

Як виявилось, досить виконати десять ітерацій, щоб добитися необхідної точності наближення. Про це, зокрема, свідчить значення останньої норми

$$\|g(z_0^{(10)}, z_1^{(10)}, z_2^{(10)})\| = \|g(1, -1, \frac{1}{2})\| = 0,203 \cdot 10^{-11}.$$

Зауважимо, що майже всі наближення одержані при $2 = 1$, крім першого (де $\alpha = \frac{1}{4}$), другого, п'ятого і шостого, що одержані при $\alpha = \frac{1}{2}$.

При цьому на одну ітерацію в середньому використовувалось до 2 хв машинного часу.

При $N > 4$ процес спуску від одиничного кола зупинявся. Це означає, що одиничне коло в цьому випадку є грубим наближенням. При поліпшеному нульовому наближенні ($z_0(\varphi) = z_1(\varphi)$) процес спуску продовжувався і знову приводив до мети. Але при цьому кількість машинного часу на одну ітерацію зросла до 12 хв.

Л і т е р а т у р а

1. Парасюк Е. Н. та ін. Об одном методе решения обратной задачи теории логарифмического потенциала. - "Физика Земли", 1972, № 11

УДК 539.3:534.1

Н.П.ФЛЕЙШМАН, І.І.ОСИПОВА

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕКСЦЕНТРИЧНИМИ РЕБРАМИ

Вплив симетричних ребер жорсткості на коливання ізотропних і трансверсально ізотропних пластинок досліджувався в багатьох роботах [6, 3, 1] та інших.

Ми розглядаємо вільні коливання прямокутної ізотропної пластинки товщини h , шарнірно опертої по двох паралельних сторонах $x = 0$, $x = a$ і цілкріпленої різними ізотропними тонкими пружними ексцентричними опорними ребрами з іншого матеріалу по краях $y = \pm b$ (рис. 1).

Осі ребер паралельні серединній площині пластинки xoy і розміщені від неї на відстані z_k ($k = 0, 1$) відповідно.

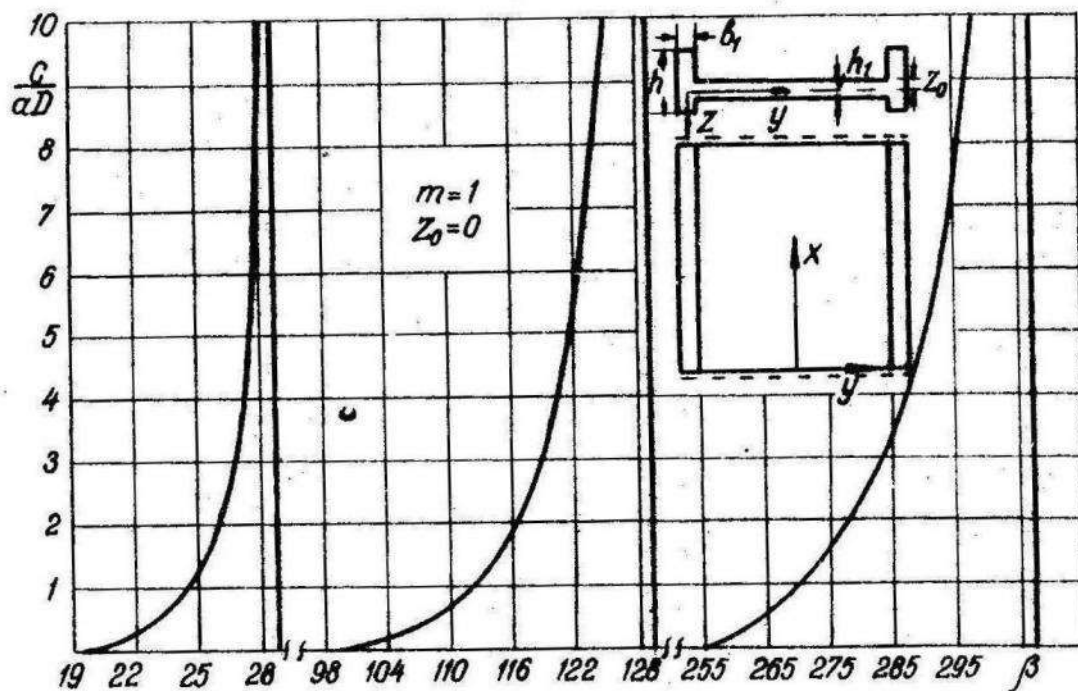


Рис. 4

Якщо знехтувати тангенціальними силами інерції, то диференціальні рівняння вільних поперечних коливань тонкої пластинки в безрозмірних координатах $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$ записуються у вигляді [6]:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \frac{2\alpha^4}{gD} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = 0, \quad (2)$$

де $W(\xi, \eta, t)$ - прогин точки (ξ, η) ; $\frac{2}{g} = \rho h$ - маса пластинки, віднесена до одиниці поверхні; Φ - функція напружень Ері; $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ - циліндрична жорсткість пластинки; μ - коефіцієнт Пуассона.

На невідкритих краях $x = 0$, $x = a$ повинні виконуватись умови рівності нулевій прогини W , згинального моменту, нормального напруження і дотичного переміщення [4]:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau = 0. \quad (4)$$

Якщо знехтувати масою ребер, то на краях $y = (-1)^k b$ ($k = 0, 1$) повинно бути

$$\begin{aligned} (-1)^k C_k \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} &= D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - h z_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ (-1)^k B_{2k} \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + (2 + \mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} - E z_k \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right] &= E h \Phi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$(-1)^k E^{-1} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + E z_k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{h}{F_k E_k},$$

$$W = 0.$$

Тут C_k , $E_k F_k$, B_{2k} - жорсткості ребер при крученні, розтягу і згині в горизонтальній площині.

Наші умови (5) відрізняються від умов, одержаних в [2], наявністю деяких додаткових членів. При $z_k = 0$, тобто для симетричних ребер, вони збігаються з умовами [5] (стор. 362) після належного інтегрування останніх.

Система рівнянь (1)-(2) разом з граничними умовами (5) утворює вихідну крайову задачу про власні поперечні коливання пластинки.

Розв'язок рівняння (1), який задовольняє граничні умови (3), шукається у вигляді

$$W(\xi, \eta, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \sum_m Y_m(\eta) \sin m \pi \xi \quad (6)$$

Підставляючи розв'язок (6) у рівняння (1), одержуємо звичайне диференціальне рівняння, розв'язок якого $Y_m(\eta)$ характеризує форми вільних коливань і має вигляд

$$y_m(\eta) = A_m \operatorname{sh} s_{1m} \eta + B_m \operatorname{ch} s_{1m} \eta + C_m \operatorname{sh} s_{2m} \eta + D_m \operatorname{ch} s_{2m} \eta, \quad (7)$$

Тут

$$s_{1m} = -s_{3m} = \sqrt{m^2 \kappa^2 - \beta},$$

$$s_{2m} = -s_{4m} = \sqrt{m^2 \kappa^2 + \beta},$$

$$\beta^2 = \frac{a^4 \bar{q} \bar{\omega}^2}{g D}.$$

Розв'язок рівняння (2) записується у вигляді

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_m f_m(\eta) \sin m\pi \xi, \quad (8)$$

де

$$f_m(\eta) = K_m \operatorname{ch} m\pi \eta + L_m m\pi \eta \operatorname{sh} m\pi \eta + N_m \operatorname{sh} m\pi \eta + P_m m\pi \eta \operatorname{ch} m\pi \eta. \quad (9)$$

Із граничних умов (5) одержуємо систему восьми алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A_m, B_m, C_m, D_m, K_m, L_m, N_m$ і P_m функцій (7) та (8). Для нетривіальності розв'язку задачі прирівнюємо до нуля визначник цієї системи, елементи якого виражаються через шукану частоту і залежать від відносних жорсткостей ребер та їх ексцентриситетів.

Отримане при цьому рівняння є квадратним алгебраїчним рівнянням відносно кожного з двох ексцентриситетів $\mathcal{Z}_K$. Розв'язуючи його для випадку однакових ребер ($\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_0$), знаходимо при $C_K = C$, $B_{2K} = B_{20}$, $E_K F_K = E_0 F_0$.

$$\sqrt{\frac{m\pi R_3}{5(1-\mu^2)R_1R_2}} = \frac{z_0}{h}. \quad (10)$$

Вирази для функцій R_1 , R_2 , R_3 наведені нижче відповідно для симетричних і антисиметричних (відносно осі Ox) коливань квадратної пластинки:

$$R_1 = S_{2m}^{th} \left(\frac{S_{2m}}{2} \right) - S_{1m}^{th} \left(\frac{S_{1m}}{2} \right),$$

$$R_2 = 4 \frac{ch^2}{sh^2} \left(\frac{m\pi}{2} \right) + \frac{ahE}{m\pi E_0 F_0} (sh m\pi \pm m\pi), \quad (11)$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{C}{aD} R_1 + \frac{2\beta}{(m\pi)^2} \right] \left[(1+\mu)^2 m\pi + (\mu^2 - 2\mu - 3) sh m\pi - \right. \\ \left. - 4 \frac{ahE}{m\pi E_0 F_0} \frac{sh^2}{ch^2} \left(\frac{m\pi}{2} \right) - \frac{a^3 h E}{(m\pi)^3 B_{20}} R_2 \right].$$

Формула (10) вигідна для чисельного аналізу впливу ексцентриситету на частоту власних поперечних коливань пластинки.

Для випадку квадратної пластинки зі стороною a , підкріпленою опорними ребрами прямокутного перерізу ($h_1 \times b_1$), при $h_1 = 3b_1$, $b_1 = 0,08a$, $h_1 = 3h$, $\mu = 0,3$ досліджено частоти власних симетричних коливань залежно від відносної жорсткості на кручення підкріплюючих ребер.

На рис. 1, 2 для значень $m = 1$ та $m = 2$ побудовано графіки трьох перших частот пластинки з симетричними ребрами ($z_0 = 0$) залежно від параметру жорсткості C/Da .

Аналіз графіків (рис. 1, 2) показує, що, як і слід чекати, зі збільшенням жорсткості ребер на кручення зростають відповідні частоти власних коливань.

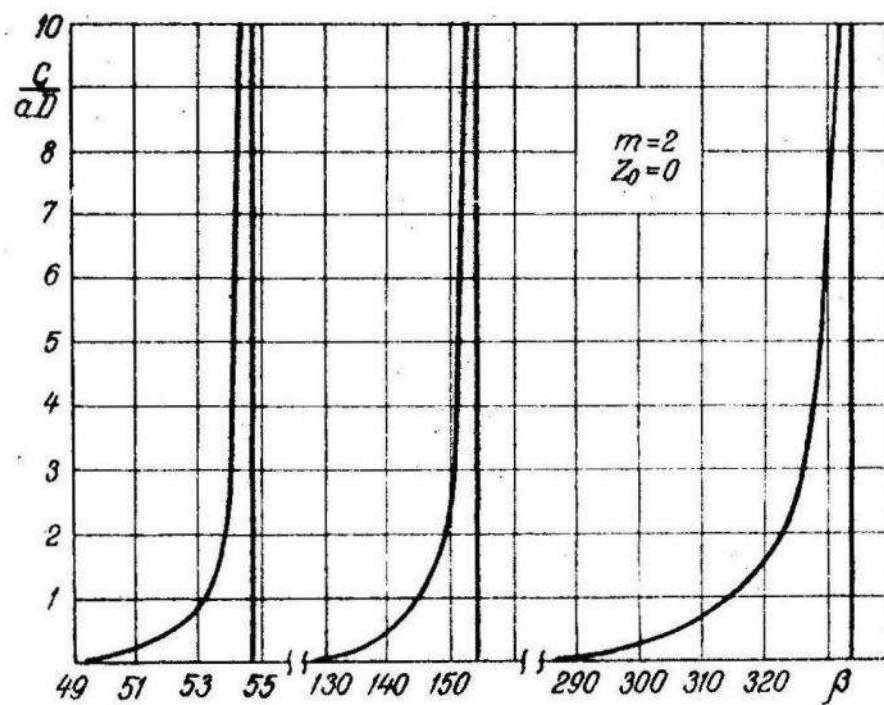


Рис. 2

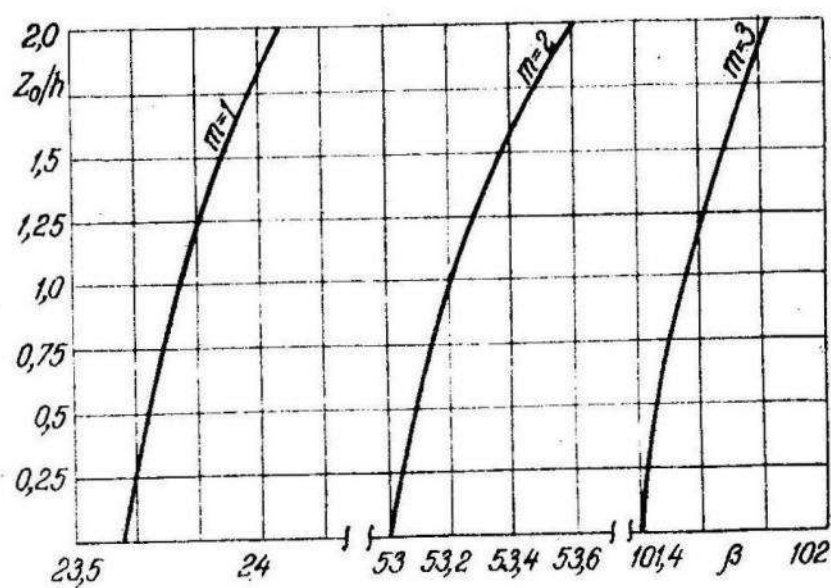


Рис. 3

При $C/Da > 8$, наприклад, для визначення розглянутих частот, з точністю до 5%, можна вважати ребро абсолютно жорстким ($C = \infty$).

З метою дослідження впливу ексцентриситету $\bar{z}_0$ на величину частот власних коливань квадратної пластинки на рис. 3, 4 побудовано графіки залежності основної частоти від параметра $\bar{z}_0/h$ для двох значень жорсткостей ребра на кручення $C = 0,69aD$; $C = 1,25aD$.

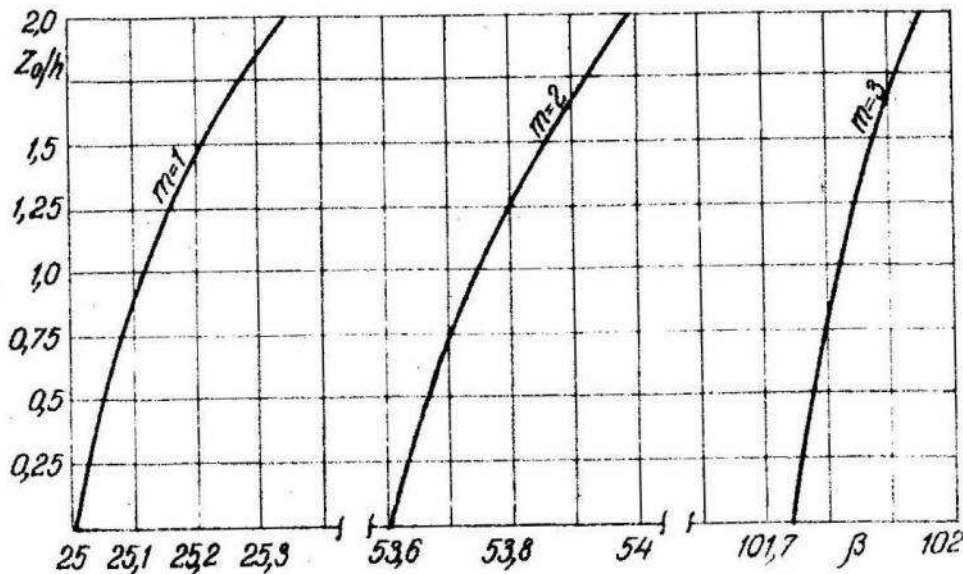


Рис. 4

Графіки показують (рис. 3, 4), що відносний вплив ексцентриситету ребра на частоту коливань пластинки не більше ніж 2% при $\bar{z}_0/h \leq 2$. При врахуванні маси ребер цей вплив буде, очевидно, ще меншим.

Л і т е р а т у р а

1. Л а р и о н о в а Г. И. Свободные колебания прямоугольной трансверсально изотропной пластинки, подкрепленной ребрами жесткости, с учетом инерции вращения и сдвига. - Труды II Саратовской областной конференции молодых ученых. "Теория расчета и надежность приборов", Изд-во Саратов. ун-та, 1969.
2. Л и в ш и ц Я. Д. Изгиб гибких пластин, эксцентрично защемленных в упругом контуре. - Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1964.

3. О г и б а л о в П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. Изд-во Московского ун-та, 1958.

4. П а п к о в и ч П. Ф. Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939.

5. С а в в и Г. Н., Ф л о й м а н Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, "Наукова думка", 1964.

6. Ф и л и п п о в А. П. Колебания упругих систем. Киев, Изд-во АН УССР, 1956.

УДК 539.3

А.Г. ЗІНЕНІЧ

ПЛАСТИНКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ,
КРАЙ ЯКОГО ПІДКРІПЛЕНО РЕБРОМ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Внаслідок нерівномірності концентрації напружень вздовж невідкріплених отворів слід чекати, що раціонально підібрані підкріплюючі елементи змінного перерізу дозволяють з меншою затратою матеріалу добитись зниження розрахункових напружень. Для цього ми розглядаємо безмежно однорідну ізотропну пластинку постійної товщини з криволінійним отвором, край якого підкріплений тонким кільцем змінного перерізу з іншого матеріалу. Кільце має жорсткість на розтяг (стиск) $G_1(s)$ і на згин у своїй площині $G_2(s)$.

1. Припускаємо, що на лінії спаяв пластинки з кільцем, ототожненої з віссю останнього, виконуватися умови спряження роботи [3]. Будемо вважати за невідому функцію градієнтів переміщень

$$U(\sigma) + iV(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k + i\bar{b}_k)\sigma^k + (\bar{a}_k + i b_k)\sigma^{-k}], \quad (1)$$

через яку зміщення U , V виражаються за формулою

$$g(\sigma) = U + iV = \frac{1}{2\mu h R} \int_1^{\sigma} (U + iV) \omega'(\sigma) d\sigma + const. \quad (2)$$

Розв'язуючи другу основну задачу плоскої теорії пружності для цієї пластинки в припущенні, що функція $g(\sigma)$ задана, маємо [2]: