УДК 517.946

В.Г.КОСТЕНКО, І.І.ЛИТВИН

ГРУПОВІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯННЯ ПЛАСТИЧНОСТІ

Бігармонійні розв'язки рівняння пластичності

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-4K^2=0, \tag{1}$$

де K – стала, досліджувались в [2].

У нашій роботі ми знаходимо основну групу перетворень рівняння (1), що дало можливість одержати в явному вигляді деяку сукупність його розв'язків, серед яких є і не бігармонійні. Під час визначення розв'язків рівняння (1) використана методика С. Лі [3] і Л.В.Овсянникова [1].

Нехай
$$XF=\xi(x,y,u)\frac{\partial F}{\partial x}+\eta(x,y,u)\frac{\partial F}{\partial y}+\zeta(x,y,u)\frac{\partial F}{\partial u} \tag{2}$$

інфінітезімальний оператор шуканої групи перетворень, яка залишає рівняння (1) інваріантним. Використовуючи ознаку Лі інваріантності диференціальних рівнянь відносно груп перетворень, одержимо визначальну систему рівнянь у частинних похідних для знаходження коефіцієнтів ξ, η, ζ оператора (2)

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial \xi}{\partial u}-\frac{\partial \eta}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial \zeta}{\partial u}-2\frac{\partial \xi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial u}-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}=0,\\ 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\partial u}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=0,\qquad 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial u}-\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}=0,\end{gathered} \tag{3}$$

звідки

$$\begin{gathered}\xi(x,y,u)=\alpha_1 y+\alpha_2,\quad \eta(x,y,u)=-\alpha_1 x+\alpha_3,\\ \zeta(x,y,u)=\beta_1(x^2+y^2)+\beta_2 x+\beta_3 y+\beta_4 .\end{gathered}$$

Отже, інфінітезімальні оператори групи перетворень рівняння (1) мають вигляд

$$X_1F=y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y},\quad X_2F=\frac{\partial F}{\partial x},\quad X_3F=\frac{\partial F}{\partial y},\quad X_4F=\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{4}$$

$$X_5F=(x^2+y^2)\frac{\partial F}{\partial u},\quad X_6F=x\frac{\partial F}{\partial u},\quad X_7F=y\frac{\partial F}{\partial u}.$$

довільна лінійна комбінація операторів (4) є також інфінітезімальним оператором цієї групи перетворень. Як відомо [1], розв'язки диференціальних рівнянь, інваріантних відносно заданої групи перетворень, належать інваріантним многовидам цієї групи; а неособливі інваріантні многовиди можна зобразити у вигляді

$$\Phi(J_1, \ldots, J_e) = 0, \tag{5}$$

де $J_1, \ldots, J_e$ - повний набір функціонально незалежних інваріантів групи. У зв'язку з цим розв'язки рівняння (1) можна шукати, користуючись інваріантними многовидами всіх можливих підгруп групи перетворень (4).

Наприклад, розглянемо підгрупу

$$XF = \alpha X_1 F + \beta X_5 F, \tag{6}$$

де α, β - довільні сталі. Інваріанти групи (6)

$$J_1 = x^2 + y^2, \quad J_2 = \frac{u}{x^2+y^2} - \frac{\beta}{\alpha} \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

є розв'язками рівняння $XF = 0$, а $\Phi(J_1 J_2) = 0$ - неособливі інваріантні многовиди цієї групи, звідки

$$u = \frac{\beta}{\alpha}(x^2+y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi(x^2+y^2).$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (1), одержимо

$$\varphi''(J_1) = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,(x^2+y^2)^{-1},$$

звідки

$$\varphi(J_1) = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,(x^2+y^2)\left[\ln(x^2+y^2) + c_1\right] + c_2,$$

а розв'язками рівняння (1), інваріантними відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором (6), є

$$u = \frac{\beta}{\alpha}(x^2+y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,(x^2+y^2)\left[\ln(x^2+y^2) + c_1\right] + c_2, \tag{7}$$

де α, β, C_1, C_2 - довільні сталі, $\alpha \neq 0$.

Аналогічно, розглядаючи лінійну комбінацію всіх операторів (4)

$$XF = \alpha_1 X_1 F + \alpha_2 X_2 F + \alpha_3 X_3 F + \alpha_4 X_4 F + \alpha_5 X_5 F + \alpha_6 X_6 F + \alpha_7 X_7 F, \qquad (4')$$

одержимо
$$J_1 = (\alpha_1 x - \alpha_3)^2 + (\alpha_1 y + \alpha_2)^2,$$

$$J_2 = u - \left(\frac{\alpha_7}{\alpha_1} - \frac{2\alpha_2\alpha_5}{\alpha_1^2}\right)x + \left(\frac{2\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1^3} + \frac{\alpha_6}{\alpha_1^2}\right)(\alpha_1 y + \alpha_2) - \left(\frac{A}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_5}{\alpha_1^3} J_1\right) \arcsin \frac{\alpha_1 x - \alpha_3}{\sqrt{J_1}},$$

$$\varphi''(J_1) = \pm \frac{1}{2\alpha_1^3 J_1^2} \sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a},$$

$$\varphi(J_1) = \pm \frac{1}{2\alpha_1^3}\Big[\Big(\sqrt{c} J_1 - \frac{b}{2\sqrt{c}}\Big) \ln\Big(\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} + \sqrt{c} J_1 + \frac{b}{2\sqrt{c}}\Big) -$$

$$- 2\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} - 2(\alpha_5 J_1 + \sqrt{a}) \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a}}{(\alpha_1 k + \alpha_5) J_1 - \sqrt{a}}\Big] +$$

$$+ c_1 J_1 + c_2,$$

а всі розв'язки рівняння (1), інваріантні відносно групи перетворень (4) наберуть вигляду

$$u(x, y) = \left(\frac{\alpha_7}{\alpha_1} - \frac{2\alpha_2\alpha_5}{\alpha_1^2}\right)x - \left(\frac{2\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1^3} + \frac{\alpha_6}{\alpha_1^2}\right)(\alpha_1 y + \alpha_2) +$$

$$+ \left(\frac{A}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_5}{\alpha_1^3} J_1\right) \arcsin \frac{\alpha_1 x - \alpha_3}{\sqrt{J_1}} \pm \frac{1}{2\alpha_1^3}\Big[\Big(\sqrt{c} J_1 - \frac{b}{2\sqrt{c}}\Big) \ln\Big(\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} + \sqrt{c} J_1 + \frac{b}{2\sqrt{c}}\Big) - \qquad (8$$

$$- 2\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} - 2(\alpha_5 J_1 + \sqrt{a}) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a}}{(\alpha_1 k + \alpha_5) J_1 - \sqrt{a}}\Big] + c_1 J_1 + c_2,$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_7$, c_1, c_2 – довільні сталі

$\alpha_1 \neq 0$, $a = A^2 \alpha_1^2$, $b = 2A\alpha_4\alpha_5$, $c = \alpha_1^2 k^2 - \alpha_5^2$,

$A = \frac{\alpha_5}{\alpha_1}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_3\alpha_6 - \alpha_2\alpha_7$.

Якщо ж $\alpha_1 = 0$, то оператор (4) запишемо

$$XF = \alpha_2 X_2 F + \alpha_3 X_3 F + \alpha_4 X_4 F + \alpha_5 X_5 F + \alpha_6 X_6 F + \alpha_7 X_7 F,$$

і аналогічно попередньому одержимо

$$J_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} x - y,$$

$$J_2=\frac{\alpha_4}{\alpha_2}x+\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2\alpha_2}\left(\alpha_6-2\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2}J_1+\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}\right)x^2-\frac{\alpha_7}{\alpha_2}xJ_1+\frac{\alpha_5}{\alpha_2}xJ_1^2-u,$$

$$u=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2\alpha_2}\left(\alpha_6+\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2}J_1\right)x^2+\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}-\frac{\alpha_7}{\alpha_2}J_1+\frac{\alpha_5}{\alpha_2}J_1^2\right)x+\varphi(J_1),$$

$$\varphi''(J_1)=\frac{A+2B}{R}J_1+\frac{1}{R}\sqrt{(4B^2-RN)J_1^2+(4AB+RM)J_1+(A^2-RL)}\ ,$$

$$\varphi(J_1)=D(J_1-K)\ln\left(\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}+\sqrt{c}\,J_1+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)+\left(\frac{cJ_1^2+bJ_1+a}{6R}-D\right)\frac{\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}}{c}+$$

$$+\frac{B}{3R}J_1^3+\frac{A}{2R}J_1^2+C_1J_1+C_2,$$

а розв'язок рівняння (1), інваріантний відносно останньої групи перетворень, є

$$u(x,y)=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2\alpha_2}\left(\alpha_6+\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2}J_1\right)x^2+\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}-\frac{\alpha_7}{\alpha_2}J_1+\frac{\alpha_5}{\alpha_2}J_1^2\right)x+$$

$$+D(J_1-K)\ln\left(\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}+\sqrt{c}\,J_1+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)+\frac{B}{3R}J_1^3+\frac{A}{2R}J_1^2+ \qquad /9/$$

$$+\left(\frac{cJ_1^2+bJ_1+a}{6R}-D\right)\frac{\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}}{c}+C_1J_1+C_2,$$

де $\alpha_2,\dots,\alpha_7$, C_1, C_2 — довільні сталі, $\alpha_2\neq 0$,

$$A=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\alpha_6+\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}-\frac{4\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2^2},\quad B=4\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2^2}-\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right),$$

$$L=\frac{\alpha_6^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3^2\alpha_7^2}{\alpha_2^4}+\frac{\alpha_6\alpha_7}{\alpha_2^2}-4K^2,\quad M=4\frac{\alpha_3\alpha_5\alpha_6}{\alpha_2^3}+4\frac{\alpha_3^2\alpha_5\alpha_7}{\alpha_2^4}+16\frac{\alpha_3\alpha_5\alpha_7}{\alpha_2^3},$$

$$R=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)^2,\quad N=20\frac{\alpha_3^2\alpha_5^2}{\alpha_2^4},\quad K=1-\frac{b}{a},\quad D=\frac{4ac-b^2}{8c},$$

$$c=4B^2-RN,\quad b=4AB+MR,\quad a=A^2-RL.$$

Розв'язки рівняння (1), інваріантні відносно підгруп групи перетворень (4), можна одержати як частинні випадки розв'язків (8), (9), приймаючи в них відповідні довільні сталі $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$, які дорівнюють нулю. Наприклад, якщо в (8) лише $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_5 \neq 0$, то одержимо (7), а якщо в (8) прийняли лише $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, то

$$u(x,y)=\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \pm \frac{1}{\alpha_1}\Big[\frac{\alpha_1 k}{2}(x^2+y^2)\ln\{\alpha_1^2(\sqrt{\alpha_1^2k^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}+\alpha_1 k(x^2+y^2))\}-$$

$$-\sqrt{\alpha_1^2k^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}-\alpha_4\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\alpha_1^2k^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}}{\alpha_1 k(x^2+y^2)-\alpha_4}\Big]+c_1(x^2+y^2)+c_2 .$$

буде інваріантним відносно підрупи $XF=\alpha_1 X_1 F+\alpha_4 X_4 F$ розв'язком рівняння (1), причому небігармонійним.

Л і т е р а т у р а

1. О в с я н н и к о в Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.
2. С а в і н Г. М., П а р а с ю к О. С. Бігармонійні розв'язки рівняння пластичності. ДАН УРСР, 1947, № 6.
3. S o p h u s L i e. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformation. Leipsig, 1891.

УДК 517:513:88

МЕЗЕН ШАХІН

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ЗАДАНІ НА РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЯХ

Розглянемо лінійний диференціальний вираз

$$l(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y \qquad (1)$$

з коефіцієнтами $p_j(x)$, $(n-j)$-раз неперервно диференційованими на скінченному інтервалі $[a,b]$.

Нехай $x_1, \ldots, x_{s-1}$ деякі фіксовані точки з $[a,b]$ такі, що