначає монаду в категорії нормованих просторів і обмежених лінійних операторів.

Ключові слова: компактна опукла множина, банаховий простір, категорія, монада, ґратка.

ПАРЫ КОМПАКТНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ: КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА

Лидия БАЗИЛЕВИЧ[1], Александр САВЧЕНКО[2], Михаил ЗАРИЧНЫЙ[3]

[1] Национальный университет "Львовская политехника", ул. Степана Бандеры, 12, Львов, 79000, e-mail: izar@litech.lviv.ua
[2] Херсонский государственный аграрный университет, ул. Розы Люксембург, 23, Херсон, 73006
[3] Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1, Львов, 79000

Основной результат состоит в том, что конструкция пространства пар компактных выпуклых множеств в нормированном пространстве определяет монаду в категории нормированных пространств и ограниченных линейных операторов.

Ключевые слова: компактное выпуклое множество, банахово пространство, категория, монада, решетка.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме на CD-RW диску (редколегія повертає авторові диск; тексти можна надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською, англійською та російською мовами, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Кравчук О.М.* Назва / О.М. Кравчук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — С. 79–90.
2. *Aramis D.K.* Title / D.K. Aramis // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — Vol. 377. — P. 450–463.
3. *Класний О.М.* Назва / О.М. Класний, М.М. Потічний // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 2, №2. — С. 4–20.
4. *Грабович А.І.* Назва / А.І. Грабович. — К., 1985.
5. *Петренко О.Б.* Назва / О.Б. Петренко, М.М. Шинк. — Л., 2001.

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / Г.Д. Михайленко. — Л.: ІППММ, 1993. — 9 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

7. *Михайленко Г.Д.* Назва / Г.Д. Михайленко, С.І. Степаняк. — Л.: ІППММ, 1993. — 9 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

8. *Колмаз Ю.А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / *Ю.А. Колмаз.* — К., 2008. — 20 с.

9. *Сеник С.М.* Назва / С.М. Сеник. — К., 1992. — 17 с. — Деп. в ДНТБ України, В2020–1995.

10. *Сеник С.М.* Назва / С.М. Сеник, І.Т. Мандрик. — К., 1992. — 17 с. — Деп. в ДНТБ України, В2020–1995.

11. *Муравський В.К.* Назва / В.К. Муравський // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня — 2 вересня 1994 р., Київ. — К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. — С. 540–551.

12. *Муравський В.К.* Назва / В.К. Муравський, С.В. Ліско // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня — 2 вересня 1994 р., Київ. — К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. — С. 540–551.