Література

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.

2. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

3. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. ДАН УРСР, 1966, № 7.

4. Гупало Г.-В.С., Шабат-Федак І. Г. Про зовнішню узагальнену задачу Діріхле. У цьому збірнику.

5. Рогожин В. С., Данко С. П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. -"Дифференциальные уравнения", том УП, 1971, № 3.

6. Z. Szmydt. Sur un probleme de Neumann generalise. Ann. Polon. Math. XV, 1964, N 3.

УДК 517.946

С.П.ЛАВРЕНЮК, Є.М.ПАРАСЮК

ІНТЕГРАЛЬНІ ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ МЕТАГАРМОНІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Нехай

$$\Phi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-r\lambda t}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

головний елементарний розв'язок рівняння

$$\Delta u-\lambda^2 u=0, \tag{1}$$

де стала $\lambda>0$, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; Δ - оператор Лапласа.

Під метагармонійним потенціалом простого шару, що індукується кривою S з заданою густиною $\omega(x,y)$, розумітимемо функцію

$$u(x,y)=\int_S \omega(\xi,\eta)\Phi(r)\,dS. \tag{2}$$

Нехай криві S_1, S_2, що індукують потенціали $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, лежать у колі радіуса $R<1$ і задаються в полярних координатах відповідно у вигляді

$$\rho=f_1(\varphi), \quad \rho=f_2(\varphi).$$

Позначимо через S^e, S^i, S_1^e, S_2^e, S_1^i, S_2^i криві

$$\begin{aligned} &\rho=f^e(\varphi)=\max_{j=1,2}[f_j(\varphi)],\\ &\rho=f^i(\varphi)=\min_{j=1,2}[f_j(\varphi)],\\ &S_1^e=S^e\cap S_1,\quad S_2^e=S^e\setminus S_1^e,\quad S_j^i=S^i\cap S_j\quad (j=1,2), \end{aligned} \tag{3}$$

а через $\Lambda_K(B,L,a)$ множину кривих із класу $\Lambda_K(B,L)$ [1], для яких радіус d кола Ляпунова задовольняє нерівність $d>a$.

Т е о р е м а. Нехай криві $S_j\ (j=1,2)\in\Lambda_2(B,L,a)$, функції $\omega_j(x,y)\ (j=1,2)$ додатні і належать до класу $H(1,A,L)$ [1] в колі $D_R\ (x^2+y^2\leq R^2)$. Якщо

$$|u_1(x,y)-u_2(x,y)|\leq\varepsilon,\qquad (x,y)\in K,$$

де K – дуга кола одиничного радіуса, то справедлива оцінка

$$\int_{S_2^e}|\omega_2|ds+\int_{S_1^e}|\omega_1|ds-\int_{S_2^i}|\omega_2|ds-\int_{S_1^i}|\omega_1|ds\leq\frac{C_1}{n}, \tag{4}$$

де число n визначається зі співвідношення

$$\frac{1}{n^3}\leq|\ln\varepsilon|^{-C_2}\leq\frac{1}{n^2},$$

Сталі C_1, C_2 залежать від A, B, R, K, a.

Перш ніж доводити теорему, сформулюємо лему. Позначимо через

$$u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$$

Л е м а. Якщо криві S_j і функції $\omega_j(x,y), u_j(x,y)\ (j=1,2)$ задовольняють умовам наведеної вище теореми, то справедлива оцінка

$$|u(x,y)|+|\operatorname{grad}u(x,y)|\leq C_4|\ln\varepsilon|^{-C_3},\quad (x,y)\in S^e, \tag{5}$$

де C_3, C_4 – деякі сталі, що залежать від A, B, R, K.

Сформульована лема доводиться аналогічно до леми 1 [2] ст. 78.

Д о в е д е н н я т е о р е м и. Легко показати, що, як і для гармонійних функцій, справедлива формула

$$\int_{S_1} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2} \omega_2 v\,ds = \int_{S^e} \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad , \tag{6}$$

де $v(x,y)$ – розв'язок рівняння (1), який має перші неперервні похідні на S^e, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$.

Позначимо через $\omega^e(x,y)$ функцію

$$\omega^e(x,y) = \begin{cases} \omega_1(x,y), & (x,y) \in S_1^e \\ -\omega_2(x,y), & (x,y) \in S_2^e \end{cases} .$$

У кожній точці кривої S^e, де $\omega^e(x,y)$ змінює знак, проведемо коло радіуса δ. Позначимо через $\bar{S}^e$ частину кривої S^e, яка лежить всередині всіх побудованих кіл, через S^{e+} – частину кривої $S^e \setminus \bar{S}^e$ в точках якої $\omega^e(x,y) \geq 0$, через S^{e-} – частину кривої $S^e \setminus \bar{S}^e$ в точках якої $\omega^e(x,y) < 0$.

Визначимо в області, обмеженій кривою S^e, функцію $v(x,y)$, яка задовольняє рівнянню (1) і крайовим умовам

$$v(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in S^{e+} , \\ -1, & (x,y) \in S^{e-} , \\ \gamma(x,y), & (x,y) \in \bar{S}^e \end{cases} \tag{7}$$

Тут функція $\gamma(x,y)$ така, що

а) $-1 \leq \gamma(x,y) \leq 1$; б) $v(x,y) \in H(2,c,\alpha)$.

Перепишемо ліву частину (6)

$$\int_{S_1} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2} \omega_2 v\,ds = \int_{S^{e+}} \omega^e v\,ds + \int_{S^{e-}} \omega^e v\,ds + \tag{8}$$

$$+ \int_{\bar{S}^e} \omega^e v\,ds + \int_{S_1^i} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2^i} \omega_2 v\,ds .$$

Враховуючи (7), одержимо оцінку

$$\int_{S^{e+}} \omega^e v\,ds + \int_{S^{e-}} \omega^e v\,ds + \int_{S_1^i} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2^i} \omega_2 v\,ds \geq \tag{9}$$

$$\geq \int_{S^{e+}} |\omega^e|\,ds + \int_{S^{e-}} |\omega^e|\,ds - \int_{S_1^i} |\omega_1|\,ds - \int_{S_2^i} |\omega_2|\,ds .$$

З умов теореми 1 (7) випливає оцінка

$$\left|\int_{S^e}\omega^e v\,ds\right| \leq C_5\,\delta. \tag{10}$$

Оцінимо праву частину в рівності (6). Згідно з (5) і (7) одержимо оцінку

$$\left|\int_{S^e}\left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds\right| \leq C_6\,\frac{|\ln\varepsilon|^{-C_3}}{\delta}. \tag{11}$$

Враховуючи (6), (8)-(11), маємо

$$\int_{S_2^e}|\omega_2|\,dS + \int_{S_1^e}|\omega_1|\,ds - \int_{S_2^i}|\omega_2|\,ds - \int_{S_1^i}|\omega_1|\,ds \leq \tag{12}$$

$$\leq C_7\,\frac{|\ln\varepsilon|^{-C_3}}{\delta} + C_8\,\delta$$

Прийнявши в (12)

$$\delta = \frac{1}{n},$$

де число n визначається зі співвідношень,

$$\frac{1}{n^3} \leq |\ln\varepsilon|^{-C_3} \leq \frac{1}{n^2} \tag{13}$$

одержимо оцінку (4).

З доведеної теореми легко одержуємо наслідок.

Н а с л і д о к. Якщо в теоремі $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv const$ і криві S_1, S_2 опуклі, то справедлива оцінка

$$|f_1(\varphi) - f_2(\varphi)| \leq \frac{C_9}{\sqrt{n}},$$

де число n визначається зі співвідношень (13).

Л і т е р а т у р а

1. Г ю н т е р Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гостехиздат, 1953.

2. Л а в р е н т ь е в М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.