Література

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., ГТТИ, 1957.
2. Мартынович Т.Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис., Львов, 1970.
3. Мартинович Т.Л., Божидарник В.В. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленим краєм. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
4. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., ГТТИ, 1951.
5. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластинки. М., Оборонгиз, 1960.

УДК 517.3

В.Г.ГАБРУСЄВ

ОДНА ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

1. Розглянемо безмежний плоскопаралельний трансверсально ізотропний шар скінченної товщини $2h$. Вважаємо, що площини ізотропії паралельні граничним площинам, які вільні від зовнішнього навантаження.

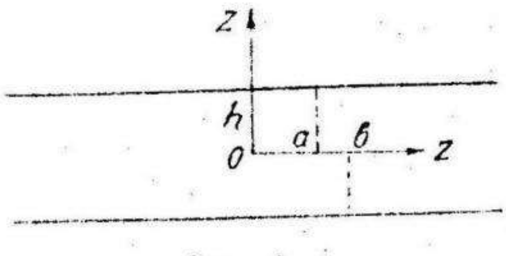

Рис. 1

Виберемо початок системи циліндричних координат на серединній площині шару. Вісь Oz направимо перпендикулярно до граничних площин вертикально вверх (рис. 1).

Граничні умови задачі мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k_1 \left(T - T_0^{(1)}\right), \quad z = h, \quad 0 \le r < a,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k_2 \left(T - T_0^{(2)}\right), \quad z = h, \quad r \ge a,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = k_3 (T - T_0^{(3)}), \qquad z=-h, \qquad 0 \le r < b,$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} = k_4 (T - T_0^{(4)}), \qquad z=-h, \qquad r \ge b \tag{1.1}$$
$$\sigma_{rz}(r,z) = 0, \qquad z=h,\ z=-h, \qquad 0 \le r < \infty$$
$$\sigma_{zz}(r,z) = 0, \qquad z=h,\ z=-h \qquad 0 \le r < \infty$$

При заданих граничних умовах (1.1) необхідно визначити розподіл температурного поля та температурні напруження.

Під час розв'язання задачі будуть використані співвідношення

$$T(r,z) = A_{33}A_{44}\left(\mu_1^2\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z),$$
$$\sigma_{zz}(r,z) = \beta A_{33}A_{44}\nabla^2\left(d\nabla^2 - e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z), \tag{1.2}$$
$$\sigma_{rz}(r,z) = -\beta A_{33}A_{44}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(d\nabla^2 - e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z),$$
$$\left(\mu_1^2\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_5^2\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z) = 0,$$

які разом з відповідними позначеннями наводяться в [3].

2. Застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля [4], [5] і формулу обернення до співвідношень (1.2), одержимо

$$T(r,z) = B^*\int_0^\infty \alpha^5\left[C_5^*(\alpha)\,\mathrm{sh}\,\mu_5 z\alpha + D_5^*(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\mu_5 z\alpha\right]J_0(r\alpha)\,d\alpha,$$
$$\sigma_{zz}(r,z) = -\beta A_{33}A_{44}\int_0^\infty \alpha^3\left(e\frac{d^2}{dz^2} - d\alpha^2\right)\bar\Psi(\alpha,z)J_0(r\alpha)\,d\alpha,$$
$$\sigma_{rz}(r,z) = \beta A_{33}A_{44}\int_0^\infty \alpha^2\frac{d}{dz}\left(e\frac{d^2}{dz^2} - d\alpha^2\right)\bar\Psi(\alpha,z)J_1(r\alpha)\,d\alpha, \tag{2.1}$$
$$\bar\Psi(\alpha,z) = \sum_{j=1,3,5}\left[C_j^*(\alpha)\,\mathrm{sh}\,\mu_j z\alpha + D_j^*(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\mu_j z\alpha\right],$$
$$B^* = A_{33}A_{44}(\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2).$$

Використовуючи заміну

$$\eta = a\alpha, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \gamma = \frac{h}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \frac{b}{a} = m,$$

$$\varphi_1(\eta) = \alpha^5 C_5^*(\alpha), \qquad \varphi_2(\eta) = \alpha^5 D_5^*(\alpha), \tag{2.2}$$

і вимагаючи виконання граничних умов для температури, одержуємо

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta)Q_1(\eta) + \varphi_2(\eta)R_1(\eta)\right]J_0(\rho\eta)\,d\eta = k_1 T_0^{(1)}, \qquad 0 \le \rho < 1,$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta)Q_2(\eta) + \varphi_2(\eta)R_2(\eta)\right]J_0(\rho\eta)\,d\eta = k_2 T_0^{(2)}, \qquad \rho > 1, \tag{2.3}$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta)Q_3(\eta) - \varphi_2(\eta)R_3(\eta)\right]J_0(\rho\eta)\,d\eta = -k_3 T_0^{(3)}, \quad 0 \le \rho < m,$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta)Q_4(\eta) - \varphi_2(\eta)R_4(\eta)\right]J_0(\rho\eta)\,d\eta = -k_4 T_0^{(4)}, \qquad \rho > m. \tag{2.4}$$

У співвідношеннях (2.3) та (2.4) використані позначення

$$Q_i(\eta) = \mu_5\eta\,\mathrm{ch}\,\mu_5\gamma\eta + k_i a\,\mathrm{sh}\,\mu_5\gamma\eta,$$

$$R_i(\eta) = \mu_5\eta\,\mathrm{sh}\,\mu_5\gamma\eta + k_i a\,\mathrm{ch}\,\mu_5\gamma\eta, \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2.5}$$

Друге рівняння (2.3) та (2.4) можна записати у вигляді

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta)Q_2(\eta) + \varphi_2(\eta)R_2(\eta)\right]J_0(\rho\eta)\,d\eta =$$

$$= k_2 T_0^{(2)}\left[u(\rho-1) + x(\rho)u(1-\rho)\right], \qquad 0 < \rho < \infty, \tag{2.6}$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta)Q_4(\eta) - \varphi_2(\eta)R_4(\eta)\right]J_0(\rho\eta)\,d\eta =$$

$$= -k_4 T_0^{(4)}\left[u(\rho-m) + y(\rho)u(m-\rho)\right], \qquad 0 < \rho < \infty. \tag{2.7}$$

де $x(\rho)$ та $y(\rho)$ невідомі функції, а

$$u(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Застосовуючи формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля до співвідношень (2.6) та (2.7), одержимо

$$\begin{aligned} &\frac{B^*}{a^2}\eta^{-1}\left[\varphi_1(\eta)Q_2(\eta)+\varphi_2(\eta)R_2(\eta)\right]= \\ &=k_2T_0^{(2)}\left[\int_1^\infty \rho J_0(\rho\eta)d\rho+\int_0^1 \rho x(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho\right], \end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$\begin{aligned} &\frac{B^*}{a^2}\eta^{-1}\left[\varphi_1(\eta)Q_4(\eta)-\varphi_2(\eta)R_4(\eta)\right]= \\ &=-k_4T_0^{(4)}\left[\int_m^\infty \rho J_0(\rho\eta)d\rho+\int_0^m \rho y(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho\right]. \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Невідомі функції $x(\rho)$ та $y(\rho)$ шукаємо у вигляді

$$x(\rho)=1+\sum_{n=1}^{N}a_nJ_0(\rho\lambda_n), \qquad (2.11)$$

$$y(\rho)=1+\sum_{n=1}^{N}b_nJ_0\left(\rho\frac{\lambda_n}{m}\right), \qquad (2.12)$$

де a_n та b_n – невідомі коефіцієнти, а λ_n – додатні нулі функції $J_0(x)$.

Підставивши (2.11) та (2.12) в (2.9) та (2.10), обчисливши інтеграли та ввівши позначення

$$\begin{aligned} X(\eta)&=\frac{k_2T_0^{(2)}a^2}{B^*}\left[\lim_{\Delta\to0}\delta(\eta-\Delta)-\sum_{n=1}^{N}a_n\lambda_nJ_1(\lambda_n)\frac{\eta J_0(\eta)}{\eta^2-\lambda_n^2}\right], \\ Y(\eta)&=\frac{k_4T_0^{(4)}a^2}{B^*}\left[\lim_{\Delta\to0}\delta(\eta-\Delta)-\sum_{n=1}^{N}b_n\lambda_nJ_1(\lambda_n)\frac{\eta J_0(m\eta)}{\eta^2-\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)^2}\right], \end{aligned} \qquad (2.13)$$

одержимо систему двох рівнянь для визначення двох невідомих $\varphi_1(\eta)$ та $\varphi_2(\eta)$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\eta)\,Q_2(\eta) + \varphi_2(\eta)\,R_2(\eta) = X(\eta), \\ &\varphi_1(\eta)\,Q_4(\eta) - \varphi_2(\eta)\,R_4(\eta) = -Y(\eta). \end{aligned} \tag{2.14}$$

У (2.13) та (2.14) $\delta(\eta-\Delta)$ – дельта функція Дірака.

Розв'язавши систему (2.14) відносно $\varphi_1(\eta)$ та $\varphi_2(\eta)$, маємо

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\eta) = \frac{1}{D(\eta)}\left[X(\eta)\,R_4(\eta) - Y(\eta)\,R_2(\eta)\right], \\ &\varphi_2(\eta) = \frac{1}{D(\eta)}\left[X(\eta)\,Q_4(\eta) + Y(\eta)\,Q_2(\eta)\right], \end{aligned} \tag{2.15}$$

де

$$D(\eta) = Q_2(\eta)\,R_4(\eta) + Q_4(\eta)\,R_2(\eta). \tag{2.16}$$

Підставивши (2.15) в (2.13) в перше рівняння (2.3) та перше рівняння (2.4) і ввівши позначення

$$\begin{aligned} &G_1(\eta) = Q_1(\eta)\,R_4(\eta) + Q_4(\eta)\,R_1(\eta), \\ &E_1(\eta) = Q_1(\eta)\,R_2(\eta) - Q_2(\eta)\,R_1(\eta), \\ &E_3(\eta) = Q_3(\eta)\,R_4(\eta) - Q_4(\eta)\,R_3(\eta), \\ &G_3(\eta) = Q_3(\eta)\,R_2(\eta) + Q_2(\eta)\,R_3(\eta), \end{aligned} \tag{2.17}$$

після обчислення інтегралів, одержимо умови для визначення невідомих коефіцієнтів a_n та b_n

$$\begin{aligned} &k_2 T_0^{(2)} \frac{[k_1+k_4+2k_1k_4\bar{h}]}{[k_2+k_4+2k_2k_4 h]} - k_4 T_0^{(4)} \frac{k_2-k_1}{[k_2+k_4+2k_2k_4\bar{h}]} - k_2 T_0^{(2)} \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda_n \times \\ &\times \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{G_1^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \, \frac{I_0(\rho y_k) K_0(y_k)}{y_k^2+\lambda_n^2} - \frac{G_1(\lambda_n) J_0(\rho\lambda_n)}{\lambda_n D\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)} \right\} + k_4 T_0^{(4)} \sum_{n=1}^{N} b_n \lambda_n \times \\ &\times \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{E_1^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \, \frac{I_0(\rho y_k) K_0(m y_k)}{y_k^2+\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)^2} - \frac{E_1\left(\frac{\lambda_n}{m}\right) J_0\left(\rho\frac{\lambda_n}{m}\right)}{\lambda_n D\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)} \right\} = k_1 T_0^{(4)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$0 \le \rho < 1,$$

$$k_2 T_0^{(2)} \frac{[k_4 - k_3]}{[k_3 + k_4 + 2k_2 k_4 h]} - k_4 T_0^{(4)} \frac{[k_2 + k_3 + 2k_2 k_3 h]}{[k_2 + k_4 + 2k_2 k_4 h]} - k_2 T_0^{(2)} \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda_n \times \tag{2.19}$$

$$\times \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{E_3^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \begin{bmatrix} I_0(\rho m y_k) K_0(y_k) \\ I_0(y_k) K_0(\rho m y_k) \end{bmatrix} \frac{1}{y_k^2 + \lambda_n^2} - \frac{E_3(\lambda_n)}{\lambda_n D(\lambda_n)} \begin{bmatrix} J_0(\rho m \lambda_n) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$+ k_4 T_0^{(4)} \sum_{n=1}^{N} b_n \lambda_n \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{G_3^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \frac{I_0(\rho m y_k) K_0(y_k m)}{y_k^2 + \left(\frac{\lambda_n}{m}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{G_3\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)}{\lambda_n D\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)} J_0(\rho \lambda_n) \right] = -k_3 T_0^{(3)}, \qquad 0 \leq \rho < 1.$$

У співвідношеннях (2.18) та (2.19) використані позначення

$$\Delta'(y_k) = \left\{ \frac{d}{d\eta} D(\eta) \right\}_{\eta = i y_k}, \qquad i G_j^*(y_k) = G_j(i y_k),$$
$$i E_j(y_k) = E_j(i y_k), \qquad D(i y_k) = i\Delta(y_k) = 0, \tag{2.20}$$

де

$I_0(x)$, $K_0(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Вирази, що стоять у квадратних дужках рівняння (2.19), слід розуміти так: при $0 \leq \rho m < 1$ треба брати співмножником верхній вираз, при $1 \leq \rho m < m$ нижній вираз.

Інтеграли обчислювали за допомогою методу лишків [2] з використанням властивостей функцій Бесселя [1].

Розбиваючи інтервал $0 \leq \rho < 1$ рівномірно N точками і вимагаючи виконання рівностей (2.18) та (2.19) у цих точках, одержимо $2N$ алгебраїчних рівнянь для визначення $2N$ невідомих a_n та b_n $(n = 1 \ldots N)$.

3. Знаючи вирази для $\varphi_2(\eta) = \alpha^5 D_5^*(\alpha)$ та $\varphi_1(\eta) = \alpha^5 C_5^*(\alpha)$, можна знайти розподіл температурного поля.

Для визначення температурних напружень необхідно знайти функцію

$$\bar{\Psi}(\alpha, z) = \sum_{j=1,3,5} \left[C_j^*(\alpha) sh \mu_j z \alpha + D_j^*(\alpha) ch \mu_j z \alpha \right], \tag{3.1}$$

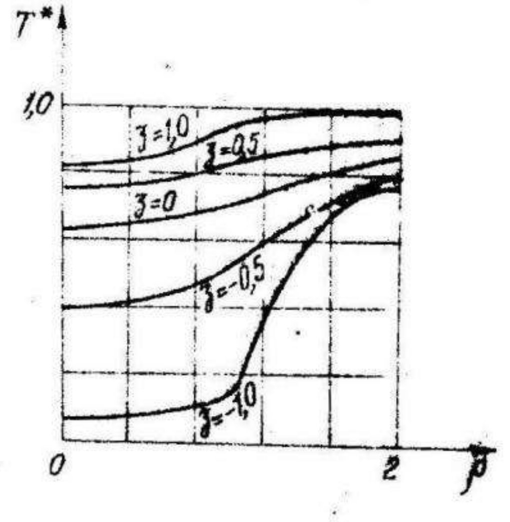

Рис. 2

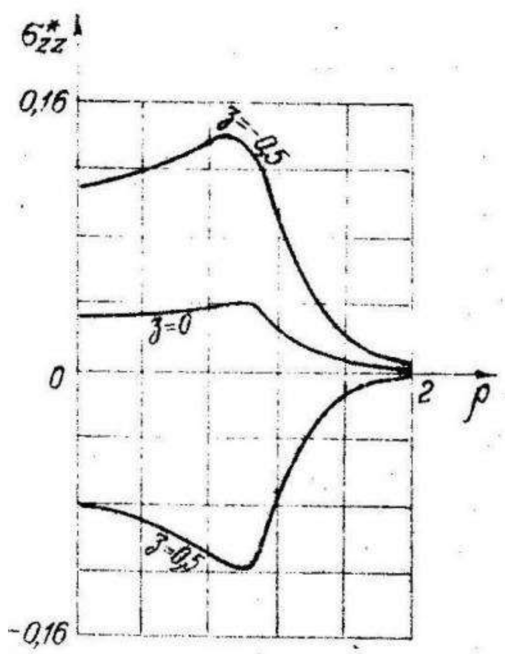

Рис. 3

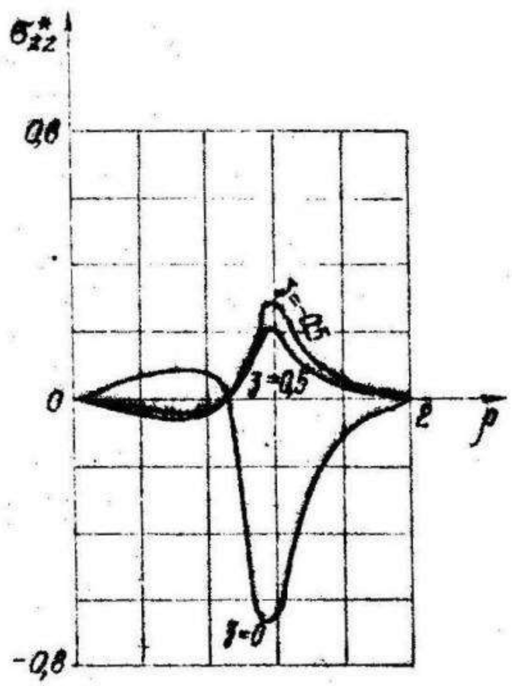

Рис. 4

тобто знайти $C_1^*(\alpha)$, $D_1^*(\alpha)$, $C_3^*(\alpha)$, $D_3^*(\alpha)$. Щоб дістати ці невідомі, використовуємо умови вільності границь шару від зовнішнього навантаження:

$$\sigma_{zz}(r,z)=0, \quad z=h, \quad z=-h, \quad 0\le r<\infty$$
$$\sigma_{rz}(r,z)=0, \quad z=h, \quad z=-h, \quad 0\le r<\infty \qquad (3.2)$$

Знайшовши функцію $\Psi(\alpha,z)$ і підставивши її у співвідношення (2.1), після обчислення інтегралів одержимо формули розподілу температурного поля та температурних напружень σ_{zz}, σ_{rz}, які внаслідок їх громіздкості в статті не наводяться.

4. Розглянемо числовий приклад з такими параметрами:

$$m=\frac{b}{a}=1{,}2, \quad k_1h=10^{-6}, \quad k_2h=10, \quad k_3h=10, \quad k_4h=10^{-6},$$
$$T_0^{(1)}=T_0^{(3)}=T_0^{(4)}=0, \qquad T_0^{(2)}=T_0, \qquad \gamma=\frac{h}{a}=1. \qquad (4.1)$$

Щоб одержати систему сорока двох рівнянь для визначення сорока двох невідомих a_n^* та b_n^* $(n=1\ldots 21)$ зробимо заміну $k_2T_0^{(2)}a_n=a_n^*$, $k_4T_0^{(4)}b_n=b_n^*$, підставимо (4.1) в (2.18) та (2.19) і розіб'ємо інтервал $0\le\rho<1$ рівномірно двадцять однією точкою, вимагаючи виконання (2.18) та (2.19) у цих точках. Підставивши отримані значення a_n^*, b_n^* у відповідні співвідношення, дістанемо розподіл температурного поля та температурних напружень σ_{zz}, σ_{rz}.
Всі підрахунки ми проводили для трансверсально ізотропного магнію, для якого $\mu_1=1{,}388$, $\mu_3=$ 0,[illegible]5, $\mu_5=1$.

На рисунках 2-4 зображені графіки температури та температурних напружень σ_{zz}, σ_{rz}.

Л і т е р а т у р а

1. В а т с о н Г.Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.

2. Л а в р е н т ь е в М.А., Ш а б а т Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., ГИФМЛ, 1958.

3. Н о в а ц к и й В. Вопросы термоупругости. М., ИЛ. 1962.

4. С н е д д о н И.Н. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.

5. У ф л я н д Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., "Наука", 1967.