

Розподіл заданої густини (7) назовемо двовимірним розподілом гіпергеометричної функції, щоб не сплутувати з дискретним гіпергеометричним розподілом.

При $\gamma = 0$ густина (7) стає добутком двох одновимірних густин Берра [2]. Розподіл асиметрії й ексцесу у вибірках з нормальної популяції мають одновимірні густини, що виражаються гіпергеометричною функцією [3]. Це показує, що розподіл з густиною (7) може застосовуватися у математичній статистиці.

Розподіли (6) і (7) виведено на основі відповідних властивостей зображення (5) густини (1). Аналогічно до того, як для густини (1) записано густини (3) і (4), можна записати маргінальні й умовні густини відповідні густині (7) двовимірного розподілу гіпергеометричної функції, а також знайти їхні числові характеристики. І густини, і числові характеристики виражаються в термінах гіпергеометричної функції.

Л і т е р а т у р а

1. К в і т І. Д. Зображення випадкового вектора. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
2. В и т т І. W. Ann. Math. Statist., 1942, 13, 215-232.
3. М с К а у А. Т. Biometrika, 1933, 25, 204-210, 411-415.

УДК 517:946

Є.М.ПАРАСЮК, А.І.КАРДАШ

ОДНА ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Як відомо, під оберненою задачею теорії логарифмічного потенціалу розуміють задачу про знаходження форми області за заданим зовнішнім потенціалом і при заданій густині. Аналогічно ставиться обернена задача і для потенціалу простого шару. При цьому можна вважати, що зовнішній потенціал заданий лише на деякій замкнутій кривій C , всередині якої знаходиться шукана індукційна крива γ .

У роботі [1] було запропоновано один простий спосіб знаходження розв'язку вказаної задачі в припущенні, що шукана крива γ симетрична відносно осей координат, а густина μ кусково-стає

$$\mu(\varphi) = \begin{cases} +1, & 0 < \varphi < \pi \\ -1, & -\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

де φ - полярний кут. При цьому для простоти роль кривої C відігравало коло з центром у початку координат радіуса R .

Вказаний метод ґрунтувався на можливості застосування ортогональних рядів до розв'язування інтегро-диференціального рівняння першого роду:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2(\varphi) - 2Rz(\varphi)\cos(\theta - \varphi)}} \sqrt{z^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} d\varphi = f(\theta), \quad (1)$$

до якого зводиться названа задача. Тут $z = z(\varphi)$ - полярне рівняння шуканої кривої γ ; $f(\theta)$ - задана функція-потенціал на колі C .

Зображаючи функції $z(\varphi)$ і $f(\theta)$ через відповідні ряди Фур'є, після нескладних обчислень рівняння (1) зводиться до безмежної системи трансцендентних рівнянь вигляду

$$g_p(z_0, z_1, z_2, \dots) = 0, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

де

$$g_p(z_0, z_1, z_2, \dots) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{z^2 + z'^2} \left(\frac{z}{R} \right)^{2p+1} \sin(2p+1)\varphi d\varphi - \frac{2p+1}{4} f_{2p+1}.$$

Тут $z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \cos 2n\varphi$; f_{2p+1} - коефіцієнт Фур'є функції $f(\theta)$.

Далі до системи (2) спочатку застосовують метод редукції, а потім - метод найшвидшого спуску. При цьому $(S+1)$ -наближення знаходиться за формулою

$$z_n^{(s+1)} = z_n^{(s)} - \alpha p_n^{(s)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

де числа $\rho_n^{(s)}$ становлять розв'язок лінійної алгебраїчної системи

$$\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\partial g_p(z_0^{(s)}, \dots, z_{N-1}^{(s)})}{\partial z_q} \rho_q^{(s)} = g_p(z_0^{(s)}, \dots, z_{N-1}^{(s)}), \quad (4)$$

$p=0, 1, 2, \dots, N-1$, а число α підбирається з умови

$$\|g(z_0^{(s)}, \dots, z_{N-1}^{(s)})\| > \|g(z_0^{(s)} - \alpha \rho_0^{(s)}, \dots, z_{N-1}^{(s)} - \alpha \rho_{N-1}^{(s)})\|. \quad (5)$$

Тут

$$\|g(z_0, \dots, z_{N-1})\|^2 = \sum_{p=0}^{N-1} g_p^2(z_0, \dots, z_{N-1}).$$

В [1] наводився приклад, який ілюстрував достатню ефективність такого методу.

Однак вказаний метод має той недолік, що в ньому процес збіжності суттєво залежить від вибору нульового наближення при вибраному N , оскільки можливі локальні мінімуми можуть мати значний вплив на метод найшвидшого спуску.

Зокрема, згаданий в [1] приклад не вдалось розв'язати методом спуску, беручи за нульове наближення одиничне коло.

Ми наводимо нижче приклад, який дає підстави твердити, що процес вибору нульового наближення можна удосконалювати шляхом поступового поліпшення наперед вибраного наближення. При цьому метод спуску досить опочатку здійснювати при малому N . Іноді це приводить прямо до кінцевої мети, про що свідчить і пропонуванний приклад.

На машині "Мінськ-22" ми розв'язували задачу про знаходження замкнутої кривої, що індукує на колі C радіуса $R=5$ функцію-потенціал

$$f(\theta) = 3,135 \sin \theta - 0,118 \sin 3\theta + 0,0101 \sin 5\theta. \quad (6)$$

Нульове наближення вибирали найбільш природним чином: одиничне коло $z_0(\varphi) \equiv 1$. Спуск здійснювали при $N=3$. У результаті були одержані такі наближення (обчислення проводили з точністю $1/512$):

$$z_1(\varphi) = 1,323 + 0,148 \cos 2\varphi + 1,299 \cos 4\varphi;$$

$$z_2(\varphi) = 0,863 + 0,358 \cdot 10^{-1} \cos 2\varphi + 1,583 \cos 4\varphi;$$

$$z_3(\varphi) = 0,810 - 0,250 \cos 2\varphi + 1,493 \cos 4\varphi;$$

$$z_4(\varphi) = 0,831 - 0,474 \cos 2\varphi + 1,203 \cos 4\varphi;$$

$$z_5(\varphi) = 0,867 - 0,588 \cos 2\varphi + 1,043 \cos 4\varphi;$$

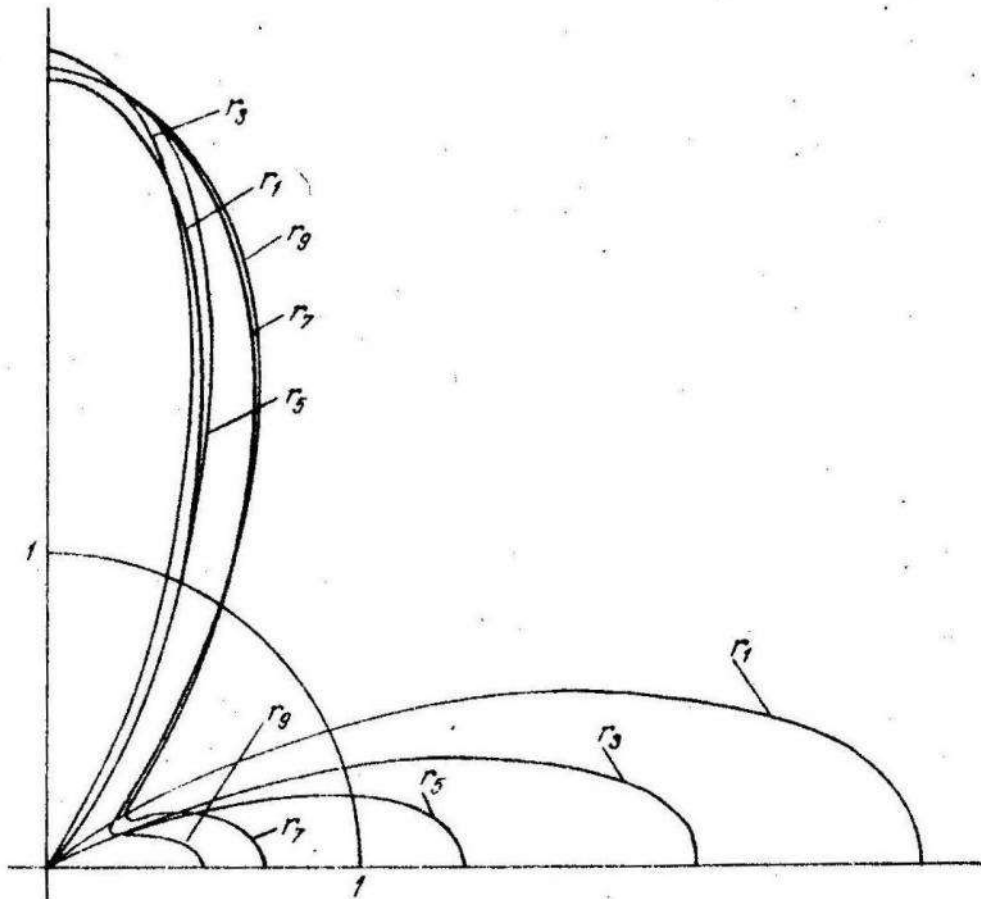
$$z_6(\varphi) = 0,917 - 0,700 \cos 2\varphi + 0,875 \cos 4\varphi;$$

$$z_7(\varphi) = 1,048 - 0,893 \cos 2\varphi + 0,550 \cos 4\varphi;$$

$$z_8(\varphi) = 1,024 - 0,958 \cos 2\varphi + 0,508 \cos 4\varphi;$$

$$z_9(\varphi) = 1,003 - 0,995 \cos 2\varphi + 0,501 \cos 4\varphi;$$

$$z_{10}(\varphi) = 1,000 - 1,000 \cos 2\varphi + 0,500 \cos 4\varphi;$$



На рисунку зображені всі непарні наближення на проміжку $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Як виявилось, досить виконати десять ітерацій, щоб добитися необхідної точності наближення. Про це, зокрема, свідчить значення останньої норми

$$\|g(z_0^{(10)}, z_1^{(10)}, z_2^{(10)})\| = \|g(1, -1, \frac{1}{2})\| = 0,203 \cdot 10^{-11}.$$

Зауважимо, що майже всі наближення одержані при $2 = 1$, крім першого (де $\alpha = \frac{1}{4}$), другого, п'ятого і шостого, що одержані при $\alpha = \frac{1}{2}$.

При цьому на одну ітерацію в середньому використовувалось до 2 хв машинного часу.

При $N > 4$ процес спуску від одиничного кола зупинявся. Це означає, що одиничне коло в цьому випадку є грубим наближенням. При поліпшеному нульовому наближенні ($z_0(\varphi) = z_1(\varphi)$) процес спуску продовжувався і знову приводив до мети. Але при цьому кількість машинного часу на одну ітерацію зросла до 12 хв.

Л і т е р а т у р а

1. П а р а с ю к Е. Н. та ін. Об одном методе решения обратной задачи теории логарифмического потенциала. - "Физика Земли", 1972, № 11

УДК 539.3:534.1

Н.П.ФЛЕЙШМАН, І.І.ОСИПОВА

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕКСЦЕНТРИЧНИМИ РЕБРАМИ

Вплив симетричних ребер жорсткості на коливання ізотропних і трансверсально ізотропних пластинок досліджувався в багатьох роботах [6, 3, 1] та інших.

Ми розглядаємо вільні коливання прямокутної ізотропної пластинки товщиною h , шарнірно опертої по двох паралельних сторонах $x = 0$, $x = a$ і цілкріпленої різними ізотропними тонкими пружними ексцентричними опорними ребрами з іншого матеріалу по краях $y = \pm b$ (рис. 1).