

наукова конференція молодих математиків України. Тези доповіді. Київ, 1970.

3. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А. К решению плоской задачи термоупругости для двухсвязных областей. - "Прикладная механика", Т. УТ, вып. 7, 1972.

4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, "Наукова думка", 1968.

УДК 539.3

В. В. БОЖИДАРНИК

НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КОЛОВИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружну рівновагу анізотропної пластинки товщиною $2h$ з коловим отвором L_1 радіуса r_1 , край якого несиметрично підкріплений пружним кільцем сталого перерізу. Площина осі стержня зміщена від середньої площини пластинки на величину ξ_0^* . Підкріплюючий стержень вільний від навантаження. Напруження і згинальні моменти в пластинці на нескінченності обмежені

$$\sigma_x^\infty = 0, \quad \sigma_y^\infty = q, \quad \tau_{xy}^\infty = r; \quad M_x^\infty = M_1, \quad M_y^\infty = M_2, \quad H_{xy}^\infty = M_{12}$$

Область, зайняту пластинкою, і відповідні їй області змін

$z_j = x + S_j y$, $z_j^* = x + \mu_j y$ конформно відобразимо на зовнішність одиничного кола γ_1 , прийнявши

$$z = \omega(\zeta), \quad z_j = \omega_j(\zeta_j), \quad z_j^* = \omega_j^*(\zeta_j^*), \quad (1)$$

причому для контурних точок γ_1 змінні ζ , ζ_j , ζ_j^* набувають одного і того ж значення $\sigma = e^{i\theta}$.

У перетворенні області (1) граничні умови задачі (8) статті [3] при відсутності навантаження на кільце наберуть вигляду (зовнішній контур області $L_2(\zeta_2)$ віддалений у нескінченність) ($r_1 > r_0$)

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dU = -\frac{q}{2h} \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{2c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\theta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right] -$$

$$-\frac{q}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \overline{F_1'(\sigma)} d\bar{\sigma};$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dU = \frac{q}{2h} \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{2c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\theta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 F_1'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right] -$$

$$-\frac{q}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} F_1(\sigma) d\sigma;$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dV = \int_{\gamma_1} \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + i \frac{(r_1 - r_0) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\theta}{d\sigma} + i \theta_\theta - \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_n}{d\sigma} - \frac{1}{r_1} \theta_r \right) \right] \overline{F_1(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma,$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dV = \int_{\gamma_1} \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + i \frac{(r_1 - r_0) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\theta}{d\sigma} + i \theta_\theta - \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_n}{d\sigma} - \frac{1}{r_1} \theta_r \right) \right] F_1(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma;$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dV^* = - \int_{\gamma_1} \frac{r_1}{r_0} \left[\frac{C}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_r}{d\sigma} - i \frac{A}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_n}{d\sigma} + \frac{i\sigma \omega'(\sigma)}{r_1 |\omega'(\sigma)|} (C \theta_n + i A \theta_r) \right] \times$$

$$\times \overline{F_1'(\sigma)} d\bar{\sigma} - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \overline{F_1'(\sigma)} d\bar{\sigma} - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{2c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\theta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \right];$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dV^* = - \int_{\gamma_1} \frac{r_1}{r_0} \left[\frac{C}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_r}{d\sigma} - i \frac{A}{\omega'(\sigma)} \frac{d\theta_n}{d\sigma} + \frac{i\sigma \omega'(\sigma)}{r_1 |\omega'(\sigma)|} (C \theta_n + i A \theta_r) \right] \times \quad (2)$$

$$\times F_1'(\sigma) d\sigma - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} F_1'(\sigma) d\sigma + \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{2c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\theta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 F_1'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right];$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)} dU^* = \int_{\gamma_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\tau - i \left(\frac{r_0}{r_1} \theta_n - i \frac{(r_1 - r_0) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\tau}{d\sigma} \right) \right] \overline{F_1'(\sigma)} d\sigma,$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma) dU^* = \int_{\gamma_1} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\tau - i \left(\frac{r_0}{r_1} \theta_n - i \frac{(r_1 - r_0) \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\tau}{d\sigma} \right) \right] F_1'(\sigma) d\sigma.$$

Тут $\sigma = e^{i\theta}$ - афікс точки контура γ_1 ; $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ - до-
функція, голоморфна в перетвореній області; $g = E^* F$, $A \in C$ -
сткості криволінійного стержня на розтяг, згин і кручення; r_1 - ра-
кривини крайнього волокна стержня, спаяного з пластинкою; r_0 - рад-
кривини нейтрального (для чистого згину) волокна стержня L_0 , яке
ребуває на відстані ρ_c від центральної осі; E_0 - відносне видовжен-
волокна L_0 ; $\theta_n, \theta_\tau, \theta_\theta$ - кути повороту поперечного перерізу
стержня. У випадку пластинки з коловим отвором радіуса r_1 функції
 $\omega(\zeta), \omega_j(\zeta), \omega_j^*(\zeta^*)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= r_1 \zeta, \quad t = r_1 \sigma, \\ \omega_j(\zeta_j) &= \frac{r_1}{2} [(1 - iS_j) \zeta_j + (1 + iS_j) \frac{1}{\zeta_j}]; \\ \omega_j^*(\zeta_j^*) &= \frac{r_1}{2} [(1 - i\mu_j) \zeta_j^* + (1 + i\mu_j) \frac{1}{\zeta_j^*}], \end{aligned} \quad (1')$$

де S_j, μ_j - корені відповідних характеристичних рівнянь [1, 4].
Функції U, V, U^*, V^* виражаються через комплексні потенціали
 $\varphi_j(z_j), \varphi_j^*(z_j^*)$, за формулами (3), (4) з [3].

Функції $\varphi_{*j}(\zeta_j) = \varphi_j[\omega_j(\zeta_j)], \varphi_{*j}^*(\zeta_j^*) = \varphi_j^*[\omega_j^*(\zeta_j^*)],$
 $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)],$ голоморфні зовні одиничного кола γ_1 з полюсом
на нескінченності, допускають розклади

$$\varphi_{*1}(\zeta_1) = R_1 A_0^* \zeta_1 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta_1^{-k}; \quad \varphi_{*2}(\zeta_2) = R_2 (B_0^* + i C_0^*) \zeta_2 + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta_2^{-k};$$

$$\psi_{*1}^*(\zeta_1^*) = R_1^* a_0^* \zeta_1^* + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \zeta_1^{*-k}; \quad \psi_{*2}^*(\zeta_2^*) = R_2^* b_0^* \zeta_2^* + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* \zeta_2^{*-k}; \quad (3)$$

$$F_i(\zeta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta_i^{-n}; \quad R_j = \frac{1}{2} r_j (1 - i s_j); \quad R_j^* = \frac{1}{2} r_j (1 - i \mu_j).$$

Сталі A_0^* , B_0^* , C_0^* ; a_0^* , b_0^* виражаються через компоненти напружень, згинальні і крутні моменти в пластинці на нескінченності за відомими формулами [1,4].

На підставі формул (3), (4) з [3] і розкладів (3) функції U , V , U^* , V^* на ζ , набувають вигляду

$$\begin{aligned} U &= D_1 \zeta + D_2 \zeta^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [t_1 A_k + t_2 B_k] \zeta^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [t_1^* \bar{A}_k + t_2^* \bar{B}_k] \zeta^k; \\ V &= D_3 \zeta + D_4 \zeta^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [n_1 A_k + n_2 B_k] \zeta^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [n_1^* \bar{A}_k + n_2^* \bar{B}_k] \zeta^k; \\ U^* &= K_3 \zeta + K_4 \zeta^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [d_1 a_k + d_2 b_k] \zeta^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [d_1^* \bar{a}_k + d_2^* \bar{b}_k] \zeta^k; \\ V^* &= K_1 \zeta + K_2 \zeta^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [l_1 a_k + l_2 b_k] \zeta^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [l_1^* \bar{a}_k + l_2^* \bar{b}_k] \zeta^k. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned} D_1 &= R_1 A_0^* t_1 + R_2 (B_0^* + i C_0^*) t_2; & D_2 &= \bar{R}_1 A_0^* t_1^* + \bar{R}_2 (B_0^* - i C_0^*) t_2^*; \\ D_3 &= R_1 A_0^* n_1 + R_2 (B_0^* + i C_0^*) n_2; & D_4 &= \bar{R}_1 A_0^* n_1^* + \bar{R}_2 (B_0^* - i C_0^*) n_2^*; \\ K_1 &= R_1^* a_0^* l_1 + R_2^* b_0^* l_2; & K_2 &= \bar{R}_1^* \bar{a}_0^* l_1^* + \bar{R}_2^* \bar{b}_0^* l_2^*; \\ K_3 &= R_1^* a_0^* d_1 + R_2^* b_0^* d_2; & K_4 &= \bar{R}_1^* \bar{a}_0^* d_1^* + \bar{R}_2^* \bar{b}_0^* d_2^*; \\ t_1 &= 1 + i s_j; & t_1^* &= 1 + i \bar{s}_j; & n_j &= p_j + i q_j; & n_j^* &= \bar{p}_j + i \bar{q}_j; \\ l_j^* &= \frac{p_j^*}{\mu_j}; & l_j^* &= \bar{q}_j^* + i \frac{\bar{p}_j^*}{\mu_j}; & d_j &= 1 + i \mu_j; & d_j^* &= 1 + i \bar{\mu}_j. \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненти деформації стержня $\rho_0, \theta_0, \theta_n, \theta_r$ подано на γ_1 у формі комплексних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k; & \theta_0 &= \beta_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k; \\ \theta_n &= \gamma_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sigma^k; & \theta_r &= \delta_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sigma^k. \end{aligned} \quad (6)$$

У випадку ортотропної пластинки при симетричному навантаженні відносно головних напрямків пружності x та y розклади (6) записуються

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_k (\sigma^k + \sigma^{-k}), & \theta_0 &= i \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \beta_k^* (\sigma^k - \sigma^{-k}), \\ \theta_r &= \delta_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \delta_k (\sigma^k + \sigma^{-k}), & \theta_n &= i \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \gamma_k^* (\sigma^k - \sigma^{-k}), \end{aligned} \quad (7)$$

де $\alpha_k, \beta_k^*, \delta_k, \gamma_k^*$ - величини дійсні.

Внесемо розклади (3), (4), (6), (1') у граничну умову задачі (2) і виконаємо інтегрування вздовж замкнутого контура γ_1 . Приймаючи при цьому всі E_j , крім E_n , рівними нулеві, одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій. Цю систему запишемо для ортотропної пластинки при симетричному навантаженні на нескінченності відносно головних напрямків пружності x та y ($a_k = \bar{b}_k$; A_k, B_k - величини дійсні):

$$t_1 A_n + t_2 B_n = \frac{q}{2hr_1} [(n+1)(r_1 - r_0) + r_1] \alpha_{n+1} + \frac{q(n+1)^2 2c}{2hr_1} \beta_{n+1}^* - D_2 \delta_{1n};$$

$$t_1^* A_n + t_2^* B_n = \frac{q}{2hr_1} [(1-n)(r_1 - r_0) + r_1] \alpha_{n-1} - \frac{q(1-n)^2 2c}{2hr_1} \beta_{n-1}^* - D_4 \delta_{1n};$$

$$\begin{aligned} n_1^* A_n + n_2^* B_n &= \frac{r_0}{n} \alpha_{n-1} - \frac{1}{n} [(r_1 - r_0)(n-1) + r_1] \beta_{n-1}^* + \frac{\gamma_0^*(n-1)}{n} \gamma_{n-1}^* + \\ &+ \frac{\gamma_0^*}{n} \delta_{n-1} - D_3 \delta_{1n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 A_n + n_2 B_n &= -\frac{r_0}{n} \alpha_{n+1} + \frac{1}{n} [(r_1 - r_0)(n+1) - r_1] \beta_{n+1}^* - \\ &- \frac{\gamma_0^*(n+1)}{n} \gamma_{n+1}^* - \frac{\gamma_0^*}{n} \delta_{n+1} - D_4 \delta_{1n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 a_n + \ell_2 b_n = \gamma_0^* g \left[1 + (n+1) \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) \right] \alpha_{n+1} + \frac{(n+1)^2 \gamma_0^* g \eta_c}{r_1} \beta_{n+1}^* + \\ + \frac{1}{r_0} [C - (n+1)A] \gamma_{n+1}^* - \frac{1}{r_0} [A - (n+1)C] \delta_{n+1} - K_2 \delta_{1n}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ell_1^* \bar{a}_n + \ell_2^* \bar{b}_n = \gamma_0^* g \left[1 + (1-n) \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) \right] \alpha_{n-1} - \frac{(1-n)^2 \gamma_0^* g \eta_c}{r_1} \beta_{n-1}^* - \\ - \frac{1}{r_0} [A - (1-n)C] \delta_{n-1} - \frac{1}{r_0} [C + (n-1)A] \gamma_{n-1}^* - K_1 \delta_{1n}; \end{aligned}$$

$$d_1 a_n + d_2 b_n = - \left[1 + (n+1) \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) \right] \delta_{n+1} + \frac{r_0}{r_1} \gamma_{n+1}^* - K_4 \delta_{1n};$$

$$d_1^* \bar{a}_n + d_2^* \bar{b}_n = - \left[1 + (1-n) \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) \right] \delta_{n-1} - \frac{r_0}{r_1} \gamma_{n-1}^* - K_3 \delta_{1n}.$$

Тут δ_{kn} - символ Кронекера.

Для прикладу за ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КЛСТ-В [5] і кільце прямокутного перерізу $2h^* \times b$ з дораміна з такими пружиними і геометричними характеристиками:

$$E_1 = 197 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 136 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad G = 9,33 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

$$\nu_2 = 0,12, \quad E^* = 7,2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \frac{b}{r_1} = 0,1, \quad \frac{2h^*}{2h} = 3, \\ \frac{2h^*}{b} = 6, \quad \frac{\gamma_0^*}{2h} = 1.$$

Пластинка згинається навколо головних напрямків пружності x та y ($E_x = E_1$) моментами:

$$1. \quad M_x^\infty = M, \quad M_y^\infty = H_{xy}^\infty = 0, \quad \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0;$$

$$2. \quad M_y^\infty = M, \quad M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0, \quad \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0.$$

На рис. 1, 2 зображені графіки розподілу кільцевих напружень $\sigma_\theta \cdot \frac{h^2}{M}$ у пластинці вздовж лінії спаю з кільцем відповідно у першому і другому випадках навантаження. Криві 1, 2, 3 на всіх рисунках отримуються відповідно точок верхньої, середньої та нижньої площин пластинки. Крива 4 відповідає симетричному підкріпленню пластинки стержнем тієї ж жорсткості ($\gamma_0^* = 0$) на верхній і нижній площині.

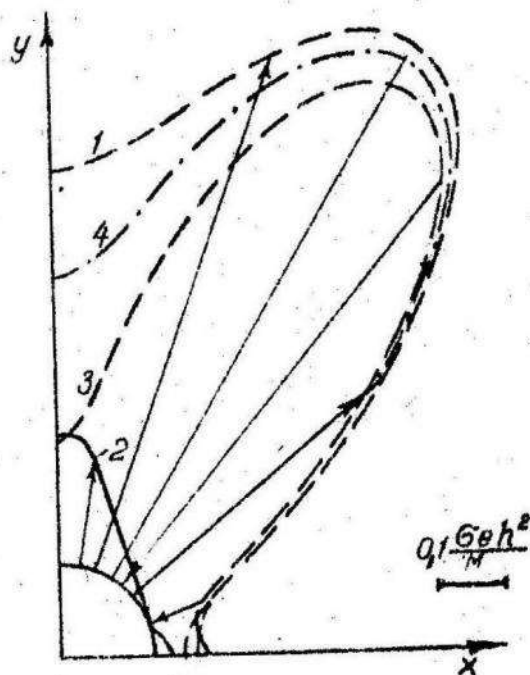


Рис. 1

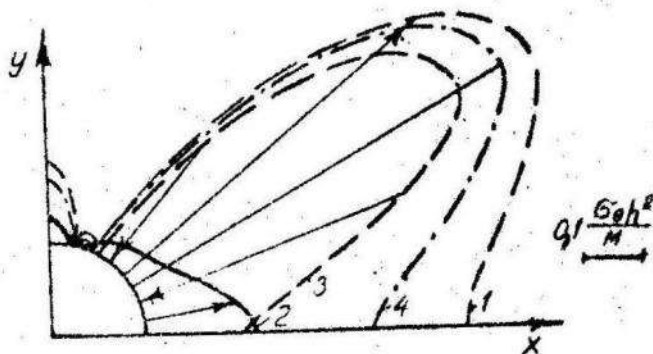


Рис. 2

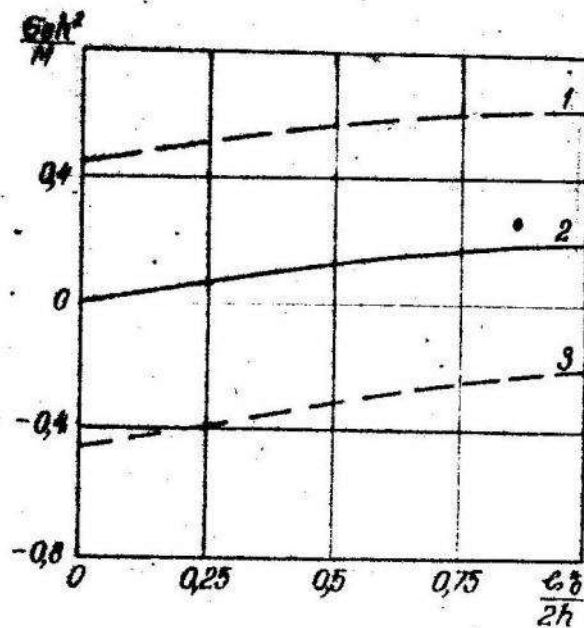


Рис. 3

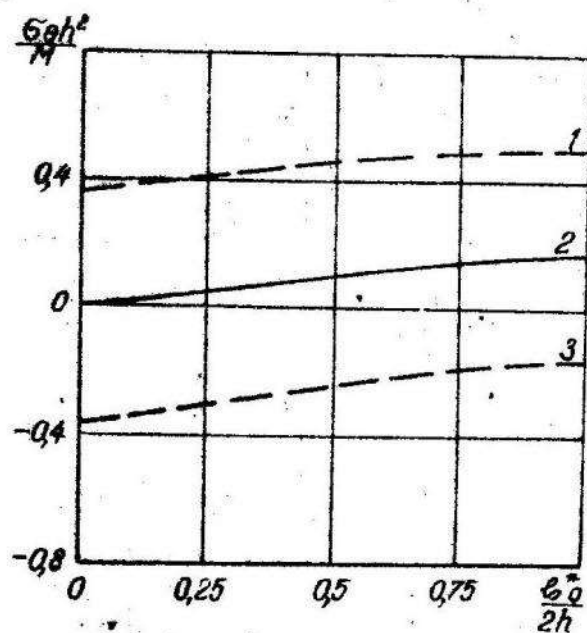


Рис. 4

На рис. 3, 4 дана залежність тих же напружень $\sigma_{\theta} \cdot \frac{h^2}{M}$ у пластинці від ексцентриситету підкріплення $\frac{e_0}{2h}$ при $\theta = 90^\circ$ у першому випадку навантаження (рис. 3) і при $\theta = 0^\circ$ - у другому випадку навантаження (рис. 4).

Л і т е р а т у р а

1. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. М., ГТТИ, 1957.
2. М а р т и н о в и ч Т.Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис., Львов, 1970.
3. М а р т и н о в и ч Т.Л., Б о ж и д а р н и к В.В. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленням краєм. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
4. С а в и н Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., ГТТИ, 1951.
5. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластинки. М., Оборонгиз, 1960.

УДК 517.3

В.Г. ГАБУСЕВ

ОДНА ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

1. Розглянемо безмежний плоскопаралельний трансверсально ізотропний шар скінченної товщини $2h$. Вважимо, що площини ізотропії паралельні граничним площинам, які вільні від зовнішнього навантаження.

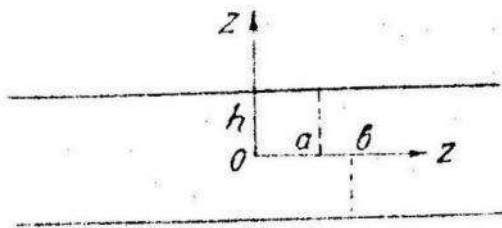


Рис. 1

Виберемо початок системи циліндричних координат на серединній площині шару. Вісь Oz направимо перпендикулярно до граничних площин вертикально вгору (рис. 1).

Граничні умови задачі мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k_1 (T - T_0^{(1)}), \quad z = h, \quad 0 \leq r < a,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k_2 (T - T_0^{(2)}), \quad z = h, \quad r \geq a,$$