УДК 539.3

Я.Г.САВУЛА

РОЗРАХУНОК НЕКОЛОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Задача про пружну деформацію циліндричної оболонки неколового перетину розглядалась багатьма авторами. У [2] методом малого параметру розв'язано задачу про деформацію еліптичного ортотропного циліндра при умовах вільного опирання на краях. Цей же метод застосовувався і в [1,3], де досліджувались циліндричні оболонки довільного поперечного перетину при довільних умовах на криволінійних краях. В останніх використовувалось комплексне рівняння теорії циліндричних оболонок В.В.Новожилова [4], записане в криволінійній системі координат (α, β), де β - дуговий параметр. Проте у деяких задачах (наприклад, у задачі спряження оболонки з плоским днищем) вигідно мати розв'язок у системі координат з кутовим параметром β. Тому ми розв'язуємо методом малого параметра комплексне рівняння теорії неколових циліндричних оболонок, яке записане в системі координат з кутовим параметром β.

1. Задамо криволінійний циліндр рівняннями

$$x = R[\sin\beta + \varepsilon\varphi_1(\beta)];$$
$$y = R[\cos\beta + \varepsilon\varphi_2(\beta)]; \qquad (1)$$
$$z = R\alpha,$$

де α, β - криволінійні координати серединної поверхні циліндра, причому α - віддаль вздовж твірної; β - кут, що відраховується від осі OY у напрямку осі OX; ε - малий параметр;

$$\varphi_1(\beta)=\sum_{m=2}^{N}(\alpha_m \sin m\beta+\gamma_m \cos m\beta);$$
$$\varphi_2(\beta)=\sum_{m=2}^{N}(\alpha_m \cos m\beta-\gamma_m \sin m\beta); \tag{2}$$

α_m, β_m – задані дійсні величини.

Параметри Ляме у цьому випадку будуть

$$A_1=R; \qquad A_2=R[1+\varepsilon A^{(1)}+\varepsilon^2 A^{(2)}+\ldots], \tag{3}$$

де

$$A^{(1)}=\sum_{m=2}^{N} m[\alpha_m \cos(m-1)\beta-\gamma_m \sin(m-1)\beta].$$

Безрозмірний радіус кривини $\rho=\frac{R_2}{R}$ теж зображається у вигляді розкладу за малим параметром ε

$$\frac{1}{\rho}=[1+\varepsilon\rho^{(1)}+\ldots]; \qquad \rho=[1-\varepsilon\rho^{(1)}+\ldots], \tag{4}$$

де

$$\rho^{(1)}=\sum_{m=3}^{N} m(m-2)[\alpha_m \cos(m-1)\beta-\gamma_m \sin(m-1)\beta].$$

Систему комплексних рівнянь теорії оболонок В.В.Новожилова [4], записану у вибраній системі координат, можна звести до одного рівняння на допоміжну функцію $\widetilde{T}=\widetilde{T}_1+i\widetilde{T}_2$

$$\Delta(\rho\Delta\widetilde{T})+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{R}{A_2}\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\beta}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial\alpha^2}=i2b^2R\left[-\frac{A_2}{R}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\Delta(\rho q_n)\right] \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (5) шукаємо у вигляді ряду за степенями ε

$$\widetilde{T}=\widetilde{T}^{(0)}+\varepsilon\widetilde{T}^{(1)}+\varepsilon^2\widetilde{T}^{(2)}+\ldots \tag{6}$$

Підставляючи розклад (6) у рівняння (5), враховуючи співвідношення (3,4) і прирівнюючи члени при однакових степенях ε, одержуємо

$$\Delta^0\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\widetilde{T}^{(0)}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}^{(0)}}{\partial\alpha^2}=i2b^2R\left[-\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\Delta^0 q_n\right]; \tag{7}$$

$$\Delta^0\Delta^0\widetilde{T}^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\widetilde{T}^{(1)}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}^{(1)}}{\partial\alpha^2}=-\Delta^0\Delta^1\widetilde{T}^{(0)}+\Delta^0\rho^{(1)}\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}-$$

$$-\Delta^1\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}-\frac{\partial}{\partial\beta}\rho^{(1)}\frac{\partial\widetilde{T}^{(0)}}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}A^{(1)}\frac{\partial\widetilde{T}^{(0)}}{\partial\beta}-i2b^2R\Big[\Delta^0(\rho^{(1)}q_n)+$$

$$+A^{(1)}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}-\Delta^1 q_n\Big]. \tag{8}$$

Тут Δ^0, Δ^1 - елементи розкладу оператора Δ в ряд за степенями малого параметра

$$\Delta=\Delta^0+\varepsilon\Delta^1+\dots,$$

$$\Delta^0=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},$$

$$\Delta^{(1)}=-\frac{\partial}{\partial\beta}A^{(1)}\frac{\partial}{\partial\beta}-A^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}.$$

Знайшовши $\widetilde{T}^{(i)}$, можна визначити компоненти розкладу за малим параметром комплексних зусиль і переміщень, зробивши розклад по степенях малого параметра у відомих формулах [4].

Відзначимо, що розв'язки рівнянь нульового, першого і наступних наближень повинні задовольняти відповідним компонентам розкладу граничних умов задачі по степенях малого параметра.

2. Нехай криволінійна циліндрична оболонка, перетин якої має вісь симетрії $\beta=0$ навантажена зовнішнім тиском інтенсивності $p=const$

Уважатимемо, що граничні умови задачі такі, що в нульовому наближенні одержуємо осесиметричну задачу для колового циліндра радіуса R. Цій вимозі задовольняє ряд крайових задач, серед яких задача спряження циліндра з пластинкою (плоским днищем).

Отже, розв'язок задачі нульового наближення $\widetilde{T}^{(0)}=\widetilde{T}^{(0)}(\alpha)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{d^4\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^4}+i2b^2\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}=0, \tag{9}$$

звідси

$$\widetilde{T}^{(0)}=\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2\alpha+\widetilde{C}_3e^{\kappa\alpha}+\widetilde{C}_4e^{-\kappa\alpha}. \tag{10}$$

Підставляючи розв'язок (10) у рівняння (8), дістаємо

$$\Delta^0\Delta^0\widetilde{T}^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\widetilde{T}^{(1)}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}^{(1)}}{\partial\alpha^2}=\Delta^0\rho^{(1)}\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}+i2b^2Rp\Delta^0\rho^{(1)}. \tag{11}$$

Розв'язок останнього рівняння зобразимо у вигляді

$$\widetilde{T}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\left[\varphi_m(\alpha)+f_m(\alpha)(m-2)m\right]\cos(m-1)\beta=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{T}_m^{(1)}(\alpha)\cos(m-1)\beta, \quad (12)$$

де

$$f_m(\alpha)=G_1^m+G_3^m\cdot e^{\kappa\alpha}+G_4^m e^{-\kappa\alpha},$$

а через $\varphi_m(\alpha)$ позначено загальний розв'язок рівняння

$$\varphi_m^{IV}+2\left[i\beta^2-(m-1)^2\right]\varphi_m^{II}+\left[(m-1)^4-(m-1)^2\right]\varphi_m=0. \quad (13)$$

Тут G_1^m, G_3^m, G_4^m – постійні, що визначаються зі співвідношень

$$\begin{aligned}
&G_1^m\left[(m-1)^2-1\right]=-i2\beta^2 Rp,\\
&G_3^m\left[\kappa^4-2\kappa^2(m-1)^2+2i\beta^2\kappa^2+(m-1)^4-(m-1)^2\right]=\left[\kappa^4-\kappa^2(m-1)^2\right]\widetilde{C}_3,\\
&G_4^m\left[\kappa^4-2\kappa^2(m-1)^2+2i\beta^2\kappa^2+(m-1)^4-(m-1)^2\right]=\left[\kappa^4-\kappa^2(m-1)^2\right]\widetilde{C}_4.
\end{aligned} \quad (14)$$

Комплексні переміщення нульового наближення записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
&\widetilde{U}^{(0)}=\frac{R}{E\delta}\left\{pR(1+\mu)\alpha+\widetilde{C}_3 e^{\kappa\alpha}\left(\frac{1}{\kappa}-i\frac{(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa\right)+\widetilde{C}_4 e^{-\kappa\alpha}\left(-\frac{1}{\kappa}+i\frac{(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa\right)\right\};\\
&\widetilde{V}^{(0)}=0;\\
&\widetilde{W}^{(0)}=\frac{R}{E\delta}\left\{-(1+\mu)pR+\widetilde{C}_3 e^{\kappa\alpha}\left[\frac{i(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa^2-\mu\right]+\widetilde{C}_4 e^{-\kappa\alpha}\left[\frac{i(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa^2-\mu\right]\right\}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Приймаємо, що постійні $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ дорівнюють нулеві, оскільки вони визначають переміщення оболонки як жорсткого цілого.

Для переміщень першого наближення одержуємо формули

$$\begin{aligned}
&\widetilde{W}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{W}_m^{(1)}\cos(m-1)\beta;\\
&\widetilde{V}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{V}_m^{(1)}\sin(m-1)\beta;\\
&\widetilde{U}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{U}_m^{(1)}\cos(m-1)\beta,
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\widetilde{w}_m^{(1)}\left[1+(m-1)^2\right]=\left\{-\frac{iR(1+\mu)}{2b^2E\delta}\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}+\frac{R}{E\delta}\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}+(1+\mu)\frac{pR^2}{E\delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{i2b^2pR^2}{E\delta}+\frac{i2b^2pR^2}{E\delta}\frac{\alpha^2}{2}(m-1)^2-\widetilde{w}^{(0)}\right\}\alpha_m(m-2)m+$$

$$+\left[\frac{Ri(1+\mu)}{2b^2E\delta}-\frac{R}{E\delta}\right]\frac{d^2\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha^2}-\left\{\left[\frac{iR(1+\mu)}{2b^2E\delta}-\frac{R}{E\delta}\right](m-1)^2-\left(\frac{2ib^2R}{E\delta}-\mu\frac{P}{E\delta}\right)\right\}\widetilde{T}_m^{(1)};$$

$$\widetilde{v}_m^{(1)}(m-1)=\frac{R}{E\delta}\left[-\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}-i2b^2Rp-i2b^2Rp(m-1)\frac{\alpha^2}{2}\right]m(m-2)\alpha_m+$$

$$+\frac{R}{E\delta}\left[i2b^2-(m-1)^2\right]\widetilde{T}_m^{(1)}+\frac{R}{E\delta}\frac{d^2\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha^2}-(m-1)^2\widetilde{w}_m^{(1)};$$

$$\widetilde{u}_m^{(1)}(m-1)^2=-(m-1)\frac{d\widetilde{v}_m^{(1)}}{d\alpha}+\frac{2R(1+\mu)}{E\delta}\left\{-\left[1+\frac{i}{2b^2}(m-1)^2\right]\frac{d\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2b^2}\frac{d^3\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha^3}+\frac{i}{2b^2}(3-m)m\alpha_m\frac{d^3\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^3}-m\alpha_m\frac{d\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha}\right\}.$$

Л і т е р а т у р а

1. А б д у л р з а е в М. А. Приближенное решение уравнения равновесия некруговых цилиндрических оболочек методом малого параметра. "Труды УІ Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек". М., "Наука", 1966.

2. Б у р м и с т р о в Ф.Е. К вопросу деформации оболочки в виде эллиптического цилиндра, близкого к круговому. Ученые записки Саратовского ун-та, № 19, 1956.

3. М а л к и н а Р. Л. К расчету труб произвольного поперечного сечения. Инженерный сборник, 1954, № 19.

4. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1962.