УДК 513.812

А.І.ПИЛИПОВИЧ

ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ В ПРОСТОРІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО ЗА ДОПОМОГОЮ СФЕРОГРАФА, ОРИСФЕРОГРАФА, ГІПЕРСФЕРОГРАФА

Смогоржевський, використовуючи метод інверсії, довів теорему про те, що всяку конструктивну задачу другого степеня в площині Лобачевського можна розв'язати за допомогою циркуля, орициркуля і гіперциркуля, аналогічну теоремі Мора-Маскероні на евклідовій площині [3]. Використовуючи метод інверсії, А.Л.Шікус у [2] обгрунтувала, що за допомогою сферографа в евклідовому просторі можна розв'язати всяку задачу на побудову, яку можна розв'язати площинографом і сферографом, тобто задачу другого степеня. Ми доведемо таку теорему.

Т е о р е м а. Всяку конструктивну задачу простору Лобачевського, яку можна розв'язати за допомогою комплекса П-С-О-Г (площинограф, сферограф, орисферограф, гіперсферограф), можна розв'язати також і комплексом С-О-Г. У побудовах не використовуємо перетворення інверсії, що надає їм значної наочності.

Вважається за можливе побудувати такі геометричні побудови.

І. Сферографом - сферу, якщо: 1) дано її центр і задано радіус $\Sigma(O,r)$; 2) дано центр і точку сфери.

ІІ. Орисферографом - орисферу, якщо: 1) задано її вісь $\overline{AA_1}$, де A - точка орисфери на цій осі $\Omega(\overline{AA_1},A)$; 2) задано вісь $\overline{A_1A_2}$ і дано точку B орисфери, яка лежить на цій осі.

ІІІ. Гіперсферографом - гіперсферу Γ , якщо задані: 1) її базова площина α і дистанція d ; 2) базова площина α і дана одна точка M гіперсфери.

Доведення теореми полягає в розв'язанні так званих елементарних, основних і головних задач, до яких зводиться будь-яка задача другого порядку простору Лобачевського.

Елементарні задачі

1. Подвоїти заданий відрізок AB.

2. Знайти точки, що визначають площину α, яка проходить через дану точку M, перпендикулярно до заданої прямої AB.

3. Розділити заданий відрізок AB навпіл.

4. З даної точки M опустити перпендикуляр на задану пряму AB.

5. Знайти деяку точку прямої, яка проходить через дану точку M, перпендикулярно до площини α, заданої трьома точками A, B, C.

6. Перенести заданий відрізок AB на задану пряму CD, відклавши його від даної точки C.

7. Розділити навпіл заданий лінійний кут BAC.

8. У заданій трьома точками A, B, C площині α побудувати при заданій прямій AB кут M_1AN_1, що дорівнює заданому куту MON.

9. Розділити навпіл заданий двогранний кут $\varphi(ABC, ABD)$, де ABC, ABD площини двогранного кута, задані трьома точками.

10. Побудувати точку D_1 площини β_1, яка проходить через дві точки A_1, B_1 і утворює із заданою площиною $\alpha_1(A_1, B_1, C_1)$ кут φ_1, що дорівнює заданому двогранному куту $\varphi(ABC, ABD)$, де A, B, C, D точки площин кута φ.

Основні побудови

11. Побудувати точку N прямої, яка проходить через дану точку M паралельно заданому вектору $\overline{AB}$.

12. Дано відрізок паралельності $AB = a$. Визначити кут паралельності $\alpha = \Pi(a)$, що відповідає даному відрізку a.

13. Дано кут паралельності $\alpha = \angle BAC$. Визначити відрізок паралельності $a = \Delta(\alpha)$, що відповідає даному куту α.

14. Визначити спільний перпендикуляр MN двох розбіжних площин $\alpha(A, B, C)$ і $\alpha_1(A_1, B_1, C_1)$.

15. Побудувати спільний перпендикуляр MN двох розбіжних прямих $a(A, B)$ і $a_1(A_1, B_1)$.

16. Задані площина $\alpha(A, B, C)$ і пряма $a_1(P_1, Q_1)$, які не перетн-

-тьоя. Побудувати точку, яка належить площині α_1, що проходить че-з пряму a_1, паралельно площині α.

Г о л о в н і   з а д а ч і

Побудувати точки перетину такої заданої поверхні з такими заданими поверхнями та лініями:

I. Зі сферою Σ : 17/ сфери; 18) орисфери; 19) гіперсфери; 20) площини; 21) прямої; 22) кола; 23) орицикла; 24) гіперцикла.

II. З орисферою Ω : 25) орисфери; 26) гіперсфери; 27) площини; 28) прямої; 29) кола; 30) орицикла; 31) гіперцикла.

III. З гіперсферою Γ : 32) гіперсфери; 33) площини; 34) прямої; 35) кола; 36) орицикла; 37) гіперцикла.

IУ. З площиною: 38) площини; 39) прямої; 40) кола; 41) орицикла; 42) гіперцикла.

У. Побудувати точки перетину таких заданих ліній: 43) двох прямих; 44) двох кіл; 45) двох орициклів; 46) двох гіперциклів; 47) прямої і кола; 48) прямої і орицикла; 49) прямої і гіперцикла; 50) кола й орицикла; 51) кола та гіперцикла; 52) орицикла і гіперцикла.

Вважаємо побудованими всі дані фігури і їх перетини, тоді як задані фігури потрібно побудувати. Приймаємо за можливе вибирати довільні точки простору.

Р о з в'я з а н н я   е л е м е н т а р н и х і   о с н о в н и х   з а д а ч

№ 1. Будуємо сферу $\angle(B, BA)$ й орисферу $\Omega(BA, B)$. На колі $\Sigma \times \Omega$ вибираємо три довільні точки P, Q, R. Нехай D - точ- перетину прямої AB з площиною PQR. Тоді з формул XXX_7 і XX_8 [1] випливає $DB < \frac{1}{2} AB$. Звідки $PA > PB$. Побудувавши сфери $\Sigma_1(P, PA)$, $\Sigma_2(Q, PA)$, $\Sigma_3(R, PA)$, одержуємо точку S їх -тину, відмінну від A та розміщену зовні відрізка AB за точкою -удуємо орисферу $\Omega(\overline{BS}, B)$. Вона перетинається зі сферою Σ по K_1. Виберем на K_1 довільну точку T і побудуємо сфери

$\Sigma_4(P,TA)$, $\Sigma_5(Q,TA)$. Тоді шукана точка C визначиться на перетину сфер Σ, Σ_4 і Σ_5.

№ 2. а) Якщо точка M не лежить на прямій AB, то будуємо сфери $\Sigma(A,AM)$, $\Sigma_1(B,BM)$, що перетнуться по колу k, яке визначає шукану площину α.

б) Якщо M лежить на прямій AB, то будуємо на AB точку N таку, що $AN=2AM$ /1/. Виконуємо сфери $\Sigma(A,r)$, $\Sigma_1(N,r)$, $r>AM$, які перетнуться по колу k, що належить шуканій площині.

№ 3. На прямій AB будуємо точки C, D такі, що відрізки $AC=2AB$, $BD=2BA$ (1). Виконуємо сфери $\Sigma_1(A,AB)$, $\Sigma_2(B,AB)$, коло k перетину яких визначає площину $\alpha\perp AB$, яка проходить через середину X відрізка AB. Колами k_1, k_2 задаємо площини α_1, α_2, які проходять через точки A, B, перпендикулярно AB (2). Наладивши гіперсферограф так, щоб його базова площина збігалась з площиною α, а поверхня гіперсфери проходила через точку A, зафіксуємо одержану дистанцію $d=\frac{1}{2}AB$. Будуємо гіперсфери $\Gamma_1(\alpha_1,d)$, $\Gamma_2(\alpha_2,d)$, точка дотику X яких є шуканою.

№ 4. Відшукаємо коло $k=\Sigma(A,AM)\times\Sigma_1(B,BM)$, на якому виберемо три довільні точки P, Q, R. Будуємо сфери $\Sigma_2(P,PA)$, $\Sigma_3(Q,QA)$, $\Sigma_4(R,RA)$, які перетнуться в точках A, C, та середину O відрізка AC (3), де O - основа шуканого перпендикуляра.

№ 5. а) Нехай $M\notin\alpha$. Будуємо точку N, симетричну точці M відносно площини $\alpha(A,B,C)$. $N=\Sigma(A,AM)\times\Sigma_1(B,BM)\times\Sigma_2(C,CM)$. Середина O відрізка MN - основа шуканого перпендикуляра (3).

б) $M\in\alpha$. Виберемо ту з прямих AB, AC, BC, яка не містить точки M. Нехай $M\notin AB$. Задамо колами площини $\beta\perp AM$, $\gamma\perp BM$, які проходять через M (2). Побудуємо точки прямої перетину заданих площин β і γ (№ 38).

Нехай $\angle AMB\neq\frac{\pi}{2}$, тобто β і γ не перпендикулярні. Будуємо сферографом три точки площини β', симетричної площині β відносно γ. Виберемо деяку точку T площини γ, розміщену на колі, яке визначає цю площину. Побудуємо точки T_1, T_2, симетричні точці T відносно площин відповідно β і β'. Виконуємо кола $k_1 = \Sigma_1(T_1, r) \times \Sigma(T, r)$, $k_2 = \Sigma_2(T_2, r) \times \Sigma(T, r)$, причому r вибираємо так, щоб кола k_1 і k_2 перетинались. Точки P, Q перетину кіл k_1 і k_2 визначають шукану пряму.

Якщо $\measuredangle AMB = \frac{\pi}{2}$, то $\beta \perp \gamma$, $\beta' \equiv \beta$. У цьому випадку замість площини β' будуємо гіперсферографом бісекторіальну площину δ двогранного кута, утвореного площинами β і γ (див. нижче задачу № 9). Знаходимо точки P, Q лінії перетину площин β і δ.

З а у в а ж е н н я 1. Як проміжна побудова до задачі № 5 розв'язана задача № 38 про побудову точок лінії перетину площин β і γ.

№ 6. Задаємо колом площину $\alpha \perp CD$, яка проходить через точку C (2). Будуємо гіперсферу $\Gamma(\alpha, AB)$ і сферу $\Sigma(C, AB)$, які дотикаються в шуканій точці M, $CM = AB$.

№ 7. На стороні AC відкладаємо відрізок $AC_1 = AB$ (6). Ділимо точкою O відрізок C_1B навпіл (3). AO – шукана бісектриса.

№ 8. На стороні ON відкладаємо відрізок $ON_2 = OM$, а на прямій AB – відрізок $AM_1 = OM$ (6). В точці A будуємо $\perp$ до площини α (5), на якому буде відома деяка точка P, будуємо точку P', симетричну точці P відносно площини α. Виконуємо $k = \Sigma(P, PM_1) \times \Sigma_1(P', P'M_1)$, яке проходить через точку M_1, має центр у точці A і лежить у площині α. Перетнувши коло k сферою $\Sigma_2(M_1, MN_2)$, одержимо дві точки N_1, N_1' такі, що $\measuredangle M_1AN_1 = \measuredangle M_1AN_1' = \measuredangle MON$.

№ 9. Будуємо $\Gamma_1(ABC, J)$, $\Gamma_2(ABD, J)$, що перетнуться по гіперциклу h, базою якого є AB. Площина гіперциклу h є шуканою бісекторіальною площиною.

№ 10. З точки D опускаємо перпендикуляр DO на площину ABC. При ребрі A_1B_1 в площині α_1 будуємо $\measuredangle B_1A_1O_1 = \measuredangle BAO$ (8), де $A_1O_1 = AO$ (6). У точці O_1 ставимо перпендикуляр до площини α_1 (5), на якому відкладаємо $O_1D_1 = OD$ (6). D_1 – шукана точка.

№ 11. Проводимо орисферу $\Omega(\overline{AB}, M)$ і будуємо її вісь у точці M, для чого будуємо $k = \Omega \times \Sigma(M, r)$, на якому вибираємо три довільві точки P, Q, R. Тоді точка $N = \Sigma_1(P, r) \times \Sigma_2(Q, r) \times \Sigma_3(R, r)$ визначає вісь $\overline{MN}$ орисфери Ω. $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

№ 12. Задамо площину, що проходить через точку A, перпендикулярно до AB (2), в якій виберемо деяку відому точку C. Через точку B проводимо пряму $\overline{BN} \parallel \overline{AC}$ (11). $\measuredangle NBA = \alpha = \Pi(a)$.

№ 13. Будуємо $\Omega(\overline{AB}, A)$. Знайдемо точку B', симетричну точці B, відносно AC (4), (1). Будуємо $k = \Omega \times \Omega_1(\overline{AB'}, A)$. Знайдемо центр O кола k, для чого виберемо на k крім точки A ще дві точки P, Q. Через середини відрізків AP, PQ (3) проведемо перпендикулярні до них площини β, γ (2). Нехай T – точка, яка лежить на лінії перетину площин β і γ (заув. 1). Будуємо точку T', симетричну точці T відносно площини кола k (див. 5,а). Середина відрізка TT' (3) є центром O кола k. $AO = \Delta(\alpha)$.

Зауваження 2. Як видно з № 13 можна побудувати центр кола.

№ 14. З точки A опускаємо перпендикуляр AD_1 на площину α_1, а з точки D_1 – $DD_1 \perp \alpha$ (5). Одержуємо площину $\beta(A, D_1, D)$, перпендикулярну до площин α і α_1. Так само задамо другу площину γ, перпендикулярну до площин α і α_1. Побудуємо точки M_1, N_1 лінії перетину площин β і γ (заув. 1). Виконуємо точки M_1', M_1'', симетричні точці M_1 відносно площин α і α_1 (5). Будуємо середину M відрізка M_1M_1' і середину відрізка M_1M_1''(3). MN – шуканий перпендикуляр.

№ 15. З точки A опускаємо перпендикуляр AD_1 на a_1, а з точки D_1 – перпендикуляр D_1D на пряму a (4). Через точку D_1 побудуємо площину $\alpha_1 \perp AD_1$, а через точку D – площину $\alpha \perp D_1D$ (2). Площини α і α_1 – розбіжні. Будуємо їх спільний перпендикуляр (14), який є шуканим.

№ 16. а) Нехай пряма P_1Q_1 розбіжна з площиною α. Проектуємо точки P_1, Q_1 на площину α (5). P, Q – проекції P_1, Q_1 на α. Будуємо спільний перпендикуляр MN розбіжних прямих P_1Q_1, PQ (15). Через точку N прямої PQ будуємо площину $\beta \perp PQ$ (2). Знаходимо кут $\varphi = \Pi(MN)$ (12), який відкладаємо в площині β при прямій MN з вершиною в точці M по обидві сторони від прямої MN (8). Нехай другі сторони кута визначаються точками S_1, S_2. Тоді $\angle S_1MN = \angle S_2MN = \varphi = \Pi(MN)$, а площини $S_1P_1Q_1$ і $S_2P_1Q_1$ паралельні площині α.

б) Нехай $\overline{P_1Q_1} \parallel \alpha$. Виконуємо проекції P, Q точок P_1, Q_1 на площину α (5). У точці P_1 будуємо пряму $M_1N_1 \perp$ пл.P_1Q_1QP (5). Площина, визначена прямими M_1N_1 і P_1Q_1, паралельна до площини α

Розв'язування головних задач

На основі постулатів інструментів C, O, Γ задані сферу, орисферу і гіперсферу можна побудувати. Тоді матимемо і їх перетини. Певним чином комбінуючи сфери, орисфери і гіперсфери, можна побудувати також задані кола, орицикли, гіперцикли. Отже, на основі постулатів прикладів можна розв'язати задачі 17,18,19,22,23,24,25,26,29,30,31,32,35, 36,37,44,45,46,50,51,52. Для доведення теореми потрібно розв'язати ще задачі 20,21,27,28,33,34,39,40,41,42,43,47,48,49.

№ 20. Побудувати коло K перетину заданої площини $\alpha(A,B,C)$ і сфери $\Sigma(O,r)$.

а) $O \notin \alpha$. Будуємо O', симетричну точці O відносно площини α (див. 5,а). Тоді $K = \Sigma \times \Sigma_1(O',r)$.

б) $O \in \alpha$. Побудуємо відрізок, який дорівнює стороні PM вписаного у великий круг сфери Σ квадрата, для чого на сфері Σ виберемо дві довільні точки P, Q. Побудуємо гіперсферу $\Gamma(PQO, r)$, яка дотикається сфери Σ у точці M такій, що PM - шуканий відрізок. Будуємо гіперсферу $\Gamma_1(\alpha, r)$, яка дотикається сфери Σ у точці T. Тоді $K = \Sigma \times \Sigma_1(T, MP)$.

№ 21. Побудувати точки перетину заданої прямої $a(A,B)$ і даної сфери $\Sigma(O,r)$.

Виберемо дві довільні точки C, C_1, які не лежать в одній площині з прямою a. Будуємо кола K і K_1 перетину площин $\alpha(A,B,C)$

і $\alpha_1(A_1, B_1, C_1)$ з сферою Σ (20). Кола κ і κ_1 перетинаються в шуканих точках.

№ 27. Побудувати лінію перетину площини $\alpha(A,B,C)$ і даної орисфери $\Omega(\overline{MN}, M)$

а) Якщо MN перетинає або розбіжна з площиною α, то шукане коло $\kappa = \Omega \times \Omega_1(\overline{M'N'}, M')$, де M', N' - точки, симетричні до точок M, N відносно α.

б) Якщо $\overline{MN} \parallel \alpha$, то шукана лінія - орицикл q, який будуємо так. Нехай M' - проекція точки M на площину α (5). Позначимо $MM' = d$. Побудуємо точку P перпендикуляра до площини $M'MN$, який проходить через точку M. Тоді $q = \Omega \times \Gamma(MNP, d)$.

№ 28. Розв'язуємо аналогічно до (21), використовуючи розв'язок (27).

№ 33. Побудувати лінію перетину заданої площини $\alpha(A,B,C)$ і даної гіперсфери $\Gamma(\beta, d)$, де $\beta(P,Q,R)$ - базова площина.

Лінія перетину ℓ є колом, орициклом, гіперциклом, якщо площини α і β відповідно розбіжні, паралельні, перетинаються. $\ell = \Gamma \times \Gamma'(\beta', d)$, де $\beta'(P', Q', R')$ - площина, симетрична площині $\beta(P,Q,R)$ відносно площини α. Розглянута побудова шуканого гіперцикла ℓ перетину α і Γ не здійснима, якщо $\alpha \perp \beta$. У цьому випадку будуємо дві точки M, N лінії перетину площин α і β (заув. 1). Проведемо сферу $\Sigma(M, d)$, яка дотикається гіперсфери $\Gamma(\beta, d)$ в точці T. Виберемо довільну точку S, яка не належить площинам α, β. Тоді гіперсфери $\Gamma_1(MNS, T)$ і Γ перетинаються по шуканому гіперциклу $h(MN, d)$.

№ 34. Розв'язуємо аналогічно до (21), використовуючи розв'язок (33).

№ 39. Побудувати точку D перетину заданих прямої $a(M,N)$ і площини $\alpha(A,B,C)$.

Побудуємо точки площини $\alpha'(A', B', C')$, симетричної площині α відносно прямої a (4), (1). Будуємо кола κ, κ' перетину площин α і α' з сферою $\Sigma(M, r)$ такого радіуса r, щоб κ і κ' перетинались (20). Нехай S і T - точки перетину κ і κ'. Тоді середина відрізка ST є шуканою точкою D (2). Якщо $a \perp \alpha$, то задача зводиться до (5).

№ 40. Знайти точки перетину даного кола $k(O,r)$ і заданої площини $\alpha(A,B,C)$.

Будуємо коло $k_1=\alpha\times\Sigma(O,r)$. Точки перетину кіл k і k_1 є шуканими.

№№ 41, 42. Розв'язуються аналогічно (40).

№ 43. Побудувати точку перетину двох заданих прямих $a(A_1,A_2)$, $b(B_1,B_2)$.

Виберемо не інцидентну цим прямим точку C. Знаходимо точку P перетину a з площиною B_1B_2C (39) і точку $Q=b\times A_1A_2C$. Якщо $P\equiv Q$, то прямі перетинаються і P – точка їх перетину.

№ 47. Побудувати точки перетину заданої прямої $a(A,B)$ і даного кола $k(O,r)$.

Будуємо точки перетину прямої a і сфери $\Sigma(O,r)$ (21), які є шуканими, якщо пряма лежить в площині α даного кола. Коли $a\notin\alpha$, то будуємо точку $P=a\times\alpha$. Якщо $P\in k$, то P – шукана точка.

№№ 48, 49. Розв'язуються аналогічно до (47).

Теорема доведена.

Л і т е р а т у р а

1. К а г а н В. Ф. Основания геометрии, ч. I. М.-Л., 1949.

2. П и к у с А. Л. Вопросы теории и методики геометрических построений в пространстве. Автореф. канд. дисс., Ленинград, 1955.

3. С м о г о р ж е в с ь к и й О. С. Про розв'язування конструктивних задач другого степеня в пр. Лобачевського з допомогою циркуля, горициркуля і гіперциркуля. Математичний збірник Київ. ун-ту, № 2, 1948.