УДК 517.512

Г.П.ГУБАНОВ, Б.В.КОВАЛЬЧУК

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЗРІЗАНИМИ СЕРЕДНІМИ ВІД ПОЛІНОМІВ, ЩО НАЙЛІПШІ У ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ РІВНОВІДДАЛЕНИХ ТОЧОК

Нехай H_ω є клас неперервних 2π -періодичних функцій $f(x)$, які задовольняють умову $|f(x_1)-f(x_2)| \leq \omega(|x_1-x_2|)$, де $\omega(z)$ – заданий модуль неперервності. Якщо $\omega(z)$ задовольняє додатково нерівності $\omega(x_1)+\omega(x_2) \leq 2\omega\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, то його називатимемо опуклим. У випадку $\omega(z)=Mz^\alpha$, $0<\alpha\leq 1$ відповідний клас позначимо через MH^α.

Нехай

$$T_{nq}(f;x)=\frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{2nq} f(x_k)D_n(x-x_k), \tag{1}$$

де $D_n(t)$ – ядро Діріхле, тригонометричний поліном ($n-1$)-го порядку, найліпший у заданій системі рівновіддалених точок $x_k=\frac{k\pi}{nq}$, $k=1,2\dots,2nq$; $q\geq 1$. Розглянемо зрізані середні суми від поліномів (1), які мають вигляд

$$\sigma_{nq,p}(f;x)=\frac{1}{nq(p+1)}\sum_{k=1}^{2nq} f(x_k)\sin\frac{2n-p-1}{2}(x-x_k)\sin\frac{p+1}{2}(x-x_k)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}(x-x_k). \tag{2}$$

При $q=1$ поліноми (1) і (2) ми вивчали раніше в [2-5].

Позначимо через $E_{\sigma_{np,q}}(f;x;H_\omega)$ верхню межу відхилень функції $f(x)$ від поліномів (2), поширену на весь клас H_ω, тобто

$$E_{\sigma_{nq,p}}(f;x;H_\omega)=\sup_{f(x)\in H_\omega}|f(x)-\sigma_{nq,p}(f;x)|.$$

Має місце така теорема.

Т е о р е м а 1. Якщо $f(x)\in H_\omega$, то при всіх $0\leq p\leq\frac{n}{2}$ справедлива асимптотична рівність

$$E_{\sigma_{nq,p}}(f;x;H_\omega)=\frac{\theta_n}{\pi q}\ln\frac{n}{p+1}K_n(x;q)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$K_n(x;q)=|\sin nx|\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1+(-1)^q}{2}|\cos nx|\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)+$$

$$+2\left\{|\sin nx|\sum_{\mu=1}^{s}\cos\frac{\pi\mu}{q}\,\omega\left[\frac{2\pi}{qn}\left(\frac{q}{2}-\mu\right)\right]+|\cos nx|\sum_{\mu=1}^{s}\omega\left(\frac{2\pi\mu}{qn}\right)\sin\frac{\pi\mu}{q}\right\},$$

$s=\left[\frac{q-1}{2}\right]$, причому у випадку опуклого модуля неперервності $\frac{1}{2}\leq\theta_n\leq 1$; $\theta_n=1$ при $q=1$ для будь-якого модуля неперервності.

При $p=0$ поліноми (2) перетворюються в поліноми (1), тому з теореми 1 випливає оцінка відхилення функцій класу H_ω від поліномів (1).

Т е о р е м а 2. Якщо $f(x)\in H_\omega$, то для відхилення функції $f(x)$ від поліномів (1) справедлива рівність

$$E_{T_{nq}}(f;x;H_\omega)=\frac{\theta_n}{\pi q}\ln n\cdot K_n(x,q)+O\left(\omega\left(\tfrac{1}{n}\right)\right), \tag{3}$$

де $K_n(x;q)$ визначається так, як і в теоремі 1.

З а у в а ж е н н я 1. При $q=1$, $p=0$ з оцінки (3) випливає оцінка

$$E_{T_n}(f;x;H_\omega)=\frac{1}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\ln n+O\left(\omega\left(\tfrac{1}{n}\right)\right),$$

одержана в [6] .

З а у в а ж е н н я 2. У випадку $\omega(t)=Mt^\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, при $q=1$ рівність (3) перетворюється в асимптотичну рівність

$$E_{\sigma_{n,p}}(f;x;MH^\alpha)=\frac{M|\sin nx|}{\pi^{1-\alpha}n^\alpha}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

що наведена в роботі [5] .

При доведенні теореми 1 ми спираємося на деякі результати робіт [2-5], а також використовуємо метод, застосований в [1] при доведенні теореми, яка аналогічна теоремі 1 для поліномів найліпшого (квадратичного) наближення в заданій системі точок.

Література

1. Воробьева М. А. Приближение функции с заданным модулем непрерывности некоторыми тригонометрическими полиномами. - "Известия вузов", математика, 1970, № 6.

2. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні неперервних періодичних функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. Друга наукова конференція молодих математиків України. Київ, "Наукова думка", 1966.

3. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні неперервних періодичних функцій сумами типу Бернштейна. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, 1967.

4. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4. Вид-во Львівського ун-ту, 1969.

5. Ковальчук Б. В., Губанов Г. П. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, найкращих у заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мет., вип. 1. Вид-во Львівського ун-ту, 1965.

6. Оловянишников В. М. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. ДАН СССР, т. 70, 1950.

УДК 517.946

В.Г.КОСТЕНКО, Р.В.СТАСЕНКО

КЛАСИФІКАЦІЯ ЧОТИРИЧЛЕННИХ ГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ

Щоб знайти всі класи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, що інтегруються в замкнутій формі, доцільно спочатку провести класифікацію чотиричленних груп перетворень.

Нехай u_1, u_2, u_3, u_4 - базисні оператори чотиричленної групи. Вони утворюють шість різних (без врахування порядку операторів) дужок Пуассона. Тому, оскільки розмірність першої похідної групи (підгрупи, утвореної дужками Пуассона) не може бути більшою розмірності вихідної