Розв'язки рівняння (1), інваріантні відносно підгруп групи перетворень (4), можна одержати як частинні випадки розв'язків (8), (9), приймаючи в них відповідні довільні сталі $\alpha_1, \dots, \alpha_7$, які дорівнюють нулю. Наприклад, якщо в (8) лише $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_5 \neq 0$, то одержимо (7), а якщо в (8) прийняли лише $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, то

$$u(x,y)=\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \pm \frac{1}{\alpha_1}\Big[\frac{\alpha_1 K}{2}(x^2+y^2)\ln\Big\{\alpha_1^2\Big(\sqrt{\alpha_1^2K^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}+\alpha_1K(x^2+y^2)\Big)\Big\}-$$
$$-\sqrt{\alpha_1^2K^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}-\alpha_4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha_1^2K^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}}{\alpha_1K(x^2+y^2)-\alpha_4}\Big]+c_1(x^2+y^2)+c_2.$$

буде інваріантним відносно підрупи $XF=\alpha_1X_1F+\alpha_4X_4F$ розв'язком рівняння (1), причому небігармонійним.

Література

1. О в с я н н и к о в Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.

2. С а в і н Г. М., П а р а с ю к О. С. Бігармонійні розв'язки рівняння пластичності. ДАН УРСР, 1947, № 6.

3. S o p h u s L i e. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformation. Leipsig, 1891.

УДК 517:513:88

МЕЗЕН ШАХІН

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ЗАДАНІ НА РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЯХ

Розглянемо лінійний диференціальний вираз

$$l(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y \qquad (1)$$

з коефіцієнтами $p_j(x)$, $(n-j)$-раз неперервно диференційованими на скінченному інтервалі $[a,b]$.

Нехай $x_1, \dots, x_{s-1}$ деякі фіксовані точки з $[a,b]$ такі, що

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{s-1} < b, \tag{2}$$

Позначимо через D сукупність таких комплексно-значних функцій f, заданих на (a, b), що мають абсолютно неперервну похідну $(n-1)$-го порядку в кожному інтервалі $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, який не містить жодної з точок $x_1, \ldots, x_{s-1}$ і, крім того, $f^{(n)} \in L_2(a, b)$. Визначимо оператор L таким чином

$$Lf = l(f), \quad f \in D(L) \overset{df}{=} D.$$

Нехай $U(f)$ – лінійна форма відносно змінних $f^{(j)}(x_{s'} + 0)$,

$$f^{(j)}(x_{s'} - 0), \quad s' = 0, \ldots, s-1, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

$$x_0 + 0 \overset{df}{=} a \quad \text{і} \quad x_s - 0 \overset{df}{=} b$$

так, що $U(f)$ має вигляд

$$U(f) = \sum_{s'=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \gamma_{s'j}^{-} f^{(j)}(x_{s'} - 0) + \gamma_{s'j}^{+} f^{(j)}(x_{s'} + 0) \right\}. \tag{3}$$

Через $D(T)$ позначимо сукупність всіх функцій $f \in D(L)$, які задовольняють крайовим умовам

$$U_\nu(f) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

і нехай T – звуження оператора L на $D(T)$.

Згідно з формулою Гріна існують такі лінійні форми V_ν, від змінних $g^{(j)}(x_{s'} \pm 0)$, $j = 0, \ldots, n-1$, $s' = 0, \ldots, s-1$, що

$$\forall f \in D(L) \ \text{і} \ \forall g \in D(M), \ \text{де} \ M = L_0^*$$

$$(Lf, g) - (f, Mg) = U_1(f)\overline{V_{2s_n}(g)} + U_2(f)\overline{V_{2s_{n-1}}(g)} + \ldots + U_{2s_n}(f)\overline{V_1(g)}.$$

Однорідна крайова задача

$$l^*(g) = 0, \tag{5}$$

$$V_\nu(g) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2sn - m \tag{6}$$

називається спряженою до однорідної крайової задачі

$$\ell(f)=0, \tag{7}$$

$$U_\nu(f)=0, \qquad \nu=1,2,\dots,m \tag{8}$$

Тут $\ell^*(g)$ означає диференціальний вираз, спряжений до $\ell(f)$.

Нехай S диференціальний оператор в областю визначення $D(S)$, де $D(S)$ сукупність функцій $f\in D(L)$, що задовольняють крайовим умовам

$$f^{(j)}(x_s+0)=f^{(j)}(x_{s'}-0), \tag{9}$$

$$x_0+0=a,\ x-0=b,\quad j=0,\dots,n-1,\quad s'=0,\dots,s-1,$$

$$Sf=\ell(f), \qquad \forall f\in D(S). \tag{10}$$

Через $\mathscr{C}^\cdot(H)$ позначимо множину всіх лінійних замкнутих операторів $T:H\to H$, для яких $\dim[D(T)]<\infty$ і приймемо $\mathscr{C}(H)=\{T\in\mathscr{C}^\cdot(H):\dim D(T)^\perp=0\}$. Якщо T_1 і $T_2\in\mathscr{C}^\cdot(H)$, то запис $T_1\dot{\vee}T_2$ означає, що в операторів T_1 і T_2 є спільне скінченно кратне звуження $A\in\mathscr{C}^\cdot(H)$. У цьому випадку пара називається обмеженою знизу, а число

$$\varkappa(T_1,T_2)\overset{df}{=}\dim D(T_2)/D(A)-\dim D(T_1)/D(A)$$

називається відносним індексом цієї пари [1].

Дефект, кодефект та індекс оператора $T:H\to H$ визначаються співвідношенням

$$\operatorname{def}T=\dim Z(T),\quad \operatorname{codef}T=\dim R(T)^\perp,$$

$$\operatorname{ind}T=\operatorname{codef}T-\operatorname{def}T$$, де $Z(T)$ - многовид нулів оператора T.

Т е о р е м а 1. Число лінійно незалежних розв'язків q даної задачі зв'язано з числом лінійно незалежних розв'язків q^* спряженої задачі співвідношенням

$$q^*=3n-m+q. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Нехай q — число лінійно незалежних розв'язків даної задачі $l(f)=0$, $U_\nu(f)=0$, $\nu=1,\dots,m$ і q^* — число лінійно незалежних розв'язків спряженої задачі $l^*(g)=0$, $V_\nu(g)=0$, $\nu=1,2,\dots,2\mathit{3}n-m$. Очевидно $q=\operatorname{def}T$ і $q^*=\operatorname{def}T^*$ і тому $\operatorname{ind}T=\operatorname{codef}T-\operatorname{def}T=\operatorname{def}T^*-\operatorname{def}T=q^*-q$. Крім того, $\operatorname{ind}L=\operatorname{codef}L-\operatorname{def}L=0-3n=-3n$, тому що $R(L)=H$ і $\operatorname{codef}L=\dim R(L)^\perp=0$. Врешті, враховуючи, що число крайових умов вихідної задачі рівне m, то $m=\varkappa(L,T)=\operatorname{ind}T-\operatorname{ind}L=q^*-q+3n$, що й треба було довести.

Як відомо, оператори L, T і S належать $\mathscr{C}(H)$, причому L є спільним скінченнократним розширенням операторів S і T. Тому [1] пара S, T обмежена знизу $S\dot{\vee}T$. Тому що

$$\varkappa(L,S)=m,\quad \varkappa(L,T)=m,\quad \text{то}\quad \varkappa(S,T)=0.$$

Позначимо через $\rho(S)$ резольвентну множину оператора S і опишемо загальний розв'язок f рівняння

$$(T-\zeta)f=g,\quad g\in L_2(a,b).$$

Л е м а. Нехай $\zeta\in\rho(S)$, тоді $D(L)$ можна розкласти в пряму суму

$$D(L)=D(S)\dot{+}Z(L-\zeta),\qquad \forall\,\zeta\in\rho(S),\tag{12}$$

де $Z(L-\zeta)$ — множина нулів оператора $L-\zeta$.

Д о в е д е н н я. Для довільної функції $f\in D(L)$ покладемо

$$f_S\overset{\mathrm{df}}{=}S_\zeta(L-\zeta)f,\quad z=f-f_S,\quad \text{де}\quad S_\zeta=(S-\zeta)^{-1}$$

Тоді

$$(L-\zeta)z=(L-\zeta)f-(L-\zeta)f_S=(L-\zeta)f-(L-\zeta)S_\zeta(L-\zeta)f=$$
$$=(L-\zeta)f-(S-\zeta)S_\zeta(L-\zeta)f=0,\quad \text{тому що}\quad S\subset L.$$

Звідси випливає $z\in Z(L-\zeta)$. Далі нехай $u\in D(S)\cap Z(L-\zeta)$. Тоді $(L-\zeta)u=0$ і $(S-\zeta)u=0$, тобто ζ — власне значення для S, що суперечить тому, що $\zeta\in\rho(S)$. Очевидно, $\dim Z(L-\zeta)=m=3n$. Нехай $z_1(\zeta),\dots,z_m(\zeta)$ — деякий фіксований базис простору $Z(L-\zeta)$, тоді $f\in D(L)$ можна зобразити у вигляді

$$f = f_s + z(\zeta)^* C, \qquad (13)$$

де $f_s \in D(S)$, $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$, $z(\zeta)^* c = c_1 z_1(\zeta) + \dots + c_m z_m(\zeta)$

Позначимо
$$\omega(\zeta) \stackrel{df}{=} U_1 z(\zeta)^* = \begin{pmatrix} U_1 z_1(\zeta) & \dots & U_1 z_m(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_m z_1(\zeta) & \dots & U_m z_m(\zeta) \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Т е о р е м а 2. Якщо $\det \omega(\zeta) \neq 0$, то $\zeta \in \rho(T)$ і рівняння
$$(T - \zeta) f = g, \quad g \in L_2(0, b) \qquad (15)$$
має розв'язок
$$f = T_\zeta(g) = S_\zeta g - z(\zeta)^* \omega(\zeta)^{-1} S_\zeta g \qquad (16)$$

Д о в е д е н н я. Підставивши значення f з співвідношення (13) у рівняння (15), одержимо $(T - \zeta)(f_s + z(\zeta)^* c) = g$.
Звідси випливає, що
$$\begin{aligned} (L - \zeta)(f_s + z(\zeta)^* c) &= g, \\ (L - \zeta) f_s + 0 &= g, \\ f_s &= S_\zeta g. \end{aligned} \qquad (17)$$

Згідно з (17) і (13)
$$f = S_\zeta g + z(\zeta)^* c. \qquad (18)$$

Підставивши співвідношення (18) у крайові умови (4), одержуємо
$$\begin{aligned} U(S_\zeta g) + U z(\zeta)^* c &= 0, \\ c &= -\omega(\zeta)^{-1} U S_\zeta g. \end{aligned} \qquad (19)$$

Тому
$$f = T_\zeta g = S_\zeta g - z(\zeta)^* \omega(\zeta)^{-1} S_\zeta g.$$

Якщо вираз $l(y)$ самоспряжений, то оператор S теж самоспряжений. Крім того, припустимо, що оператор T також самоспряжений.

Т е о р е м а 3. Резольвента оператора T є інтегральним оператором квадратично інтегрованим симетричним ядром (з ядром Гільберта-Шмідта).

Доведення. Очевидно, що $Z(\zeta)^* \omega(\zeta)^{-1} S_\zeta g$ скінченновимірний оператор, оскільки будь-який скінченновимірний оператор в $L_2(a,b)$ являє собою інтегральний оператор з ядром Гільберта-Шмідта. А тому що оператор S_ζ також є інтегральним оператором з ядром Гільберта-Шмідта, то з формули (16) випливає твердження теореми. ▪

Теорема 4. Власні функції оператора T утворюють повну ортогональну систему в $L_2(a,b)$. Кожна функція з $D(T)$ розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд по власних функціях оператора T.

Доведення. Як відомо [2], резольвента оператора S_ζ зображається інтегральним оператором

$$S_\zeta g(x) = \int_a^b S(x,y,\zeta)\, g(y)\, dy,$$

де ядро $S(x,y,\zeta)$ неперервне при $a \le x \le b$, $a \le y \le b$ для кожного ζ, яке не є власним значенням оператора S. На основі формули (16) маємо

$$T_\zeta g(x) = \int_a^b T(x,y;\zeta)\, g(y)\, dy,$$

де ядро $T(x,y,\zeta)$ також неперервна при $a \le x \le b$, $a \le y \le b$. Таким чином, T – самоспряжений оператор з цілком неперервною резольвентою. Звідси випливає перша частина теореми, а друга з того, що [3]

$$\sup_{a \le x \le b} \int_a^b |T(x,y;\zeta)|^2\, dy < \infty,$$

оскільки неперервна функція на замкнутому проміжку обмежена. ▪

Література

1. Лянце В. Э. О некоторых отношениях между замкнутыми операторами. ДАН, т. 204, 1972, № 3.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., "Наука", 1969.
3. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.