УДК 517.917

Л.М.ЛІСЕВИЧ, Б.В.КОВАЛЬЧУК

S^P-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ МАТРИЦІ ТА ЛІНІЙНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З S^P -МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

1. S^P-майже періодичні матриці та їх елементарні властивості

Розглянемо функціональну матрицю $A=[a_{ik}(x)]$, де $a_{ik}(x)$ - сумовані разом з p -м степенем ($p \geqslant 1$) функції в кожному скінченному інтервалі довжини ℓ, і введемо таку норму:

$$\|A\|_S = \sup_x \sum_{i,k} \left\{ \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} |a_{ik}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (1.1)$$

Введену норму називатимемо S -нормою, а матриці, для яких існує норма (1.1), - S^P -матрицями.

Означення 1. Матриця $\mathcal{F}(x)=[f_{ik}(x)]$ $(-\infty < x < \infty)$ називається S^P-майже періодичною, якщо всі елементи її $f_{ik}(x)$ є S^P -майже періодичними функціями, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ в кожному інтервалі довжини ℓ існує відносно щільна множина чисел τ (ε, S^P -майже періодів) таких, що

$$\|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty)$$

одночасно для всіх i,k.

Теорема 1.1. Ма[illegible]иця $\mathcal{F}(x)$ є S^P-майже періодична тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина чисел τ таких, що

$$\|\mathcal{F}(x+\tau)-\mathcal{F}(x)\|_S < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad (1.2)$$

Доведення. Необхідність. Нехай S^P-майже періодична матриця $\mathcal{F}(x)$ має вимір $m \times n$ і $\varepsilon > 0$ довільне число. Відомо [2], що для скінченної сукупності S^P -майже періодичних функцій існує відносно щільна множина спільних $\frac{\varepsilon}{mn}$, S^P-майже періодів τ таких, що

$$\|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S < \frac{\varepsilon}{mn} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

для всіх i,k.

Тоді маємо

$$\|\mathcal{F}(x+\tau)-\mathcal{F}(x)\|_S \leq \sum_{i,k}\|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S < \varepsilon .$$

Отже, необхідність доведена.

Достатність. Зі співвідношення

$$\|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S \leq \|\mathcal{F}(x+\tau)-\mathcal{F}(x)\|_S < \varepsilon$$

випливає, що всі $f_{ik}(x)$ є S^P-майже періодичними функціями, і, отже, $\mathcal{F}(x)$ є S^P-майже періодичною матрицею.

Твердження теореми (1.1) прийматимемо також за означення S^P-майже періодичності матриці.

Користуючись означенням S^P-майже періодичності матриць, можна довести такі їх властивості.

а) Якщо $\mathcal{F}(x)$ - S^P-майже періодична матриця, то $K\cdot\mathcal{F}(x)$, де K - стала, також є S^P-майже періодичною матрицею.

б) Якщо $\mathcal{F}(x)$ і $\Phi(x)$ - S^P-майже періодичні матриці, що допускають додавання, то $\mathcal{F}(x)+\Phi(x)$ також є S^P-майже періодичною матрицею.

в) Якщо $\mathcal{F}(x)$ - S^P-майже періодична матриця, а A - стала матриця, причому такі, що допускають множення, то $A\cdot\mathcal{F}(x)$ також є S^P-майже періодичною матрицею.

г) Якщо $\mathcal{F}(x)$ - S^P-майже періодична матриця, а $\Phi(x)$ - S^q-майже періодична матриця ($\frac{1}{P}+\frac{1}{q}=1$), причому такі, що допускають множення, то $\mathcal{F}(x)\cdot\Phi(x)$ є S^1-майже періодичною матрицею.

д) S^P-майже періодична матриця $\mathcal{F}(x)$ обмежена за S-нормою, тобто існує така стала $M>0$, що

$$\|\mathcal{F}(x)\|_S < M$$

е) S^P-майже періодична матриця $\mathcal{F}(x)$ рівномірно неперервна за S-нормою, тобто, яке б не було число $\varepsilon>0$, можна вказати таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для $|h|<\delta$ справедливо

$$\|\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)\|_S < \varepsilon \qquad (-\infty<x<\infty).$$

О з н а ч е н н я 2. Будемо говорити, що послідовність S^P-майже періодичних матриць $\{\mathcal{F}_n(x)\} = \{[f_{ik}^{(n)}(x)]\}$ рівномірно прямує за S -нормою до матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$, якщо послідовність функцій $\{f_{ik}^{(n)}(x)\}$ рівномірно прямує до функції $f_{ik}(x)$ за цією ж нормою.

Теорема 1.2. Якщо послідовність S^p -майже періодичних матриць $\{\mathcal{F}_n(x)\}$ рівномірно прямує за S -нормою до матриці $\mathcal{F}(x)$, то $\mathcal{F}(x)$ є S^p -майже періодичною матрицею.

Це твердження доводиться аналогічно як відповідне твердження для S^p -майже періодичних функцій [2] .

Означення 3. Вважатимемо, що матриця $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ має обмежений за S -нормою неозначений інтеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x \mathcal{F}(t)\,dt ,$$

якщо можна вказати таке число $M > 0$, що

$$\|\Phi(x)\|_S < M .$$

Теорема 1.3. Неозначений інтеграл $\Phi(x) = [\varphi_{ik}(x)]$ від S^p -майже періодичної матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ є обмеженим за S -нормою, якщо функції

$$\varphi_{ik}(x) = \int_a^x f_{ik}(t)\,dt$$

обмежені за цією ж нормою.

Доведення. Нехай матриця $\Phi(x)$ має вимір $m \times n$. За умовою теореми для всіх i, k існують числа M_{ik} такі, що будуть виконуватися нерівності

$$\|\varphi_{ik}(x)\|_S < \frac{M_{ik}}{m \cdot n} .$$

Візьмемо $M = \max\limits_{i,k} M_{ik}$. Тоді маємо

$$\|\Phi(x)\|_S \leq \sum_{i,k} \|\varphi_{ik}(x)\|_S < M ,$$

що й доводить наше твердження.

Теорема 1.4. Якщо неозначений інтеграл $\Phi(x) = [\varphi_{ik}(x)]$ від S^p -майже періодичної матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ обмежений за S -нормою, то $\Phi(x)$ є майже періодичною матрицею Бора.

Д о в е д е н н я. Зрозуміло, що

$$\|\varphi_{ik}(x)\|_S \leqslant \|\Phi(x)\|_S ,$$

тобто з обмеженості за S -нормою матриці $\Phi(x)$ випливає обмеженість за цією ж нормою її елементів

$$\varphi_{ik}(x) = \int_a^x f_{ik}(t)\,dt .$$

Тоді на основі теореми про неозначений інтеграл від S^p-майже періодичної функції [1] твердимо, що всі $\varphi_{ik}(x)$ є майже періодичними функціями Бора. Отже, $\Phi(x) = [\varphi_{ik}(x)]$ – майже періодична матриця Бора.

О з н а ч е н н я 4. Матриця $\mathcal{F}(x,y) = [a_{ik}(x,y)]$ називається S^p-майже періодичною по x рівномірно відносно $y \in Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина спільних ε, S^p -майже періодів $\tau = \tau_{\mathcal{F}}(\varepsilon)$ таких, що

$$\|\mathcal{F}(x+\tau, y) - \mathcal{F}(x,y)\|_S < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty)$$

для будь-якого $y \in Y$.

Т е о р е м а 1.5. Якщо для S^p -майже періодичної матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ побудувати матрицю

$$\mathcal{F}_h(x) = \left[\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f_{ik}(t)\,dt\right] \qquad (h > 0),$$

то

$$\lim_{h\to 0} \|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_h(x)\|_S = 0 \tag{1.3}$$

рівномірно відносно $x \in (-\infty, \infty)$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_h(x)\|_S \leqslant \sum_{i,k} \|f_{ik}(x) - f_{ik}(x,h)\|_S ,$$

де

$$\mathcal{F}_h(x) = [f_{ik}(x,h)], \qquad f_{ik}(x,h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f_{ik}(t)\,dt .$$

Але для S^p -майже періодичної функції $f_{ik}(x)$ справедливе співвідношення

$$\lim_{h\to 0} \|f_{ik}(x) - f_{ik}(x,h)\|_S = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

для всіх i, k [1]. Тоді

$$\lim_{h\to 0}\|\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}_h(x)\|_S \le \lim_{h\to 0}\sum_{i,k}\|f_{ik}(x)-f_{ik}(x,h)\|_S = 0,$$

що й доводить теорему.

2. Майже періодичність розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь з S^P-майже періодичною правою частиною

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx}+Ay=f(x), \tag{2.1}$$

де $y=[y_1,\dots,y_n]-(n\times 1)$ - вектор, $A=[a_{ik}]$ - стала $n\times n$ - матриця і $f(x)=[f_1(x),\dots,f_n(x)]-S^P$ -майже періодичний ($n\times 1$)-вектор.

Т е о р е м а 2.1. Якщо $f(x)-S^P$-майже періодична матриця з обмеженим за S -нормою неозначеним інтегралом, то обмежений за S -нормою розв'язок системи (2.1) є майже періодичною матрицею Бора.

Д о в е д е н н я. Для доведення теореми використаємо метод Кордуняну [3] зведення системи до трикутного вигляду. За допомогою неособливого перетворення

$$y=Sz \qquad (\det S\neq 0)$$

можна звести матрицю $A=[a_{ik}]$ системи (2.1) до сталої трикутної ($n\times n$)-матриці

$$B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0\\ b_{21} & a_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & a_n\end{bmatrix}.$$

Тоді система (2.1) набере вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx}+a_1z_1=\varphi_1(x),\\ \dfrac{dz_2}{dx}+b_{21}z_1+a_2z_2=\varphi_2(x),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dz_n}{dx}+b_{n1}z_1+b_{n2}z_2+\dots+a_nz_n=\varphi_n(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Очевидно, що $\varphi(x)=[\varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)]=S^{-1}f(x)$ є S^P-майже періодичною матрицею з обмеженим за S-нормою неозначеним інтегралом.

Нехай
$$y^{(0)}(x)=[y_1^{(0)}(x),\ \dots y_n^{(0)}(x)]$$
є обмежений за S-нормою розв'язок системи (2.1). Зрозуміло, що
$$z^{(0)}(x)=[z_1^{(0)}(x),\ \dots,\ z_n^{(0)}(x)]=S^{-1}y^{(0)}(x)$$
буде обмежений за S-нормою розв'язком трикутної системи (2.2), а тоді й всі функції $z_k^{(0)}(x)$ $(k=1,2,\dots,n)$ обмежені за цією ж нормою.

Покажемо тепер, що всі $z_k^{(0)}(x)$ є майже періодичними функціями Бора. Виходячи з першого рівняння системи (2.2), маємо
$$\frac{dz_1^{(0)}}{dx}+a_1 z_1^{(0)}=\varphi_1(x)\ , \tag{2.3}$$
де $\varphi_1(x)$- S^P-майже періодична функція, неозначений інтеграл якої, очевидно, обмежений за S-нормою. А тому, як показано в [1], розв'язок $z_1^{(0)}(x)$ рівняння (2.3) обмежений за S-нормою і є майже періодичною функцією Бора.

З другого рівняння системи (2.2) дістаємо
$$\frac{dz_2^{(0)}}{dx}+a_2 z_2^{(0)}=\varphi_2(x)-b_{21}z_1^{(0)}\ , \tag{2.4}$$
де $\varphi_2(x)-b_{21}z_1^{(0)}$ – S^P -майже періодична функція, неозначений інтеграл якої, очевидно, обмежений за S-нормою.

Знову з [1] випливає, що розв'язок $z_2^{(0)}(x)$ рівняння (2.4) обмежений за S-нормою і є майже періодичною функцією Бора. Продовжуючи такі міркування для наступних рівнянь системи (2.2), аналогічно показуємо, що всі $z_k^{(0)}(x)$ $(k=1,2,\dots,n)$ обмежені за S-нормою і є майже періодичними функціями Бора.

Таким чином, розв'язок $z^{(0)}(x)$ системи (2.2) є майже періодичною матрицею Бора. Тоді розв'язок $y^{(0)}(x)$ системи (2.1) також є майже періодичною матрицею Бора. Теорема доведена.

Л і т е р а т у р а

1. К о в а н ь к о О. С., Л і с е в и ч Л. М. Майже періодичність розв'язків деяких диференціальних рівнянь з S^r -майже періодичними правими частинами. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 2. Вид-во Львівського ун-ту, 1965.

2. Л е в і т а н Б. М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.

3. C. C o r d u n e a n u. Functii aproape-periodice. Ed, Acad., RPR, 1961.

УДК 517.946

О.І.БОБИК, Г.П.БОЙКО

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМ

О з н а ч е н н я 1. Еліптичним рівнянням другого порядку, що вироджується на деякій множині G, називається рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x), \qquad (1)$$

де $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqslant 0$ для всіх $\lambda, x \in D$,

причому на множині G ця квадратична форма не строго додатно визначена [1].

Граничним задачам для таких рівнянь присвячено багато робіт [2],[3] та ін. Суттєвим обмеженням у них є умова $C(x) \leq 0$ в області D. Якщо ж $C(x) > 0$ або змінює знак в області D, то попередніми методами не можна встановити коректність досліджуваної задачі. Метод захисної нерівності, розроблений в [4] і ряді інших робіт для випадку, коли $C(x)$ - довільна неперервна функція, дає можливість одержати ефективні ознаки єдиності, а також існування розв'язку першої граничної задачі для рівняння еліптичного типу другого порядку за певних умов на коефіцієнти рівняння та розміри області.