Відзначимо, що видання у Львові цього журналу тривало всього одинадцять років. Воно припинилося у зв"язку з окупацією Львова німецько-фашистськими загарбниками на початку Великої Вітчизняної війни. Під час фашистського режиму не було й мови про його існування. Після війни у зв"язку з виїздом до Польської Народної Республіки основної частини редакційної колегії видання цього наукового журналу у Львові не було продовжено.

Вже у нових умовах народної Польщі, у Вроцлаві, було поновлено видання "Studia mathematica", який став виходити за редакцією Г.Штейнгауза, С.Мазура, Я.Мікусінського, В.Орліча та М.Штарка. Десятий том (перший післявоєнний) вийшов у 1948 р. у Вроцлаві на кошти міністерства вищих шкіл та науки. З 1953 р. журнал видає "Державне наукове видавництво" як один з органів Інституту математики Польської Академії наук (Варшава-Вроцлав). Обсяг став більше 300 сторінок у кожному томі, причому томи почали виходити щорічно, спочатку по два, а потім по три окремих випусками. Основними мовами, якими друкуються статті, стали французька, російська, англійська та німецька. Журнал зберіг свій міжнародний характер, друкуючи праці багатьох математиків світу. Його програма порівняно з довоєнними роками була дещо розширена, бо, як вказано в офіційному оголошенні редакції, журнал публікує праці, що належать до функціонального аналізу, абстрактних методів аналізу та теорії ймовірностей.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО, І.Г.ШАБАТ-ФЕДАК

ЗОВНІШНЯ УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ

Ми розглядаємо тут зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа в тривимірному евклідовому просторі, коли на границі області задана узагальнена функція. Внутрішні узагальнені задачі Діріхле для рівняння Лапласа при $n \geq 2$ і для однорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу з нескінченно-диференційовними коефіцієнтами розглянуті в [2] - [5]. Зовнішня узагальнена задача Діріхле, наскільки нам відомо, ще не вивчалась.

1. Нехай Ω - область у просторі E^3, що лежить зовні замкненої поверхні S з класу C^∞. Вважатимемо, що початок координат перебуває всередині поверхні S. Через $\nu(y)$ - позначимо орт зовнішньої нормалі n_y до поверхні S у точці y, S_ε $(0 \le \varepsilon < \varepsilon_0)$ - поверхня в Ω, паралельна до поверхні S, $D(S)$ - простір нескінченно-диференційовних (основних) функцій $\varphi(y)$, заданих на S; $D'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) над $D(S)$. Між точками поверхонь S і S_ε можна встановити взаємнооднозначну відповідність $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $x \in S$. Функції $\varphi(x)$, $x \in S$ можна означити на S_ε, зносячи їх значення з S на S_ε по спільній нормалі до цих поверхонь у кожній точці, тобто $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, якщо $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $x \in S$, при цьому $\varphi(x_\varepsilon) \in D(S_\varepsilon)$. Дію узагальненої функції A на основну функцію φ позначатимемо $A[\varphi]$.

Нехай $F \in D'(S)$, будемо вважати [2], [5], що функція $u(x)$ означена в області Ω набуває на S узагальнених граничних значень F, коли

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = F[\varphi] \quad \text{для кожної } \varphi \in D(S). \tag{1}$$

2. П о с т а н о в к а з а д а ч і. Знайти гармонійну функцію $u(x)$ в області Ω, яка на S набуває узагальнених граничних значень F і

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0. \tag{2}$$

Має місце лема 1. Для будь-якої узагальненої функції $A \in D'(S)$, функція

$$u(x) = A\left[\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{(x-y)}\right], \quad x \in \Omega,\ y \in S,\ |x-y|^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2$$

рівномірно прямує до нуля на безмежності.

Оскільки функціонал A неперервний і $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} = 0$, то лема очевидна.

Т е о р е м а 1. Нехай $F\in D'(S)$ і

$$G[g-C_g]=F[\varphi_g]-F[\bar{\varphi}_0]\int\limits_S \frac{\varphi_g(x)}{|x|}\,dS \quad \text{для кожної } g\in D(S), \tag{3}$$

де φ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$2\pi\varphi(y)+\int\limits_S \varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\,d_xS=g(y)-C_g, \quad y\in S, \tag{4}$$

$$C_g=\frac{1}{S}\int\limits_S g(y)\,dS, \quad \bar{\varphi}_0(x)=\varphi_0(x)\Big[\int\limits_S\frac{\varphi_0(x)}{|x|}\,dS\Big]^{-1},$$

S – площа поверхні S, тоді функція

$$u(x)=G\Big[\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\Big]+\frac{1}{|x|}F[\bar{\varphi}_0], \quad x\in\Omega \tag{5}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Те, що функція $u(x)$, означена формулою (5), гармонійна, встановлюється безпосередньою перевіркою, використовуючи лінійність і неперервність функціоналу G. Умова (2) задовольняється з огляду на лему 1. Те, що функція $u(x)$ задовольняє умову (1) визначається безпосередньою перевіркою, використовуючи формули (3), (4), (5), формули стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару і леми 4 і 5 з [2].

Т е о р е м а 2. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле єдиний.

Д о в е д е н н я. Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два розв'язки зовнішньої узагальненої задачі Діріхле, тоді $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ є гармонійна функція в області Ω задовольняє на S умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=0 \quad \text{для кожної } \varphi\in D(S) \tag{6}$$

і рівномірно прямує до нуля на безмежності.

Перейдемо в (6) до інтегрування по поверхні S. Матимемо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_S u_\varepsilon(y)\varphi(y)\,dS=0 \quad \text{для кожної } \varphi\in D(S), \tag{7}$$

$u_\varepsilon(y)=u(y+\varepsilon\nu(y))W_\varepsilon(y)$, $W_\varepsilon(y)$ – якобіан перетворення.

Гармонійну функцію $u(z)$ в Ω можна подати у вигляді

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\cdot\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon+\frac{\alpha}{|z|},\tag{8}$$

де $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ - розв'язок інтегрального рівняння

$$\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|y_\varepsilon-x_\varepsilon|}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon+\frac{1}{2\pi}u(y_\varepsilon)-\frac{\alpha}{2\pi|y_\varepsilon|}\tag{9}$$

$$\alpha=\int_{S_\varepsilon}u(x_\varepsilon)\overline{\psi}_0(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon,\quad \overline{\psi}_0(x_\varepsilon)=\psi_0(x_\varepsilon)\left[\int_{S_\varepsilon}\frac{\psi_0(y_\varepsilon)}{|y_\varepsilon|}\,dS_\varepsilon\right]^{-1};$$

$\psi_0(x_\varepsilon)$ - нетривіальний розв'язок однорідного інтегрального рівняння транспонованого до рівняння (9).

Підставляючи розв'язок інтегрального рівняння (9) в (8), після ряду перетворень одержимо

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{S}u_\varepsilon(y)\varphi_\varepsilon(z,y)\,d_yS,\tag{10}$$

де

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(z,y)=&\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-y-\varepsilon\nu(y)|}-\int_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y+\varepsilon\nu(y))\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon+\\&+\psi_0(y+\varepsilon\nu(y))\int_{S_\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\frac{1}{|y_\varepsilon|}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon\,d_{y_\varepsilon}S_\varepsilon-\\&-\psi_0(y+\varepsilon\nu(y))\int_{S_\varepsilon}\frac{1}{|x_\varepsilon|}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S+\psi_0(y+\varepsilon\nu(y))\frac{1}{|z|},\quad z\in\Omega,\ y\in S,\end{aligned}$$

$\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)$ - резольвента ядра інтегрального рівняння (9)

$$\varphi_\varepsilon(z,y)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\varphi(z,y)\in D(S),\quad z\in\Omega,\ y\in S,$$

отже, згідно з лемою з [1] стор. 95 з (6) і (10) одержуємо, що $u(z)=0$. Оскільки z - довільна точка області Ω, то $u(z)\equiv 0$, $u_1(z)\equiv u_2(z)$. Теорема доведена.

Л і т е р а т у р а

1. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.

2. Г у п а л о Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. ДАН УРСР, 1966, № 7.

3. Г у п а л о Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

4. Р о г о ж и н В. С., Д а н к о С. П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. - "Дифференциальные уравнения", том УП, 1971, № 3.

5. E. B a m y d t, L'anicite des solutions d'un probleme de Dirichlet generalise. Atti della Acead. Nas. Lincei., Rend., Cl. sci. fis. mat. e natur., 33, 1962-1963, N 6.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО, О.А.ЯКОБЧУК

ЗОВНІШНЯ УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА

У цій роботі розглядається зовнішня задача Неймана для рівняння Лапласа у тривимірному евклідовому просторі, коли на границі області задано узагальнену функцію. Внутрішні узагальнені задачі Неймана для рівняння Лапласа при $n \geqslant 2$ і для однорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу з нескінченно-диференційовними коефіцієнтами розглянуті в [2], [5], [6]. Зовнішня задача Неймана, наскільки нам відомо, ще не розглядалась.

Нехай маємо позначення, введені в статті [4].

П о с т а н о в к а з а д а ч і. Знайти гармонійну функцію $u(x)$ в області Ω, нормальна похідна якої набуває на S узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$ і

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \qquad (1)$$

Має місце лема 1. Для будь-якої узагальненої функції $T \in D'(S)$ функція $u(x) = T\left[\frac{1}{|x-y|}\right]$, $x \in \Omega$, $y \in S$, $|x-y|^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$ рівномірно прямує до нуля на безмежності.