Але для знаходження фундаментальної системи розв'язків рівняння (5) і (2) в такому випадку немає потреби використовувати груповий метод їх інтегрування, бо простіше можна діяти з використанням формули (3).

Таким чином, якщо коефіцієнти рівнянь (5) і (2) з врахуванням (6) не задовольняють умовам (13), то знаходження трипараметричної групи перетворень, відносно якої такі рівняння залишилися б інваріантними, є задачею еквівалентною задачі знаходження їх фундаментальної системи розв'язків.

Ми переконались, що серед відомих лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку, фундаментальна система розв'язків яких зображується у замкнутій формі, зустрічаються лише такі, для яких або виконуються умови (13) або порівняно легко в деякому заданому вигляді можна знайти два частинні лінійно незалежні розв'язки.

## Література


1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ГИФМЛ, М., 1961, с. 536, № 3.15.

2. К о с т е н к о К. С. Про умови інтегрування в квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.

3. S. L i e. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig, 1891.


---

УДК 519.21


І.Д.КВІТ


# ВИПАДКОВА КОНТИНУАЛЬНА ЗГОРТКА

1. В с т у п. Нехай невід'ємнозначна випадкова змінна $\xi$ має густину

$$g(t) = \begin{cases} = 0, & t<0, \\ c\delta(t) + (1-c)_1\nu(t), & t \geq 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0,\\ 0, & t>0,\end{cases}\qquad \int_0^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{2}$$

та

$$p(t)\geq 0,\qquad \int_0^{\infty}p(t)dt=1, \tag{3}$$

$C$ – стала, $0\leq C\leq 1$ . Густина суми двох незалежних невід'ємнозначних випадкових змінних, відповідно з густинами $q_1(t)$ і $q_2(t)$ дорівнює згортці

$$q_1 * q_2(t)\equiv\int_0^t q_1(\tau)q_2(t-\tau)d\tau,\qquad t\geq 0. \tag{4}$$

Зокрема, коли два незалежні доданки однаково розподілені з густиною (1), то густину суми, тобто згортку $q*q(t)$ , позначаємо коротше через $q(t)\big|_*^2$ .

У [3] розглянуто поняття континуальної згортки $p(t)\big|_*^{\ell}$ порядку $\ell>0$ , $p(t)\big|_*^0=\delta(t)$ , $p(t)\big|_*^1=p(t)$ , та деякі його застосування. Покажемо, що бувають випадки, коли при довільній невід'ємнозначній випадковій змінній $\lambda$ символ $q(t)\big|_*^{\lambda}$ має сенс і є густиною. Тоді вираз $q(t)\big|_*^{\lambda}$ називається випадковою $\lambda$-згорткою. Якщо $\lambda$ має густину, то $q(t)\big|_*^{\lambda}$ називається випадковою континуальною $\lambda$-згорткою. Випадкові згортки дуже розширюють клас розподілів, а також використовуються для виведення генеалогії одних розподілів з інших.

2. Зображення густини. Лапласівське інтегральне перетворення густини (3) назвемо зображенням і позначимо через $\varphi(z)$

$$\varphi(z)=\mathcal{L}p(t)=\int_0^{\infty}e^{-zt}p(t)dt,\qquad z=x+iy=\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z,\quad i=\sqrt{-1}. \tag{5}$$

Оскільки

$$\mathcal{L}\delta(t)=1, \tag{6}$$

то зображення (1) запишемо

$$\chi(z)=\mathcal{L}q(t)=c+(1-c)\varphi(z),\qquad \mathrm{Re}\,z>0 \tag{7}$$

Звернемо увагу на дві властивості зображення (7).

а) З того, що $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=0$ при $Re z \geqslant 0$ . (порівн. (9) в [3])

і $\mathcal{F}(t)=\int\limits_0^t q(t)dt=c+(1-c)\int\limits_0^t p(t)dt,\ t\geqslant 0$ та $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^t p(t)dt=0$,

випливає, що

$$\lim_{z\to\infty}\chi(z)=c=\lim_{t\to+0}\mathcal{F}(t)\ , \qquad Re z \geqslant 0. \tag{8}$$

Оскільки $\varphi(x)$ у (7) з ростом $x$ від $0$ до $\infty$ монотонно спадає від 1 до 0, то $\chi(x)$ визначає функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$ за формулою

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\,,\\ \frac{1-\chi(x)}{1-c}\ , & x\geqslant 0\,.\end{cases} \tag{8'}$$

Таким чином, кожній невід'ємнозначній випадковій змінній з густиною (1) та зображенням (7) ставиться у відповідність невід'ємнозначна випадкова змінна з функцією розподілу (8′).

б) Оскільки

$$\mathcal{L}q(t)\Big|_*^n=\chi^n(z)=\left[c+(1-c)\varphi(z)\right]^n\ ,\quad (n=2,3,\dots), \tag{9}$$

то згортка $n$ -го порядку густини (1) набирає вигляду

$$q(t)\Big|_*^n=\sum_{k=0}^{n}b(k;n,1-c)\,p(t)\Big|_*^k\ ,\qquad (n=2,3,\dots), \tag{10}$$

де

$$b(k;n,1-c)=\frac{n!}{k!(n-k)!}c^{n-k}(1-c)^k,\quad (0<c<1;\ k=0,1,\dots,n) - \tag{11}$$

біномний розподіл.

Зауважимо, що більшість властивостей, перелічених у [3] , для зображення $\varphi(z)$ переноситься з відповідними змінами на зображення (7).

3. С у м і ш  г у с т и н. Нехай випадкова змінна $\xi$ має густину (1), залежну від невід'ємнозначного параметра $\ell$

$$q(t)=q(t;\ell), \tag{12}$$

в функції $H(\ell)$ є функцією розподілу довільної невід'ємнозначної випадкової змінної $\eta$. Тоді за формулою повної ймовірності функція

$$r(t)=\int_0^\infty q(t;\ell)\,dH(\ell), \quad t\geq 0 \qquad (13)$$

буде безумовною густиною випадкової змінної $\xi$.

Густина (13) називається сумішшю сім'ї густин (12) зі змішувальною функцією розподілу $H(\ell)$. Тобто густина (13) підпорядкована густині (12) з керуючим розподілом $H(\ell)$. Зокрема, якщо $\eta$ має густину $H'(\ell)=h(\ell)$, $\ell\geq 0$, то дістаємо суміш густин

$$r(t)=\int_0^\infty q(t;\ell)\,h(\ell)\,d\ell, \quad t\geq 0 \qquad (14)$$

Очевидно, що зображення суміші сім'ї густин (13) і (14) дорівнює суміші зображень змішуваних густин

$$\mathcal{L}\,r(t)=\int_0^\infty \left\{\mathcal{L}\,q(t;\ell)\right\} dH(\ell), \qquad (15)$$

та

$$\mathcal{L}\,r(t)=\int_0^\infty \left\{\mathcal{L}\,q(t;\ell)\right\} h(\ell)\,d\ell. \qquad (16)$$

4. Випадкова континуальна згортка. Нехай зображення (7) випадкової змінної $\xi$ з густиною (1) задовольняє умову

$$(-1)^n\gamma^{(n)}(z)\geq 0,\ z>0,\ (n=1,2,\ldots);\ \gamma(z)=\left[\ln\frac{1}{\chi(z)}\right]',\ \chi(z)\neq 0,\ \operatorname{Re} z>0 \qquad (17)$$

Тоді при кожному додатному $\ell$, $\chi^{\ell}(z)$ буде зображенням безмежно подільного розподілу, тобто тоді при кожному додатному $\ell$ існує континуальна згортка порядку $\ell$ (порівн. [3])

$$q(t)\Big|_{*}^{\ell}=\mathcal{L}^{-1}\chi^{\ell}(z), \quad (\chi(z)\neq 0,\ \operatorname{Re} z>0;\ \ell>0). \qquad (17)$$

Густина (17) при кожному значенні параметра $\ell$, $\ell>0$ описує деяку випадкому змінну $\eta_\ell$. Нехай далі $\lambda$ невід'ємнозначна випадкова змінна, незалежна від усіх $\eta_\ell$, $\ell>0$, з густиною $h(\ell)$ і зображенням

$$\psi(z)=\int_0^\infty e^{-zl}h(l)dl, \qquad Re\, z>0. \tag{18}$$

Утворимо континуальну суму $\eta_\lambda$ випадкового числа $\lambda$ випадкових змінних $\eta_l$. За формулою повної ймовірності функція розподілу $\eta_\lambda$ дорівнює

$$\mathcal{P}\{\eta_\lambda\le t\}=\int_0^\infty h(l)\mathcal{P}\{\eta_l\le t\}dl. \tag{19}$$

Звідси, упохіднюючи по $t$, дістаемо густину $\eta_\lambda$

$$q(t)\big|_*^\lambda=\int_0^\infty h(l)q(t)\big|_*^l dl. \tag{20}$$

Вираз (20) назвемо випадковою континуальною $\lambda$ -згорткою. Правий бік (20) має вигляд правого боку (14). Отже, (20) є сумішшю континуальних згорток $q(t)\big|_*^l$ зі змішувальною густиною $h(l)$. Таким чином, випадкова континуальна згортка (20) - спеціальна суміш континуальних згорток. Випадкова континуальна згортка $q(t)\big|_*^\lambda$ підпорядкована континуальній згортці $q(t)_*^l$ з керуючою густиною $h(l)$.

Зображення випадкової континуальної згортки (20) з огляду на (16) і (18)

$$\omega(z)=\mathcal{L}q(t)\big|_*^\lambda=\int_0^\infty\left\{\mathcal{L}q(t)\big|_*^l\right\}h(l)dl=\int_0^\infty\chi^l(z)h(l)dl=\psi(-ln\chi(z)), \tag{21}$$

де під $ln\chi(z)$ розуміємо його головне значення; $\chi(z)\ne0$, $Re\, z>0$.

Відзначимо, що коли $\lambda$ має функцію розподілу $H(l)$ і зображення

$$\psi(z)=\int_0^\infty e^{-zl}dH(l), \qquad Re\, z>0, \tag{18'}$$

то

$$q(t)\big|_*^\lambda=\int_0^\infty q(t)\big|_*^l dH(l) \tag{20'}$$

також буде випадковою згорткою, зі зображенням

$$\omega(z)=\int_0^\infty\chi^l(z)dH(l)=\psi(-ln\chi(z)), \quad (\chi(z)\ne0,\ Re\, z>0). \tag{21'}$$

Отже, $\psi(-ln\chi(z))$ є зображенням випадкової згортки $q(t)\big|_*^\lambda$, підпорядкованої континуальній згортці зі зображенням $\chi(z)$, твірної густини (1) та зображенням $\psi(z)$ керуючого розподілу. Звідси

$$q(t)\Big|_{*}^{\lambda} = \mathcal{L}^{-1}\psi(-\ln\chi(z)), \qquad (\chi(z)\neq 0,\ \operatorname{Re} z>0), \tag{20''}$$

де $\mathcal{L}^{-1}$ символізує зворотне перетворення Лапласа.

Таким чином, безмежно подільна невід'ємнозначна випадкова змінна $\xi$ з густиною (1) та зображенням (7) для кожної невід'ємнозначної випадкової змінної $\lambda$ з зображенням $\psi(z)$ породжує деяку випадкову змінну $\eta_\lambda$ з густиною ($20''$).

Оскільки для суперпозиції функцій $\psi(-\ln\chi(z))$, що виступає в ($20''$), відбувається співвідношення

$$\psi_1\big|_{-\ln\chi(z)}\cdot\psi_2\big|_{-\ln\chi(z)} = (\psi_1\psi_2)\big|_{-\ln\chi(z)}, \tag{22}$$

то для незалежних невід'ємнозначних випадкових змінних $\lambda_1$ та $\lambda_2$ зі зображеннями відповідно $\psi_1(z)$ та $\psi_2(z)$ маємо співвідношення

$$\left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_1}\right\} * \left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_2}\right\} = q(t)\Big|_{*}^{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{23}$$

Таким чином, випадкова згортка ($20''$) для довільних незалежних невід'ємнозначних випадкових змінних $\lambda_1$ та $\lambda_2$ задовольняє співвідношення (23). Якщо невід'ємнозначна випадкова змінна $\lambda$ залежить від деякого невід'ємного параметра $\varkappa$, то густина ($20''$) описує однопараметричну сукупність випадкових змінних $\eta_{\lambda_\varkappa}$, тобто деякий випадковий процес. Для такого процесу співвідношення (23) записується у формі

$$\left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_{\varkappa_1}}\right\} * \left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_{\varkappa_2}}\right\} = q(t)\Big|_{*}^{\lambda_{\varkappa_1+\varkappa_2}} \tag{23'}$$

У випадку, коли $\varkappa$ - неперервний параметр, $\varkappa>0$, то процес, керований густиною ($20''$), що задовольняє співвідношення ($23'$), є процесом зі стаціонарними незалежними приростами та густиною ($20''$) приростів $\eta_{\lambda_{\sigma+\tau}}-\eta_{\lambda_\sigma}$, $(\sigma,\tau>0)$, (порівн. [6]).

Очевидно, що співвідношення (22) та (23) узагальнюються до вигляду

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{\psi_j\Big|_{-\ln\chi(z)}\right\}=\left\{\prod_{j=1}^{n}\psi_j\right\}\Big|_{-\ln\chi(z)}, \quad (n=2,3,\ldots) \tag{24}$$

$$\left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_1}\right\}*\left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_2}\right\}*\ldots*\left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_n}\right\}=q(t)\Big|_{*}^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}, \quad (n=2,3,\ldots). \tag{25}$$

5. **П р и к л а д и.** а) Відомо, що тривалість часу очікування початку обслуговування вимоги пуасонівського потоку з інтенсивністю $a$ експонентно обслуговуваного з параметром $b$, $a<b$ при стаціонарному режимі має густину (порівн. [6] )

$$q(t)=\left(1-\frac{a}{b}\right)\cdot\delta(t)+\frac{a}{b}\cdot(b-a)e^{-(b-a)t}, \quad t\geqslant 0. \tag{26}$$

Зображення густини (26) згідно з (7) записуємо

$$\chi(z)=\left(1-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}\cdot\frac{b-a}{z+b-a}, \quad \operatorname{Re} z\geqslant 0. \tag{27}$$

За формулою (8′) на підставі (27) дістаємо функцію розподілу

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\dfrac{b-a}{x+b-a}, & x\geqslant 0\end{cases} \tag{27′}$$

Згортка $n$ -го порядку густини (26) згідно з (10) дорівнює

$$q(t)\Big|_{*}^{n}=\left(1-\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\delta(t)+\sum_{k=1}^{n}B\left(k;n,\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{(b-a)^{k}t^{k-1}e^{-(b-a)t}}{(k-1)!}, \quad t\geqslant 0, \tag{28}$$
$$(0<a<b; \quad n=2,3,\ldots)$$

Як бачимо, густина (28) є бернулевою сумішшю густин Ерланга.

б) Суміш сім'ї гама-густин

$$q(t;\ell)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\ell^{b}}{\Gamma(b)}t^{b-1}e^{-\ell t}, & t\geqslant 0,\end{cases} \quad (b>0,\ \ell\geqslant 0) \tag{29}$$

з мішуквальною гама-густиною

$$h(\ell)=\begin{cases} 0, & \ell<0, \\ \dfrac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\,\ell^{\beta-1}e^{-\alpha\ell}, & \ell\geqslant 0 \quad (\alpha>0,\ \beta>0) \end{cases} \tag{30}$$

за формулою (14) дорівнює

$$r_2(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{\alpha^{\beta}}{B(\theta,\beta)}\,\dfrac{t^{\theta-1}}{(\alpha+t)^{\theta+\beta}}; & t\geqslant 0 \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ \theta>0), \end{cases} \tag{31}$$

де

$$B(\theta,\beta)=\frac{\Gamma(\theta)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta+\beta)}.$$

Густину (31) назвемо бетадва-густиною. При $\alpha=1,\ \theta=\frac{m}{2},\ \beta=\frac{n}{2}$, бетадва-густина стає густиною відомого в статистиці розподілу Фішера для частки сум квадратів незалежних однаково нормально розподілених випадкових змінних зі сподіванням нуль (порівн. [4] ); $m$ - число ступенів вільності в чисельнику, $n$ - у знаменнику. При $\alpha=\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$, $\beta=\frac{\vartheta_1}{2}$, $\theta=\frac{\vartheta_2}{2}$, бетадва-густина розглядається в [2] . При $\theta=1,\ \alpha=\lambda,\ \beta=n$, бетадва-густина збігається з густиною, наведеною в [3] .

Початковий момент порядку $k=1,2,\ \ldots$ бетадва-розподілу (31) існує тільки при $k<\beta$ і дорівнює

$$m_k=\alpha^{k}\,\frac{\Gamma(\theta+k)\,\Gamma(\beta-k)}{\Gamma(\theta)\,\Gamma(\beta)}, \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ \theta>0;\ k<\beta;\ k=1,2,\ldots) \tag{32}$$

Заміна змінної $x=\frac{t}{\alpha+t}$ переводить бетадва-густину (31) у відому в статистиці бетаодин-густину

$$r_1(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\quad 1<x, \\ \dfrac{1}{B(\theta,\beta)}\,x^{\theta-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1, \quad (\theta>0,\ \beta>0). \end{cases} \tag{33}$$

в) Суміш сім'ї густин Вейбула

$$q(t,\ell)=\begin{cases} 0 & t<0, \\ a\ell t^{a-1}e^{-\ell t^{a}}, & t\geqslant 0, \quad (a>0,\ \ell\geqslant 0) \end{cases} \tag{34}$$

зі змішувальною гама-густиною (30) за формулою (14) дорівнює

$$\tilde{r}_3(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{a\beta\alpha^{\beta}t^{a-1}}{(\alpha+t^{a})^{\beta+1}}, & t\geqslant 0, \quad (a>0,\ \alpha>0,\ \beta>0)\end{cases} \tag{35}$$

Густина (35) зустрічається в статистиці та називається густиною розподілу Берра [7] . Заміна змінної $x=\frac{t^a}{\alpha+t^a}$ переводить густину Берра (35) у бетаодин-густину (33) при $\beta=1$. Зворотний перехід від (33) дає густину

$$r_3(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{a\alpha^{\beta}}{B(\beta,\beta)}\,\dfrac{t^{a\beta-1}}{(\alpha+t^{a})^{\beta+\beta}}, & t\geqslant 0,\ (a>0,\ \beta>0,\ \alpha>0,\ \beta>0),\end{cases} \tag{36}$$

яку назвемо бетатри-густиною.

Початковий момент порядку $k=1,2,\ \ldots$ бетатри-розподілу (36) існує тільки при $k<a\beta$ і дорівнює

$$m_k=\alpha^{\frac{k}{a}}\,\frac{\Gamma(\beta+\frac{k}{a})\Gamma(\beta-\frac{k}{a})}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta)},\ (a>0,\ \beta>0,\alpha>0,\ \beta>0;\ k<a\beta;\ k=1,2,\ldots) \tag{37}$$

При $a=1$ бетатри-густина (36) стає бетадва-густиною (31).
Зображення (5) густини (36)

$$\varphi_3(z)=\frac{a}{B(\beta,\beta)}\cdot\frac{1}{(\alpha z^{a})^{\beta}}\int_0^{\infty}t^{a\beta-1}\left(1+\frac{t^{a}}{\alpha z^{a}}\right)^{-\beta-\beta}e^{-t}dt,\ (\mathrm{Re}\,z>0). \tag{38}$$

При $a=1$ (38) записуємо у вигляді

$$\varphi_2(z)=\frac{\Gamma(\beta+\beta)}{\Gamma(\beta)}(\alpha z)^{\frac{\beta-1}{2}}e^{\frac{\alpha z}{2}}W_{\frac{1}{2}-\beta-\frac{\beta}{2},\,-\frac{\beta}{2}}(\alpha z),\quad \mathrm{Re}\,z>0), \tag{39}$$

де

$$W_{k,m}(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^{\infty}t^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt \tag{40}$$

– функція Віттекера, означена для всіх значень $k$ та $m$ і для всіх значень $z$, крім дійсних від'ємних [5].

За формулою (8′) при $c=0$ на підставі (39) одержуємо функцію розподілу

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\dfrac{\Gamma(b+\beta)}{\Gamma(\beta)}(\alpha x)^{\frac{\beta-1}{2}}e^{\frac{\alpha x}{2}}W_{\frac{1}{2}-b-\frac{\beta}{2},\,-\frac{\beta}{2}}(\alpha x), & x>0.\end{cases} \tag{41}$$

При $b=\beta=1$ дістаємо

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \alpha x e^{\alpha x}\left[-Ei(-\alpha x)\right]\equiv\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{1+\frac{t}{\alpha x}}, & x>0,\end{cases} \tag{42}$$

де $Ei(z)$ – інтегральна показникова функція (порівн. [1]), а при $\beta=1-2b$, $0<b<\frac{1}{2}$ одержуємо

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\dfrac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-2b)}\,\dfrac{(\alpha x)^{\frac{1}{2}-b}}{\sqrt{\pi}}\,e^{\frac{\alpha x}{2}}K_{-\frac{1}{2}+b}(\alpha x), & x>0,\end{cases} \tag{43}$$

де $K_{\nu}(z)$ – модифікована функція Бесселя третього роду або функція Макдональда (порівн. [1]).

## Література


1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., "Наука", 1967.
2. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., "Наука", 1965.
3. Квіт І. Д. Континуальна згортка. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. II. М., Физматгиз, 1963.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М., "Мир", 1967.
7. Mathematical Reviews, vol. 38, N 3, September, 1969.