3. О г и б а л о в П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. Изд-во Московского ун-та, 1958.
4. П а п к о в и ч П. Ф. Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939.
5. С а в и н Г. Н., Ф л е й ш м а н Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, "Наукова думка", 1964.
6. Ф и л и п п о в А. П. Колебания упругих систем. Киев, Изд-во АН УССР, 1956.

УДК 539.3

А.Г. ЗІНЕВИЧ

ПЛАСТИНКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ, КРАЙ ЯКОГО ПІДКРІПЛЕНО РЕБРОМ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Внаслідок нерівномірності концентрації напружень вздовж непідкріплених отворів слід чекати, що раціонально підібрані підкріплюючі елементи змінного перерізу дозволяють з меншою затратою матеріалу добитись зниження розрахункових напружень. Для цього ми розглядаємо безмежно однорідну ізотропну пластинку постійної товщини з криволінійним отвором, край якого підкріплено тонким кільцем змінного перерізу з іншого матеріалу. Кільце має жорсткість на розтяг (стиск) $G_1(s)$ і на згин у своїй площині $G_2(s)$.

1. Припускаємо, що на лінії спаю пластинки з кільцем, ототожнюваної з віссю останнього, виконуються умови спряження роботи [3]. Будемо вважати за невідому функцію градієнтів переміщень

$$U(\sigma)+iV(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(a_k+ib_k)\sigma^{k}+(\bar{a}_k+i\bar{b}_k)\sigma^{-k}\right], \qquad (1)$$

через яку зміщення U, V виражаються за формулою

$$g(\sigma)=u+iv=\frac{1}{2\mu hR}\int_1^{\sigma}(U+iV)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma+const. \qquad (2)$$

Розв'язуючи другу основну задачу плоскої теорії пружності для цієї пластинки в припущенні, що функція $g(\sigma)$ задана, маємо [2]:

$$\varphi(\zeta)=\frac{2\mu}{\varkappa}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-Q(\zeta). \tag{3}$$

Тут прийняті ті ж позначення, що й у [1]. Зауважимо, що для випадку безмоментного кільця, тобто коли $\delta_2(\sigma)=0$, відповідні граничні умови [3] за відсутності сил на контурі отвору суттєво спрощуються до вигляду

$$\begin{aligned} &F_2(\sigma)/R\delta_1(\sigma)-\mathrm{Re}[(u+iv)/\omega'(\sigma)]=0,\\ &F_1(\sigma)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Шляхом додавання граничних умов першої і другої основних задач плоскої теорії пружності [1] функції $F_1(\sigma)$ і $F_2(\sigma)$ можна виразити таким чином

$$-\frac{i\sigma\,\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}\left(F_1+iF_2\right)=(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-2\mu g(\sigma). \tag{5}$$

Підставляючи вирази (5) і (1) у граничні умови [3], одночасно розкладаємо в комплексні ряди Фур'є всі відомі функції та праві частини.

Внаслідок порівняння коефіцієнтів при однакових степенях σ, одержуємо квазірегулярну безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих комплексних коефіцієнтів a_k, b_k функції (1).

2. Як приклад розглянемо розтяг пластинки з коловим отвором радіуса R, край якого L підкріплено ребром змінного перерізу. Край отвору вільний від зовнішніх зусиль. Граничні умови (1) для цього випадку при $\omega(\zeta)=R\zeta$ запишемо у вигляді (див. позначення роботи [1])

$$\begin{aligned} &\delta_1(\sigma)U(\sigma)-F_2(\sigma)+i\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{F_1(\sigma)}{\sigma}d\sigma=0,\\ &\delta_2(\sigma)\left[V'(\sigma)+iU(\sigma)\sigma\right]+\frac{1}{\sigma}\int\limits_{1}^{\sigma}\frac{F_1(\sigma)}{\sigma}d\sigma=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Припускаємо, що $\delta_1\neq0$ і $\delta_2\neq0$ всюди на L. Зобразимо величини δ_1^{-1} і δ_2^{-1} рядами Фур'є з відомими коефіцієнтами

$$\delta_2^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(\sigma^n + \sigma^{-n}), \qquad \delta_1^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} N(\sigma^n + \sigma^{-n}) . \tag{7}$$

Можна показати, що у випадку геометричної і силової симетрії дійсна та уявна частина функції (1) матимуть вигляд

$$U(\sigma) = \sum_{k=0,2,4} a_k(\sigma^k + \sigma^{-k}), \qquad V(\sigma) = \sum_{k=2,4}^{\infty} b_k(\sigma^k + \sigma^{-k}). \tag{8}$$

Виключаючи функції $F_1(\sigma)$ і $F_2(\sigma)$ з граничних умов (6) з врахуванням співвідношень (2), (3), (8) та (5), а також розкладів (7) остаточно одержимо дві безмежні системи рівнянь

$$\begin{aligned} &M_0 a_0 + \sum_{n=2,4}^{\infty} A_{n0} a_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} B_{n0} b_n = K_{10} ; \\ &2M_0 a_0 + \sum_{n=2,4}^{\infty} A_{n2} a_n + \sum_{n=4,6}^{\infty} B_{n2} b_n = K_{1m} ; \qquad m = 2, 4, \dots \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2,4}^{\infty} C_{nm} b_n + \sum_{n=4,6}^{\infty} D'_{n2} a_n = K_{22} ; \\ &\sum_{n=2,4}^{\infty} C_{nm} b_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} D_{nm} a_n = K_{2m} ; \qquad m = 4, 6, \dots \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{n=2,4}^{\infty} C_{n0} b_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} D_{n0} a_n = K_{20} . \tag{11}$$

Рівняння (11) служить для визначення постійного доданка у формулі (2). Відомі коефіцієнти A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}, K_{1m}, K_{2m} не наводимо тут через нестачу місця.

Квазірегулярну систему (9)-(10) відносно коефіцієнтів a_k і b_k можна розв'язувати методом редукції. Знайшовши коефіцієнти a_k і b_k напруження визначаємо за відомими формулами.

3. Якщо підкріплююче ребро достатньо тонке і має тільки жорсткість на розтяг (стиск) $G(s)$, тобто $\delta_2(s) = 0$, то на лінії спаю L вико-

нуються граничні умови (4). Поступаючи так само, як і в першому випадку, одержимо дві квазірегулярні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_n, b_n функцій (8).

Розглянемо частковий випадок, коли отвір має форму кола і $\omega(\zeta)=R\zeta$.

Припускаємо, що на безмежності діють розтягучі зусилля паралельно осі Ox. Тоді можна прийняти [1]

$$\Gamma=\bar{\Gamma}=\frac{1}{4}, \qquad \Gamma'=\bar{\Gamma}'=-\frac{1}{2}. \tag{12}$$

З другого рівняння (4) знаходимо зв'язок між коефіцієнтами a_k і b_k

$$(\varkappa-3)a_2+3(1+\varkappa)\Gamma' R=(\varkappa+3)b_2, \tag{13}$$
$$\alpha_n a_n=\beta_n b_n \qquad n=4,6,\ldots$$

Тут

$$\alpha_n=\frac{\varkappa(n-1)+(n+1)}{\varkappa(n^2-1)}; \qquad \beta_n=\frac{\varkappa(n-1)+(n+1)}{\varkappa(n^2-1)}.$$

З першого рівняння (4), враховуючи (13) і перше співвідношення (7), одержуємо безмежну систему рівнянь

$$a_0+2N_0+\sum_{n=2}^{\infty}B_n N_n a_n=K_0,$$
$$a_m+2N_m a_0+\sum_{n=2}^{\infty}B_n\left[N_{n+m}+N_{|n-m|}+\delta_{nm}A_0\right]a_n=K_m \qquad m\geq 2.$$

Тут

$$2K_0=C_4N_0+\frac{4C_3}{\varkappa}N_2, \qquad C_4=2(C_1-2C_3), \qquad C_3=\frac{1}{4}(1+\varkappa)\Gamma' R,$$

$$2K_2=C_4N_2+\frac{\alpha_2+\beta_2}{\beta_2}\cdot\frac{4C_3}{\varkappa}(2N_0+N_4), \qquad C_1=(1+\varkappa)R\left(\Gamma+\frac{1}{2}\Gamma'\right),$$

$$2K_m=C_4N_m+\frac{4C_3}{\varkappa}(N_{m-2}+N_{m+2}), \qquad B_n=\frac{\beta_n^2-\alpha_n^2}{2\beta_n},$$

$\delta_{nm}=1$ коли $n=m$, і $\delta_{nm}=0$ $n\neq m$.

Легко показати, що, прийнявши $\delta_1^{-1}(\sigma)=2A_0=const$, одержимо випадок, розглянутий у [2]. Якщо прийняти, що відносна жорсткість на розтяг міняється за законом

Таблиця 1

α	β	γ°	$\frac{(\sigma_\theta)_{max}}{P}$	$\frac{\sigma_\theta(\theta^0)}{P}$	$\frac{\sigma_\theta(\frac{\pi}{2})}{P}$
0.05	1.0	90	1.138	-0,668	1.138
	8.0	90	1.110	-0,66	1.112
0.15	1.0	90	1.187	-0.657	1.187
	8.0	65	1.239	-0.820	1.127
0.3	1.0	90	1.350	-0.682	1.350
	8.0	65	1.572	-1.045	1.245
0.35	1.0	90	1.422	-0.697	1.422
	8.0	65	1.666	-1.104	1.301
0.45	1.0	90	1.581	-0.734	1.581
	8.0	65	1.831	-1.202	1.430
0.55	1.0	90	1.750	-0.726	1.750
	8.0	65	1.969	-1.278	1.573
0.65	1.0	90	1.922	-0.821	1.922
	8.0	65	2.083	-1.388	1.722
0.75	1.0	90	2.088	-0.866	2.088
	8.0	65	2.132	-1.365	1.796
0.85	1.0	90	2.245	-0.909	0.017
	8.0	70	2.269	-1.427	2.319
0.95	1.0	90	2.359	-1.033	2.359
	8.0	70	2.357	-1.460	2.157

Таблиця 2

θ	$\sigma_\theta(\theta)$
0	-0,663
5	-0,641
10	-0.578
15	-0.478
20	-0.345
25	-0.188
30	-0.148
35	0.164
40	0.341
45	0.506
50	0.655
55	0.782
60	0.886
65	0.967
70	1.026
75	1.066
80	1.092
85	1.106
90	1.110

$$\delta_1^{-1}(\sigma) = H_1 + H_2 \cos 2\theta ,$$

то для випадку ребра з прямокутним поперечним перерізом висотою h_1 і шириною b матимемо

$$H_1 = \alpha(\beta + 1) \quad , \quad H_2 = \alpha(\beta - 1) .$$

Тут

$$\alpha = C_* \left(\frac{h}{h_1}\right)_{max} , \quad \beta = \frac{(h_1)_{max}}{(h_1)_{min}} ,$$

$$C_* = ER / 2E_1 b(1+\nu) .$$

У табл. 1,2 наведено результати обчислень на ЕОМ "Мінськ-22" напружень σ_θ у точках контура L

$$E/E_1 = 1, \quad b/R = 0{,}1 , \quad \nu = 0{,}3 , \quad \alpha = 0{,}05 \div 1{,}0 ; \quad \beta = 1; 8 .$$

Через γ^0 позначимо кут (в градусах), що визначає точки $(\sigma_\theta)_{max}$ на контурі. У табл. 2 показано розподіл напружень σ_θ на L , для випадку $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 8$. Отже, при майже одному і тому ж напруженні висота підкріплення в точці $\theta = 0^\circ$ у вісім разів менша, ніж висота підкріплення в точці $\theta = \frac{\pi}{2}$, що відповідає зменшенню об'єму підкріплюючого матеріалу на 64,5% (табл. 1). Це свідчить про те, що відповідним підбором підкріплення можна досягти підсилення конструкції з меншою затратою підкріплюючого матеріалу.

Задача, аналогічна розглянутій в [4] з використанням тих же, по суті, граничних умов, але записаних в більш складному вигляді. Внаслідок цього задача зводиться там до розв'язку складної безмежної системи алгебраїчних рівнянь, про квазірегулярність якої нічого не говориться.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.
2. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, "Наукова думка", 1966.
3. Флейшман Н.П., Старовойтенко Е.В. Решение задач плоской теории упругости для пластинки с подкрепленной криволинейной границей. - /Сопротивление материалов и теория сооружений", вып. XX 1973.
4. I.K. Dhirt and I.I. Brock. A new method of reinforcing a hole effecting large weight Savings. Int. Solids Structure, Vol. 6. 1970.