УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ДВОВИМІРНИЙ РОЗПОДІЛ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо густину двовимірного гама-розподілу

$$p(t_1,t_2)=\frac{(\alpha\beta)^{\frac{\nu+1}{2}}}{(1-r^2)r^{\nu-1}\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\alpha t_1+\beta t_2}{1-r^2}}(t_1t_2)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2r\sqrt{\alpha\beta}}{1-r^2}\sqrt{t_1t_2}\right), \quad (1)$$

$$(\alpha>0,\ \beta>0,\ \nu>0,\ 0<r<1;\ t_1>0,\ t_2>0).$$

Густину (1) при $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\nu=\frac{m}{2}$, $(m=1,2,\dots)$ називаємо густиною двовимірного χ^2-розподілу; при $\nu=n$, $(n=1,2,\dots)$ -густиною двовимірного розподілу Ерланга; при $\nu=1$ -густиною двовимірного експонентного розподілу; при $r=0$ - густиною двовимірного гама-розподілу з некорельованими компонентами.

Якщо $\alpha=\beta=1$ та $\nu=\frac{1}{2}$, то густина (1) набирає вигляду

$$p(t_1,t_2)=\frac{1}{\pi\sqrt{(1-r^2)t_1t_2}}e^{-\frac{t_1+t_2}{1-r^2}}ch\left(\frac{2r}{1-r^2}\sqrt{t_1t_2}\right),\ (0<r<1;\ t_1>0,\ t_2>0), \quad (2)$$

оскільки

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,ch\,x.$$

Перша маргінальна густина для (1) дорівнює

$$p(t_1,\cdot)=\frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-\alpha t_1}t_1^{\nu-1},\quad (\alpha>0,\ \nu>0;\ t_1>0), \quad (3)$$

а перша умовна густина при фіксованому t_2, $t_2>0$

$$p(t_1|t_2)=\frac{\alpha^{\frac{\nu+1}{2}}}{(1-r^2)r^{\nu-1}(\beta t_2)^{\frac{\nu-1}{2}}}e^{-\frac{\alpha t_1+r^2\beta t_2}{1-r^2}}t_1^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2r\sqrt{\alpha\beta t_2}}{1-r^2}\sqrt{t_1}\right). \quad (4)$$

$$(\alpha>0,\ \beta>0,\ \nu>0;\ t_1>0).$$

Аналогічно записуються друга маргінальна густина та друга умовна густина при фіксованому $t_1, t_1 > 0$.

Легко перевірити (порівн. [1]), що зображення густини (1) дорівнює

$$\varphi(z_1, z_2) = \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \beta z_1 + \alpha z_2 + (1-r^2) z_1 z_2} \right)^{\nu}. \tag{5}$$

Зображення (5) є аналітичною функцією в $C^2_{+0} = \{ Re z_1 > 0,\ Re z_2 > 0 \}$.
Зображення маргінальної густини (3) запишемо

$$\varphi(z_1, 0) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + z_1} \right)^{\nu},$$

а зображення умовної густини (4)

$$\frac{\varphi(z_1, z_2)}{\varphi(0, z_2)} = \left(\frac{\alpha\beta + \alpha z_2}{\alpha\beta + \beta z_1 + \alpha z_2 + (1-r^2) z_1 z_2} \right)^{\nu}.$$

Двовимірному гама-векторові ставиться у відповідність двовимірний випадковий вектор з функцією розподілу

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \beta x_1 + \alpha x_2 + (1-r^2) x_1 x_2} \right)^{\nu}, & (x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0), \\ 0 & \text{— в інших випадках} \end{cases} \tag{6}$$

На підставі цілковитої монотонності зображення (порівн. [1]) для густини (1) одержуємо вираз

$$\frac{(\alpha\beta)^{\nu} (1-r^2)^{K_1+K_2+\nu} \Gamma(K_1+\nu) \Gamma(K_2+\nu)}{[\alpha + (1-r^2) x_1]^{K_1+\nu} [\beta + (1-r^2) x_2]^{K_2+\nu} \Gamma(\nu) \Gamma(\nu)} F\left(K_1+\nu, K_2+\nu; \nu; \frac{\alpha\beta r^2}{[\alpha + (1-r^2) x_1][\beta + (1-r^2) x_2]} \right),$$

де $F(a, b; c; z)$ — гіпергеометрична функція. Якщо останній вираз пронормувати, то дістанемо шестипараметричну двовимірну густину

$$q(x_1, x_2; \alpha, \beta, \nu, r, K_1, K_2) =$$

$$= \frac{(K_1+\nu-1)(K_2+\nu-1) \alpha^{K_1+\nu-1} \beta^{K_2+\nu-1} (1-r^2)^2}{F(K_1+\nu-1, K_2+\nu-1; \nu; r^2)} \cdot \frac{F\left(K_1+\nu, K_2+\nu; \nu; \dfrac{\alpha\beta r^2}{[\alpha+(1-r^2)x_1][\beta+(1-r^2)x_2]}\right)}{[\alpha + (1-r^2) x_1]^{K_1+\nu} [\beta + (1-r^2) x_2]^{K_2+\nu}}, \tag{7}$$

$$(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \nu > 0,\ 0 \leq r < 1;\ K_1 = 1, 2, \ldots;\ K_2 = 1, 2, \ldots;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0).$$

Розподіл заданий густиною(7) назвемо двовимірним розподілом гіпергеометричної функції, щоб не сплутувати з дискретним гіпергеометричним розподілом.

При $r = 0$ густина (7) стає добутком двох одновимірних густин Берра [2]. Розподіли асиметрії й ексцесу у вибірках з нормальної популяції мають одновимірні густини, що виражаються гіпергеометричною функцією [3]. Це показує, що розподіл з густиною (7) може застосовуватися у математичній статистиці.

Розподіли (6) і (7) виведено на основі відповідних властивостей зображення (5) густини (1). Аналогічно до того, як для густини (1) записано густини (3) і (4), можна записати маргінальні й умовні густини відповідні густині (7) двовимірного розподілу гіпергеометричної функції, а також знайти їхні числові характеристики. І густини, і числові характеристики виражаються в термінах гіпергеометричної функції.

Л і т е р а т у р а

1. К в і т І. Д. Зображення випадкового вектора. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
2. B u r r I. W. Ann. Math. Statist., 1942, 13, 215-232.
3. M c K a y A. T. Biometrika, 1933, 25, 204-210, 411-415.

УДК 517:946

Є.М.ПАРАСЮК, А.І.КАРДАШ

ОДНА ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Як відомо, під оберненою задачею теорії логарифмічного потенціалу розуміють задачу про знаходження форми області за заданим зовнішнім потенціалом і при заданій густині. Аналогічно ставиться обернена задача і для потенціалу простого шару. При цьому можна вважати, що зовнішній потенціал заданий лише на деякій замкненій кривій C, всередині якої знаходиться шукана індукуюча крива γ.