Л і т е р а т у р а

1. В о р о б ь е в а М. А. Приближение функции с заданным модулем непрерывности некоторыми тригонометрическими полиномами. - "Известия вузов", математика, 1970, № 6.

2. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні неперервних періодичних функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. Друга наукова конференція молодих математиків України. Київ, "Наукова думка", 1966.

3. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні неперервних періодичних функцій сумами типу Бернштейна. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, 1967.

4. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4. Вид-во Львівського ун-ту, 1969.

5. К о в а л ь ч у к Б. В., Г у б а н о в Г. П. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, найкращих у заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 1. Вид-во Львівського ун-ту, 1965.

6. О л о в я н и ш н и к о в В. М. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. ДАН СССР, т. 70, 1950.

УДК 517.946

В.Г.КОСТЕНКО, Р.В.СТАСЕНКО

КЛАСИФІКАЦІЯ ЧОТИРИЧЛЕННИХ ГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ

Щоб знайти всі класи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, що інтегруються в замкнутій формі, доцільно спочатку провести класифікацію чотиричленних груп перетворень.

Нехай u_1, u_2, u_3, u_4 - базисні оператори чотиричленної групи. Вони утворюють шість різних (без врахування порядку операторів) дужок Пуассона. Тому, оскільки розмірність першої похідної групи (підгрупи, утвореної дужками Пуассона) не може бути більшою розмірності вихідної групи, вважаємо, що послідовно від двох до п'яти дужок Пуассона лінійно залежні від інших з шести різних.

Дослідження всіх можливих комбінацій для груп, першу похідну групу яких ми вважали чотиричленною, привело до висновку, що не існує жодної чотиричленної групи перетворень, перша похідна група якої - чотиричленна.

При визначенні основних типів названих груп, перша похідна група яких тричленна, застосовували таку схему дослідження: відомо, що кожна дужка Пуассона операторів групи перетворень є лінійною комбінацією тих же самих операторів і, крім того, оператори групи задовольняють тотожність Якобі. Нехай, наприклад,

$$(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_1u_4)=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i u_i,\ (u_2u_4)=\sum_{i=1}^{4}\beta_i u_i,\ (u_1u_3)\equiv 0,\ (u_2u_3)=0,\ (u_3u_4)=0 \quad (1)$$

де α_i, β_i - довільні поки що не визначені сталі в сукупності відмінні від нуля. Для u_1, u_2, u_3, u_4 мають місце чотири різні тотожності Якобі

$$((u_iu_k)u_\ell)+((u_ku_\ell)u_i)+((u_\ell u_i)u_k)\equiv 0 \qquad (i,k,\ell=1,\dots,4;\quad i\neq k\neq \ell). \qquad (2)$$

Підставляючи (1) у (2), лише в одному випадку одержуємо залежність

$$(u_1u_4)+\sum_{i=1}^{4}\beta_i(u_iu_1)-\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(u_iu_2)\equiv 0,\ \text{або}\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_iu_i-\beta_2u_1-\beta_4\sum_{i=1}^{4}\alpha_iu_i-\alpha_1u_1+\alpha_4\sum_{i=1}^{4}\beta_iu_i\equiv 0,$$

звідки внаслідок лінійної незалежності операторів $u_1,\dots,u_4$ маємо

$$\alpha_4=0,\ \alpha_1\beta_4+\beta_2=0,\ \alpha_2(1-\beta_4)=0,\ \alpha_3(1-\beta_4)=0,$$

що дає:

1) $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$, тоді $(u_1u_4)\equiv c(u_1u_2)$ (суперечить припущенню);

2) $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_3\neq 0$, тоді $\beta_4=1$, $\beta_2=-\alpha_1$;

3) $\alpha_2=0$, $\alpha_3\neq 0$, тоді $\beta_4=1$, $\beta_2=-\alpha_1$;

4) $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_3=0$, тоді $\beta_4=1$, $\beta_2=-\alpha_1$

Для прикладу проаналізуємо випадок, коли $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_3\neq 0$. Врахувавши значення α_i , β_i , матимемо

$$(u_1u_2)\equiv u_1,\quad (u_1u_4)\equiv\sum_{i=1}^{3}\alpha_i u_i,\quad (u_2u_4)\equiv\beta_1u_1-\alpha_1u_2+\beta_3u_3+u_4, \tag{3}$$
$$(u_1u_3)\equiv 0,\quad (u_2u_3)\equiv 0,\quad (u_3u_4)\equiv 0.$$

Дальше зведення групи до канонічного виду виконується, якщо це можливо, за допомогою спеціального вибору базисних операторів цієї групи. Нехай $u_4'\equiv u_4+\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3$, де λ_i – довільні сталі. Підставляючи u_4' в (3), одержимо

$$(u_3u_4')\equiv(u_3u_4)+\lambda_1(u_3u_1)+\lambda_2(u_3u_2)+\lambda_3(u_3u_3)\equiv 0,\quad (u_1u_4')\equiv(\alpha_1+\lambda_2)u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3,$$
$$(u_2u_4')\equiv(\beta_1-\lambda_1)u_1-\alpha_1u_2+\beta_3u_3+u_4\equiv(\beta_1-2\lambda_1)u_1+(\alpha_1+\lambda_2)u_2+(\beta_3-\lambda_3)u_3+u_4'.$$

Приймемо $\lambda_1=\frac{1}{2}\beta_1$, $\lambda_2=-\alpha_1$, $\lambda_3=\beta_3$, тоді маємо

$$(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4')\equiv u_4',\ (u_1u_4')\equiv\alpha_2u_2+\alpha_3u_3,\ (u_1u_3)\equiv 0,\ (u_2u_3)\equiv 0,\ (u_3u_4')\equiv 0.$$

Розглянувши всі можливі випадки аналогічно попередньому, встановлюємо 24 канонічні форми чотиричленних груп перетворень, перша похідна група яких є тричленною (табл. 1).

За тією ж схемою знаходимо 66 типів чотиричленних груп перетворень, перша похідна група яких двочленна і 6 типів чотиричленних груп, перша похідна група яких одночленна /відповідно таблиці 2 і 3/.

П р и м і т к а. Розглядаються шість різних дужок Пуассона. Якщо в типах груп дужка Пуассона не вказана, то вона – тотожний нуль.

Т а б л и ц я 1

1) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_2+u_3;$
2) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_2;$
3) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_3;$
4) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_2+u_4;$
5) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_2;$
6) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_4;$
7) $(u_1u_3)\equiv u_1,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_2+u_3;$

13) $(u_2u_3)\equiv u_2,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_2u_4)\equiv u_1+u_3;$
14) $(u_2u_3)\equiv u_2,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_2u_4)\equiv u_1;$
15) $(u_2u_3)\equiv u_2,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_2u_4)\equiv u_3;$
16) $(u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_2u_4)\equiv -u_4,\ (u_3u_4)\equiv u_1+u_2;$
17) $(u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_2u_4)\equiv -u_4,\ (u_3u_4)\equiv u_1;$
18) $(u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_2u_4)\equiv -u_4,\ (u_3u_4)\equiv u_2;$
19) $(u_1u_4)\equiv u_1,\ (u_3u_4)\equiv -u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_2+u_4;$

8) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_4)\equiv u_2$;

9) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_4)\equiv u_3$;

10) $(u_1u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv -u_4$, $(u_3u_4)\equiv u_1+u_2$,

11) $(u_1u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv -u_4$, $(u_3u_4)\equiv u_1$;

12) $(u_1u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv -u_4$, $(u_3u_4)\equiv u_2$,

20) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_1u_3)\equiv u_2$;

21) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_1u_3)\equiv u_4$;

22) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_2u_3)\equiv u_1+u_4$;

23) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv -u_1$, $(u_2u_3)\equiv u_1$,

24) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_2u_3)\equiv u_4$

Таблица 2

1) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_1+u_4$;

2) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_1$;

3) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_4$,

4) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_1+u_4$;

5) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_1$;

6) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_4$;

7) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv u_2+u_3$;

8) $(u_1u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv u_2+u_3$;

9) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_1+u_3$;

10) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_1$;

11) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_3$;

12) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_1+u_3$;

13) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_1$;

14) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_3$,

15) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_3+u_4$;

16) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_3$;

17) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4$,

18) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv u_2+u_4$;

34) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv \alpha_3u_3$, $\alpha_3\neq 0$, $\alpha_3\neq 1$;

35) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv u_1$;

36) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv \alpha_1u_1$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_1\neq 1$;

37) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_3$;

38) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_1$;

39) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv \alpha_1u_1$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_1\neq 1$,

40) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_2$,

41) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_1$,

42) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv \alpha_2u_2$; $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_2\neq 1$,

43) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv u_1$;

44) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv u_2$;

45) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv \alpha_4u_4$; $\alpha_4\neq 0$, $\alpha_4\neq -1$;

46) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv u_3$;

47) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv u_1-u_4$,

48) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv \alpha_3u_3$; $\alpha_3\neq 0$, $\alpha_3\neq -1$;

49) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv u_4$;

50) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv u_1-u_3$,

51) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_1u_4)\equiv \alpha_4u_4$; $\alpha_4\neq 0$, $\alpha_4\neq -1$,

19) $(u_1 u_3) \equiv u_3, \ (u_2 u_4) \equiv u_2 + u_4;$

20) $(u_1 u_3) \equiv u_1, \ (u_2 u_3) \equiv \alpha_2 u_2; \quad \alpha_2 \neq 0, \alpha_2 \neq 1;$

21) $(u_1 u_3) \equiv u_1, \ (u_2 u_3) \equiv u_4;$

22) $(u_2 u_3) \equiv u_2, \ (u_1 u_3) \equiv \alpha_1 u_1; \quad \alpha_1 \neq 0, \alpha_1 \neq 1;$

23) $(u_2 u_3) \equiv u_2, \ (u_1 u_3) \equiv u_4;$

24) $(u_2 u_3) \equiv u_2, \ (u_1 u_3) \equiv u_1;$

25) $(u_2 u_3) \equiv u_3, \ (u_2 u_4) \equiv \alpha_4 u_4; \quad \alpha_4 \neq 0, \alpha_4 \neq 1;$

26) $(u_2 u_3) \equiv u_3, \ (u_2 u_4) \equiv u_1;$

27) $(u_1 u_4) \equiv u_1, \ (u_2 u_4) \equiv \alpha_2 u_2; \quad \alpha_2 \neq 0, \alpha_2 \neq 1;$

28) $(u_1 u_4) \equiv u_1, \ (u_2 u_4) \equiv u_3;$

29) $(u_1 u_4) \equiv u_1, \ (u_3 u_4) \equiv \alpha_3 u_3; \quad \alpha_3 \neq 0, \alpha_3 \neq 1;$

30) $(u_1 u_4) \equiv u_1, \ (u_3 u_4) \equiv u_2;$

31) $(u_2 u_4) \equiv u_4, \ (u_2 u_3) \equiv \alpha_3 u_3; \quad \alpha_3 \neq 0, \alpha_3 \neq 1;$

32) $(u_2 u_4) \equiv u_4, \ (u_2 u_3) \equiv u_1;$

33) $(u_2 u_4) \equiv u_4, \ (u_2 u_3) \equiv u_3;$

52) $(u_1 u_3) \equiv u_1, \ (u_1 u_4) \equiv u_2;$

53) $(u_1 u_3) \equiv u_1, \ (u_1 u_4) \equiv u_3 - u_4;$

54) $(u_1 u_4) \equiv u_4, \ (u_1 u_3) \equiv \alpha_3 u_3; \quad \alpha_3 \neq 0, \alpha_3 \neq 1;$

55) $(u_1 u_4) \equiv u_4, \ (u_1 u_3) \equiv u_2;$

56) $(u_1 u_4) \equiv u_4, \ (u_1 u_3) \equiv u_3 + u_4;$

57) $(u_2 u_3) \equiv u_2, \ (u_3 u_4) \equiv u_4;$

58) $(u_2 u_3) \equiv u_2, \ (u_3 u_4) \equiv u_2 - u_4;$

59) $(u_3 u_4) \equiv u_4, \ (u_2 u_3) \equiv u_2;$

60) $(u_3 u_4) \equiv u_4, \ (u_2 u_3) \equiv u_1;$

61) $(u_3 u_4) \equiv u_4, \ (u_2 u_3) \equiv -u_2 + u_4;$

62) $(u_3 u_4) \equiv u_4, \ (u_1 u_3) \equiv u_2;$

63) $(u_3 u_4) \equiv u_4, \ (u_1 u_3) \equiv -u_1 + u_4;$

64) $(u_1 u_3) \equiv u_1, \ (u_3 u_4) \equiv u_4;$

65) $(u_1 u_3) \equiv u_1, \ (u_3 u_4) \equiv u_2;$

66) $(u_1 u_3) \equiv u_1, \ (u_3 u_4) \equiv u_1 - u_4.$

Таблица 3

1) $(u_1 u_2) \equiv u_1;$

2) $(u_1 u_3) \equiv u_1,$

3) $(u_1 u_4) \equiv u_1,$

4) $(u_2 u_3) \equiv u_1,$

5) $(u_2 u_4) \equiv u_1;$

6) $(u_3 u_4) \equiv u_1.$

Литература

1. S. Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.