МЕХАНІКА

УДК 539.311.374.377

Д.В. ГРИЛІЦЬКИЙ

КОНТАКТНА ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ

Плоска контактна пружнопластична задача для ідеального пружнопластичного тіла, яке наслідує умову пластичності Треска-Сен-Венана, вперше поставлена і розв'язана Л.О.Галіним і Г.П.Черепановим [1], які показали, що існує єдиний точний розв'язок задачі, неперервний у напруженнях і розривний в нормальному переміщенні.

У цій статті ми наводимо розв'язок цієї задачі з врахуванням температури штампа при ідеальному тепловому контакті.

Кількість смуг пластичності на границі півплощини під штампом та їх розміщення визначається з фізичних міркувань.

Через L позначимо всю границю півплощини; через L' - сукупність участків границі півплощини, на яких задано вертикальне переміщення; L'' - сукупність смуг пластичності; L''' - границя півплощини зовні штампа. Очевидно, що має місце співвідношення $L = L' + L'' + L'''$.

Позначаючи через σ_S границю текучості матеріалу півплощини на стиснення, крайові умови задачі матимуть вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y(x) = \tau_{xy}(x) = 0, \qquad x \in L''';\\
&\sigma_y(x) = -\sigma_S, \qquad x \in L''; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f'(x), \quad x \in L';\\
&\tau_{xy}(x) = 0, \qquad x \in (L' + L'');\\
&T = T(x), \qquad x \in (L' + L''); \quad T(x) = 0, \quad x \in L''',
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $f(x)$ - рівняння основи штампа.

Визначимо характер розподілу нормальних напружень під штампом на лінії L'.

Якщо на границі нижньої півплощини задані нормальні та тангенціальні напруження й температура, то має місце така залежність

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{\varkappa-1}{4\mu}\left[\sigma_y(x) + \gamma T(x)\right] + \frac{\varkappa+1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{xy}\,dt}{t-x}\,; \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y=0} = -\frac{\varkappa-1}{4\mu}\tau_{xy}(x) + \frac{\varkappa+1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_y\,dt}{t-x} + \frac{\gamma}{2\pi(\lambda+\mu)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T\,dt}{t-x}\,,$$

де $\gamma = \frac{\alpha E}{1-2\mu} = \alpha(3\lambda+2\mu)$; α - коефіцієнт лінійного розширення; інші позначення загальноприйняті.

Формули (2) є вихідними під час розв'язування контактних задач теорії пружності й термопружності для півплощини та служить узагальненням відомих результатів Л.О.Галіна [2].

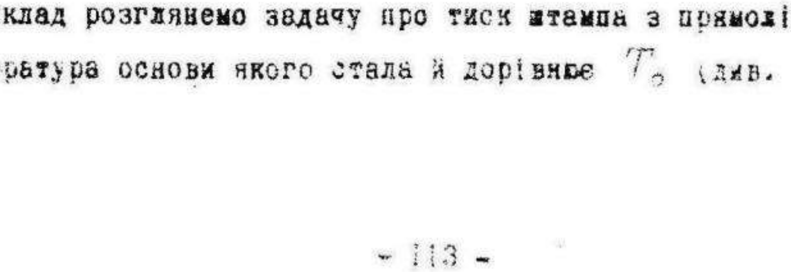
Задовольнивши граничним умовам (1) за допомогою другого співвідношення (2), доходимо до сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_{L'}(\sigma_y + K_0 T)\frac{dt}{t-x} = \frac{4\pi\mu}{\varkappa+1}\varphi(x)\,, \quad x \in L'. \tag{3}$$

Тут введені позначення

$$K_0 = \frac{2\gamma\mu}{(\varkappa+1)(\lambda+\mu)}\,, \quad \varphi(x) = f'(x) - \frac{\varkappa+1}{4\pi\mu}\int_{L''}\frac{(K_0 T - \sigma_s)\,dt}{t-x}. \tag{4}$$

Рівняння (3) належить до характеристичного й легко обертається.



Як приклад розглянемо задачу про тиск штампа з прямолінійною основою, температура основи якого стала й дорівнює T_0 (див. рисунок).

За допомогою функції

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}(\sigma_y+\kappa_0 T_0)\frac{dt}{t-z} \qquad (5)$$

рівняння (3) зведемо до задачі лінійного спряження

$$W^+(x)+W^-(x)=-\frac{4\mu i}{\mathscr{x}+1}\varphi(x), \quad x\in(-a,a). \qquad (6)$$

Розв'язуючи граничну задачу (6) у класі необмежених функцій [3] та скориставшись умовою рівноваги штампа, одержуємо

$$W(z)=-\frac{2\mu}{\pi(\mathscr{x}+1)\sqrt{z^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{t^2-a^2}\,\varphi(t)dt}{t-z}+\frac{P-2\sigma_s(l-a)-2a\kappa_0 T_0}{2\pi i\sqrt{z^2-a^2}}. \qquad (7)$$

Обчислюючи $\varphi(x)$, $W(z)$ і $\sigma_y(x)$, послідовно знаходимо

$$\varphi(x)=-\frac{\mathscr{x}+1}{4\pi\mu}(\kappa_0 T_0-\sigma_s)\left(\ln\frac{x-l}{x+l}-\ln\frac{x-a}{x+a}\right), \qquad (8)$$

$$W(z)=\frac{i}{2\pi}(\kappa_0 T_0-\sigma_s)\left[\ln\frac{z-l}{z+l}-\ln\frac{z-a}{z+a}+\ln\frac{\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{l^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}-\sqrt{l^2-a^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(l-a-\sqrt{l^2-a^2})}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+\frac{P-2\sigma_s(l-a)-2a\kappa_0 T_0}{2\pi i\sqrt{z^2-a^2}}, \qquad /9/$$

$$\sigma_y(x)+\kappa_0 T_0=\frac{i}{\pi}\left(\kappa_0 T_0-\sigma_s\right)\ln\frac{\sqrt{a^2-x^2}-i\sqrt{l^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+i\sqrt{l^2-a^2}}+$$

$$+\frac{2(\kappa_0 T_0-\sigma_s)(l-a-\sqrt{l^2-a^2})}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{P-2\sigma_s(l-a)-2a\kappa_0 T_0}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad /10/$$

$$x\in(-a,a).$$

Із умови обмеженості тиску $\sigma_y(x)$ у точках $x=\pm a$ знаходимо довжину лінії L'

$$a^2=l^2-\frac{(2\kappa_0 T_0 l-P)^2}{4(\kappa_0 T_0-\sigma_s)^2}. \qquad (11)$$

З врахуванням останнього результату й після простих перетворень, формула для тиску під штампом набере остаточного вигляду

$$\sigma_y(x) = \frac{2}{\pi}(\kappa_0 T_0 - \sigma_s)\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\kappa_0 T_0 \ell - P}{2(\kappa_0 T_0 - \sigma_s)\sqrt{a^2 - x^2}} - \kappa_0 T_0 \qquad (12)$$

$$x \in (-a, a)$$

$$\sigma_y(x) = -\sigma_s, \qquad x \in (-\ell, -a;\ a, \ell).$$

З першої формули (12) можна одержати всі відомі частинні випадки.

Література

1. Галин Л. Х., Черепанов Г. П. Контактная упруго-пластическая задача для пластин. ДАН СССР, т. 177, 1967, № 1.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.311

Р.І.МОКРИК, Д.В.ГРИЛІЦЬКИЙ

КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ В ЗАДАЧІ ПРО ТИСК ШТАМПА НА ПРУЖНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ШАР

Тепер розглянуто багато контактних задач теорії пружності про тиск штампа на ізотропний шар великої товщини. Аналогічні задачі для анізотропних матеріалів, зокрема трансверсально ізотропних, розв'язувалися лише в осесиметричному випадку [4], [5], [7], [8].

Ми досліджуємо загальний випадок контактної задачі про тиск гладкого короткого штампа на пружний трансверсально ізотропний шар великої і сталої товщини. При цьому розглядаються два випадки: 1) шар лежить на гладкій неподатливій основі; 2) шар спаяний з неподатливою основою.

Під час розв'язання задачі скористуємося методом послідовних наближень, який застосували В.М.Александров і И.І.Ворович [2] в аналогічній