З врахуванням останнього результату й після простих перетворень, формула для тиску під штампом набере остаточного вигляду

$$\sigma_y(x) = \frac{2}{\pi}(\kappa_0 T_0 - \sigma_s)\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\kappa_0 T_0 l - P}{2(\kappa_0 T_0 - \sigma_s)\sqrt{a^2 - x^2}} - \kappa_0 T_0 \qquad (12)$$

$$x \in (-a, a)$$

$$\sigma_y(x) = -\sigma_s, \qquad x \in (-l, -a;\ a, l).$$

З першої формули (12) можна одержати всі відомі частинні випадки.

Література

1. Г а л и н Л. А., Ч е р е п а н о в Г. П. Контактная упругопластическая задача для пластин. ДАН СССР, т. 177, 1967, № 1.
2. Г а л и н Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.311

Р.І.МОКРИК, Д.В.ГРИЛІЦЬКИЙ

КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ В ЗАДАЧІ ПРО ТИСК ШТАМПА НА ПРУЖНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ШАР

Тепер розглянуто багато контактних задач теорії пружності про тиск штампа на ізотропний шар великої товщини. Аналогічні задачі для анізотропних матеріалів, зокрема трансверсально ізотропних, розв'язувалися лише в осесиметричному випадку [4], [5], [7], [8].

Ми досліджуємо загальний випадок контактної задачі про тиск гладкого жорсткого штампа на пружний трансверсально ізотропний шар великої і сталої товщини. При цьому розглядаються два випадки: 1) шар лежить на гладкій неподатливій основі; 2) шар спаяний з неподатливою основою.

Під час розв'язання задачі скористуємося методом послідовних наближень, який застосували В.М.Александров і И.І.Ворович [2] в аналогічній задачі для ізотропного матеріалу. Зауважимо, що вперше задача про тиск штампа на ізотропний шар скінченної товщини розв'язана Й.І.Воровичем і Ю.А.Устиновим [3].

1. Введемо ортогональну систему координат так, щоб площина $x_1 x_2$ збігалася з нижньою площиною шару, а вісь x_3 спрямуємо вертикально вгору.

Нехай Ω - область контакту штампа з шаром товщини h ; $q(x_1,x_2)$ - функція розподілу нормального контактного тиску під штампом; $\delta(x_1,x_2)$ - зміщення штампа. Вважаємо, що сили тертя між штампом і шаром відсутні. Тоді визначення тиску під штампом зводиться до знаходження функції $q(x_1,x_2)$ з інтегрального рівняння

$$\iint\limits_{\Omega} q(\xi_1,\xi_2) K_j\left(\frac{\rho}{h}\right) d\xi_1 d\xi_2 = 2\pi \Delta_0 h \delta(x_1,x_2); \qquad (1.1)$$

$$K_j(\tau) = \int_0^\infty [L_j(u)] J_0(u\tau)\, du; \qquad \rho = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}; \qquad (1.2)$$

$$x_1 x_2 \in \Omega; \qquad j = 1,2; \qquad \Delta_0 = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{\sqrt{A_{11}A_{33}}},$$

де $J_0(z)$ - функція Бесселя нульового порядку;

$$L_1(u) = \frac{t_1 t_2 [\operatorname{ch} t_1 u - \operatorname{ch} t_2 u]}{t_1 \operatorname{sh} t_1 u + t_2 \operatorname{sh} t_2 u};$$

$$L_2(u) = t_1 t_2 \frac{\lambda_1 t_2 \operatorname{sh} t_1 u - \lambda_2 t_1 \operatorname{sh} t_2 u}{\lambda_1 t_2^2 \operatorname{ch} t_1 u + \lambda_2 t_1^2 \operatorname{ch} t_2 u - 4N};$$

$$\lambda_1 = A_{11} + t A_{44}; \quad \lambda_2 = A_{11} - t A_{44}; \quad N = \frac{A_{11}}{A_{33}}(A_{13} + A_{44}),$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13}+2A_{44})}{A_{33}A_{44}} + 2t}; \qquad t_2 = \sqrt{\frac{A_{11}A_{13} - A_{13}(A_{13}+2A_{44})}{A_{33}A_{44}} - 2t}; \quad t = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{33}}}$$

A_{ik} – модулі пружності для трансверсально ізотропного матеріалу.

Значення індекса $j=1$ відповідає випадку, коли шар лежить на гладкій жорсткій основі, а $j=2$ – шар нерухомо зчеплений з нею.

2. Якщо d – половина максимальної віддалі між двома точками, що належить Ω, то значення параметра $\lambda=\frac{h}{d}>1$ характеризуватимуть шар відносно великої товщини.

Зобразимо ядро (1.2) інтегрального рівняння (1.1) у вигляді

$$K_j(\tau)=\frac{P_j}{\tau}-\mathcal{F}_j(\tau), \tag{2.1}$$

де

$$\mathcal{F}_j(\tau)=\int_0^\infty [P_j-L_j(u)]J_0(u\tau)du; \tag{2.2}$$

$$P_j=\lim_{u\to\infty} L_j(u).$$

Можна показати, що $\mathcal{F}_j(\tau)$ розкладається в ряд

$$\mathcal{F}_j(\tau)=\sum_{k=0}^\infty f_{jk}\,\tau^{2k}, \tag{2.3}$$

де

$$f_{jk}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\int_0^\infty [P_j-L_j(u)]u^{2k}du; \tag{2.4}$$

причому ряд (2.3) рівномірно збігається при $\lambda>\frac{t_1-t_2}{2}$.

Використовуючи (2.1)-(2.3), рівняння (1.1) зводиться до вигляду

$$P_j\iint_\Omega q(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho}=2\pi\Delta_0\delta(x_1,x_2)+\sum_{k=0}^\infty\frac{f_{ik}}{h^{2k+1}}\iint_\Omega q(\xi_1,\xi_2)\rho^{2k}d\xi_1 d\xi_2. \tag{2.5}$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.5) у вигляді ряду по степенях $\frac{1}{h}$

$$q(\xi_1,\xi_2)=\sum_{m=0}^\infty q_m(\xi_1,\xi_2)h^{-m}. \tag{2.6}$$

Підставляючи (2.6) в (2.5) і прирівнюючи вирази при однакових степенях h, одержимо безмежну систему інтегральних рівнянь:

$$P_j \iint_{\Omega} q_0(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = 2\pi\Delta_0 \delta(x_1,x_2); \tag{2.7}$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_1(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = f_{j0}\iint_{\Omega} q_0(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 \;; \tag{2.8}$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_2(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = f_{j0}\iint_{\Omega} q_1(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2; \tag{2.9}$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_3(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = \iint_{\Omega}[f_{j0} q_2(\xi_1,\xi_2) + f_{j1} q_0(\xi_1,\xi_2)\rho^2]\, d\xi_1 d\xi_2; \tag{2.10}$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_4(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = \iint_{\Omega}[f_{j0} q_3(\xi_1,\xi_2) + f_{j1} q_1(\xi_1,\xi_2)\rho^2]\, d\xi_1 d\xi_2; \tag{2.11}$$

. . . .

Співвідношення (2.7) є інтегральним рівнянням задачі про тиск штампа на трансверсально ізотропний півпростір. Вважаємо, що розв'язок його відомий

$$q_0(x_1,x_2) = \Phi(\delta). \tag{2.12}$$

На основі властивостей однорідності й адитивності оператора Φ розв'язок (2.6) можна записати

$$\frac{1}{\Delta_0} q(x_1,x_2) = \Phi(\tilde{\delta}) + \frac{\Phi(1)}{2\pi P_j \lambda}\left\langle f_{j0} \mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})\left[1 + \frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P \lambda} + \right.\right.$$

$$+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^2+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^3+\frac{f_{j1}}{\lambda^2}\left\{\left[\mathcal{F}_{20}(\tilde{\delta})+\mathcal{F}_{02}(\tilde{\delta})\right]\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right]+\right.$$

$$+\left.\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})}{2\pi P_j\lambda}\left[\mathcal{F}_{20}(1)+\mathcal{F}_{02}(1)\right]\right\}+\frac{f_{j0}f_{j1}}{2\pi P_j\lambda^3}\left[\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})\mathcal{F}_{00}(x_1^2+x_2^2)-2\mathcal{F}_{10}(\tilde{\delta})\mathcal{F}_{00}(x_1)-\right.$$

$$\left.\left.-2\mathcal{F}_{01}(\tilde{\delta})\mathcal{F}_{00}(x_2)\right]\right\rangle-\frac{2f_{j1}}{2\pi P_j\lambda^3}\left\{\mathcal{F}_{10}(\tilde{\delta})\Phi(x_1)+\mathcal{F}_{01}(\tilde{\delta})\Phi(x_2)+\right. \qquad /2.13/$$

$$+\left.\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})}{2\pi P_j\lambda}\left[\mathcal{F}_{10}(\tilde{\delta})\Phi(x_1)+\mathcal{F}_{01}(1)\Phi(x_2)\right]\right\}+\frac{f_{j1}\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})\Phi(x_1^2+x_2^2)}{2\pi P_j\lambda^3}\times$$

$$\times\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)$$

$$\tilde{\delta}=\frac{\delta}{d};\qquad \mathcal{F}_{ik}(\tilde{\delta})=\iint_{\Omega}\Phi(\tilde{\delta})\xi_1^i\,\xi_2^k\,d\xi_1 d\xi_2. \qquad /2.14/$$

У формулах (2.13) і (2.14) x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 вважаємо безрозмірними величинами, тобто ті ж самі величини віднесені до характеристики d.

3. У випадку, коли x_1 і x_2 взаємно перпендикулярні осі симетрії області Ω, $\delta(x_1, x_2)$ буде функцією парною по змінних x_1, x_2 і формула (2.13) набирає вигляду

$$q(x_1,x_2)=\Delta_0\tilde{\delta}(x_1,x_2)\Phi(1)\left\{1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^2+\right.$$

$$+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^3+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^4+\frac{f_{j1}}{2\pi P_j\lambda^3}\left[\mathcal{F}_{20}(1)+\mathcal{F}_{20}(1)\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j \lambda}\right]+\frac{f_{j0}f_{j1}}{(2\pi P_j)^2\lambda^4}\left[\mathcal{F}_{00}(1)\mathcal{F}_{00}(x_1^2+x_2^2)\right]\Big\}+$$

$$+\frac{f_{j1}\mathcal{F}_{00}(1)\Phi(x_1^2+x_2^2)}{2\pi P_j\lambda^3}\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right).$$

Розглянемо тепер як приклад задачу про тиск плоского еліптичного в плані штампа на трансверсально ізотропний шар. Отже, нехай $\Re$ – еліпс з ексцентриситетом e і півосями a, b. Для знаходження операторів Φ та $\mathcal{F}_{ik}$ скористаємося розв'язком задачі про тиск плоского еліптичного в плані штампа на ізотропний півпростір, наведений у [1,6]. Тоді формула для тиску під штампом набере вигляду

$$q(x_1,x_2)=\Delta_0\frac{\widetilde{\delta}}{K(e)\sqrt{1-e^2}}\left[1+x_1^2-\frac{x_2^2}{1-e^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\Big\{1+\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}+$$

$$+\left(\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}\right)^2+\left(\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}\right)^3+\left(\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}\right)^4+$$

$$+\frac{2}{3}\frac{f_{j1}}{\chi(1-e^2)P_j\lambda^3}\left[\left(\chi_{20}x_1^2+\chi_{02}\frac{x_2^2}{1-e^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{S_{01}}{S_{00}}(1-e^2)\chi_{20}+\frac{S_{10}}{S_{00}}\chi_{02}\right)\right]\Big\}+O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right),$$

де

$$S_{01}=\frac{E(e)-(1-e^2)K(e)}{e^2(1-e^2)};\qquad S_{10}=\frac{K(e)-E(e)}{e^2};$$

$$S_{02}=\frac{2(2e^2-1)E(e)+(1-e^2)(2-3e^2)K(e)}{3e^4(1-e^2)^2};$$

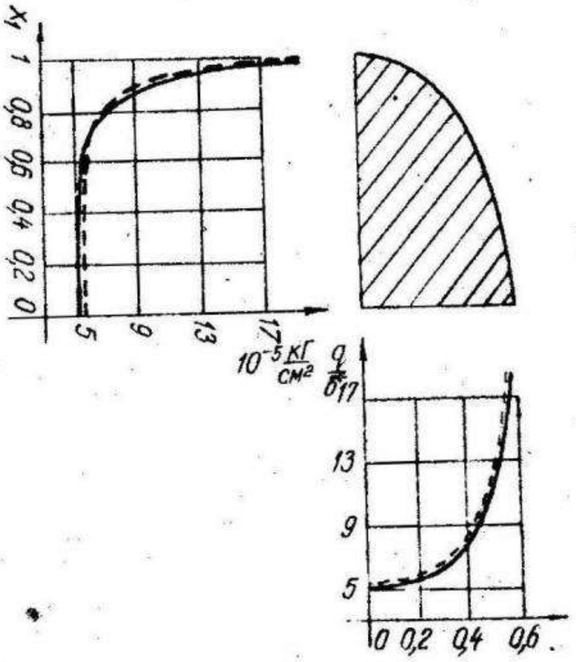
$$S_{20}=\frac{-2(1+e^2)E(e)+(2+e^2)K(e)}{3e^4};$$

$$\chi_{02} = S_{20} + 2S_{02}(1-e^2) + S_{11}(2e^2-3);$$

$$\chi_{20} = 2S_{20} + S_{02}(1-e^2) + S_{11}(e^2-3);$$

$$S_{11} = \frac{(2-e^2)E(e) - 2(1-e^2)K(e)}{3e^4(1-e^2)}; \qquad \chi = S_{20}S_{02} - S_{11}^2.$$

$K(e)$, $E(e)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду. На рисунку зображені результати розрахунків тиску під плоским еліптичним в плані штампом проведені за формулою (3.2) при значенні $e = 0,8$, $\lambda = 2$ і пружних сталих пісковика $A_{11} = 6,07 \cdot 10^5$ кГ/см^2; $A_{13} = 1,59 \cdot 10^5$ кГ/см^2; $A_{33} = 4,015 \cdot 10^5$ кГ/см^2; $A_{44} = 1,55 \cdot 10^5$ кГ/см^2.



Суцільна лінія відповідає розподілу тиску під штампом, коли шар лежить на жорсткій основі без тертя. Пунктирна лінія відповідає випадку, коли шар нерухомо зчеплений з основою.

Л і т е р а т у р а

1. А л е к с а н д р о в В.М. Авторефераты научно-исследовательских работ за 1959 год. Изд-во Ростовского ун-та, 1960.
2. А л е к с а н д р о в В.М., В о р о в и ч И.И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, т. 24, вып. 2, 1960.
3. В о р о в и ч И.И., У с т и н о в Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, т. 23, вып. 3, 1959.

4. Грилицький Д.В., Кізима Я.М. Тиск штампа на трансверсально ізотропний шар. ДАН УРСР, 1962, № 1.

5. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричная контактная задача для трансверсально изотропного слоя, покоящегося на жестком основании. Известия АН СССР, механика и машиностроение, 1962, № 8.

6. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1959.

7. Кизыма Я.М. Напряженно-деформированное состояние трансверсально изотропного слоя, подверженного осесимметричному давлению сцепленного штампа. Известия АН СССР, механика, 1965, № 6.

8. England A. A punch problem for a transversely isotropio layer. Proc. lambridge Philos. Loc.1962,vol., 58, N 3.

УДК 539.377

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, І.О.ПІЩЕНКО, МАХМУД АЛЛАМ

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОТВОРІВ, ВИКЛИКАНІ ОДНОРІДНИМ ТЕПЛОВИМ ПОТОКОМ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Розглянемо плоску задачу термопружності для нескінченної області з криволінійним отвором, обмеженим контуром L . У випадку узагальненого плоского напруженого стану вважається, що бічні поверхні пластинки теплоізольовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем вздовж контура L відбувається за законом Ньютона, а на нескінченності заданий однорідний тепловий потік інтенсивності q , напрямлений під кутом α до осі Ox. Зовнішнє силове поле відсутнє.

Випадок теплоізольованого контура L розглядається в роботі [1].

Як відомо [1,3,4,5], проблема зводиться до розв'язування такої крайової задачі термопружності:

$$\Delta T = 0; \tag{1}$$

$$\lambda_t \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_n (T - T_c) = 0 \quad \text{на} \quad L; \tag{2}$$