

4. Г р и л і ц ь к и й Д.В., К і з и м а Я.М. Тиск штампна на трансверсально ізотропний шар. ДАН УРСР, 1962, № 4.

5. Г р и л і ц к и й Д.В., К и з и м а Я.М. Осесимметричная контактная задача для трансверсально изотропного слоя, покоящегося на жестком основании. Известия АН СССР, механика и машиностроение, 1962, № 8.

6. Д о в н о р о в и ч В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1959.

7. К и з и м а Я.М. Напряженно-деформированное состояние трансверсально изотропного слоя, подверженного осесимметричному давлению сцепленного штампа. Известия АН СССР, механика, 1965, № 6.

8. E n g l a n d A. A punch problem for a transversely isotropic layer. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962, vol., 58, N 3.

УДК 539.377

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, І.О.ПІЩЕНКО, МАХМУД АЛЛАМ

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОТВОРІВ, ВИКЛИКАНІ ОДНОРІДНИМ ТЕПЛОВИМ ПОТОКОМ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Розглянемо плоску задачу термопружності для нескінченної області з криволінійним отвором, обмеженим контуром L . У випадку узагальненого плоского напруженого стану вважається, що бічні поверхні пластинки теплоізовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем вздовж контура L відбувається за законом Ньютона, а на нескінченності заданий однорідний тепловий потік інтенсивності q , направлений під кутом α до осі Ox . Зовнішнє силове поле відсутнє.

Випадок теплоізованого контура L розглядається в роботі [1].

Як відомо [1,3,4,5], проблема зводиться до розв'язування такої крайової задачі термопружності:

$$\Delta T = 0; \quad (1)$$

$$\lambda_t \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_n (T - T_c) = 0 \quad \text{на} \quad L; \quad (2)$$

$$\Delta[\bar{\varphi}(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] = 2\kappa T dt + 2\kappa t \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} d\bar{t} \quad \text{на } L; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q}{\lambda_t} \cos \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q}{\lambda_t} \sin \alpha \quad \text{при } |x|, |y| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Тут Δ - оператор Лапласа; T - температура; λ_t - коефіцієнт теплопровідності; α_n - коефіцієнт тепловіддачі; T_c - температура зовнішнього середовища вздовж контура L ; $\kappa = \frac{\alpha_t E}{4}$ (для узагальненого плоского напруженого стану); $\kappa = \frac{\alpha_t E}{4(1-\nu)}$ (для плоскої деформації); α_t - температурний коефіцієнт лінійного розширення; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі; $z = x + iy$; t - афікс точки контура L .

Враховуючи, що $T = \operatorname{Re} f(z)$, де $f(z)$ - аналітична функція комплексного змінного, контурну умову (2) перетворимо до вигляду [3]

$$\lambda_t d[f(t) - \overline{f(t)}] + \alpha_n [f(t) + \overline{f(t)} - 2T_c] e^{i\beta} dt = 0 \quad (t \in L), \quad (5)$$

де β - кут між нормаллю до контура L і віссю Ox .

Помножимо рівність (5), а також рівність (3) і її комплексно спряжену на довільну функцію $F(z)$, голоморфну в розглядуваній області, і проінтегруємо вздовж контура L . У результаті одержимо інтегральні співвідношення, які служать для визначення аналітичних функцій $f(z)$

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z), \quad \text{тобто}$$

$$\lambda_t \int_L F(t) d[f(t) - \overline{f(t)}] + \int_L \alpha_n [f(t) + \overline{f(t)} - 2T_c] F(t) e^{-i\beta} dt = 0; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_L F(t) \Phi(t) dt - \int_L t \overline{\Phi(t)} dF(t) + \int_L F(t) \overline{\Psi(t)} d\bar{t} = \\ = \kappa \int_L F(t) f(t) d\bar{t} - \kappa \int_L t \overline{f(t)} dF(t); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\int_L F(t) \overline{\phi(t)} d\bar{t} - \int_L \bar{t} \phi(t) dF(t) + \int_L F(t) \psi(t) dt = \\ = \kappa \int_L F(t) \overline{f(t)} d\bar{t} - \kappa \int_L \bar{t} f(t) dF(t). \quad (8)$$

Нехай функція

$$z = \omega(\zeta) = R \left[\zeta + \frac{m}{(N-1)\zeta^{N-1}} \right] \quad |m| < 1, N \neq 1 \quad (9)$$

конформно відображає зовнішність одиничного кола γ на зовнішність контура отвору L , причому $N=2$ відповідає зовнішності еліпса, $N=3$, $m = \frac{2}{3}$ - зовнішності трикутного, а $N=4$, $m = -0,5$ - зовнішності квадратного отворів з заокругленими кутами.

Зовні одиничного кола γ площини ζ функції

$$f_1(\zeta) = f[\omega(\zeta)], \quad \phi_1(\zeta) = \phi[\omega(\zeta)], \quad \psi_1(\zeta) = \psi[\omega(\zeta)],$$

$$F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)] \quad \text{можна подати у вигляді рядів}$$

$$f_1(\zeta) = T_0 + \beta_1 \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n} = T_0 + \beta_1 \zeta + f_0(\zeta);$$

$$\phi_1(\zeta) = A_0 + \beta_2 \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{-n} = A_0 + \beta_2 \zeta + \phi_0(\zeta); \quad (10)$$

$$\psi_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \zeta^{-n}; \quad F_1(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} E_j \zeta^j.$$

З умови (4) випливає, що

$$\beta_1 = - \frac{qR}{\lambda_t} e^{-\alpha}. \quad (11)$$

Умова відсутності напружень на нескінченності приводить до залежностей $A_0 = \kappa T_0$, $\beta_2 = \kappa \beta_1$.

Далі зважатимемо температуру середовища T_c і коефіцієнт теплопровідності λ_n сталими.

Внесемо (9), (10) в (6) - (8) і виконаємо інтегрування вздовж одиничного кола γ . Вважаючи при цьому всі E_n , крім E_j , дорівнюють

нулеві, в результаті одержимо такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_n, A_n і B_n :

$$\begin{aligned}
 -\kappa_j \bar{a}_j + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n h_{\frac{n+j}{N}} + \bar{a}_n h_{\frac{n-j}{N}}) &= -\kappa_1 \beta_1 \delta_{j1} - 2(\tau_0 - \tau_0) h_{\frac{j}{N}} - \\
 &- (\beta_1 h_{\frac{j-1}{N}} + \bar{\beta}_1 h_{\frac{j+1}{N}}) \quad (j=0, 1, 2, \dots);
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 A_{j+1} - m A_{j-N+1} - \frac{j m}{N-1} \bar{A}_{N-j-1} - \bar{B}_1 \delta_{j0} &= \\
 = \kappa (a_{j+1} - m a_{j-N+1} - \frac{j m}{N-1} \bar{a}_{N-j-1});
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_1 \delta_{j0} + j (A_{j-1} + \frac{m}{N-1} A_{j+N-1}) - (B_{j+1} - m B_{j-N+1}) &= \\
 = \kappa \bar{a}_1 \delta_{j0} + j \kappa (a_{j-1} + \frac{m}{N-1} a_{j+N-1}),
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

($j=0, 1, 2, \dots$)

З умови однозначності зміщень

$$\kappa \int_L \Phi(t) dt - \int_L \sqrt{\psi(t)} d\bar{t} + \kappa \int_L f(t) dt = 0
 \tag{15}$$

одержуємо

$$\kappa A_1 + \bar{B}_1 + \kappa a_1 = m \kappa \beta_1 (1 + \kappa) \delta_{N2}
 \tag{16}$$

Тут введено позначення

$$h_\ell = \begin{cases} \frac{2m}{\pi} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)} (mx^2)^{|\ell|-1} dx & (\ell = \pm 1, \pm 2, \dots); \\ \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{2m^2x^2 - m^2 - 1}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} dx & (\ell = 0); \\ 0 & / \ell - \text{дробове} / \end{cases} \quad (17)$$

$$k_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha_n R}, \quad \delta_{jn} = \begin{cases} 1 & n=j, \\ 0 & n \neq j. \end{cases}$$

Система (12) регулярна. Це твердження випливає з нерівності

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} |h_n| = \frac{4m}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}{1-mx^2} dx \leq |h_0|, \quad (18)$$

причому рівність має місце тільки при $m=1$.

Із системи (13) з врахуванням (16) визначаємо деякі з коефіцієнтів

$$\begin{aligned} A_1 &= \kappa m \beta_1 \delta_{N2}, & \bar{B}_1 &= A_1 - \kappa a_1, \\ A_n &= \kappa a_n & (n=2, 3, \dots, N-2). \end{aligned} \quad (19)$$

Для визначення явних виразів функцій напружень $\Phi_0(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$ помножимо систему (13) і (14) на ζ^{-j-1} і просумуємо їх по j від 0 до ∞ з врахуванням (19). У результаті одержуємо

$$\Phi_0(\zeta) = - \frac{\kappa(N-1)(a_1 - m\beta_1 \delta_{N2}) \zeta^{N-1} + \kappa m(N-2) \bar{a}_1 \zeta}{(N-1)(\zeta^N - m)} + \kappa f_0(\zeta);$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{\zeta^N}{\zeta^N - m} \left\{ \kappa(m\bar{\beta}_1\delta_{N2} - \bar{a}_1)\zeta^{-1} - \frac{\kappa m(N-2)}{N-1} a_1 \zeta^{N-3} - \right. \\ \left. - \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{m}{N-1} \zeta^{N-1} \right) (\phi_0(\zeta) - \kappa f_0(\zeta)) \right] \right\}. \quad (20)$$

Напруження в пластинці обчислюються за формулами [1,4]

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\phi_0(\zeta) + \overline{\phi_0(\zeta)}] - 2\kappa[f_0(\zeta) + \overline{f_0(\zeta)}]; \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} \left[\overline{\omega(\zeta)}\phi_0'(\zeta) + \omega'(\zeta)\psi_1(\zeta) - \kappa f_0'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} \right]. \quad (21)$$

Зокрема, напруження σ_θ на площадках, що нормальні до контура криволінійного отвору L , виражається формулою

$$\sigma_\theta = -4\kappa \operatorname{Re} \left[\frac{(N-1)(a_1 - m\beta_1\delta_{N2})\zeta^{N-1} + m(N-2)\bar{a}_1\zeta}{(N-1)(\zeta^N - m)} \right]. \quad (22)$$

Звідси одержуємо $(a_1 = \frac{2R}{\lambda_t}(\alpha_1 + \alpha_2))$.

а) при $\alpha = 0$, $N = 2$ (зовнішність еліптичного отвору)

$$\sigma_\theta = -\frac{4\kappa R}{\lambda_t}(\alpha_1 + m) \frac{(1-m)\cos\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta}; \quad (23)$$

б) при $\alpha = 0$, $N = 3, 4, \dots$

$$\sigma_\theta = -\frac{4\kappa R}{\lambda_t} \alpha_1 \frac{[N-1-m^2(N-2)]\cos\theta - m\cos(N-1)\theta}{(N-1)(1+m^2-2m\cos N\theta)}; \quad (24)$$

в) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N = 2$

$$\sigma_\theta = -\frac{4\kappa R}{\lambda_t}(\alpha_2 - m) \frac{(1+m)\sin\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta}; \quad (25)$$

г) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N=3,4,\dots$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{4k_0 R}{\lambda_t} \alpha_2 \frac{[N-1-m^2(N-2)] \sin \theta + m \sin(N-1)\theta}{(N-1)(1+m^2-2m \cos N\theta)} \quad (26)$$

Якщо тепловий потік напружений під кутом α до осі Ox , то кінцеві напруження σ_{θ} обчислюються за формулою

$$\sigma_{\theta}^{(\alpha)} = \sigma_{\theta}^{(0)} \cos \alpha + \sigma_{\theta}^{(\frac{\pi}{2})} \sin \alpha \quad (27)$$

Розглянемо деякі часткові випадки:

1) Контур пластинки L теплоізолюваний [1]. У цьому випадку $K_1 = \infty$ ($\alpha_n = 0$) і в системі (12) одержуємо

$$\alpha_1 = \bar{\beta}_1 = -\frac{qR}{\lambda_t} e^{i\alpha} \quad (28)$$

Отже, $\alpha_1 = -\cos \alpha$, $\alpha_2 = -\sin \alpha$.

2) На контурі пластинки L підтримується стала температура T_c . Тоді $K_1 = 0$ ($\alpha_n = \infty$) і в системі (12) маємо

$$\alpha_1 = -\bar{\beta}_1 = \frac{qR}{\lambda_t} e^{i\alpha} \quad (29)$$

Отже, $\alpha_1 = \cos \alpha$, $\alpha_2 = \sin \alpha$.

Якщо теплообмін з зовнішнім середовищем вздовж контура L відбувається за законом Ньютона, то коефіцієнти α_1 і α_2 визначаються з системи (12). Для пластинки з еліптичним отвором ($m = 0,5$) при $K_1 = 3,183$, $\alpha_1 = 0,6027$, а з квадратним отвором $\alpha_1 = 0,5023$.

Аналогічно розв'язується термопружна задача при заданих зміщеннях точок контура L .

Л і т е р а т у р а

1. Г а й в а с ь І.В. Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока в окрестности макровключений. - "Прикладная механика", Т. П, вып. 2, 1966.
2. Н і щ е н к о І.О., М а р т и н о в и ч Т.Л. Про один метод розв'язування двовимірних стаціонарних задач теплопровідності. П'ята

наукова конференція молодих математиків України. Тези доповіді. Київ, 1970.

3. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А. К решению плоской задачи термоупругости для двухсвязных областей. - "Прикладная механика", Т. УТ, вып. 7, 1972.

4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, "Наукова думка", 1968.

УДК 539.3

В. В. БОЖИДАРНИК

НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КОЛОВИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружну рівновагу анізотропної пластинки товщиною $2h$ з коловим отвором L_1 радіуса r_1 , край якого несиметрично підкріплений пружним кільцем сталого перерізу. Площина осі стержня зміщена від осерединної площини пластинки на величину ξ_0^* . Підкріплюючий стержень вільний від навантаження. Напруження і згинальні моменти в пластинці на нескінченності обмежені

$$\sigma_x^\infty = 0, \quad \sigma_y^\infty = q, \quad \tau_{xy}^\infty = r; \quad M_x^\infty = M_1, \quad M_y^\infty = M_2, \quad H_{xy}^\infty = M_{12}$$

Область, зайняту пластинкою, і відповідні їй області змін

$z_j = x + S_j y$, $z_j^* = x + \mu_j y$ конформно відобразимо на зовнішність одиничного кола γ_1 , прийнявши

$$z = \omega(\zeta), \quad z_j = \omega_j(\zeta_j), \quad z_j^* = \omega_j^*(\zeta_j^*), \quad (1)$$

причому для контурних точок γ_1 змінні ζ , ζ_j , ζ_j^* набувають одного і того ж значення $\sigma = e^{i\theta}$.

У перетвореній області (1) граничні умови задачі (8) статті [3] при відсутності навантаження на кільце наберуть вигляду (зовнішній контур області $L_2(\zeta_2)$ віддалений у нескінченність) ($r_1 > r_0$)