Л і т е р а т у р а

1. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.

2. Г у п а л о Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. ДАН УРСР, 1966, № 7.

3. Г у п а л о Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

4. Р о г о ж и н В. С., Д а н к о С. П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. - "Дифференциальные уравнения", том УП, 1971, № 3.

5. R. S a m y d t, L'unicite des solutions d'un probleme de Dirichlet generalise. Atti della Acead. Naz. Lincei., Rend., Cl. sci. fis. mat. e natur., 33, 1962-1963, N 6.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО, О.А.ЯКОБЧУК

ЗОВНІШНЯ УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА

У цій роботі розглядається зовнішня задача Неймана для рівняння Лапласа у тривимірному евклідовому просторі, коли на границі області задано узагальнену функцію. Внутрішні узагальнені задачі Неймана для рівняння Лапласа при $n \geqslant 2$ і для однорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу з нескінченно-диференційовними коефіцієнтами розглянуті в [2], [5], [6]. Зовнішня задача Неймана, наскільки нам відомо, ще не розглядалась.

Нехай маємо позначення, введені в статті [4].

П о с т а н о в к а з а д а ч і. Знайти гармонійну функцію $u(x)$ в області Ω, нормальна похідна якої набуває на S узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$ і

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \qquad (1)$$

Має місце лема 1. Для будь-якої узагальненої функції $T \in D'(S)$ функція $u(x) = T\left[\frac{1}{|x-y|}\right]$, $x \in \Omega$, $y \in S$, $|x-y|^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$ рівномірно прямує до нуля на безмежності.

Оскільки функціонал T неперервний і $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x-y|}=0$, то лема очевидна.

Т е о р е м а 1. Нехай $F\in D'(S)$ і $G[g]=F[\varphi_g]$ для кожної $g\in D(S)$, де φ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$-2\pi\varphi(y)+\int\limits_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}\,d_xS=g(y),\quad y\in S, \tag{2}$$

тоді функція
$$u(x)=G\left[\frac{1}{|x-y|}\right],\quad x\in\Omega \tag{3}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Д о в е д е н н я. Внаслідок лінійності і неперервності функціоналу G, $\Delta u(x)=G\left[\Delta_x\frac{1}{|x-y|}\right]=0$, $x\in\Omega$. Отже, $u(x)$ – гармонійна функція в Ω. Покажемо, що нормальна похідна функції $u(x)$ набуває на S узагальнених значень $F\in D'(S)$. Дійсно

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}G\left[\frac{1}{|x_\varepsilon-y|}\right]\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=$$

внаслідок леми 5 з [3]

$$=G\left[\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|x_\varepsilon-y|}\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon\right]=$$

згідно з формулами стрибка потенціалу подвійного шару, леми 1 з [2] і умов теореми одержуємо

$$=G\left[-2\pi\varphi(y)+\int\limits_S\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}\varphi(x)\,d_xS\right]\doteq F[\varphi].$$

Умова (1) задовольняється згідно з лемою 1.

Т е о р е м а 2. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Неймана єдиний.

Д о в е д е н н я. Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два розв'язки задачі, тоді функція $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ є гармонійна в Ω, рівномірно прямує до нуля на безмежності і

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=0 \qquad \text{для кожної } \varphi\in D(S). \quad (4)$$

У (4) перейдемо до інтегрування по поверхні S, одержимо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S}v_\varepsilon(y)\varphi(y)\,dS=0 \qquad \text{для кожної } \varphi\in D(S), \quad (5)$$

де $v_\varepsilon(y)=\frac{\partial}{\partial n_y}u(y+\varepsilon\nu(y))W_\varepsilon(y)$, $W_\varepsilon(y)$ – якобіан перетворення.

Гармонійну функцію $u(z)$ в області Ω можна подати у вигляді

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon, \quad (6)$$

де $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ – розв'язок інтегрального рівняння

$$-2\pi\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)+\int_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|x_\varepsilon-y_\varepsilon|}d_{y_\varepsilon}S_\varepsilon=\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}u(x_\varepsilon),\quad x_\varepsilon\in S_\varepsilon \quad (7)$$

Підставляємо розв'язок $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ в (6), після ряду перетворень одержуємо

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{S}v_\varepsilon(y)\varphi_\varepsilon(z,y)\,d_yS, \quad (8)$$

де

$$\varphi_\varepsilon(z,y)=\frac{1}{|z-y-\varepsilon\nu(y)|}+\int_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y+\varepsilon\nu(y))\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon,$$

$\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)$ – резольвента ядра інтегрального рівняння (7),

$$\varphi_\varepsilon(z,y)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\varphi(z,y)\in D(S),\quad z\in\Omega,\quad y\in S,$$

Отже, внаслідок леми в [1] (стор. 95) з (5) і (8) одержуємо $u(z)=0$. Оскільки z – довільна точка в області Ω, то $u(z)\equiv 0$, тобто $u_1(z)\equiv u_2(z)$. Теорема доведена.

Література

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.

2. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

3. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. ДАН УРСР, 1966, № 7.

4. Гупало Г.-В.С., Шабат-Федак І. Г. Про зовнішню узагальнену задачу Діріхле. У цьому збірнику.

5. Рогожин В. С., Данко С. П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. -"Дифференциальные уравнения", том УП, 1971, № 3.

6. Z. Szmydt. Sur un probleme de Neumann generalise. Ann. Polon. Math. XV, 1964, N 3.

УДК 517.946

С.П.ЛАВРЕНЮК, Є.М.ПАРАСЮК

ІНТЕГРАЛЬНІ ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ МЕТАГАРМОНІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Нехай

$$\Phi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_1^{\infty}\frac{e^{-r\lambda t}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

головний елементарний розв'язок рівняння

$$\Delta u-\lambda^2 u=0, \tag{1}$$

де стала $\lambda>0$, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; Δ - оператор Лапласа.

Під метагармонійним потенціалом простого шару, що індукується кривою S з заданою густиною $\omega(x,y)$, розумітимемо функцію

$$u(x,y)=\int_S \omega(\xi,\eta)\Phi(r)\,dS. \tag{2}$$

Нехай криві S_1, S_2, що індукують потенціали $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, лежать у колі радіуса $R<1$ і задаються в полярних координатах відповідно у вигляді

$$\rho=f_1(\varphi), \quad \rho=f_2(\varphi).$$