УДК 517.94

К.С.КОСТЕНКО

ГРУПОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЗВИЧАЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ТА ЗОБРАЖЕННЯ ЇХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Окремі частинні розв'язки звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь n -го порядку

$$u^{(n)}+p_0(x)u^{(n-1)}+\dots+p_n(x)u=0 \tag{1}$$

інколи вдається знаходити у заданому вигляді. Кожний зі знайдених лінійно незалежних частинних розв'язків такого рівняння, як відомо, дає можливість понизити його порядок на одиницю. Отже, якщо для лінійного рівняння (1) будуть відомі $n-1$ частинні лінійно незалежні розв'язки, то таке рівняння можна звести до лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку, а інтегрування останнього приводить до побудови фундаментальної системи розв'язків рівняння (1).

Зокрема, якщо для лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку

$$u'''+p_0(x)u''+p_1(x)u'+p_2(x)u=0 \tag{2}$$

відомі два лінійно незалежні частинні розв'язки $u_1(x)$ і $u_2(x)$, то третій частинний розв'язок $u_3(x)$ цього рівняння зображається формулою

$$u_3(x)=-u_1(x)\int\frac{u_2(x)e^{-\int p_0(x)dx}}{W^2(u_1,u_2)}dx+u_2(x)\int\frac{u_1(x)e^{-\int p_0(x)dx}}{W^2(u_1,u_2)}dx, \tag{3}$$

де $W(u_1,u_2)$ – детермінант Вронського розв'язків $u_1(x)$ і $u_2(x)$. Легко переконатись, що $W(u_1,u_2,u_3)\neq 0$ і тому $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ є фундаментальна система розв'язків рівняння (2).

Коли ж для рівняння (1) відомі лише $n-2$ частинні лінійно незалежні розв'язки, то знаходження фундаментальної системи розв'язків такого рівняння можна звести до знаходження розв'язку рівняння Ріккаті.

Мета нашої роботи полягає в тому, щоб знайти достатні умови на коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)$, при виконанні яких є можливість визначити фундаментальну систему розв'язків рівняння (2) у замкнутій формі

Шукаючи розв'язки рівняння (2) у вигляді

$$u = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx}\, y, \tag{4}$$

одержимо, що нова невідома функція $y(x)$ повинна задовольняти рівняння

$$y''' + A(x)y' + B(x)y = 0, \tag{5}$$

де

$$A(x) = -\frac{p_0^2(x)}{3} - p_0'(x) + p_1(x), \qquad B(x) = \frac{2p_0^3(x)}{27} - \frac{p_0''(x)}{3} - \frac{p_0(x)p_1(x)}{3} + p_2(x). \tag{6}$$

Враховуючи, що можливість інтегрування звичайних диференціальних рівнянь у замкнутій формі тісно пов'язана з їх груповими властивостями, знайдемо спочатку умови на коефіцієнти $A(x)$ і $B(x)$ рівняння (5), при виконанні яких це рівняння буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень.

Застосовуючи з цією метою до рівняння (5) необхідну і достатню ознаку С. Лі [3] інваріантності диференціальних рівнянь відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf = \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{7}$$

одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $\xi(x,y)$ і $\eta(x,y)$ оператора (7):

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

$$A'\xi + 2A\frac{\partial \xi}{\partial x} + 3\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0,$$

$$B'y\xi + B\eta + A\frac{\partial \eta}{\partial x} - By\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 3\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0,$$

з якої випливає

$$\xi(x,y) = \xi(x), \qquad \eta(x,y) = (\xi'(x) + \alpha_0)y + \eta(x). \tag{8}$$

Причому $\xi(x)$ повинна бути нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\xi''' + A\xi' + \frac{A'}{2}\xi = 0, \\ &\xi^{(IV)} + A\xi''' + 3B\xi' + B'\xi = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$\eta(x)$ – розв'язком рівняння (5), α_0 – довільною сталою.

Розглянемо спочатку випадок, коли відомий лише тривіальний розв'язок рівняння (5) і приймемо в зв'язку з цим $\eta(x)=0$. Тоді, якщо $\xi(x)\neq 0$ розв'язок системи (9), рівняння (5) буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами

$$U_1 f=\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}+\xi'(x)y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad U_2 f=y\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{10}$$

З а у в а ж е н н я. Щоб знайти нетривіальні розв'язки системи (9), коли вони існують, достатньо знати будь-який частинний розв'язок $\tilde{\xi}(x)\neq 0$ першого рівняння цієї системи.

Дійсно, якщо відомий частинний розв'язок $\tilde{\xi}(x)\neq 0$ першого рівняння системи (9), то завжди можна знайти [2] фундаментальну систему розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння

$$y''+\frac{A(x)}{4}y=0. \tag{11}$$

У свою чергу фундаментальна система розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння (11) дає змогу побудувати [1] і фундаментальну систему розв'язків $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$ першого рівняння системи (9) у формі

$$\xi_1(x)=y_1^2(x),\quad \xi_2(x)=y_1(x)y_2(x),\quad \xi_3(x)=y_2^2(x). \tag{12}$$

Після цього залишається лише перевірити, чи будуть функції (12) розв'язками другого рівняння системи (9).

Але система (9) при довільно заданих коефіцієнтах $A(x)$ і $B(x)$, взагалі кажучи, не має нетривіальних розв'язків. А тому вважатимемо $\xi(x)\neq 0$ довільно заданою достатньо гладкою функцією і знаходити умови на коефіцієнти $A(x)$ і $B(x)$, при виконанні яких ця функція буде розв'язком системи (9).

Розглядаючи систему (9) як систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно A і B та інтегруючи її, знаходимо

$$\begin{aligned} A(x)&=\frac{1}{\xi^2(x)}\left(D_1-2\xi''(x)\xi(x)+\xi'^2(x)\right),\\ B(x)&=\frac{1}{\xi^3(x)}\left(D_2-\xi'''(x)\xi^2(x)+2\xi''(x)\xi'(x)\xi(x)-D_1\xi'(x)-\xi'^3(x)\right), \end{aligned} \tag{13}$$

де D_1, D_2 – довільні сталі.

Таким чином, якщо коефіцієнти рівняння (5) задовольняють умовам (13) при довільно заданій достатньо гладкій функції $\xi(x) \neq 0$, то таке рівняння буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами (10). Тому що інфінітезімальні оператори (10) лінійно незв'язані, а їх дужка Пуасона $(U_1, U_2)f = 0$, то ця група перетворень має канонічну форму

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \qquad U_2 f = \frac{\partial f}{\partial \chi},$$

причому

$$\zeta = \int \frac{dx}{\xi(x)}, \qquad \chi = \ln \frac{y}{\xi(x)}. \tag{14}$$

У цих змінних рівняння (5) набере вигляду

$$\frac{d^3\chi}{d\zeta^3} + 3\frac{d\chi}{d\zeta}\frac{d^2\chi}{d\zeta^2} + \left(\frac{d\chi}{d\zeta}\right)^3 + D_1\frac{d\chi}{d\zeta} + D_2 = 0. \tag{5'}$$

Прийнявши спочатку $\frac{d\chi}{d\zeta} = z$, а потім $\frac{dz}{d\zeta} = p$, рівняння (5') зведемо до рівняння першого порядку

$$p\frac{dp}{dz} + 3zp + z^3 + D_1 z + D_2 = 0. \tag{5''}$$

Останнє рівняння має розв'язки у вигляді

$$p = \alpha z^2 + \beta z + \gamma, \tag{15}$$

якщо

$$\begin{aligned} &2\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0, && \beta(\alpha + 1) = 0, \\ &2\alpha\gamma + \beta^2 + 3\gamma + D_1 = 0, && \beta\gamma + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Існують такі розв'язки системи (16): $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = -\frac{D_1}{2}$, якщо $D_2 = 0$ і $\alpha_2 = -1$, $\gamma_2 = -\frac{D_2}{\beta_2}$, де $\beta_2 \neq 0$ – дійсний корінь рівняння

$$\beta^3 + D_1\beta - D_2 = 0. \tag{17}$$

Розглянемо спочатку випадок, для якого $\alpha_2 = -1$, $\gamma_2 = -\frac{D_2}{\beta_2}$, $\beta_2 \neq 0$ – дійсний корінь рівняння (17). У цьому випадку (15) стане рівнянням

$$-d\zeta = \frac{dz}{\left(z - \frac{\beta_2}{2}\right)^2 + \frac{D_2}{\beta_2} - \frac{\beta_2^2}{4}},$$

інтегрування якого з наступним врахуванням (14) і того, що $\chi = \int z\, d\zeta$, одержуємо у замкнутій формі два частинні лінійно незалежні розв'язки

$y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (5), коефіцієнти якого задовольняють умовам (13):

$$y_1(x)=\xi(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\xi(x)}}\cos\left(a\int\frac{dx}{\xi(x)}\right),\quad y_2(x)=\xi(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\xi(x)}}\sin\left(a\int\frac{dx}{\xi(x)}\right),\qquad (18')$$

якщо $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}=a^2>0;$

$$y_1(x)=\xi(x)e^{\left(\frac{\beta_2}{2}+a\right)\int\frac{dx}{\xi(x)}},\quad y_2(x)=\xi(x)e^{\left(\frac{\beta_2}{2}-a\right)\int\frac{dx}{\xi(x)}},\qquad (18'')$$

якщо $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}=-a^2;$

$$y_1(x)=\xi(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\xi(x)}},\quad y_2(x)=\xi(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\xi(x)}}\int\frac{dx}{\xi(x)},\qquad (18''')$$

якщо $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}=0$.

Третій частинний розв'язок $y_3(x)$ рівняння (5) знаходимо за формулою (3), в якій потрібно прийняти $u_1(x)=y_1(x)$, $u_2(x)=y_2(x)$ і $p_0(x)=0$. У результаті обчислення інтегралів, що входять у цю формулу, одержуємо

$$y_3(x)=\xi(x)e^{-\beta_2\int\frac{dx}{\xi(x)}}.\qquad (19)$$

Отже, формули $(18')$ – $(18''')$, (19) залежно від знаку виразу $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}$ дають фундаментальну систему розв'язків рівняння (5), коефіцієнти якого задовольняють умовам (13) при довільно заданій тричі неперервно диференційованій функції $\xi(x)$ і довільних сталих D_1 і D_2 . При цьому $\beta_2\neq 0$ – дійсний корінь рівняння (17).

Розглянемо тепер випадок, коли рівняння (17) може мати корінь $\beta_1=0$. Тоді $D_2=0$, $\alpha_1=-\frac{1}{2}$, $\gamma_1=-\frac{D_1}{2}$. Зауважимо, що при $D_2=0$ коефіцієнти рівняння (5), які задовольняють умовам (13), зв'язані рівністю $B(x)=\frac{A'(x)}{2}$. Тому рівняння (5) збігається з першим рівнянням системи (9), а ліва частина другого рівняння системи (9) є першою похідною лівої частини першого рівняння цієї ж системи. У зв'язку з цим довільний достатньо гладкий розв'язок першого рівняння системи (9) буде розв'язком і другого рівняння цієї системи. Таким чином, щоб побудувати у цьому випадку двопараметричну групу перетворень (10), відносно якої рівняння (5) було б інваріантним, достатньо знайти який-небудь нетривіальний розв'язок цього ж рівняння. А довільна достатньо гладка функція $\xi(x)=y_1(x)$ буде розв'язком рівняння (5), якщо його коефіцієнти задовольняють умовам

$$A(x)=\frac{1}{\xi^2(x)}\left(D_1-2\xi''(x)\xi(x)+\xi'^2(x)\right),\qquad B(x)=\frac{A'(x)}{2}, \qquad (13')$$

де D_1 - довільна стала.

Інтегрування рівняння

$$-d\xi=\frac{2dz}{z^2+D_1}$$

аналогічно попередньому випадку приводить до побудови фундаментальної системи розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ рівняння (5), коефіцієнти якого задовольняють умовам (13'). При цьому залежно від знака сталої D_1 маємо:

$$y_1(x)=\xi(x),\quad y_2(x)=\xi(x)\cos\left(\sqrt{D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}\right),\quad y_3(x)=\xi(x)\sin\left(\sqrt{D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}\right), \qquad (20')$$

якщо $D_1>0$;

$$y_1(x)=\xi(x),\quad y_2(x)=\xi(x)e^{\sqrt{-D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}},\quad y_3(x)=\xi(x)e^{-\sqrt{-D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}}, \qquad (20'')$$

якщо $D_1<0$;

$$y_1(x)=\xi(x),\quad y_2(x)=\xi(x)\int\frac{dx}{\xi(x)},\quad y_3(x)=\xi(x)\left(\int\frac{dx}{\xi(x)}\right)^2, \qquad (20''')$$

якщо $D_1=0$.

Таким чином, умови (13) при довільному виборі функції $\xi(x)$ і сталих D_1, D_2 дають можливість побудувати деякий клас лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку виду (5), фундаментальну систему розв'язків кожного з яких можна знайти у замкнутій формі.

Зокрема, фундаментальну систему розв'язків рівняння (5) зі сталими коефіцієнтами A і B можна дістати залежно від знака виразу $\frac{D_2}{\beta_2} - \frac{\beta_2^2}{4}$ з формул (18′) – (18‴), (19). При цьому $\xi(x)=1$, $D_1=A$, $D_2=B\neq 0$, а $\beta_2\neq 0$ – дійсний корінь рівняння (17).

Те ж саме має місце і для рівняння Ейлера

$$y''' + \frac{a_0}{x^2}y' + \frac{b_0}{x^3}y = 0$$

при $\xi(x)=x$, $D_1=a_0-1$, $D_2=a_0+b_0\neq 0$. Якщо ж $D_2=0$, то фундаментальну систему розв'язків цих рівнянь залежно від знака сталої D_1 одержуємо з формул (20′) – (20‴).

Фундаментальна система розв'язків рівняння (2) може бути одержана у замкнутій формі з фундаментальної системи розв'язків рівняння (5) за допомогою формули (4), якщо коефіцієнти (6) задовольняють умовам (13).

У тому випадку, коли система (9) має лише тривіальний розв'язок $\xi(x)\equiv 0$ і, як наслідок, коефіцієнти рівняння (5) не задовольняють умовам (13), але все ж таки з деяких міркувань можна знайти один частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (5), то прийнявши $\eta(x)=y_1(x)$, матимемо з (8) $\xi(x,y)=0$, $\quad \eta(x,y)=\alpha_0 y + y_1(x)$. (8′)

Отже, рівняння (5) і (2) будуть інваріантними відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами відповідно

$$U_1f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_2f = y_1(x)\frac{\partial f}{\partial y} \quad і \quad U_1f = u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad U_2f = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx}y_1(x)\frac{\partial f}{\partial u}$$

Використання канонічних змінних цих груп перетворень дає лише можливість звести такі рівняння до рівняння Рікатті, що можна простіше зробити і без використання групових властивостей рівнянь (5) і (2).

Якщо відомі два частинні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (5), то (5) і (2) будуть інваріантними відносно трипараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами відповідно

$$U_1f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_2f = y_1(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_3f = y_2(x)\frac{\partial f}{\partial y}$$

і

$$U_1f = u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad U_2f = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx}y_1(x)\frac{\partial f}{\partial u}, \quad U_3f = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx}y_2(x)\frac{\partial f}{\partial u}$$

Але для знаходження фундаментальної системи розв'язків рівняння (5) і (2) в такому випадку немає потреби використовувати груповий метод їх інтегрування, бо простіше можна діяти з використанням формули (3).

Таким чином, якщо коефіцієнти рівнянь (5) і (2) з врахуванням (6) не задовольняють умовам (13), то знаходження трипараметричної групи перетворень, відносно якої такі рівняння залишилися б інваріантними, є задачею еквівалентною задачі знаходження їх фундаментальної системи розв'язків.

Ми переконались, що серед відомих лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку, фундаментальна система розв'язків яких зображується у замкнутій формі, зустрічаються лише такі, для яких або виконуються умови (13) або порівняно легко в деякому заданому вигляді можна знайти два частинні лінійно незалежні розв'язки.

Література

1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ГИФМЛ, М., 1961, с. 536, № 3.15.
2. К о с т е н к о К. С. Про умови інтегрування в квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
3. S. L i e. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig, 1891.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ВИПАДКОВА КОНТИНУАЛЬНА ЗГОРТКА

1. В с т у п. Нехай невід'ємнозначна випадкова змінна ξ має густину

$$g(t)=\begin{cases} \equiv 0, & t<0, \\ c\delta(t)+(1-c)g_1(t), & t\geq 0, \end{cases} \tag{1}$$