Л і т е р а т у р а

1. К о в а н ь к о О. С., Л і с е в и ч Л. М. Майже періодичність розв'язків деяких диференціальних рівнянь з S^r -майже періодичними правими частинами. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 2. Вид-во Львівського ун-ту, 1965.

2. Л е в и т а н Б. М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.

3. C. C o r d u n e a n u. Functii aproape-periodice. Ed, Acad., RPR, 1961.

УДК 517.946

О.І.БОБИК, Г.П.БОЙКО

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМ

О з н а ч е н н я 1. Еліптичним рівнянням другого порядку, що вироджується на деякій множині G , називається рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x), \qquad (1)$$

де $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqslant 0$ для всіх $\lambda, x \in D$,

причому на множині G ця квадратична форма не строго додатно визначена [1].

Граничним задачам для таких рівнянь присвячено багато робіт [2],[3] та ін. Суттєвим обмеженням у них є умова $C(x) \leq 0$ в області D . Якщо ж $C(x) > 0$ або змінює знак в області D , то попередніми методами не можна встановити коректність досліджуваної задачі. Метод захисної нерівності, розроблений в [4] і ряді інших робіт для випадку, коли $C(x)$ - довільна неперервна функція, дає можливість одержати ефективні ознаки єдиності, а також існування розв'язку першої граничної задачі для рівняння еліптичного типу другого порядку за певних умов на коефіцієнти рівняння та розміри області.

У цій роботі ми встановлюємо достатні ознаки єдиності розв'язку задачі Діріхле для еліптичного рівняння з виродженням всередині області, що виражаються через розміри області, а також через внутрішній діаметр області.

1. Розглянемо рівняння

$$h(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=0 \qquad (2)$$

в опуклій обмеженій області $D\subset R^n$ з досить гладкою границею S, причому $h(x)\geqslant 0$, $h(x)=0$ на множині $D_0\subset D$; матриця $\|a_{ij}(x)\|$ - додатно визначена в D; функції $h(x)$, $a_{ij}(x)$ $/i,j=1,\dots,n/$ - двічі неперервно диференційовані; $b_i(x)$ $/i=1,\dots,n/$ - неперервно диференційовані; $c(x)$ - неперервна в області $D_1\supset D$.

З а д а ч а Д і р і х л е. Знайти розв'язок $u(x)$ рівняння (2), двічі неперервно диференційований в області D, неперервно диференційований, включаючи й границю S, і який задовольняє умову

$$u(x)\big|_S=\mu(x'), \qquad (3)$$

де $\mu(x')$ - довільна неперервна функція на $S\ni x'$.

Справедлива така теорема про захисну нерівність для рівняння (2).

Т е о р е м а 1. Якщо існують неперервні з кусково неперервними похідними в області D функції $B_j(x)$ $/j=1,\dots,n/$, які справджують в області D нерівність

$$h^2(x)\Big[C_0(x)\prod_{l=1}^{n-1}a_{ll}(x)-A_{n-1}^2(x)\prod_{l=1}^{n-2}a_{n-1-l,l}(x)\Big]-A_n^2(x)\prod_{l=1}^{n-1}a_{n-l,l}(x)\geqslant 0, \qquad (4)$$

де

$$C_0(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial B_j}{\partial x_j}-c(x),$$

$$A_{n-1}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial a_{k,n-1}}{\partial x_k}+B_{n-1}(x)-b_{n-1}(x),$$

$$A_n(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x_n}+B_n(x)-b_n(x)$$

то в області D задача Діріхле має не більше одного розв'язку.

Нерівність (4) називається захисною нерівністю для рівняння (2).

Теорема доводиться аналогічно відповідній теоремі [4].

Зауваження. Твердження теореми залишиться правильним, якщо функції $B_j(x)$ $/j=1,\dots,n/$ мають розриви першого роду на $(n-1)$-мірних поверхнях S_κ і

$$\sum_{j=1}^{n} B_j(x)\cos(n_\kappa, x_j)\Big|_{S_\kappa} = 0, \tag{5}$$

де n_κ - внутрішня нормаль до поверхні S_κ.

Теорема 2. Якщо в опуклій обмеженій області D виконується умова

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 > \max_{x\in D} C^*(x), \tag{6}$$

де ℓ_j - довжина максимального з відрізків прямих, паралельних осі x_j (відрізки лежать повністю в області D),

$$C^*(x) = N\left[c(x) - \left(\frac{\partial b_n}{\partial x_n} + \frac{\partial b_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{k,n-1}}{\partial x_k \partial x_{n-1}}\right)\right], \tag{7}$$

$$N = \max\left[\max_{x\in D}\frac{h(x)\prod_{\ell=1}^{n-2} a_{n-1-\ell,\ell}(x)}{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_{\ell\ell}(x)},\ \max_{x\in D}\frac{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_{n-\ell,\ell}(x)}{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_{\ell\ell}(x)}\right], \tag{8}$$

тоді задача Діріхле для рівняння (2) має в області D не більше одного розв'язку.

Доведення. Приймаючи в нерівності (4)

$$A_n(x)=0,\quad A_{n-1}(x)=\frac{\omega_{n-1}(x)}{N},\quad B_\ell(x)=\frac{\omega_\ell(x)}{N},\quad \ell=1,\dots,n-2,$$

де $\omega_\ell(x)$ $/\ell=1,\dots,n-1/$ - функції, які задовольняють усім умовам, накладеним на функції $B_\ell(x)$ $/\ell=1,\dots,n-1/$ в теоремі 1, зводимо її до вигляду

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j} - \omega_j^2\right) > C^*(x). \tag{9}$$

Нехай тепер $\ell_j(x)$ - довжина відрізка прямої, паралельної осі x_j, що проходить через точку $x\in D$. Відрізок весь лежить в області D

$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ – та з двох точок перетину прямої з границею S, для якої $x_j^0 < x_j$ для всіх $x \in D$.

Тоді при

$$\omega_j(x) = \frac{\pi}{\ell_j(x)} \, ctg \, \frac{\pi(x_j - x_j^0)}{\ell_j(x)}$$

із (9) одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\pi}{\ell_j(x)}\right]^2 > C^*(x)$$

Оскільки $\ell_j = \max_{x \in D} \ell_j(x)$, то з умови (6) випливає, що остання нерівність виконується.

Т е о р е м а 3. Якщо в опуклій обмеженій області D виконується умова

$$\int_D \overset{(n)}{\cdots} \int \left\{ h(x) \left[\frac{\pi}{\ell_n(x)}\right]^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\pi}{\ell_j(x)}\right]^2 - C^*(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} + \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial x_n}\right)^2}{4h(x)} \right\} dx > 0, \qquad (10)$$

то задача Діріхле в області D має не більше одного розв'язку.

Теорема доводиться аналогічно.

2. Нехай $Б_D$ – бісектриса області D. Побудуємо поле векторів $\vec{\beta}$, ортогональне до границі S області D, напрямлене від неї до $Б_D$ з кінцями на $Б_D$. Це поле особливих точок не має. Введемо криволінійні координати точок області $(s,t) = (s_1, \ldots, s_{n-1}, t)$, де $s_1, \ldots, s_{n-1}$ – криволінійні координати поверхні S; t – зміщення всередину області від границі S у напрямі поля $\vec{\beta}$.

Позначимо через $q(s)$ довжину відрізка поля $\vec{\beta}$, який проходить через точку (s,t), через $\ell(s)$ – довжину відрізка поля $\vec{\ell} = \vec{\beta} \sqcap (D \setminus D_0)$.

О з н а ч е н н я 2. Внутрішнім діаметром d області D називається діаметр найбільшої кулі, яку можна помістити в дану область [4]

Очевидно, $2 \max_s q(s) = d$, $2 \max_s \ell(s) \leq d$.

Приймаємо, що $\varphi(s, \ell(s)) = \int_t \frac{d\ell}{h}$, $L\left(\frac{d}{2}\right) = \max_s \varphi(s, \ell(s))$.

Т е о р е м а 4. Нехай в опуклій обмеженій області D виконуються умови

1) $\dfrac{1}{\max\limits_{D} h(x)}\left[\dfrac{\mu_0 \ln \frac{\mu_1}{\mu_0}}{L\left(\frac{d}{2}\right)}\right]^2 > \max\limits_{D\setminus D_0} C^*(x)$.

де μ_0, μ_1 – перші додатні корені функції Бесселя першого роду порядку $\nu = 0$ і $\nu = 1$ відповідно;

2) $\delta_n(x) \neq 0$ в D_0 або $C^*(x) < 0$ в D_0 ; тоді задача Діріхле для рівняння (2) має в області D не більше одного розв'язку.

Якщо прийняти в (4)

$$A_j(x) = \frac{h(x)\,\omega(s,t)}{N}\cos(t, x_j) ,$$

де $j = 1, \ldots, n$, $\omega(s,t)$ – неперервна з кусково-неперервними похідними недодатна функція в області D і перетворюється в нуль на $Б_D$, то прийдемо до нерівності для функції $\omega(s,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\omega) - h\omega^2 > C^*(x) ,$$

яку розв'язуємо, зображуючи функцію $\omega(s,t)$ у вигляді

$$\omega(s,t) = \alpha(s,t)\,\frac{\frac{d}{dt} J_0(\beta(s,t))}{J_0(\beta(s,t))} ,$$

де $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду порядку $\nu = 0$, $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$ – неперервні функції, які визначаються з умов, накладених на функцію $\omega(s,t)$.

З а у в а ж е н н я. Твердження теореми залишається справедливим, якщо поле $\vec{\beta}$ будувати ортогональним не до границі S , а до деякої замкненої поверхні, яка досить точно апроксимує поверхню S .

Л і т е р а т у р а

1. Б о б и к О. І. Про единість розв'язку першої граничної задачі для рівняння еліптичного типу. Тези доповідей Ш республіканської конференції молодих дослідників. Київ, "Наукова думка", 1966.

2. И л ь и н А. М. Эллиптические и параболические уравнения с вырождением. Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат. наук, т. 1, 1958, № 2.

3. И л ь и н А. М. Эллиптические и параболические уравнения с вырождением. Математический сборник, т. 50/92/, 1960, № 4.

4. С к о р о б о г а т ь к о В. Я. Исследование по качественной теории уравнений с частными производными. Изд-во Львовского ун-та, 1961.

5. С м и р н о в М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., "Наука", 1966.

УДК 51(091)

В.Ф.РОГАЧЕНКО

"STUDIA MATHEMATICA" – ОРГАН ЛЬВІВСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ (1929–1940 рр.)

Серед кількох наукових видань, де періодично друкували свої праці львівські вчені, значне місце посідав журнал "Studia mathematica", який видавався у Львові в 1929–1940 рр. Його засновниками та редакторами були професори Львівського університету, видатні польські математики – Стефан Банах та Гуго Штейнгаус. З 1935 р. на допомогу редакторам був створений редакційний комітет, в який входили учні Штейнгауса і Банаха – Г.Ауербах, С.Мазур та В.Орліч.

Видання у Львові математичного журналу сприяло становленню та зміцненню Львівської математичної школи, в центрі уваги якої були дослідження в галузі функціонального аналізу та його застосувань в різних математичних дисциплінах. Саме ці дослідження львівських математиків, особливо С.Банаха, були значним вкладом у функціональний аналіз, який створювався як окрема математична наука в 20–30 рр.

Всього з 1929 по 1940 р. було видано дев'ять томів журналу, які виходили майже щорічно по 160–260 сторінок у кожному томі. Останній, дев'ятий том, було видано вже після возз'єднання західних областей України з Радянською Україною – у 1940 р. Львівським державним університетом імені І. Франка. Загальний обсяг усіх дев'яти томів становить понад 1800 сторінок, де містилася 161 стаття. Статті друкувалися німецькою, французькою та англійською мовами. У дев'ятому томі до кожної статті додавалося резюме українською мовою.