УДК 517.512.7

В.О.ГУКЕВИЧ

ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ПРО ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ ВСЮДИ РЯДІВ, ЩО МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНІ ЗА БЕЛМАНОМ

Систему $\{\varphi_k(x)\}$ називаємо системою майже ортогональних за Белманом функцій, якщо

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = 1 \quad ,$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}^2 < \infty \quad ,$$

$$a_{mn} = \begin{cases} \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx, & \text{коли } m \neq n \\ 0, & \text{коли } m = n. \end{cases}$$

Справедлива така лема.

Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ - система майже ортогональна за Белманом на $[a,b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$,

а $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x)$.

Тоді існує функція $f \in L_2(a,b)$, для якої

$$\rho_n = \int_a^b [f(t) - S_n(t)]^2 dt \to 0, \qquad n \to \infty,$$

при цьому ρ_n зобразимо у вигляді

$$\rho_n = \sum_{n+1}^{\infty} b_k^2 + 2\sum_{n+1}^{\infty} b_k(b_k - c_k) - \sum_{n+1}^{\infty}\sum_{n+1}^{\infty} a_{k\ell}\, b_k\, b_\ell$$

де $c_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt$.

Д о в е д е н н я. З умови $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$ виникає існування функції $f \in L_2(a,b)$, для якої

$$\rho_n = \int_a^b [f(t)-S_n(t)]^2 dt \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Але

$$\rho_n = \int_a^b f^2(t)dt - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(b_k - c_k) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k b_\ell a_{k\ell} . \qquad /1/$$

Використовуючи відтак відому для майже ортогональної за Белманом системи нерівність [1]

$$|b_k - c_k| \le \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}^2\Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

а також нерівність Шварца, одержуємо

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k(b_k - c_k)\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \sqrt{\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}^2} .$$

і далі

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} b_k b_\ell\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \sqrt{\sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}^2} .$$

З двох останніх нерівностей виникає законність граничного переходу в рівності (1).

Таким чином,

$$\int_a^b f^2(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k(b_k - c_k) - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_\ell a_{k\ell} . \qquad (2)$$

З (1) і (2) одержуємо твердження леми.

Т е о р е м а. Нехай $\{\varphi_\kappa(x)\}$ система майже ортогональних за Белманом функцій на $[a,b]$ числа $v(n)$ необмежено зростають разом з n і

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 v(k) < \infty \quad .$$

Нехай далі $\{n_k\}$ - така неспадна послідовність індексів, що $k^2 \leq v(n_k)$.
Тоді послідовність

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x)\right\}$$

збігається майже всюди на $[a,b]$.

Доведення теореми аналогічне доведенню подібного твердження для ортогональної системи [I] . Розглядаемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k}$.

Використовуючи перетворення Абеля, допоміжну лему і умови теореми, показуемо його збіжність.

З останнього, міркуючи як у випадку ортогональної системи, дістаємо твердження теореми.

Для системи майже ортогональної за Белманом справедливе також твердження подібне до відповідного твердження для ортогональної системи [I], доведене аналогічно.

Якщо ряд Фур'е функції $f \in L_2(a,b)$ за майже ортогональною в сенсі Белмана системою $\{\varphi_n(t)\}$ сумується методом Чезаро першого порядку майже всюди, то послідовність $\{S_{2^k}(f;t)\}$,

де

$$S_n(f;t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t),$$

$$c_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\,dt,$$

збігається майже всюди.

Розглядаючи питання про збіжність майже всюди послідовності

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(t) \qquad \text{за умови} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$$

легко переконатись у тому, що лема 5.3.4 з [I] (стор. 188) переноситься на випадок, коли система $\{\varphi_k(t)\}$ майже ортогональна за Белманом.

Використовуючи цю лему, а також умову майже ортогональності системи, і міркуючи як під час доведення теореми 5.3.5 з [1] (стор. 190), переконуємось у справедливості такого твердження.

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) < \infty$ і система $\{\varphi_n(t)\}$ є системою майже ортогональною за Белманом на $[a,b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ збігається майже всюди на $[a,b]$

Справедливе також твердження, яке є перенесенням на майже ортогональну за Белманом систему відомого результату для ортогональних систем [1] (стор. 352).

Для будь-якої майже ортогональної за Белманом на $[a,b]$ системи існує послідовність $\{m_i\}$, що залежить тільки від системи $\{\varphi_n(x)\}$, для якої частинні суми $S_{m_i}(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$ збігається майже всюди на $[a,b]$, коли $m_i \to \infty$, якщо тільки $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$.

З останньої теореми випливає як і для ортогональної системи [1] (стор. 357) існування для системи майже ортогональної за Белманом безконечної підсистеми збіжності.

Також теорема Д.Є.Меньшова про множники Вейля [1] (стор. 365) і близька їй теорема (9.27) (див. там же) переноситься без зміни на системи майже ортогональні за Белманом.

Л і т е р а т у р а

1. К а ч м а ж С. и Ш т е й н г а у з Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.
