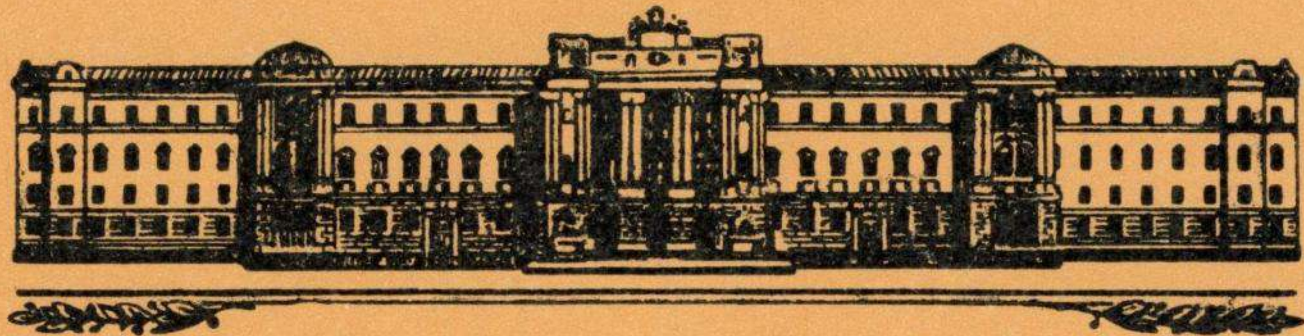


ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 8

1973

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Випуск 8

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
Львів — 1973

УДК 519

Вміщені статті висвітлюють питання теорії функцій, теорії ймовірностей, диференціальних та інтегральних рівнянь, функціонального аналізу, геометрії і теорії пружності.

Вісник розрахований на наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

В $\frac{0223-069}{М225/04/-73}$

М А Т Е М А Т И К А

В.Е. ЛЯНЦЕ, В.М.СТАСИШИН

Ф.ЕНГЕЛЬС І МАТЕМАТИКА

Велике значення для усвідомлення місця та ролі математики в сучасному науково-технічному прогресі, для правильного розуміння природи математичного знання – процесу математизації наук, для боротьби проти сучасного ідеалізму та метафізики має філософська спадщина Ф.Енгельса, у працях якого дано глибокий діалектико-матеріалістичний аналіз походження і розвитку математичних понять, теорій, розкрито діалектику взаємозв"язку математики і практики. Критикуючи Є.Дюрінга, який вважав за можливе вивести всю чисту математику безпосередньо з голови, апріорно, Ф.Енгельс писав, що зовсім неправильно вважати ніби в чистій математиці розум має справу тільки з продуктами своєї власної творчості й уяви, бо поняття числа та фігури взяті не звідки-небудь, а тільки з дійсного світу [2]. Математика виникла з практичних потреб людей: з вимірювання площ земельних ділянок і місткості посудин, з обчислення часу та з механіки [2].

Історія математики переконливо доводить, що на всіх етапах розвитку математичного пізнання потреби виробництва, потреби розвитку інших наук викликали до життя нові математичні теорії, цілі галузі математичної науки. Наприклад, потреби розвитку виробництва в кінці XVII на початку XVIII ст. вимагали створення методів кількісного аналізу руху, зміни предметів і явищ матеріального світу. Це зумовило виникнення аналітичної геометрії, математичного аналізу. З цього приводу Ф.Енгельс зазначав, що сама математика займаючись змінними величинами, вступає в діалектичну сферу [2].

Потреби вивчення закономірностей поширення тепла, викликані, зокрема, застосуванням у промисловості парових машин, привели до формування нової галузі математичної науки - математичної фізики. Навіть сама назва цілого ряду галузей математичної науки вказує на їх зв"язок з практикою, життям /теорія автоматів, теорія масового обслуговування, лінійне і нелінійне програмування, теорія оптимальних процесів тощо/.

Зрозуміло, що в процесі розвитку математики створюються такі галузі математики, які безпосередньо не пов"язані з матеріальним виробництвом, практикою /сучасні алгебраїчні теорії, топологія, функціональний аналіз, математична логіка тощо/. Однак це аж ніяк не суперечить фундаментальним положенням Ф.Енгельса про зумовленість розвитку математики потребами практики, а свідчить про складність і надзвичайну опосередкованість зв"язку математики та практики, математики й об"єктивної дійсності. Математика має сильну внутрішню логіку свого розвитку, внутрішні джерела, що пов"язані з процесами удосконалювання самих основ математики, узагальненнями, взаємодією різних галузей математики тощо. Особливо важливе значення має взаємодія перервного і неперервного, алгебраїчного та геометричного начал у математиці.

Ф.Енгельс писав, що чиста математика має своїм об"єктом просторові форми та кількісні відношення дійсного світу, отже - дуже реальний матеріал. Але щоб мати змогу досліджувати ці форми і відношення в чистому вигляді, треба цілком відокремити їх від змісту, залишити його осторонь як щось неістотне. Таким чином, ми дістаємо точки, позбавлені вимірів, лінії, позбавлені товщини й ширини, різні а, в, х, у; постійні та змінні величини [2].

Математика оперує виключно ідеальними об"єктами, що перебувають на різних рівнях абстракції. Тому замість безпосереднього дослідження самої дійсності вона вивчає схему, модель реального світу, яка одержується в результаті абстрагування. На цьому особливо спекулює сучасний ідеалізм, що намагається відродити думку про апріорність математичного знання, яке нібито само створює свої об"єкти та свій предмет. Проте в дійсності виведення математичних величин однієї з іншої, яке здається апріорним, доводить не апріорне їх походження, а тільки раціональний взаємний зв"язок між ними. Отже досліджуючи властивості математичної моделі, схеми ми пізнаємо властивості реального світу.

Виникнувши з практичних потреб людей, математика пройшла довгий і складний шлях розвитку, який супроводжувався розширенням предмету, дослідженням нових форм і відношень дійсності, знаходженням нових методів розв"язання задач і доведення теорем, сходженням до більш високих абстракцій та ширших узагальнень тощо. Як зауважує В.М.Глушков, те, що зветься математикою в наші дні, дуже відрізняється, скажімо, від визначення, яке можна було дати математиці в середині минулого століття. Виникнення нових галузей математики дає можливість широко застосовувати математичні методи в інших науках [5] .

У сучасних визначеннях математики підкреслюється, що вона є наукою про абстрактні структури та об"єкти і взаємозв"язки між ними наукою про операції над об"єктами досить загальної природи тощо. Діалектико-матеріалістичний підхід до розкриття природи математичного знання грунтується на розгляді цих об"єктів і зв"язків між ними як деяких образів, моделей сторін, відношень матеріальних об"єктів і систем.

"В своїй аксіоматичній формі, - пише Н.Бурбакі, - математика уявляється скупченням абстрактних форм - математичних структур" [4]. Щоб більш точно визначити структуру, вказують одне або декілька відношень, в яких знаходяться її елементи, потім постулюється, що розглядуване в структурі відношення задовільняє деяким умовам -

аксіомам структури. Прикладом математичної структури може служити метричний простір, тобто множина елементів будь-якої природи з заданою на цій множині числовою функцією від двох змінних, що задовільняє певним умовам - аксіомам метричного простору. Іншим важливим прикладом математичної структури є група, яка також являє собою множину елементів довільної природи, але з деякою іншою функцією, що задана на парах елементів цієї множини і з своєю специфічною аксіоматикою. При дослідженні реальних процесів і явищ математик може використати ці структури як готові знаряддя. "Кожний раз, коли він помічає, що між досліджуваними ним елементами мають місце відношення, що задовільняють аксіомам структури певного типу, він зразу ж може скористатись всім арсеналом загальних теорем" [4] , які з них логічно випливають. Така стандартизація математичних знарядь набагато полегшує процес дослідження.

Підхід до математики як системи математичних структур проливає світло на деякі особливості сучасної математики, вказуючи зокрема на те, що вона досліджує структуру кількісних відношень реального світу.

Важливе місце в філософських працях Ф.Енгельса займає питання об"єктивних основ застосування математики в інших науках. Він писав, що саме тому, що математика взята з реального світу і виражає частину властивих йому форм зв"язків, вона може застосовуватись для подальшого пізнання об"єктивної дійсності, а також використовуватись в інших науках. Ці положення мають надзвичайно важливе значення для правильного розуміння процесу математизації сучасного наукового пізнання, взаємовідношення світу експериментального та світу математичного.

Характеризуючи застосування математики у природних науках, Ф.Енгельс в 70-х роках минулого століття писав, що застосування математики: в механіці твердих тіл абсолютне, у механіці газів приблизне, у механіці рідин вже важче; у фізиці більше у вигляді спроб і відносне; у хімії найпростіші рівняння першого ступеня; у біології дорівнює нулеві.

З того часу роль математики незрівнянно зросла не тільки в механіці, але й у фізиці, хімії, біології та інших науках. Істотно змінилась і роль математики в сучасному науковому пізнанні. Із засобу обробки результатів спостережень і експериментів, засобу узагальнення і вираження кількісної сторони речей і явищ математика в багатьох галузях сучасного природознавства, і передовсім у фізиці, перетворилась в особливий метод теоретичного дослідження природи, метод передбачення невідомих ще властивостей, нових, невідкритих ще об"єктів і процесів; математика стала мовою сучасної науки. Говорячи про математизацію наук, слід зазначити, що мова йде не стільки про розширення сфери застосування раніше відомого математичного апарату, скільки про зростання евристичної ролі математики в сучасному науковому пізнанні, її участь в розробці понятійного апарату інших наук.

Об"єктивна необхідність і можливість математизації наук в наш час зумовлена цілою низкою тісно взаємозв"язаних між собою причин, що випливають з потреб суспільно-історичної практики, відносної самостійності і внутрішньої логіки розвитку наукового пізнання. Однією з головних причин інтенсивного процесу математизації є прогрес природничих і гуманітарних наук, що привів до таких однорідних і простих елементів матерії, закони руху яких допускають математичну обробку [3]. Причинами математизації наук є розвиток математики, виникнення та розвиток кібернетики тощо. Розвиток механіки, фізики та інших математизованих наук свідчить про те, що успішне застосування математики в них стало можливим лише тоді, коли в цих науках була вироблена система понять, що допускає математичну обробку. Математизованою може бути лише та наука, мо /або частина мови/ якої є ізоморфною мові певного розділу математики.

У сучасному науковому пізнанні ще повніше розкривається помічена Ф.Енгельсом об"єктивна закономірність, згідно з якою наука рухається вперед пропорціонально великій кількості знань, успадкованих нею від попереднього покоління [1]. Важливими причинами, що зумовлюють прискорений розвиток сучасного наукового, зокрема математичного пізнання, є бурхливий розвиток продуктивних сил, розвиток засобів обміну науковою інформацією, інтенсивний процес диференціації та інтеграції математичної науки, математизація природничих і гуманітарних наук тощо.

У працях Ф.Енгельса ми знаходимо глибоке діалектико-матеріалістичне обгрунтування математичного нескінченного. Він показує, що прообразом диференціального й інтегрального числення є хімічні перетворення, а також фізичні процеси випаровування і конденсації рідини та ін., що математичне безконечне запозичене з дійсності, хоч і несвідомо, і тому воно може бути пояснене тільки з дійсності, а не з самого себе, не з математичної абстракції [2].

Отже, як бачимо, у працях Ф.Енгельса міститься невичерпне джерело ідей та думок, які мають надзвичайно важливе значення для правильного розуміння особливостей розвитку сучасної науки, зокрема математики, для критики сучасного ідеалізму та метафізики.

Література

1. К. Маркс і Ф. Енгельс. Твори, т.1, Київ, Держполітвидав УРСР, 1958.

2. К. Маркс і Ф. Енгельс. Твори, т.20, Київ, Політвидав України, 1965.

3. Ленін В.І. Повне зібрання творів. Том 1,8. Київ, Політвидав України, 1971.

4. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., Физматгиз, 1963.

5. Глушков В.М. Гносеологічні основи математизації науки. - "Філософська думка", 1969, № 1.

УДК 517.512.7

В.О.ГУКЕВИЧ

ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ПРО ЗБІЖНІСТЬ МАЙЖЕ ВСЮДИ РЯДІВ, ЩО МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНІ ЗА БЕЛМАНОМ

Систему $\{\varphi_k(x)\}$ називаємо системою майже ортогональних за Белманом функцій, якщо

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = 1 \quad ,$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}^2 < \infty \quad ,$$

$$a_{mn} = \begin{cases} \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx, & \text{коли } m \neq n \\ 0 \quad , & \text{коли } m = n . \end{cases}$$

Справедлива така лема.

Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ - система майже ортогональна за Белманом на $[a,b]$,

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$,

а $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x)$.

Тоді існує функція $f \in L_2(a,b)$,

для якої

$$\rho_n = \int_a^b [f(t) - S_n(t)]^2 dt \to 0, \qquad n \to \infty ,$$

при цьому ρ_n зобразимо у вигляді

$$\rho_n = \sum_{n+1}^{\infty} b_k^2 + 2\sum_{n+1}^{\infty} b_k(b_k - c_k) - \sum_{n+1}^{\infty}\sum_{n+1}^{\infty} a_{kl}\, b_k\, b_l$$

де $c_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt$.

Д о в е д е н н я. З умови $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$ виникає існування функції $f \in L_2(a,b)$, для якої

$$\rho_n = \int_a^b [f(t) - S_n(t)]^2 dt \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Але

$$\rho_n = \int_a^b f^2(t)dt - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(b_k - c_k) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k b_\ell a_{k\ell} \qquad /1/$$

Використовуючи відтак відому для майже ортогональної за Белманом системи нерівність [1]

$$|b_k - c_k| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

а також нерівність Шварца, одержуємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(b_k - c_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \sqrt{\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}^2} .$$

і далі

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} b_k b_\ell\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \sqrt{\sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}^2} .$$

З двох останніх нерівностей виникає законність граничного переходу в рівності (1).

Таким чином,

$$\int_a^b f^2(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k(b_k - c_k) - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_\ell a_{k\ell} . \qquad (2)$$

З (1) і (2) одержуємо твердження леми.

Т е о р е м а. Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ система майже ортогональних за Белманом функцій на $[a,b]$ числа $v(n)$ необмежено зростають разом з n і

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 v(k) < \infty .$$

Нехай далі $\{n_k\}$ – така неспадна послідовність індексів, що $k^2 \leq v(n_k)$. Тоді послідовність

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x)\right\}$$

збігається майже всюди на $[a,b]$.

Доведення теореми аналогічне доведенню подібного твердження для ортогональної системи [1] . Розглядаємо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k}$.

Використовуючи перетворення Абеля, допоміжну лему і умови теореми, показуємо його. збіжність.

З останнього, міркуючи як у випадку ортогональної системи, дістаємо твердження теореми.

Для системи майже ортогональної за Белманом справедливе також твердження подібне до відповідного твердження для ортогональної системи [1], доведене аналогічно.

Якщо ряд Фур'е функції $f \in L_2(a,b)$ за майже ортогональном в сенсі Белмана системою $\{\varphi_n(t)\}$ сумується методом Чезаро першого порядку майже всюди, то послідовність $\{S_{2^k}(f;t)\}$,

де
$$S_n(f;t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t),$$
$$c_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\,dt ,$$

збігається майже всюди.

Розглядаючи питання про збіжність майже всюди послідовності

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(t) \qquad \text{за умови} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$$

легко переконатись у тому, що лема 5.3.4 з [1] (стор. 188) переноситься на випадок, коли система $\{\varphi_k(t)\}$ майже ортогональна за Белманом.

Використовуючи цю лему, а також умову майже ортогональності системи, і міркуючи як під час доведення теореми 5.3.5 з [1] (стор. 190), переконуємось у справедливості такого твердження.

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega^2 n < \infty$ і система $\{\varphi_n(t)\}$ є системою майже ортогональною за Белманом на $[a,b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ збігається майже всюди на $[a,b]$

Справедливе також твердження, яке є перенесенням на майже ортогональну за Белманом систему відомого результату для ортогональних систем [1] (стор. 352).

Для будь-якої майже ортогональної за Белманом на $[a,b]$ системи існує послідовність $\{m_i\}$, що залежить тільки від системи $\{\varphi_n(x)\}$, для якої частинні суми $S_{m_i}(x)$ ряду $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$ збігається майже всюди на $[a,b]$, коли $m_i \to \infty$, якщо тільки $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$.

З останньої теореми випливає як і для ортогональної системи [1] (стор. 357) існування для системи майже ортогональної за Белманом безконечної підсистеми збіжності.

Також теорема Д.Є.Меньшова про множники Вейля [1] (стор. 365) і близька їй теорема (9.27) (див. там же) переноситься без зміни на системи майже ортогональні за Белманом.

Література

1. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.

УДК 517.94

К.С.КОСТЕНКО

ГРУПОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЗВИЧАЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ТА ЗОБРАЖЕННЯ ЇХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Окремі частинні розв'язки звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь n -го порядку

$$u^{(n)}+p_0(x)u^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)u=0 \qquad (1)$$

інколи вдається знаходити у заданому вигляді. Кожний зі знайдених лінійно незалежних частинних розв'язків такого рівняння, як відомо, дає можливість понизити його порядок на одиницю. Отже, якщо для лінійного рівняння (1) будуть відомі $n-1$ частинні лінійно незалежні розв'язки, то таке рівняння можна звести до лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку, а інтегрування останнього приводить до побудови фундаментальної системи розв'язків рівняння (1).

Зокрема, якщо для лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку

$$u'''+p_0(x)u''+p_1(x)u'+p_2(x)u=0 \qquad (2)$$

відомі два лінійно незалежні частинні розв'язки $u_1(x)$ і $u_2(x)$, то третій частинний розв'язок $u_3(x)$ цього рівняння зображається формулою

$$u_3(x)=-u_1(x)\int\frac{u_2(x)e^{-\int p_0(x)dx}}{W^2(u_1,u_2)}dx+u_2(x)\int\frac{u_1(x)e^{-\int p_0(x)dx}}{W^2(u_1,u_2)}dx, \qquad (3)$$

де $W(u_1,u_2)$ – детермінант Вронського розв'язків $u_1(x)$ і $u_2(x)$. Легко переконатись, що $W(u_1,u_2,u_3)\neq 0$ і тому $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ є фундаментальна система розв'язків рівняння (2).

Коли ж для рівняння (1) відомі лише $n-2$ частинні лінійно незалежні розв'язки, то знаходження фундаментальної системи розв'язків такого рівняння можна звести до знаходження розв'язку рівняння Ріккаті.

Мета нашої роботи полягає в тому, щоб знайти достатні умови на коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)$, при виконанні яких є можливість визначити фундаментальну систему розв'язків рівняння (2) у замкнутій формі

Шукаючи розв'язки рівняння (2) у вигляді

$$u = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx} y, \tag{4}$$

одержимо, що нова невідома функція $y(x)$ повинна задовольняти рівняння

$$y''' + A(x)y' + B(x)y = 0, \tag{5}$$

де

$$A(x) = -\frac{p_0^2(x)}{3} - p_0'(x) + p_1(x), \qquad B(x) = \frac{2p_0^3(x)}{27} - \frac{p_0''(x)}{3} - \frac{p_0(x)p_1(x)}{3} + p_2(x). \tag{6}$$

Враховуючи, що можливість інтегрування звичайних диференціальних рівнянь у замкнутій формі тісно пов'язана з їх груповими властивостями, знайдемо спочатку умови на коефіцієнти $A(x)$ і $B(x)$ рівняння (5), при виконанні яких це рівняння буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень.

Застосовуючи з цією метою до рівняння (5) необхідну і достатню ознаку С. Лі [3] інваріантності диференціальних рівнянь відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором

$$Uf = \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{7}$$

одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $\xi(x,y)$ і $\eta(x,y)$ оператора (7):

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

$$A'\xi + 2A\frac{\partial \xi}{\partial x} + 3\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0,$$

$$B'y\xi + B\eta + A\frac{\partial \eta}{\partial x} - By\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 3\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0,$$

з якої випливає

$$\xi(x,y) = \xi(x), \qquad \eta(x,y) = (\xi'(x) + \alpha_0)y + \eta(x). \tag{8}$$

Причому $\xi(x)$ повинна бути нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\xi''' + A\xi' + \frac{A'}{2}\xi = 0, \\ &\xi^{(IV)} + A\xi''' + 3B\xi' + B'\xi = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$\eta(x)$ – розв'язком рівняння (5), α_0 – довільною сталою.

Розглянемо спочатку випадок, коли відомий лише тривіальний розв'язок рівняння (5) і приймемо в зв'язку з цим $\eta(x)=0$. Тоді, якщо $\xi(x)\neq 0$ розв'язок системи (9), рівняння (5) буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами

$$U_1 f=\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}+\xi'(x)y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad U_2 f=y\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{10}$$

З а у в а ж е н н я. Щоб знайти нетривіальні розв'язки системи (9), коли вони існують, достатньо знати будь-який частинний розв'язок $\tilde{\xi}(x)\neq 0$ першого рівняння цієї системи.

Дійсно, якщо відомий частинний розв'язок $\tilde{\xi}(x)\neq 0$ першого рівняння системи (9), то завжди можна знайти [2] фундаментальну систему розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння

$$y''+\frac{A(x)}{4}y=0. \tag{11}$$

У свою чергу фундаментальна система розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ рівняння (11) дає змогу побудувати [1] і фундаментальну систему розв'язків $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$ першого рівняння системи (9) у формі

$$\xi_1(x)=y_1^2(x), \quad \xi_2(x)=y_1(x)y_2(x), \quad \xi_3(x)=y_2^2(x). \tag{12}$$

Після цього залишається лише перевірити, чи будуть функції (12) розв'язками другого рівняння системи (9).

Але система (9) при довільно заданих коефіцієнтах $A(x)$ і $B(x)$, взагалі кажучи, не має нетривіальних розв'язків. А тому вважатимемо $\xi(x)\neq 0$ довільно заданою достатньо гладкою функцією і знаходити умови на коефіцієнти $A(x)$ і $B(x)$, при виконанні яких ця функція буде розв'язком системи (9).

Розглядаючи систему (9) як систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно A і B та інтегруючи її, знаходимо

$$\begin{aligned} A(x)&=\frac{1}{\xi^2(x)}\left(D_1-2\xi''(x)\xi(x)+\xi'^2(x)\right),\\ B(x)&=\frac{1}{\xi^3(x)}\left(D_2-\xi'''(x)\xi^2(x)+2\xi''(x)\xi'(x)\xi(x)-D_1\xi'(x)-\xi'^3(x)\right), \end{aligned} \tag{13}$$

це D_1, D_2 – довільні сталі.

Таким чином, якщо коефіцієнти рівняння (5) задовольняють умовам (13) при довільно заданій достатньо гладкій функції $\xi(x) \neq 0$, то таке рівняння буде інваріантним відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами (10). Тому що інфінітезімальні оператори (10) лінійно незв'язані, а їх дужка Пуассона $(U_1, U_2)f = 0$, то ця група перетворень має канонічну форму

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad U_2 f = \frac{\partial f}{\partial \chi},$$

причому

$$\xi = \int \frac{dx}{\xi(x)}, \qquad \chi = \ln \frac{y}{\xi(x)} \tag{14}$$

У цих змінних рівняння (5) набере вигляду

$$\frac{d^3\chi}{d\xi^3} + 3\frac{d\chi}{d\xi}\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \left(\frac{d\chi}{d\xi}\right)^3 + D_1\frac{d\chi}{d\xi} + D_2 = 0. \tag{5'}$$

Прийнявши спочатку $\frac{d\chi}{d\xi} = z$, а потім $\frac{dz}{d\xi} = p$, рівняння (5') зведемо до рівняння першого порядку

$$p\frac{dp}{dz} + 3zp + z^3 + D_1 z + D_2 = 0. \tag{5''}$$

Останнє рівняння має розв'язки у вигляді

$$p = \alpha z^2 + \beta z + \gamma, \tag{15}$$

якщо

$$\begin{aligned} &2\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0, && \beta(\alpha + 1) = 0, \\ &2\alpha\gamma + \beta^2 + 3\gamma + D_1 = 0, && \beta\gamma + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Існують такі розв'язки системи (16): $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = -\frac{D_1}{2}$, якщо $D_2 = 0$ і $\alpha_2 = -1$, $\gamma_2 = -\frac{D_2}{\beta_2}$, де $\beta_2 \neq 0$ – дійсний корінь рівняння

$$\beta^3 + D_1\beta - D_2 = 0. \tag{17}$$

Розглянемо спочатку випадок, для якого $\alpha_2 = -1$, $\gamma_2 = -\frac{D_2}{\beta_2}$, $\beta_2 \neq 0$ – дійсний корінь рівняння (17). У цьому випадку (15) стане рівнянням

$$-d\xi = \frac{dz}{\left(z - \frac{\beta_2}{2}\right)^2 + \frac{D_2}{\beta_2} - \frac{\beta_2^2}{4}},$$

інтегрування якого з наступним врахуванням (14) і того, що $\chi = \int z\, d\xi$, одержуємо у замкнутій формі два частинні лінійно незалежні розв'язки

$y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (5), коефіцієнти якого задовольняють умовам (13):

$$y_1(x)=\zeta(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\zeta(x)}}\cos\left(a\int\frac{dx}{\zeta(x)}\right),\quad y_2(x)=\zeta(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\zeta(x)}}\sin\left(a\int\frac{dx}{\zeta(x)}\right), \quad (18')$$

якщо $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}=a^2>0$;

$$y_1(x)=\zeta(x)e^{\left(\frac{\beta_2}{2}+a\right)\int\frac{dx}{\zeta(x)}},\quad y_2(x)=\zeta(x)e^{\left(\frac{\beta_2}{2}-a\right)\int\frac{dx}{\zeta(x)}}, \quad (18'')$$

якщо $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}=-a^2$;

$$y_1(x)=\zeta(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\zeta(x)}},\quad y_2(x)=\zeta(x)e^{\frac{\beta_2}{2}\int\frac{dx}{\zeta(x)}}\int\frac{dx}{\zeta(x)}, \quad (18''')$$

якщо $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}=0$.

Третій частинний розв'язок $y_3(x)$ рівняння (5) знаходимо за формулою (3), в якій потрібно прийняти $u_1(x)=y_1(x)$, $u_2(x)=y_2(x)$ і $p_0(x)=0$. У результаті обчислення інтегралів, що входять у цю формулу, одержуємо

$$y_3(x)=\zeta(x)e^{-\beta_2\int\frac{dx}{\zeta(x)}} . \quad (19)$$

Отже, формули (18′) – (18‴), (19) залежно від знаку виразу $\frac{D_2}{\beta_2}-\frac{\beta_2^2}{4}$ дають фундаментальну систему розв'язків рівняння (5), коефіцієнти якого задовольняють умовам (13) при довільно заданій тричі неперервно диференційованій функції $\zeta(x)$ і довільних сталих D_1 і D_2 . При цьому $\beta_2\neq 0$ – дійсний корінь рівняння (17).

Розглянемо тепер випадок, коли рівняння (17) може мати корінь $\beta_1=0$. Тоді $D_2=0$, $\alpha_1=-\frac{1}{2}$, $\gamma_1=-\frac{D_1}{2}$. Зауважимо, що при $D_2=0$ коефіцієнти рівняння (5), які задовольняють умовам (13), зв'язані рівністю $B(x)=\frac{A'(x)}{2}$. Тому рівняння (5) збігається з першим рівнянням системи (9), а ліва частина другого рівняння системи (9) є першою похідною лівої частини першого рівняння цієї ж системи. У зв'язку з цим довільний достатньо гладкий розв'язок першого рівняння системи (9) буде розв'язком і другого рівняння цієї системи. Таким чином, щоб побудувати у цьому випадку двопараметричну групу перетворень (10), відносно якої рівняння (5) було б інваріантним, достатньо знайти який-небудь нетривіальний розв'язок цього ж рівняння. А довільна достатньо гладка функція $\xi(x)=y_1(x)$ буде розв'язком рівняння (5), якщо його коефіцієнти задовольняють умовам

$$A(x)=\frac{1}{\xi^2(x)}\left(D_1-2\xi''(x)\xi(x)+\xi'^2(x)\right), \qquad B(x)=\frac{A'(x)}{2}, \qquad (13')$$

де D_1 - довільна стала.

Інтегрування рівняння

$$-d\xi=\frac{2dz}{z^2+D_1}$$

аналогічно попередньому випадку приводить до побудови фундаментальної системи розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ рівняння (5), коефіцієнти якого задовольняють умовам (13'). При цьому залежно від знака сталої D_1 маємо:

$$y_1(x)=\xi(x), \quad y_2(x)=\xi(x)\cos\left(\sqrt{D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}\right), \quad y_3(x)=\xi(x)\sin\left(\sqrt{D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}\right), \qquad (20')$$

якщо $D_1>0$;

$$y_1(x)=\xi(x), \quad y_2(x)=\xi(x)e^{\sqrt{-D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}}, \quad y_3(x)=\xi(x)e^{-\sqrt{-D_1}\int\frac{dx}{\xi(x)}}, \qquad (20'')$$

якщо $D_1<0$;

$$y_1(x)=\xi(x), \quad y_2(x)=\xi(x)\int\frac{dx}{\xi(x)}, \quad y_3(x)=\xi(x)\left(\int\frac{dx}{\xi(x)}\right)^2, \qquad (20''')$$

якщо $D_1=0$.

Таким чином, умови (13) при довільному виборі функції $\xi(x)$ і сталих D_1, D_2 дають можливість побудувати деякий клас лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку виду (5), фундаментальну систему розв'язків кожного з яких можна знайти у замкнутій формі.

Зокрема, фундаментальну систему розв'язків рівняння (5) зі сталими коефіцієнтами A і B можна дістати залежно від знака виразу $\frac{D_2}{\beta_2} - \frac{\beta_2^2}{4}$ з формул $(18')$ - $(18''')$, (19). При цьому $\xi(x)=1$, $D_1=A$, $D_2=B\neq 0$, а $\beta_2\neq 0$ - дійсний корінь рівняння (17).

Те ж саме має місце і для рівняння Ейлера

$$y''' + \frac{a_0}{x^2} y' + \frac{b_0}{x^3} y = 0$$

при $\xi(x)=x$, $D_1=a_0-1$, $D_2=a_0+b_0\neq 0$. Якщо ж $D_2=0$, то фундаментальну систему розв'язків цих рівнянь залежно від знака сталої D_1 одержуємо з формул $(20')$ - $(20''')$.

Фундаментальна система розв'язків рівняння (2) може бути одержана у замкнутій формі з фундаментальної системи розв'язків рівняння (5) за допомогою формули (4), якщо коефіцієнти (6) задовольняють умовам (13).

У тому випадку, коли система (9) має лише тривіальний розв'язок $\xi(x)\equiv 0$ і, як наслідок, коефіцієнти рівняння (5) не задовольняють умовам (13), але все ж таки з деяких міркувань можна знайти один частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (5), то прийнявши $\eta(x)=y_1(x)$, матимемо з (8) $\xi(x,y)=0$, $\quad \eta(x,y)=\alpha_0 y + y_1(x)$. $\qquad (8')$

Отже, рівняння (5) і (2) будуть інваріантними відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами відповідно

$$U_1 f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_2 f = y_1(x)\frac{\partial f}{\partial y} \quad і \quad U_1 f = u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad U_2 f = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx} y_1(x)\frac{\partial f}{\partial u}$$

Використання канонічних змінних цих груп перетворень дає лише можливість звести такі рівняння до рівняння Рікатті, що можна простіше зробити і без використання групових властивостей рівнянь (5) і (2).

Якщо відомі два частинні розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (5), то (5) і (2) будуть інваріантними відносно трипараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами відповідно

$$U_1 f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_2 f = y_1(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_3 f = y_2(x)\frac{\partial f}{\partial y}$$

і

$$U_1 f = u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad U_2 f = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx} y_1(x)\frac{\partial f}{\partial u}, \quad U_3 f = e^{-\frac{1}{3}\int p_0(x)dx} y_2(x)\frac{\partial f}{\partial u}$$

Але для знаходження фундаментальної системи розв'язків рівняння (5) і (2) в такому випадку немає потреби використовувати груповий метод їх інтегрування, бо простіше можна діяти з використанням формули (3).

Таким чином, якщо коефіцієнти рівнянь (5) і (2) з врахуванням (6) не задовольняють умовам (13), то знаходження трипараметричної групи перетворень, відносно якої такі рівняння залишилися б інваріантними, є задачею еквівалентною задачі знаходження їх фундаментальної системи розв'язків.

Ми переконались, що серед відомих лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку, фундаментальна система розв'язків яких зображується у замкнутій формі, зустрічаються лише такі, для яких або виконуються умови (13) або порівняно легко в деякому заданому вигляді можна знайти два частинні лінійно незалежні розв'язки.

Література

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ГИФМЛ, М., 1961, с. 536, № 3.15.

2. Костенко К. С. Про умови інтегрування в квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.

3. S. Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig, 1891.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ВИПАДКОВА КОНТИНУАЛЬНА ЗГОРТКА

1. Вступ. Нехай невід'ємнозначна випадкова змінна ξ має густину

$$g(t)=\begin{cases} \equiv 0, & t<0, \\ c\delta(t)+(1-c)_1 \nu(t), & t\geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

де

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0,\\ 0, & t>0,\end{cases} \qquad \int_0^\infty \delta(t)\,dt=1 \tag{2}$$

та

$$p(t)\geq 0, \qquad \int_0^\infty p(t)\,dt=1, \tag{3}$$

C – стала, $0\leq C\leq 1$. Густина суми двох незалежних невід'ємнозначних випадкових змінних, відповідно з густинами $q_1(t)$ і $q_2(t)$ дорівнює згортці

$$q_1 * q_2(t)\equiv\int_0^t q_1(\tau)q_2(t-\tau)\,d\tau, \qquad t\geq 0. \tag{4}$$

Зокрема, коли два незалежні доданки однаково розподілені з густиною (1), то густину суми, тобто згортку $q*q(t)$, позначаємо коротше через $q(t)\big|_*^2$.

У [3] розглянуто поняття континуальної згортки $p(t)\big|_*^\ell$ порядку $\ell>0$, $p(t)\big|_*^0=\delta(t)$, $p(t)\big|_*^1=p(t)$, та деякі його застосування. Покажемо, що бувають випадки, коли при довільній невід'ємнозначній випадковій змінній λ символ $q(t)\big|_*^\lambda$ має сенс і є густиною. Тоді вираз $q(t)\big|_*^\lambda$ називається випадковою λ-згорткою. Якщо λ має густину, то $q(t)\big|_*^\lambda$ називається випадковою континуальною λ-згорткою. Випадкові згортки дуже розширюють клас розподілів, а також використовуються для виведення генеалогії одних розподілів з інших.

2. Зображення густини. Лапласівське інтегральне перетворення густини (3) назвемо зображенням і позначимо через $\varphi(z)$

$$\varphi(z)=\mathcal{L}p(t)=\int_0^\infty e^{-zt}p(t)\,dt, \qquad z=x+iy=\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z, \quad i=\sqrt{-1}. \tag{5}$$

Оскільки

$$\mathcal{L}\delta(t)=1, \tag{6}$$

то зображення (1) запишемо

$$\chi(z)=\mathcal{L}q(t)=c+(1-c)\varphi(z), \qquad \mathrm{Re}\,z>0 \tag{7}$$

Звернемо увагу на дві властивості зображення (7).

а) З того, що $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=0$ при $\operatorname{Re} z\geqslant 0$. (порівн. (9) в [3])

і $\mathcal{F}(t)=\int\limits_0^t q(t)dt=c+(1-c)\int\limits_0^t p(t)dt,\ t\geqslant 0$ та $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^t p(t)dt=0$,

випливає, що

$$\lim_{z\to\infty}\chi(z)=c=\lim_{t\to+0}\mathcal{F}(t)\ ,\qquad \operatorname{Re} z\geqslant 0. \tag{8}$$

Оскільки $\varphi(x)$ у (7) з ростом x від 0 до ∞ монотонно спадає від 1 до 0, то $\chi(x)$ визначає функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$ за формулою

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\,,\\ \dfrac{1-\chi(x)}{1-c}\ , & x\geqslant 0\,.\end{cases} \tag{8'}$$

Таким чином, кожній невід'ємнозначній випадковій змінній з густиною (1) та зображенням (7) ставиться у відповідність невід'ємнозначна випадкова змінна з функцією розподілу (8′).

б) Оскільки

$$\mathcal{L}q(t)\Big|_*^n=\chi^n(z)=\left[c+(1-c)\varphi(z)\right]^n\ ,\quad (n=2,3,\dots), \tag{9}$$

то згортка n -го порядку густини (1) набирає вигляду

$$q(t)\Big|_*^n=\sum_{k=0}^n b(k;n,1-c)\,p(t)\Big|_*^k\ ,\qquad (n=2,3,\dots), \tag{10}$$

де

$$b(k;n,1-c)=\frac{n!}{k!(n-k)!}c^{n-k}(1-c)^k\ ,\quad (0<c<1;\ k=0,1,\dots,n)\ - \tag{11}$$

біномний розподіл.

Зауважимо, що більшість властивостей, перелічених у [3] , для зображення $\varphi(z)$ переноситься з відповідними змінами на зображення (7).

3. **С у м і ш г у с т и н.** Нехай випадкова змінна ξ має густину (1), залежну від невід'ємнозначного параметра ℓ

$$q(t)=q(t;\ell), \tag{12}$$

а функція $H(\ell)$ є функцією розподілу довільної невід'ємнозначної випадкової змінної η. Тоді за формулою повної ймовірності функція

$$r(t)=\int_0^\infty q(t;\ell)\,dH(\ell), \quad t\geq 0. \tag{13}$$

буде безумовною густиною випадкової змінної ξ.

Густина (13) називається сумішшю сім'ї густин (12) зі змішувальною функцією розподілу $H(\ell)$. Тобто густина (13) підпорядкована густині (12) з керуючим розподілом $H(\ell)$. Зокрема, якщо η має густину $H'(\ell)\ h(\ell),\ \ell\geq 0$, то дістаємо суміш густин

$$r(t)=\int_0^\infty q(t;\ell)\,h(\ell)\,d\ell, \quad t\geq 0 \tag{14}$$

Очевидно, що зображення суміші сім'ї густин (13) і (14) дорівнює суміші зображень змішуваних густин

$$\mathcal{L}\,r(t)=\int_0^\infty \left\{\mathcal{L}q(t;\ell)\right\} dH(\ell), \tag{15}$$

та

$$\mathcal{L}\,r(t)=\int_0^\infty \left\{\mathcal{L}q(t;\ell)\right\} h(\ell)\,d\ell. \tag{16}$$

4. Випадкова континуальна згортка. Нехай зображення (7) випадкової змінної ξ з густиною (1) задовольняє умову

$$(-1)^n\gamma^{(n)}(z)\geq 0,\ z>0,\ (n=1,2,\dots);\ \gamma(z)=\left[\ln\frac{1}{\chi(z)}\right]',\ \chi(z)\neq 0,\ \mathrm{Re}\,z>0 \tag{17}$$

Тоді при кожному додатному ℓ, $\chi^{\ell}(z)$ буде зображенням безмежно подільного розподілу, тобто тоді при кожному додатному ℓ існує континуальна згортка порядку ℓ (порівн. [3])

$$q(t)\Big|_*^{\ell}=\mathcal{L}^{-1}\chi^{\ell}(z), \quad (\chi(z)\neq 0,\ \mathrm{Re}\,z>0;\ \ell>0). \tag{17}$$

Густина (17) при кожному значенні параметра ℓ, $\ell>0$ описує деяку випадкову змінну η_ℓ. Нехай далі λ невід'ємнозначна випадкова змінна, незалежна від усіх η_ℓ, $\ell>0$, з густиною $h(\ell)$ і зображенням

$$\psi(z)=\int_0^\infty e^{-zl}h(l)\,dl, \qquad Re\, z>0. \tag{18}$$

Утворимо континуальну суму η_λ випадкового числа λ випадкових змінних η_l. За формулою повної ймовірності функція розподілу η_λ дорівнює

$$\mathcal{P}\{\eta_\lambda\le t\}=\int_0^\infty h(l)\mathcal{P}\{\eta_l\le t\}\,dl. \tag{19}$$

Звідси, упохіднюючи по t, дістаємо густину η_λ

$$q(t)\Big|_*^\lambda=\int_0^\infty h(l)\,q(t)\Big|_*^l\,dl. \tag{20}$$

Вираз (20) назвемо випадковою континуальною λ -згорткою. Правий бік (20) має вигляд правого боку (14). Отже, (20) є сумішшю континуальних згорток $q(t)\Big|_*^l$ зі змішувальною густиною $h(l)$. Таким чином, випадкова континуальна згортка (20) - спеціальна суміш континуальних згорток. Випадкова континуальна згортка $q(t)\Big|_*^\lambda$ підпорядкована континуальній згортці $q(t)_*^l$ з керуючою густиною $h(l)$.

Зображення випадкової континуальної згортки (20) з огляду на (16) і (18)

$$\omega(z)=\mathcal{L}q(t)\Big|_*^\lambda=\int_0^\infty\Big\{\mathcal{L}q(t)\Big|_*^l\Big\}h(l)\,dl=\int_0^\infty\chi^l(z)h(l)\,dl=\psi(-\ln\chi(z)), \tag{21}$$

де під $\ln\chi(z)$ розуміємо його головне значення; $\chi(z)\ne 0$, $Re\, z>0$.

Відзначимо, що коли λ має функцію розподілу $H(l)$ і зображення

$$\psi(z)=\int_0^\infty e^{-zl}\,dH(l), \qquad Re\, z>0, \tag{18$'$}$$

то

$$q(t)\Big|_*^\lambda=\int_0^\infty q(t)\Big|_*^l\,dH(l) \tag{20$'$}$$

також буде випадковою згорткою, зі зображенням

$$\omega(z)=\int_0^\infty\chi^l(z)\,dH(l)=\psi(-\ln\chi(z)), \quad (\chi(z)\ne 0,\ Re\, z>0). \tag{21$'$}$$

Отже, $\psi(-\ln\chi(z))$ є зображенням випадкової згортки $q(t)\Big|_*^\lambda$, підпорядкованої континуальній згортці зі зображенням $\chi(z)$, твірної густини (1) та зображенням $\psi(z)$ керуючого розподілу. Звідси

$$q(t)\Big|_{*}^{\lambda} = \mathcal{L}^{-1}\psi(-\ln\chi(z)), \qquad (\chi(z)\neq 0,\ \operatorname{Re} z>0), \qquad (20'')$$

де $\mathcal{L}^{-1}$ символізує зворотнє перетворення Лапласа.

Таким чином, безмежно подільна невід'ємнозначна випадкова змінна ξ з густиною (1) та зображенням (7) для кожної невід'ємнозначної випадкової змінної λ з зображенням $\psi(z)$ породжує деяку випадкову змінну η_λ з густиною (20$''$).

Оскільки для суперпозиції функцій $\psi(-\ln\chi(z))$, що виступає в (20$''$), відбувається співвідношення

$$\psi_1\big|_{-\ln\chi(z)}\cdot\psi_2\big|_{-\ln\chi(z)} = (\psi_1\psi_2)\big|_{-\ln\chi(z)}, \qquad (22)$$

то для незалежних невід'ємнозначних випадкових змінних λ_1 та λ_2 зі зображеннями відповідно $\psi_1(z)$ та $\psi_2(z)$ маємо співвідношення

$$\left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_1}\right\} * \left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_2}\right\} = q(t)\Big|_{*}^{\lambda_1+\lambda_2}. \qquad (23)$$

Таким чином, випадкова згортка (20$''$) для довільних незалежних невід'ємнозначних випадкових змінних λ_1 та λ_2 задовольняє співвідношення (23). Якщо невід'ємнозначна випадкова змінна λ залежить від деякого невід'ємного параметра $\varkappa$, то густина (20$''$) описує однопараметричну сукупність випадкових змінних $\eta_{\lambda_\varkappa}$, тобто деякий випадковий процес. Для такого процесу співвідношення (23) записується у формі

$$\left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_{\varkappa_1}}\right\} * \left\{q(t)\Big|_{*}^{\lambda_{\varkappa_2}}\right\} = q(t)\Big|_{*}^{\lambda_{\varkappa_1+\varkappa_2}} \qquad (23')$$

У випадку, коли $\varkappa$ – неперервний параметр, $\varkappa>0$, то процес, керований густиною (20$''$), що задовольняє співвідношення (23$'$), є процесом зі стаціонарними незалежними приростами та густиною (20$''$) приростів $\eta_{\lambda_{\sigma+\tau}}-\eta_{\lambda_\sigma}$, $(\sigma,\tau>0)$, (порівн. [6]).

Очевидно, що співвідношення (22) та (23) узагальнюються до вигляду

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{\psi_j\Big|_{-\ln\chi(z)}\right\}=\left\{\prod_{j=1}^{n}\psi_j\right\}\Big|_{-\ln\chi(z)}, \qquad (n=2,3,\dots) \tag{24}$$

$$\left\{q(t)\Big|_*^{\lambda_1}\right\}*\left\{q(t)\Big|_*^{\lambda_2}\right\}*\dots*\left\{q(t)\Big|_*^{\lambda_n}\right\}=q(t)\Big|_*^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}, \tag{25}$$
$$(n=2,3,\dots).$$

5. **Приклади.** а) Відомо, що тривалість часу очікування початку обслуговування вимоги пуасонівського потоку з інтенсивністю a експонентно обслуговуваного з параметром b, $a<b$ при стаціонарному режимі має густину (порівн. [6])

$$q(t)=\left(1-\frac{a}{b}\right)\cdot\delta(t)+\frac{a}{b}\cdot(b-a)e^{-(b-a)t}, \qquad t\geqslant 0. \tag{26}$$

Зображення густини (26) згідно з (7) записуємо

$$\chi(z)=\left(1-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}\cdot\frac{b-a}{z+b-a}, \qquad \operatorname{Re} z\geqslant 0. \tag{27}$$

За формулою (8′) на підставі (27) дістаємо функцію розподілу

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\dfrac{b-a}{x+b-a}, & x\geqslant 0\end{cases} \tag{27′}$$

Згортка n-го порядку густини (26) згідно з (10) дорівнює

$$q(t)\Big|_*^{n}=\left(1-\frac{a}{b}\right)^n\cdot\delta(t)+\sum_{k=1}^{n}B\left(k;n,\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{(b-a)^k t^{k-1}e^{-(b-a)t}}{(k-1)!}, \quad t\geqslant 0, \tag{28}$$
$$(0<a<b; \quad n=2,3,\dots)$$

Як бачимо, густина (28) є бернулевою сумішшю густин Ерланга.

б) Суміш сім'ї гама-густин

$$q(t;\ell)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\ell^{b}}{\Gamma(b)}t^{b-1}e^{-\ell t}, & t\geqslant 0,\end{cases} \quad (b>0,\ \ell\geqslant 0) \tag{29}$$

зі змішувальною гама-густиною

$$h(\ell)=\begin{cases} 0, & \ell<0, \\ \dfrac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\,\ell^{\beta-1}e^{-\alpha\ell}, & \ell\geq 0 \quad (\alpha>0,\ \beta>0) \end{cases} \tag{30}$$

за формулою (14) дорівнює

$$r_2(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{\alpha^{\beta}}{B(b,\beta)}\,\dfrac{t^{b-1}}{(\alpha+t)^{b+\beta}}; & t\geq 0 \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ b>0), \end{cases} \tag{31}$$

де

$$B(b,\beta)=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(b+\beta)}$$

Густину (31) назвемо бетадва-густиною. При $\alpha=1,\ b=\frac{m}{2},\ \beta=\frac{n}{2}$, бетадва-густина стає густиною відомого в статистиці розподілу Фішера для частки сум квадратів незалежних однаково нормально розподілених випадкових змінних зі сподіванням нуль (порівн. [4]); m - число ступенів вільності в чисельнику, n - у знаменнику. При $\alpha=\frac{\nu_1}{\nu_2}$, $\beta=\frac{\nu_1}{2}$, $b=\frac{\nu_2}{2}$, бетадва-густина розглядається в [2] . При $b=1,\ \alpha=\lambda,\ \beta=n$, бетадва-густина збігається з густиною, наведеною в [3] .

Початковий момент порядку $k=1,2,\ \ldots$ бетадва-розподілу (31) існує тільки при $k<\beta$ і дорівнює

$$m_k=\alpha^{k}\,\frac{\Gamma(b+k)\,\Gamma(\beta-k)}{\Gamma(b)\,\Gamma(\beta)}, \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ b>0;\ k<\beta;\ k=1,2,\ldots) \tag{32}$$

Заміна змінної $x=\frac{t}{\alpha+t}$ переводить бетадва-густину (31) у відому в статистиці бетаодин-густину

$$r_1(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \quad 1<x, \\ \dfrac{1}{B(b,\beta)}\,x^{b-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1, \quad (b>0,\ \beta>0). \end{cases} \tag{33}$$

в) Суміш сім'ї густин Вейбула

$$q(t,\ell)=\begin{cases} 0 & t<0, \\ a\ell t^{a-1}e^{-\ell t^{a}}, & t\geq 0, \quad (a>0,\ \ell\geq 0) \end{cases} \tag{34}$$

зі змішувальною гама-густиною (30) за формулою (14) дорівнює

$$\tilde{r}_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{a\beta\alpha^{\beta} t^{a-1}}{(\alpha + t^{a})^{\beta+1}}, & t \geqslant 0, \quad (a > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0) \end{cases} \tag{35}$$

Густина (35) зустрічається в статистиці та називається густиною розподілу Берра [7]. Заміна змінної $x = \frac{t^a}{\alpha + t^a}$ переводить густину Берра (35) у бетаодин-густину (33) при $b = 1$. Зворотний перехід від (33) дає густину

$$r_3(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{a\alpha^{\beta}}{B(b,\beta)} \dfrac{t^{ab-1}}{(\alpha + t^{a})^{b+\beta}}, & t \geqslant 0, \ (a>0, b>0, \alpha>0, \beta>0), \end{cases} \tag{36}$$

яку назвемо бетатри-густиною.

Початковий момент порядку $k = 1, 2, \ldots$ бетатри-розподілу (36) існує тільки при $k < a\beta$ і дорівнює

$$m_k = \alpha^{\frac{k}{a}} \frac{\Gamma(b+\frac{k}{a})\Gamma(\beta-\frac{k}{a})}{\Gamma(b)\Gamma(\beta)}, \ (a>0,\ b>0, \alpha>0, \beta>0;\ k<a\beta;\ k=1,2,\ldots) \tag{37}$$

При $a = 1$ бетатри-густина (36) стає бетадва-густиною (31).

Зображення (5) густини (36)

$$\varphi_3(z) = \frac{a}{B(b,\beta)} \cdot \frac{1}{(\alpha z^{a})^{b}} \int_0^{\infty} t^{ab-1}\left(1 + \frac{t^a}{\alpha z^a}\right)^{-b-\beta} e^{-t}\,dt, \ (\operatorname{Re} z > 0). \tag{38}$$

При $a = 1$ (38) записуємо у вигляді

$$\varphi_2(z) = \frac{\Gamma(b+\beta)}{\Gamma(\beta)} (\alpha z)^{\frac{\beta-1}{2}} e^{\frac{\alpha z}{2}} W_{\frac{1}{2}-b-\frac{\beta}{2}, -\frac{\beta}{2}}(\alpha z), \quad \operatorname{Re} z > 0), \tag{39}$$

де

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}} z^{k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} \int_0^{\infty} t^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t}\,dt \tag{40}$$

- функція Віттекера, означена для всіх значень k та m і для всіх значень z, крім дійсних від'ємних [5].

За формулою (8′) при $c = 0$ на підставі (39) одержуємо функцію розподілу

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \dfrac{\Gamma(b+\beta)}{\Gamma(\beta)} (\alpha x)^{\frac{b-1}{2}} e^{\frac{\alpha x}{2}} W_{\frac{1}{2}-b-\frac{\beta}{2}, -\frac{\beta}{2}}(\alpha x), & x > 0. \end{cases} \quad (41)$$

При $b = \beta = 1$ дістаємо

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \alpha x e^{\alpha x}[-Ei(-\alpha x)] = \int_0^\infty \dfrac{e^{-t}dt}{1+\frac{t}{\alpha x}}, & x > 0, \end{cases} \quad (42)$$

де $Ei(z)$ - інтегральна показникова функція (порівн. [1]), а при $\beta = 1-2b$, $0 < b < \frac{1}{2}$ одержуємо

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \dfrac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-2b)} \dfrac{(\alpha x)^{\frac{1}{2}-b}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\alpha x}{2}} K_{-\frac{1}{2}+b}(\alpha x), & x > 0, \end{cases} \quad (43)$$

де $K_\nu(z)$ - модифікована функція Бесселя третього роду або функція Макдональда (порівн. [1]).

Література

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., "Наука", 1967.
2. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., "Наука", 1965.
3. Квіт І. Д. Континуальна згортка. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. П. М., Физматгиз, 1963.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М., "Мир", 1967.
7. Mathematical Reviews, vol. 38, N 3, September, 1969.

УДК 517.917

Л.М.ЛІСЕВИЧ, Б.В.КОВАЛЬЧУК

S^P-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ МАТРИЦІ ТА ЛІНІЙНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З S^P -МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

1. S^P-майже періодичні матриці та їх елементарні властивості

Розглянемо функціональну матрицю $A=[a_{ik}(x)]$, де $a_{ik}(x)$ - сумовані разом з p -м степенем ($p \geqslant 1$) функції в кожному скінченному інтервалі довжини ℓ , і введемо таку норму:

$$\|A\|_S = \sup_x \sum_{i,k} \left\{ \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} |a_{ik}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

Введену норму називатимемо S -нормою, а матриці, для яких існує норма (1.1), - S^P -матрицями.

Означення 1. Матриця $\mathcal{F}(x)=[f_{ik}(x)] (-\infty < x < \infty)$ називається S^P-майже періодичною, якщо всі елементи її $f_{ik}(x)$ є S^P -майже періодичними функціями, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ в кожному інтервалі довжини ℓ існує відносно щільна множина чисел τ (ε , S^P -майже періодів) таких, що

$$\|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty)$$

одночасно для всіх i,k .

Теорема 1.1. Матриця $\mathcal{F}(x)$ є S^P-майже періодична тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина чисел τ таких, що

$$\|\mathcal{F}(x+\tau)-\mathcal{F}(x)\|_S < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{1.2}$$

Доведення. Необхідність. Нехай S^P-майже періодична матриця $\mathcal{F}(x)$ має вимір $m \times n$ і $\varepsilon > 0$ довільне число. Відомо [2] , що для скінченної сукупності S^P -майже періодичних функцій існує відносно щільна множина спільних $\frac{\varepsilon}{mn}$, S^P-майже періодів τ таких, що

$$\|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S < \frac{\varepsilon}{mn} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

для всіх i,k .

Тоді маємо

$$\|\mathcal{F}(x+\tau)-\mathcal{F}(x)\|_S \leq \sum_{i,k} \|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S < \varepsilon \cdot$$

Отже, необхідність доведена.

Достатність. Зі співвідношення

$$\|f_{ik}(x+\tau)-f_{ik}(x)\|_S \leq \|\mathcal{F}(x+\tau)-\mathcal{F}(x)\|_S < \varepsilon$$

випливає, що всі $f_{ik}(x)$ є S^P-майже періодичними функціями, і, отже, $\mathcal{F}(x)$ є S^P-майже періодичною матрицею.

Твердження теореми (1.1) прийматимемо також за означення S^P-майже періодичності матриці.

Користуючись означенням S^P-майже періодичності матриць, можна довести такі їх властивості.

а) Якщо $\mathcal{F}(x)$ - S^P-майже періодична матриця, то $k\cdot\mathcal{F}(x)$, де k - стала, також є S^P-майже періодичною матрицею.

б) Якщо $\mathcal{F}(x)$ і $\Phi(x)$ - S^P-майже періодичні матриці, що допускають додавання, то $\mathcal{F}(x)+\Phi(x)$ також є S^P-майже періодичною матрицею.

в) Якщо $\mathcal{F}(x)$ - S^P-майже періодична матриця, а A - стала матриця, причому такі, що допускають множення, то $A\cdot\mathcal{F}(x)$ також є S^P-майже періодичною матрицею.

г) Якщо $\mathcal{F}(x)$ - S^P-майже періодична матриця, а $\Phi(x)$ - S^q-майже періодична матриця ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), причому такі, що допускають множення, то $\mathcal{F}(x)\cdot\Phi(x)$ є S^1-майже періодичною матрицею.

д) S^P-майже періодична матриця $\mathcal{F}(x)$ обмежена за S-нормою, тобто існує така стала $M>0$, що

$$\|\mathcal{F}(x)\|_S < M$$

е) S^P-майже періодична матриця $\mathcal{F}(x)$ рівномірно неперервна за S-нормою, тобто, яке б не було число $\varepsilon>0$, можна вказати таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для $|h|<\delta$ справедливо

$$\|\mathcal{F}(x+h)-\mathcal{F}(x)\|_S < \varepsilon \quad (-\infty<x<\infty).$$

О з н а ч е н н я 2. Будемо говорити, що послідовність S^P-майже періодичних матриць $\{\mathcal{F}_n(x)\} = \{[f_{ik}^{(n)}(x)]\}$ рівномірно прямує за S -нормою до матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$, якщо послідовність функцій $\{f_{ik}^{(n)}(x)\}$ рівномірно прямує до функції $f_{ik}(x)$ за цією ж нормою.

Т е о р е м а 1.2. Якщо послідовність S^P -майже періодичних матриць $\{\mathcal{F}_n(x)\}$ рівномірно прямує за S -нормою до матриці $\mathcal{F}(x)$, то $\mathcal{F}(x)$ є S^P -майже періодичною матрицею.

Це твердження доводиться аналогічно як відповідне твердження для S^P -майже періодичних функцій [2] .

О з н а ч е н н я 3. Вважатимемо, що матриця $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ має обмежений за S -нормою неозначений інтеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x \mathcal{F}(t)\,dt ,$$

якщо можна вказати таке число $M > 0$, що

$$\|\Phi(x)\|_S < M .$$

Т е о р е м а 1.3. Неозначений інтеграл $\Phi(x) = [\varphi_{ik}(x)]$ від S^P -майже періодичної матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ є обмеженим за S -нормою, якщо функції

$$\varphi_{ik}(x) = \int_a^x f_{ik}(t)\,dt$$

обмежені за цією ж нормою.

Д о в е д е н н я. Нехай матриця $\Phi(x)$ має вимір $m \times n$. За умовою теореми для всіх i, k існують числа M_{ik} такі, що будуть виконуватися нерівності

$$\|\varphi_{ik}(x)\|_S < \frac{M_{ik}}{m \cdot n} .$$

Візьмемо $M = \max_{i,k} M_{ik}$. Тоді маємо

$$\|\Phi(x)\|_S \leq \sum_{i,k} \|\varphi_{ik}(x)\|_S < M ,$$

що й доводить наше твердження.

Т е о р е м а 1.4. Якщо неозначений інтеграл $\Phi(x) = [\varphi_{ik}(x)]$ від S^P -майже періодичної матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ обмежений за S -нормою, то $\Phi(x)$ є майже періодичною матрицею Бора.

Д о в е д е н н я. Зрозуміло, що

$$\|\varphi_{ik}(x)\|_S \leq \|\Phi(x)\|_S ,$$

тобто з обмеженості за S -нормою матриці $\Phi(x)$ випливає обмеженість за цією ж нормою її елементів

$$\varphi_{ik}(x) = \int_a^x f_{ik}(t)\, dt .$$

Тоді на основі теореми про неозначений інтеграл від S^p-майже періодичної функції [1] твердимо, що всі $\varphi_{ik}(x)$ є майже періодичними функціями Бора. Отже, $\Phi(x) = [\varphi_{ik}(x)]$ – майже періодична матриця Бора.

О з н а ч е н н я 4. Матриця $\mathcal{F}(x,y) = [a_{ik}(x,y)]$ називається S^p-майже періодичною по x рівномірно відносно $y \in Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина спільних ε, S^p -майже періодів $\tau = \tau_{\mathcal{F}}(\varepsilon)$ таких, що

$$\|\mathcal{F}(x+\tau, y) - \mathcal{F}(x,y)\|_S < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty)$$

для будь-якого $y \in Y$.

Т е о р е м а 1.5. Якщо для S^p -майже періодичної матриці $\mathcal{F}(x) = [f_{ik}(x)]$ побудувати матрицю

$$\mathcal{F}_h(x) = \left[\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f_{ik}(t)\, dt\right] \qquad (h > 0) ,$$

то

$$\lim_{h \to 0} \|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_h(x)\|_S = 0 \qquad (1.3)$$

рівномірно відносно $x \in (-\infty, \infty)$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_h(x)\|_S \leq \sum_{i,k} \|f_{ik}(x) - f_{ik}(x,h)\|_S ,$$

де

$$\mathcal{F}_h(x) = [f_{ik}(x,h)], \qquad f_{ik}(x,h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f_{ik}(t)\, dt .$$

Але для S^p -майже періодичної функції $f_{ik}(x)$ справедливе співвідношення

$$\lim_{h \to 0} \|f_{ik}(x) - f_{ik}(x,h)\|_S = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

для всіх i, k [1]. Тоді

$$\lim_{h\to 0}\left\| \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_h(x) \right\|_S \le \lim_{h\to 0} \sum_{i,k} \left\| f_{ik}(x) - f_{ik}(x,h) \right\|_S = 0,$$

що й доводить теорему.

2. Майже періодичність розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь з S^P-майже періодичною правою частиною

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} + Ay = f(x), \tag{2.1}$$

де $y = [y_1, \dots, y_n] - (n\times 1)$ - вектор, $A = [a_{ik}]$ - стала $n\times n$ - матриця і $f(x) = [f_1(x), \dots f_n(x)] - S^P$ -майже періодичний ($n\times 1$)-вектор.

Т е о р е м а 2.1. Якщо $f(x) - S^P$-майже періодична матриця з обмеженим за S -нормою неозначеним інтегралом, то обмежений за S -нормою розв'язок системи (2.1) є майже періодичною матрицею Бора.

Д о в е д е н н я. Для доведення теореми використаємо метод Кордуняну [3] зведення системи до трикутного вигляду. За допомогою неособливого перетворення

$$y = Sz \qquad (\det S \neq 0)$$

можна звести матрицю $A = [a_{ik}]$ системи (2.1) до сталої трикутної ($n\times n$)-матриці

$$B = S^{-1} A S = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Тоді система (2.1) набере вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} + a_1 z_1 = \varphi_1(x), \\ \dfrac{dz_2}{dx} + b_{21} z_1 + a_2 z_2 = \varphi_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_n}{dx} + b_{n1} z_1 + b_{n2} z_2 + \dots + a_n z_n = \varphi_n(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Очевидно, що $\varphi(x)=[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)]=S^{-1}f(x)$ є S^P-майже періодичною матрицею з обмеженим за S-нормою неозначеним інтегралом.

Нехай
$$y^{(0)}(x)=[y_1^{(0)}(x),\ldots y_n^{(0)}(x)]$$
є обмежений за S-нормою розв'язок системи (2.1). Зрозуміло, що
$$z^{(0)}(x)=[z_1^{(0)}(x),\ldots,z_n^{(0)}(x)]=S^{-1}y^{(0)}(x)$$
буде обмежений за S-нормою розв'язком трикутної системи (2.2), а тоді й всі функції $z_k^{(0)}(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ обмежені за цією ж нормою.

Покажемо тепер, що всі $z_k^{(0)}(x)$ є майже періодичними функціями Бора. Виходячи з першого рівняння системи (2.2), маємо
$$\frac{dz_1^{(0)}}{dx}+a_1z_1^{(0)}=\varphi_1(x)\,, \tag{2.3}$$
де $\varphi_1(x)$- S^P-майже періодична функція, неозначений інтеграл якої, очевидно, обмежений за S-нормою. А тому, як показано в [1], розв'язок $z_1^{(0)}(x)$ рівняння (2.3) обмежений за S-нормою і є майже періодичною функцією Бора.

З другого рівняння системи (2.2) дістаємо
$$\frac{dz_2^{(0)}}{dx}+a_2z_2^{(0)}=\varphi_2(x)-b_{21}z_1^{(0)}\,, \tag{2.4}$$
де $\varphi_2(x)-b_{21}z_1^{(0)}$ – S^P-майже періодична функція, неозначений інтеграл якої, очевидно, обмежений за S-нормою.

Знову з [1] випливає, що розв'язок $z_2^{(0)}(x)$ рівняння (2.4) обмежений за S-нормою і є майже періодичною функцією Бора. Продовжуючи такі міркування для наступних рівнянь системи (2.2), аналогічно показуємо, що всі $z_k^{(0)}(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ обмежені за S-нормою і є майже періодичними функціями Бора.

Таким чином, розв'язок $z^{(0)}(x)$ системи (2.2) є майже періодичною матрицею Бора. Тоді розв'язок $y^{(0)}(x)$ системи (2.1) також є майже періодичною матрицею Бора. Теорема доведена.

Л і т е р а т у р а

1. К о в а н ь к о О. С., Л і с е в и ч Л. М. Майже періодичність розв'язків деяких диференціальних рівнянь з S^r -майже періодичними правими частинами. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 2. Вид-во Львівського ун-ту, 1965.

2. Л е в и т а н Б. М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.

3. C. C o r d u n e a n u. Functii aproape-periodice. Ed, Acad., RPR, 1961.

УДК 517.946

О.І.БОБИК, Г.П.БОЙКО

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМ

О з н а ч е н н я 1. Еліптичним рівнянням другого порядку, що вироджується на деякій множині G, називається рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x), \qquad (1)$$

де $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqslant 0$ для всіх $\lambda, x \in D$,

причому на множині G ця квадратична форма не строго додатно визначена [1].

Граничним задачам для таких рівнянь присвячено багато робіт [2],[3] та ін. Суттєвим обмеженням у них є умова $C(x) \leq 0$ в області D. Якщо ж $C(x) > 0$ або змінює знак в області D, то попередніми методами не можна встановити коректність досліджуваної задачі. Метод захисної нерівності, розроблений в [4] і ряді інших робіт для випадку, коли $C(x)$ - довільна неперервна функція, дає можливість одержати ефективні ознаки єдиності, а також існування розв'язку першої граничної задачі для рівняння еліптичного типу другого порядку за певних умов на коефіцієнти рівняння та розміри області.

У цій роботі ми встановлюємо достатні ознаки єдиності розв'язку задачі Діріхле для еліптичного рівняння з виродженням всередині області, що виражаються через розміри області, а також через внутрішній діаметр області.

1. Розглянемо рівняння

$$h(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=0 \qquad (2)$$

в опуклій обмеженій області $D\subset R^n$ з досить гладкою границею S, причому $h(x)\geqslant 0$, $h(x)=0$ на множині $D_0\subset D$; матриця $\|a_{ij}(x)\|$ – додатно визначена в D; функції $h(x)$, $a_{ij}(x)$ $/i,j=1,\dots,n/$ – двічі неперервно диференційовані; $b_i(x)$ $/i=1,\dots,n/$ – неперервно диференційовані; $c(x)$ – неперервна в області $D_1\supset D$.

З а д а ч а Д і р і х л е. Знайти розв'язок $u(x)$ рівняння (2), двічі неперервно диференційований в області D, неперервно диференційований, включаючи й границю S, і який задовольняє умову

$$u(x)\big|_S=\mu(x'), \qquad (3)$$

де $\mu(x')$ – довільна неперервна функція на $S\ni x'$.

Справедлива така теорема про захисну нерівність для рівняння (2).

Т е о р е м а 1. Якщо існують неперервні з кусково неперервними похідними в області D функції $B_j(x)$ $/j=1,\dots,n/$, які справджують в області D нерівність

$$h^2(x)\Big[C_0(x)\prod_{l=1}^{n-1}a_{ll}(x)-A_{n-1}^2(x)\prod_{l=1}^{n-2}a_{n-1-l,l}(x)\Big]-A_n^2(x)\prod_{l=1}^{n-1}a_{n-l,l}(x)\geqslant 0, \qquad (4)$$

де

$$C_0(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial B_j}{\partial x_j}-c(x),$$

$$A_{n-1}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial a_{k,n-1}}{\partial x_k}+B_{n-1}(x)-b_{n-1}(x),$$

$$A_n(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x_n}+B_n(x)-b_n(x)$$

то в області D задача Діріхле має не більше одного розв'язку.

Нерівність (4) називається захисною нерівністю для рівняння (2).

Теорема доводиться аналогічно відповідній теоремі [4].

З а у в а ж е н н я. Твердження теореми залишиться правильним, якщо функції $B_j(x)$ $/j=1,\dots,n/$ мають розриви першого роду на $(n-1)$-мірних поверхнях S_k і

$$\sum_{j=1}^{n} B_j(x)\cos(n_k,x_j)\Big|_{S_k}=0, \tag{5}$$

де n_k - внутрішня нормаль до поверхні S_k.

Т е о р е м а 2. Якщо в опуклій обмеженій області D виконується умова

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2>\max_{x\in D}C^*(x), \tag{6}$$

де ℓ_j - довжина максимального з відрізків прямих, паралельних осі x_j (відрізки лежать повністю в області D),

$$C^*(x)=N\left[c(x)-\left(\frac{\partial b_n}{\partial x_n}+\frac{\partial b_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{k,n-1}}{\partial x_k\partial x_{n-1}}\right)\right], \tag{7}$$

$$N=\max\left[\max_{x\in D}\frac{h(x)\prod_{\ell=1}^{n-2}a_{n-1-\ell,\ell}(x)}{\prod_{\ell=1}^{n-1}a_{\ell\ell}(x)},\ \max_{x\in D}\frac{\prod_{\ell=1}^{n-1}a_{n-\ell,\ell}(x)}{\prod_{\ell=1}^{n-1}a_{\ell\ell}(x)}\right], \tag{8}$$

тоді задача Діріхле для рівняння (2) має в області D не більше одного розв'язку.

Д о в е д е н н я. Приймаючи в нерівності (4)

$$A_n(x)=0,\quad A_{n-1}(x)=\frac{\omega_{n-1}(x)}{N},\quad B_\ell(x)=\frac{\omega_\ell(x)}{N},\quad \ell=1,\dots,n-2,$$

де $\omega_\ell(x)$ $/\ell=1,\dots,n-1/$ - функції, які задовольняють усім умовам, накладеним на функції $B_\ell(x)$ $/\ell=1,\dots,n-1/$ в теоремі 1, зводимо її до вигляду

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}-\omega_j^2\right)>C^*(x). \tag{9}$$

Нехай тепер $\ell_j(x)$ - довжина відрізка прямої, паралельної осі x_j, що проходить через точку $x\in D$. Відрізок весь лежить в області D

$(x_1,\dots,x_{j-1},x_j^0,x_{j+1},\dots,x_n)$ – та з двох точок перетину прямої з границею S, для якої $x_j^0 < x_j$ для всіх $x\in D$.

Тоді при

$$\omega_j(x)=\frac{\pi}{\ell_j(x)}\,ctg\,\frac{\pi(x_j-x_j^0)}{\ell_j(x)}$$

із (9) одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{\pi}{\ell_j(x)}\right]^2 > C^*(x)$$

Оскільки $\ell_j=\max\limits_{x\in D}\ell_j(x)$, то з умови (6) випливає, що остання нерівність виконується.

Т е о р е м а 3. Якщо в опуклій обмеженій області D виконується умова

$$\int_D^{(n)}\!\!\cdots\!\int\left\{h(x)\left[\frac{\pi}{\ell_n(x)}\right]^2+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{\pi}{\ell_j(x)}\right]^2-C^*(x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}+\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial x_n}\right)^2}{4h(x)}\right\}dx>0, \qquad (10)$$

то задача Діріхле в області D має не більше одного розв'язку.

Теорема доводиться аналогічно.

2. Нехай $Б_D$ – бісектриса області D. Побудуємо поле векторів $\vec{\beta}$, ортогональне до границі S області D, напрямлене від неї до $Б_D$ з кінцями на $Б_D$. Це поле особливих точок не має. Введемо криволінійні координати точок області $(s,t)=(s_1,\dots,s_{n-1},t)$, де $s_1,\dots,s_{n-1}$ – криволінійні координати поверхні S; t – зміщення всередину області від границі S у напрямі поля $\vec{\beta}$.

Позначимо через $q(s)$ довжину відрізка поля $\vec{\beta}$, який проходить через точку (s,t), через $\ell(s)$ – довжину відрізка поля $\vec{\ell}=\vec{\beta}\sqcap(D\setminus D_0)$.

О з н а ч е н н я 2. Внутрішнім діаметром d області D називається діаметр найбільшої кулі, яку можна помістити в дану область [4]

Очевидно, $2\max\limits_s q(s)=d$, $2\max\limits_s \ell(s)\le d$.

Приймаємо, що $\varphi(s,\ell(s))=\int\limits_t\frac{d\ell}{h}$, $L\left(\frac{d}{2}\right)=\max\limits_s\varphi(s,\ell(s))$.

Т е о р е м а 4. Нехай в опуклій обмеженій області D виконуються умови

1) $\frac{1}{\max\limits_{D} h(x)}\left[\frac{\mu_0 \ln\frac{\mu_1}{\mu_0}}{L\left(\frac{d}{2}\right)}\right]^2 > \max\limits_{D\setminus D_0} C^*(x)$.

де μ_0, μ_1 – перші додатні корені функції Бесселя першого роду порядку $\nu = 0$ і $\nu = 1$ відповідно;

2) $\delta_n(x) \neq 0$ в D_0 або $C^*(x) < 0$ в D_0 ; тоді задача Діріхле для рівняння (2) має в області D не більше одного розв'язку.

Якщо прийняти в (4)

$$A_j(x) = \frac{h(x)\,\omega(s,t)}{N} \cos(t, x_j) ,$$

де $j = 1, \dots, n$, $\omega(s,t)$ – неперервна з кусково-неперервними похідними недодатна функція в області D і перетворюється в нуль на $Б_D$, то прийдемо до нерівності для функції $\omega(s,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\omega) - h\omega^2 > C^*(x) ,$$

яку розв'язуємо, зображуючи функцію $\omega(s,t)$ у вигляді

$$\omega(s,t) = \alpha(s,t)\, \frac{\frac{d}{dt} J_0(\beta(s,t))}{J_0(\beta(s,t))} ,$$

де $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду порядку $\nu = 0$, $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$ – неперервні функції, які визначаються з умов, накладених на функцію $\omega(s,t)$.

З а у в а ж е н н я. Твердження теореми залишається справедливим, якщо поле $\vec{\beta}$ будувати ортогональним не до границі S , а до деякої замкненої поверхні, яка досить точно апроксимує поверхню S .

Л і т е р а т у р а

1. **Б о б и к О. І.** Про єдиність розв'язку першої граничної задачі для рівняння еліптичного типу. Тези доповідей Ш республіканської конференції молодих дослідників. Київ, "Наукова думка", 1966.

2. **И л ь и н А. М.** Эллиптические и параболические уравнения с вырождением. Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат. наук, т. I, 1958, № 2.

3. **И л ь и н А. М.** Эллиптические и параболические уравнения с вырождением. Математический сборник, т. 50/92/, 1960, № 4.

4. С к о р о б о г а т ь к о В. Я. Исследование по качественной теории уравнений с частными производными. Изд-во Львовского ун-та, 1961.
5. С м и р н о в М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., "Наука", 1966.

УДК 51(091)

В.Ф.РОГАЧЕНКО

"STUDIA MATHEMATICA" – ОРГАН ЛЬВІВСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ (1929-1940 рр.)

Серед кількох наукових видань, де періодично друкували свої праці львівські вчені, значне місце посідав журнал "Studia mathematica", який видавався у Львові в 1929-1940 рр. Його засновниками та редакторами були професори Львівського університету, видатні польські математики – Стефан Банах та Гуго Штейнгауз. З 1935 р. на допомогу редакторам був створений редакційний комітет, в який входили учні Штейнгауза і Банаха – Г.Ауербах, С.Мазур та В.Орліч.

Видання у Львові математичного журналу сприяло становленню та зміцненню Львівської математичної школи, в центрі уваги якої були дослідження в галузі функціонального аналізу та його застосувань в різних математичних дисциплінах. Саме ці дослідження львівських математиків, особливо С.Банаха, були значним вкладом у функціональний аналіз, який створювався як окрема математична наука в 20-30 рр.

Всього з 1929 по 1940 р. було видано дев'ять томів журналу, які виходили майже щорічно по 160-260 сторінок у кожному томі. Останній, дев'ятий том, було видано вже після возз'єднання західних областей України з Радянською Україною – у 1940 р. Львівським державним університетом імені І. Франка. Загальний обсяг усіх дев'яти томів становить понад 1800 сторінок, де містилася 161 стаття. Статті друкувалися німецькою, французькою та англійською мовами. У дев'ятому томі до кожної статті додавалося резюме українською мовою.

Перший том журналу за винятком двох праць містив дослідження львівських математиків, що групувалися навколо С.Банаха. Вже з другого тому журнал "Studia mathematica" почав перетворюватись у міжнародний орган, присвячений переважно функціональному аналізу та його застосуванням. На таку спрямованість журналу вказувалося і в редакційних оголошеннях, які друкувалися на обкладинці. У дев'яти томах були опубліковані дослідження 56 авторів, географія їх досить широка - від Москви до Лос-Анджелеса і навіть до Сендая у Японії. Звичайно, більшість статей (біля 100) належала львівським математикам (18 авторів); 26 статей написані десятьма іншими польськими математиками; решту статей надіслали 28 іноземних математиків з 13 країн світу - СРСР, США, Англії, Франції, Німеччини, Голландії, Угорщини тощо.

З радянських математиків свої статті надрукували: М.М.Гюнтер - з теорії інтегральних рівнянь (т. 4), А.М.Колмогоров - з теорії топологічних лінійних просторів (т. 5), Г.М.Фіхтенгольц та Л.В.Канторович - про лінійні операції в просторі обмежених функцій (т. 5) та Д.П.Мільман - з теорії просторів Банаха (т. 9).

Як вже зазначалося, більшість статей, надрукованих в "Studia mathematica" (біля 85%), присвячена функціональному аналізу та його застосуванням, головним чином у теорії функцій дійсного змінного. Наприклад, тільки функціональному аналізу (особливо теорії лінійних нормованих просторів та лінійним операторам і лінійним рівнянням у них) присвячено понад 40 праць (Банах, Мазур, Орліч, Мазуркевич, Сакс, А.М.Колмогоров, Марцинкевич та інші). Застосуванням функціонального аналізу до теорії функцій дійсного змінного було присвячено близько 80 праць. З них половина стосувалася теорії ортогональних систем функцій і ортогональних рядів, зокрема тригонометричних (Банах, Орліч, Штейнгауз, Качмаж, Серпінський, Зігмунд, Марцинкевич, Кац та інші).

Крім статей з цих основних розділів, у журналі надруковано кілька статей з теорії топологічних груп та груп лінійних підстановок (Банах, Улам, Куратовський, Віденгайт, Ауербах), теорії ймовірностей (Штейнгауз, Леві, Бірнбаум), теорії диференціальних та інтегральних рівнянь

(Ніклíборц, Шаудер, Крижанський, М.М.Гюнтер), проблемі трьох тіл гідромеханіці (Ніклíборц, Ауербах).

До найважливіших досліджень у "Studia mathematica" належать: ст С.Банаха "Про лінійні функціонали" (т. 1) та його ж праця "Про ро ність ортогональних рядів" (т. 9), в якій продовжені дослідження Д. шова; велика праця другого засновника журналу Г.Штейнгауса "Зас сування функціонального аналізу до деяких питань теорії функцій дійс го змінного" (т. 1); цикл статей про незалежні функції Г.Штейнгауса т М.Каца (т. 2,6,7), в яких методи теорії ймовірностей застосовуються до теорії ортогональних систем. Ці праці були продовжені Ф.Марцинкевичем та А.Зигмундом (т. 7,9). Цілий цикл статей під загальним заголовком "До теорії ортогональних розкладів" (т. 1,5,6,8) опублікував молодий львівський математик В.Орліч. Тут він на основі праць Банаха в функціонального аналізу продовжив дослідження Г.М.Фіхтенгольца, Сакса, Ріса, Хаара з ортогональних розкладів та ортогональних систем функцій. Стаття львівського математика С.Качмажа "Про збіжність та сумовність ортогональних розкладів" (т. 1) продовжувала дослідження Фішера, Д.Є.Меньшова, А.М.Колмогорова, Орліча. Заслуговують на увагу велика стаття А.Зигмунда "Про ріманову теорію деяких ортогональних систем" (т. 2) та стаття П.Леві "Про ряди, члени яких є незалежними випадковими величинами" (т. 3). В останній продовжуються дослідження О.Я.Хінчина та А.М.Колмогорова в теорії незалежних випадкових величин.

Відзначимо ще цикл цікавих статей Г.Ауербаха під загальною назвою "Про обмежені лінійні групи" (т. 4,5), в яких продовжені дослідження Вейля та Картана, а також велику статтю В.Ніклíборца "Про загальну проблему трьох тіл"(т. 8). Правда, останні праці стоять трохи осторонь основного наукового напрямку журналу.

Як видно навіть з нашого короткого огляду, журнал "Studia mathematica" вже з перших томів мав своє наукове обличчя та зайняв обвідне місце серед інших наукових видань. Його засновники і редактори - Банах та Штейнгаус - зуміли згуртувати міцний авторський колектив, до складу якого входило багато видатних математиків як польських, так і іноземних.

Відзначимо, що видання у Львові цього журналу тривало всього одинадцять років. Воно припинилося у зв"язку з окупацією Львова німецько-фашистськими загарбниками на початку Великої Вітчизняної війни. Під час фашистського режиму не було й мови про його існування. Після війни у зв"язку з виїздом до Польської Народної Республіки основної частини редакційної колегії видання цього наукового журналу у Львові не було продовжено.

Вже у нових умовах народної Польщі, у Вроцлаві, було поновлено видання "Studia mathematica", який став виходити за редакцією Г.Штейнгауза, С.Мазура, Я.Мікусінського, В.Орліча та М.Штарка. Десятий том (перший післявоєнний) вийшов у 1948 р. у Вроцлаві на кошти міністерства вищих шкіл та науки. З 1953 р. журнал видає "Державне наукове видавництво" як один з органів Інституту математики Польської Академії наук (Варшава-Вроцлав). Обсяг став більше 300 сторінок у кожному томі, причому томи почали виходити щорічно, спочатку по два, а потім по три окремих випусками. Основними мовами, якими друкуються статті, стали французька, російська, англійська та німецька. Журнал зберіг свій міжнародний характер, друкуючи праці багатьох математиків світу. Його програма порівняно з довоєнними роками була дещо розширена, бо, як вказано в офіційному оголошенні редакції, журнал публікує праці, що належать до функціонального аналізу, абстрактних методів аналізу та теорії ймовірностей.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО, І.Г.ШАБАТ-ФЕДАК

ЗОВНІШНЯ УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ

Ми розглядаємо тут зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа в тривимірному евклідовому просторі, коли на границі області задана узагальнена функція. Внутрішні узагальнені задачі Діріхле для рівняння Лапласа при $n \geq 2$ і для однорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу з нескінченно-диференційовними коефіцієнтами розглянуті в [2] - [5]. Зовнішня узагальнена задача Діріхле, наскільки нам відомо, ще не вивчалась.

1. Нехай Ω - область у просторі E^3, що лежить зовні замкненої поверхні S з класу C^∞. Вважатимемо, що початок координат перебуває всередині поверхні S. Через $\vartheta(y)$ - позначимо орт зовнішньої нормалі n_y до поверхні S у точці y, S_ε $(0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0)$ - поверхня в Ω, паралельна до поверхні S, $D(S)$ - простір нескінченно-диференційовних (основних) функцій $\varphi(y)$, заданих на S; $D'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) над $D(S)$. Між точками поверхонь S і S_ε можна встановити взаємнооднозначну відповідність $x_\varepsilon = x + \varepsilon\vartheta(x)$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $x \in S$. Функції $\varphi(x)$, $x \in S$ можна означити на S_ε, зносячи їх значення з S на S_ε по спільній нормалі до цих поверхонь у кожній точці, тобто $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, якщо $x_\varepsilon = x + \varepsilon\vartheta(x)$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $x \in S$, при цьому $\varphi(x_\varepsilon) \in D(S_\varepsilon)$. Дію узагальненої функції A на основну функцію φ позначатимемо $A[\varphi]$.

Нехай $F \in D'(S)$, будемо вважати [2], [5], що функція $u(x)$ означена в області Ω набуває на S узагальнених граничних значень F, коли

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = F[\varphi] \quad \text{для кожної } \varphi \in D(S). \tag{1}$$

2. Постановка задачі. Знайти гармонійну функцію $u(x)$ в області Ω, яка на S набуває узагальнених граничних значень F і

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0. \tag{2}$$

Має місце лема 1. Для будь-якої узагальненої функції $A \in D'(S)$, функція

$$u(x) = A\left[\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{(x-y)}\right], \; x \in \Omega,\; y \in S,\; |x-y|^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2$$

рівномірно прямує до нуля на безмежності.

Оскільки функціонал A неперервний і $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|} = 0$, то лема очевидна.

Т е о р е м а 1. Нехай $F \in D'(S)$ і

$$G[g-C_g]=F[\varphi_g]-F[\bar{\varphi}_0]\int\limits_S \frac{\varphi_g(x)}{|x|}\,dS \quad \text{для кожної } g\in D(S), \tag{3}$$

де φ_g - розв'язок інтегрального рівняння

$$2\pi\varphi(y)+\int\limits_S \varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\,d_xS=g(y)-C_g, \quad y\in S, \tag{4}$$

$$C_g=\frac{1}{S}\int\limits_S g(y)\,dS, \quad \bar{\varphi}_0(x)=\varphi_0(x)\Big[\int\limits_S\frac{\varphi_0(x)}{|x|}\,dS\Big]^{-1},$$

S - площа поверхні S , тоді функція

$$u(x)=G\Big[\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\Big]+\frac{1}{|x|}F[\bar{\varphi}_0], \quad x\in\Omega \tag{5}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Те, що функція $u(x)$, означена формулою (5), гармонійна, встановлюється безпосередньою перевіркою, використовуючи лінійність і неперервність функціоналу G . Умова (2) задовольняється з огляду на лему 1. Те, що функція $u(x)$ задовольняє умову (1) визначається безпосередньою перевіркою, використовуючи формули (3), (4), (5), формули стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару і леми 4 і 5 з [2].

Т е о р е м а 2. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле єдиний.

Д о в е д е н н я. Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$ - два розв'язки зовнішньої узагальненої задачі Діріхле, тоді $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ є гармонійна функція в області Ω задовольняє на S умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=0 \quad \text{для кожної } \varphi\in D(S) \tag{6}$$

і рівномірно прямує до нуля на безмежності.

Перейдемо в (6) до інтегрування по поверхні S . Матимемо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_S u_\varepsilon(y)\varphi(y)\,dS=0 \quad \text{для кожної } \varphi\in D(S), \tag{7}$$

$u_\varepsilon(y)=u(y+\varepsilon\nu(y))W_\varepsilon(y)$, $W_\varepsilon(y)$ - якобіан перетворення.

Гармонійну функцію $u(z)$ в Ω можна подати у вигляді

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\cdot\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon+\frac{\alpha}{|z|}, \tag{8}$$

де $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ - розв'язок інтегрального рівняння

$$\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|y_\varepsilon-x_\varepsilon|}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon+\frac{1}{2\pi}u(y_\varepsilon)-\frac{\alpha}{2\pi|y_\varepsilon|} \tag{9}$$

$$\alpha=\int_{S_\varepsilon}u(x_\varepsilon)\overline{\psi}_0(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon,\quad \overline{\psi}_0(x_\varepsilon)=\psi_0(x_\varepsilon)\Big[\int_{S_\varepsilon}\frac{\psi_0(y_\varepsilon)}{|y_\varepsilon|}\,dS_\varepsilon\Big]^{-1};$$

$\psi_0(x_\varepsilon)$ - нетривіальний розв'язок однорідного інтегрального рівняння транспонованого до рівняння (9).

Підставляючи розв'язок інтегрального рівняння (9) в (8), після ряду перетворень одержимо

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{S}u_\varepsilon(y)\varphi_\varepsilon(z,y)\,d_yS, \tag{10}$$

де

$$\varphi_\varepsilon(z,y)=\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-y-\varepsilon\nu(y)|}-\int_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y+\varepsilon\nu(y))\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon+$$
$$+\psi_0(y+\varepsilon\nu(y))\int_{S_\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\frac{1}{|y_\varepsilon|}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon\,d_{y_\varepsilon}S_\varepsilon-$$
$$-\psi_0(y+\varepsilon\nu(y))\int_{S_\varepsilon}\frac{1}{|x_\varepsilon|}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S+\psi_0(y+\varepsilon\nu(y))\frac{1}{|z|},\ z\in\Omega,\ y\in S,$$

$\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)$ - резольвента ядра інтегрального рівняння (9)

$$\varphi_\varepsilon(z,y)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\varphi(z,y)\ \in D(S),\quad z\in\Omega,\ y\in S,$$

отже, згідно з лемою з [1] стор. 95 з (6) і (10) одержуємо, що $u(z)=0$. Оскільки z - довільна точка області Ω, то $u(z)\equiv 0$, $u_1(z)\equiv u_2(z)$. Теорема доведена.

Література

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.

2. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле. ДАН УРСР, 1966, № 7.

3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

4. Рогожин В.С., Данко С.П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. - "Дифференциальные уравнения", том УП, 1971, № 3.

5. E. Samydt, L'anicite des solutions d'un probleme de Dirichlet generalise. Atti della Acead. Nas. Lincei., Rend., Cl. sci. fis. mat. e natur., 33, 1962-1963, N 6.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО, О.А.ЯКОБЧУК

ЗОВНІШНЯ УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА

У цій роботі розглядається зовнішня задача Неймана для рівняння Лапласа у тривимірному евклідовому просторі, коли на границі області задано узагальнену функцію. Внутрішні узагальнені задачі Неймана для рівняння Лапласа при $n \geqslant 2$ і для однорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу з нескінченно-диференційовними коефіцієнтами розглянуті в [2], [5], [6]. Зовнішня задача Неймана, наскільки нам відомо, ще не розглядалась.

Нехай маємо позначення, введені в статті [4].

Постановка задачі. Знайти гармонійну функцію $u(x)$ в області Ω, нормальна похідна якої набуває на S узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$ і

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \qquad (1)$$

Має місце лема 1. Для будь-якої узагальненої функції $T \in D'(S)$ функція $u(x) = T\left[\frac{1}{|x-y|}\right]$, $x \in \Omega$, $y \in S$, $|x-y|^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$ рівномірно прямує до нуля на безмежності.

Оскільки функціонал T неперервний і $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x-y|}=0$, то лема очевидна.

Т е о р е м а 1. Нехай $F\in D'(S)$ і $G[g]=F[\varphi_g]$ для кожної $g\in D(S)$, де φ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$-2\pi\varphi(y)+\int\limits_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}\,d_xS=g(y),\quad y\in S, \tag{2}$$

тоді функція
$$u(x)=G\left[\frac{1}{|x-y|}\right],\quad x\in\Omega \tag{3}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Д о в е д е н н я. Внаслідок лінійності і неперервності функціоналу G, $\Delta u(x)=G\left[\Delta_x\frac{1}{|x-y|}\right]=0$, $x\in\Omega$. Отже, $u(x)$ – гармонійна функція в Ω. Покажемо, що нормальна похідна функції $u(x)$ набуває на S узагальнених значень $F\in D'(S)$. Дійсно

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}G\left[\frac{1}{|x_\varepsilon-y|}\right]\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon=$$

внаслідок леми 5 з [3]

$$=G\left[\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|x_\varepsilon-y|}\varphi(x_\varepsilon)\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon\right]=$$

згідно з формулами стрибка потенціалу подвійного шару, леми 1 з [2] і умов теореми одержуємо

$$=G\left[-2\pi\varphi(y)+\int\limits_S\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}\varphi(x)\,d_xS\right]=F[\varphi].$$

Умова (1) задовольняється згідно з лемою 1.

Т е о р е м а 2. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Неймана єдиний.

Д о в е д е н н я. Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два розв'язки задачі, тоді функція $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ є гармонійна в Ω, рівномірно прямує до нуля на безмежності і

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon=0 \qquad \text{для кожної } \varphi\in D(S) \quad (4)$$

У (4) перейдемо до інтегрування по поверхні S , одержимо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S} v_\varepsilon(y)\varphi(y)\,dS=0 \qquad \text{для кожної } \varphi\in D(S), \quad (5)$$

де $v_\varepsilon(y)=\frac{\partial}{\partial n_y}u(y+\varepsilon\nu(y))W_\varepsilon(y)$, $W_\varepsilon(y)$ - якобіан перетворення.

Гармонійну функцію $u(z)$ в області Ω можна подати у вигляді

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon, \quad (6)$$

де $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ - розв'язок інтегрального рівняння

$$-2\pi\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)+\int_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{1}{|x_\varepsilon-y_\varepsilon|}\,d_{y_\varepsilon}S_\varepsilon=\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}u(x_\varepsilon),\quad x_\varepsilon\in S_\varepsilon \quad (7)$$

Підставляємо розв'язок $\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)$ в (6), після ряду перетворень одержуємо

$$u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{S}v_\varepsilon(y)\varphi_\varepsilon(z,y)\,d_yS, \quad (8)$$

де

$$\varphi_\varepsilon(z,y)=\frac{1}{|z-y-\varepsilon\nu(y)|}+\int_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y+\varepsilon\nu(y))\frac{1}{|z-x_\varepsilon|}\,d_{x_\varepsilon}S_\varepsilon,$$

$\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)$ - резольвента ядра інтегрального рівняння (7),

$$\varphi_\varepsilon(z,y)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\varphi(z,y)\in D(S),\quad z\in\Omega,\quad y\in S,$$

Отже, внаслідок леми в [1] (стор. 95) з (5) і (8) одержуємо $u(z)=0$. Оскільки z - довільна точка в області Ω , то $u(z)\equiv 0$, тобто $u_1(z)\equiv u_2(z)$. Теорема доведена.

Література

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.

2. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4, 1969.

3. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. ДАН УРСР, 1966, № 7.

4. Гупало Г.-В.С., Шабат-Федак І. Г. Про зовнішню узагальнену задачу Діріхле. У цьому збірнику.

5. Рогожин В. С., Данко С. П. О трех подходах к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. -"Дифференциальные уравнения", том УП, 1971, № 3.

6. Z. Szmydt. Sur un probleme de Neumann generalise. Ann. Polon. Math. XV, 1964, N 3.

УДК 517.946

С.П.ЛАВРЕНЮК, Є.М.ПАРАСЮК

ІНТЕГРАЛЬНІ ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ МЕТАГАРМОНІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Нехай

$$\Phi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-r\lambda t}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

головний елементарний розв'язок рівняння

$$\Delta u-\lambda^2 u=0, \tag{1}$$

де стала $\lambda>0$, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; Δ - оператор Лапласа.

Під метагармонійним потенціалом простого шару, що індукується кривою S з заданою густиною $\omega(x,y)$, розумітимемо функцію

$$u(x,y)=\int_S \omega(\xi,\eta)\Phi(r)dS. \tag{2}$$

Нехай криві S_1, S_2, що індукують потенціали $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, лежать у колі радіуса $R<1$ і задаються в полярних координатах відповідно у вигляді

$$\rho=f_1(\varphi), \quad \rho=f_2(\varphi).$$

Позначимо через S^e, S^i, S_1^e, S_2^e, S_1^i, S_2^i криві

$$\begin{aligned} &\rho = f^e(\varphi) = \max_{j=1,2}[f_j(\varphi)], \\ &\rho = f^i(\varphi) = \min_{j=1,2}[f_j(\varphi)], \\ &S_1^e = S^e \cap S_1,\ S_2^e = S^e \setminus S_1^e,\ S_j^i = S^i \cap S_j \quad (j=1,2), \end{aligned} \tag{3}$$

а через $\Lambda_K(B,L,a)$ множину кривих із класу $\Lambda_K(B,L)$ [1], для яких радіус d кола Ляпунова задовольняє нерівність $d > a$.

Т е о р е м а. Нехай криві S_j $(j=1,2) \in \Lambda_2(B,L,a)$, функції $\omega_j(x,y)$ $(j=1,2)$ додатні і належать до класу $H(1,A,L)$ [1] в колі $D_R(x^2+y^2 \leq R^2)$. Якщо

$$|u_1(x,y) - u_2(x,y)| \leq \varepsilon, \qquad (x,y) \in K,$$

де K – дуга кола одиничного радіуса, то справедлива оцінка

$$\int_{S_2^e} |\omega_2| ds + \int_{S_1^e} |\omega_1| ds - \int_{S_2^i} |\omega_2| ds - \int_{S_1^i} |\omega_1| ds \leq \frac{C_1}{n}, \tag{4}$$

де число n визначається зі співвідношення

$$\frac{1}{n^3} \leq |\ln \varepsilon|^{-C_2} \leq \frac{1}{n^2},$$

Сталі C_1, C_2 залежать від A, B, R, K, a.

Перш ніж доводити теорему, сформулюємо лему. Позначимо через

$$u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$$

Л е м а. Якщо криві S_j і функції $\omega_j(x,y)$, $u_j(x,y)$ $(j=1,2)$ задовольняють умовам наведеної вище теореми, то справедлива оцінка

$$|u(x,y)| + |\operatorname{grad} u(x,y)| \leq C_4 |\ln \varepsilon|^{-C_3}, \quad (x,y) \in S^e, \tag{5}$$

де C_3, C_4 – деякі сталі, що залежать від A, B, R, K.

Сформульована лема доводиться аналогічно до леми 1 [2] ст. 78.

Д о в е д е н н я т е о р е м и. Легко показати, що, як і для гармонічних функцій, справедлива формула

$$\int_{S_1} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2} \omega_2 v\,ds = \int_{S^e} \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right] ds \quad , \tag{6}$$

де $v(x,y)$ – розв'язок рівняння (1), який має перші неперервні похідні на S^e, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_e}{\partial n}$.

Позначимо через $\omega^e(x,y)$ функцію

$$\omega^e(x,y) = \begin{cases} \omega_1(x,y), & (x,y) \in S_1^e \\ -\omega_2(x,y), & (x,y) \in S_2^e \end{cases} .$$

У кожній точці кривої S^e , де $\omega^e(x,y)$ змінює знак, проведемо коло радіуса δ . Позначимо через $\bar{S}^e$ частину кривої S^e , яка лежить всередині всіх побудованих кіл, через S^{e+} – частину кривої $S^e \setminus \bar{S}^e$ в точках якої $\omega^e(x,y) \geq 0$, через S^{e-} – частину кривої $S^e \setminus \bar{S}^e$ в точках якої $\omega^e(x,y) < 0$.

Визначимо в області, обмеженій кривою S^e , функцію $v(x,y)$, яка задовольняє рівнянню (1) і крайовим умовам

$$v(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in S^{e+} , \\ -1, & (x,y) \in S^{e-} , \\ \gamma(x,y), & (x,y) \in \bar{S}^e \end{cases} \tag{7}$$

Тут функція $\gamma(x,y)$ така, що

а) $-1 \leq \gamma(x,y) \leq 1$; б) $v(x,y) \in H(2,c,\alpha)$.

Перепишемо ліву частину (6)

$$\int_{S_1} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2} \omega_2 v\,ds = \int_{S^{e+}} \omega^e v\,ds + \int_{S^{e-}} \omega^e v\,ds + \tag{8}$$

$$+ \int_{\bar{S}^e} \omega^e v\,ds + \int_{S_1^i} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2^i} \omega_2 v\,ds .$$

Враховуючи (7), одержимо оцінку

$$\int_{S^{e+}} \omega^e v\,ds + \int_{S^{e-}} \omega^e v\,ds + \int_{S_1^i} \omega_1 v\,ds - \int_{S_2^i} \omega_2 v\,ds \geq$$

$$\geq \int_{S^{e+}} |\omega^e|\,ds + \int_{S^{e-}} |\omega^e|\,ds - \int_{S_1^i} |\omega_1|\,ds - \int_{S_2^i} |\omega_2|\,ds . \tag{9}$$

З умов теореми 1 (7) випливає оцінка

$$\left|\iint_{S^e} \omega^e v\, ds\right| \leqslant C_5 \delta . \tag{10}$$

Оцінимо праву частину в рівності (6). Згідно з (5) і (7) одержимо оцінку

$$\left|\iint_{S^e} \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right] ds\right| \leqslant C_6 \frac{|\ln\varepsilon|^{-C_3}}{\delta} . \tag{11}$$

Враховуючи (6), (8)-(11), маємо

$$\int_{S_2^e} |\omega_2|\, dS + \int_{S_1^e} |\omega_1|\, ds - \int_{S_2^i} |\omega_2|\, ds - \int_{S_1^i} |\omega_1|\, ds \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant C_7 \frac{|\ln\varepsilon|^{-C_3}}{\delta} + C_8 \delta$$

Прийнявши в (12)

$$\delta = \frac{1}{n} ,$$

де число n визначається зі співвідношень,

$$\frac{1}{n^3} \leqslant |\ln\varepsilon|^{-C_3} \leqslant \frac{1}{n^2} \tag{13}$$

одержимо оцінку (4).

З доведеної теореми легко одержуємо наслідок.

Наслідок. Якщо в теоремі $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv const$ і криві S_1, S_2 опуклі, то справедлива оцінка

$$|f_1(\varphi) - f_2(\varphi)| \leqslant \frac{C_9}{\sqrt{n}} ,$$

де число n визначається зі співвідношень (13).

Література

1. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гостехиздат, 1953.

2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.

УДК 517.512

Г.П.ГУБАНОВ, Б.В.КОВАЛЬЧУК

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЗРІЗАНИМИ СЕРЕДНІМИ ВІД ПОЛІНОМІВ, ЩО НАЙКРАЩІ У ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ РІВНОВІДДАЛЕНИХ ТОЧОК

Нехай H_ω є клас неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які задовольняють умову $|f(x_1)-f(x_2)| \leq \omega(|x_1-x_2|)$, де $\omega(z)$ – заданий модуль неперервності. Якщо $\omega(z)$ задовольняє додатково нерівності $\omega(x_1)+\omega(x_2) \leq 2\omega\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, то його називатимемо опуклим. У випадку $\omega(z)=Mz^\alpha$, $0<\alpha\leq 1$ відповідний клас позначимо через MH^α.

Нехай

$$T_{nq}(f;x)=\frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{2nq} f(x_k)D_n(x-x_k), \qquad (1)$$

де $D_n(t)$ – ядро Діріхле, тригонометричний поліном $(n-1)$-го порядку, найліпший у заданій системі рівновіддалених точок $x_k=\frac{k\pi}{nq}$, $k=1,2\dots,2nq$; $q\geq 1$. Розглянемо зрізані середні суми від поліномів (1), які мають вигляд

$$\sigma_{nq,p}(f;x)=\frac{1}{nq(p+1)}\sum_{k=1}^{2nq} f(x_k)\sin\frac{2n-p-1}{2}(x-x_k)\sin\frac{p+1}{2}(x-x_k)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}(x-x_k). \qquad (2)$$

При $q=1$ поліноми (1) і (2) ми вивчали раніше в [2-5].

Позначимо через $E_{\sigma_{np,q}}(f;x;H_\omega)$ верхню межу відхилень функції $f(x)$ від поліномів (2), поширену на весь клас H_ω, тобто

$$E_{\sigma_{nq,p}}(f;x;H_\omega)=\sup_{f(x)\in H_\omega}|f(x)-\sigma_{nq,p}(f;x)|.$$

Має місце така теорема.

Т е о р е м а 1. Якщо $f(x)\in H_\omega$, то при всіх $0\leq p\leq\frac{n}{2}$ справедлива асимптотична рівність

$$E_{\sigma_{nq,p}}(f;x;H_\omega)=\frac{\theta_n}{\pi q}\ln\frac{n}{p+1}K_n(x;q)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$K_n(x;q)=|\sin nx|\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1+(-1)^q}{2}|\cos nx|\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)+$$

$$+2\left\{|\sin nx|\sum_{\mu=1}^{s}\cos\frac{\pi\mu}{q}\,\omega\left[\frac{2\pi}{qn}\left(\frac{q}{2}-\mu\right)\right]+|\cos nx|\sum_{\mu=1}^{s}\omega\left(\frac{2\pi\mu}{qn}\right)\sin\frac{\pi\mu}{q}\right\},$$

$s=\left[\frac{q-1}{2}\right]$, причому у випадку опуклого модуля неперервності $\frac{1}{2}\le\theta_n\le 1$; $\theta_n=1$ при $q=1$ для будь-якого модуля неперервності.

При $p=0$ поліноми (2) перетворюються в поліноми (1), тому з теореми 1 випливає оцінка відхилення функцій класу H_ω від поліномів (1).

Т е о р е м а 2. Якщо $f(x)\in H_\omega$, то для відхилення функції $f(x)$ від поліномів (1) справедлива рівність

$$E_{T_{nq}}(f;x;H_\omega)=\frac{\theta_n}{\pi q}\ln n\cdot K_n(x,q)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3}$$

де $K_n(x;q)$ визначається так, як і в теоремі 1.

З а у в а ж е н н я 1. При $q=1$, $p=0$ з оцінки (3) випливає оцінка

$$E_{T_n}(f;x;H_\omega)=\frac{1}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\ln n+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

одержана в [6] .

З а у в а ж е н н я 2. У випадку $\omega(z)=Mz^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, при $q=1$ рівність (3) перетворюється в асимптотичну рівність

$$E_{\sigma_{n,p}}(f;x;MH^\alpha)=\frac{M|\sin nx|}{\pi^{1-\alpha}n^\alpha}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

що наведена в роботі [5] .

При доведенні теореми 1 ми спираємося на деякі результати робіт [2-5], а також використовуємо метод, застосований в [1] при доведенні теореми, яка аналогічна теоремі 1 для поліномів найкращого (квадратичного) наближення в заданій системі точок.

Л і т е р а т у р а

1. В о р о б ь е в а М. А. Приближение функции с заданным модулем непрерывности некоторыми тригонометрическими полиномами. - "Известия вузов", математика, 1970, № 6.

2. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні неперервних періодичних функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. Друга наукова конференція молодих математиків України. Київ, "Наукова думка", 1966.

3. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні неперервних періодичних функцій сумами типу Бернштейна. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 3. Вид-во Львівського ун-ту, 1967.

4. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 4. Вид-во Львівського ун-ту, 1969.

5. К о в а л ь ч у к Б. В., Г у б а н о в Г. П. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, найкращих у заданій системі точок. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. І. Вид-во Львівського ун-ту, 1965.

6. О л о в я н и ш н и к о в В. М. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. ДАН СССР, т. 70, 1950.

УДК 517.946

В.Г.КОСТЕНКО, Р.В.СТАСЕНКО

КЛАСИФІКАЦІЯ ЧОТИРИЧЛЕННИХ ГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ

Щоб знайти всі класи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, що інтегруються в замкнутій формі, доцільно спочатку провести класифікацію чотиричленних груп перетворень.

Нехай u_1, u_2, u_3, u_4 - базисні оператори чотиричленної групи. Вони утворюють шість різних (без врахування порядку операторів) дужок Пуассона. Тому, оскільки розмірність першої похідної групи (підгрупи, утвореної дужками Пуассона) не може бути більшою розмірності вихідної групи, вважаємо, що послідовно від двох до п'яти дужок Пуассона лінійно залежні від інших з шести різних.

Дослідження всіх можливих комбінацій для груп, першу похідну групу яких ми вважали чотиричленною, привело до висновку, що не існує жодної чотиричленної групи перетворень, перша похідна група якої – чотиричленна.

При визначенні основних типів названих груп, перша похідна група яких тричленна, застосовували таку схему дослідження: відомо, що кожна дужка Пуассона операторів групи перетворень є лінійною комбінацією тих же самих операторів і, крім того, оператори групи задовольняють тотожність Якобі. Нехай, наприклад,

$$(u_1 u_2) \equiv u_1, \quad (u_1 u_4) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i u_i, \quad (u_2 u_4) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i u_i, \quad (u_1 u_3) \equiv 0, \quad (u_2 u_3) = 0, \quad (u_3 u_4) = 0 \qquad (1)$$

де α_i, β_i – довільні поки що не визначені сталі в сукупності відмінні від нуля. Для u_1, u_2, u_3, u_4 мають місце чотири різні тотожності Якобі

$$((u_i u_k) u_\ell) + ((u_k u_\ell) u_i) + ((u_\ell u_i) u_k) \equiv 0 \qquad (i, k, \ell = 1, \dots, 4; \quad i \neq k \neq \ell) \qquad (2)$$

Підставляючи (1) у (2), лише в одному випадку одержуємо залежність

$$(u_1 u_4) + \sum_{i=1}^{4} \beta_i (u_i u_1) - \sum_{i=1}^{4} \alpha_i (u_i u_2) \equiv 0, \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{4} \alpha_i u_i - \beta_2 u_1 - \beta_4 \sum_{i=1}^{4} \alpha_i u_i - \alpha_1 u_1 + \alpha_4 \sum_{i=1}^{4} \beta_i u_i \equiv 0,$$

звідки внаслідок лінійної незалежності операторів $u_1, \dots, u_4$ маємо

$$\alpha_4 = 0, \quad \alpha_1 \beta_4 + \beta_2 = 0, \quad \alpha_2 (1 - \beta_4) = 0, \quad \alpha_3 (1 - \beta_4) = 0,$$

що дає:

1) $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, тоді $(u_1 u_4) \equiv c(u_1 u_2)$ (суперечить припущенню);
2) $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$, тоді $\beta_4 = 1$, $\beta_2 = -\alpha_1$;
3) $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, тоді $\beta_4 = 1$, $\beta_2 = -\alpha_1$;
4) $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$, тоді $\beta_4 = 1$, $\beta_2 = -\alpha_1$

Для прикладу проаналізуємо випадок, коли $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$. Врахувавши значення α_i, β_i, матимемо

$$(u_1u_2)\equiv u_1,\quad (u_1u_4)\equiv\sum_{i=1}^{3}\alpha_i u_i,\quad (u_2u_4)\equiv\beta_1u_1-\alpha_1u_2+\beta_3u_3+u_4, \tag{3}$$
$$(u_1u_3)\equiv 0,\quad (u_2u_3)\equiv 0,\quad (u_3u_4)\equiv 0.$$

Дальше зведення групи до канонічного виду виконується, якщо це можливо, за допомогою спеціального вибору базисних операторів цієї групи. Нехай $u_4'\equiv u_4+\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3$, де λ_i – довільні сталі. Підставляючи u_4' в (3), одержимо

$$(u_3u_4')\equiv(u_3u_4)+\lambda_1(u_3u_1)+\lambda_2(u_3u_2)+\lambda_3(u_3u_3)\equiv 0,\quad (u_1u_4')\equiv(\alpha_1+\lambda_2)u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3,$$
$$(u_2u_4')\equiv(\beta_1-\lambda_1)u_1-\alpha_1u_2+\beta_3u_3+u_4\equiv(\beta_1-2\lambda_1)u_1+(\alpha_1+\lambda_2)u_2+(\beta_3-\lambda_3)u_3+u_4'.$$

Приймемо $\lambda_1=\frac{1}{2}\beta_1$, $\lambda_2=-\alpha_1$, $\lambda_3=\beta_3$, тоді маємо

$$(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4')\equiv u_4',\ (u_1u_4')\equiv\alpha_2u_2+\alpha_3u_3,\ (u_1u_3)\equiv 0,\ (u_2u_3)\equiv 0,\ (u_3u_4')\equiv 0.$$

Розглянувши всі можливі випадки аналогічно попередньому, встановлюємо 24 канонічні форми чотиричленних груп перетворень, перша похідна група яких є тричленною (табл. 1).

За тією ж схемою знаходимо 66 типів чотиричленних груп перетворень, перша похідна група яких двочленна і 6 типів чотиричленних груп, перша похідна група яких одночленна /відповідно таблиці 2 і 3/.

П р и м і т к а. Розглядаються шість різних дужок Пуассона. Якщо в типах груп дужка Пуассона не вказана, то вона – тотожний нуль.

Т а б л и ц я 1

1) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_2+u_3;$

2) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_2;$

3) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_3;$

4) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_2+u_4;$

5) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_2;$

6) $(u_1u_2)\equiv u_1,\ (u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_4;$

7) $(u_1u_3)\equiv u_1,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_1u_4)\equiv u_2+u_3;$

13) $(u_2u_3)\equiv u_2,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_2u_4)\equiv u_1+u_3,$

14) $(u_2u_3)\equiv u_2,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_2u_4)\equiv u_1;$

15) $(u_2u_3)\equiv u_2,\ (u_3u_4)\equiv u_4,\ (u_2u_4)\equiv u_3;$

16) $(u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_2u_4)\equiv -u_4,\ (u_3u_4)\equiv u_1+u_2;$

17) $(u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_2u_4)\equiv -u_4,\ (u_3u_4)\equiv u_1;$

18) $(u_2u_3)\equiv u_3,\ (u_2u_4)\equiv -u_4,\ (u_3u_4)\equiv u_2;$

19) $(u_1u_4)\equiv u_1,\ (u_3u_4)\equiv -u_3,\ (u_1u_3)\equiv u_2+u_4;$

8) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_4)\equiv u_2$; 20) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_1u_3)\equiv u_2$;

9) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_4)\equiv u_3$; 21) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_1u_3)\equiv u_4$;

10) $(u_1u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv -u_4$, $(u_3u_4)\equiv u_1+u_2$, 22) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_2u_3)\equiv u_1+u_4$;

11) $(u_1u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv -u_4$, $(u_3u_4)\equiv u_1$; 23) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_2u_3)\equiv u_1$,

12) $(u_1u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv -u_4$, $(u_3u_4)\equiv u_2$, 24) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv -u_3$, $(u_2u_3)\equiv u_4$

Таблица 2

1) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_1+u_4$;

2) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_1$;

3) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_4$,

4) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_1+u_4$;

5) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_1$;

6) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_4$;

7) $(u_1u_4)\equiv u_1$; $(u_2u_3)\equiv u_2+u_3$;

8) $(u_1u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv u_2+u_3$;

9) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_1+u_3$;

10) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_1$;

11) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_3$;

12) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_1+u_3$;

13) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_1$;

14) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_3$,

15) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_3+u_4$;

16) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_3$;

17) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4$,

18) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv u_2+u_4$;

34) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv \alpha_3u_3$, $\alpha_3\neq 0$, $\alpha_3\neq 1$;

35) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv u_1$;

36) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv \alpha_1u_1$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_1\neq 1$;

37) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_3$;

38) $(u_2u_4)\equiv u_2$, $(u_1u_4)\equiv u_1$;

39) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv \alpha_1u_1$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_1\neq 1$,

40) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_2$,

41) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_1u_4)\equiv u_1$,

42) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv \alpha_2u_2$; $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_2\neq 1$,

43) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv u_1$;

44) $(u_3u_4)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv u_2$;

45) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv \alpha_4u_4$; $\alpha_4\neq 0$, $\alpha_4\neq -1$;

46) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv u_3$;

47) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv u_1-u_4$,

48) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv \alpha_3u_3$; $\alpha_3\neq 0$, $\alpha_3\neq -1$;

49) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv u_4$;

50) $(u_1u_2)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv u_1-u_3$,

51) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_1u_4)\equiv \alpha_4u_4$; $\alpha_4\neq 0$, $\alpha_4\neq -1$,

19) $(u_1u_3)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv u_2+u_4$;

20) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv\alpha_2u_2$; $\alpha_2\neq 0, \alpha_2\neq 1$;

21) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_2u_3)\equiv u_4$;

22) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv\alpha_1u_1$; $\alpha_1\neq 0, \alpha_1\neq 1$;

23) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_4$;

24) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_1u_3)\equiv u_1$;

25) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv\alpha_4u_4$; $\alpha_4\neq 0, \alpha_4\neq 1$;

26) $(u_2u_3)\equiv u_3$, $(u_2u_4)\equiv u_1$;

27) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv\alpha_2u_2$; $\alpha_2\neq 0, \alpha_2\neq 1$;

28) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_2u_4)\equiv u_3$;

29) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv\alpha_3u_3$; $\alpha_3\neq 0, \alpha_3\neq 1$;

30) $(u_1u_4)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_2$;

31) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv\alpha_3u_3$; $\alpha_3\neq 0, \alpha_3\neq 1$;

32) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv u_1$;

33) $(u_2u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv u_3$;

52) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_1u_4)\equiv u_2$;

53) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_1u_4)\equiv u_3-u_4$;

54) $(u_1u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv\alpha_3u_3$; $\alpha_3\neq 0, \alpha_3\neq 1$;

55) $(u_1u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_2$;

56) $(u_1u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_3+u_4$;

57) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv u_1$;

58) $(u_2u_3)\equiv u_2$, $(u_3u_4)\equiv u_2-u_4$;

59) $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv u_2$;

60) $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv u_1$;

61) $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_2u_3)\equiv -u_2+u_4$;

62) $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv u_2$;

63) $(u_3u_4)\equiv u_4$, $(u_1u_3)\equiv -u_1+u_4$;

64) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4$;

65) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_2$;

66) $(u_1u_3)\equiv u_1$, $(u_3u_4)\equiv u_4-u_4$.

Таблица 3

1) $(u_1u_2)\equiv u_1$; 3) $(u_1u_4)\equiv u_1$; 5) $(u_2u_4)\equiv u_1$;

2) $(u_1u_3)\equiv u_1$; 4) $(u_2u_3)\equiv u_1$; 6) $(u_3u_4)\equiv u_1$.

Литература

1. S. Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.946

В.Г.КОСТЕНКО, І.І.ЛИТВИН

ГРУПОВІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯННЯ ПЛАСТИЧНОСТІ

Бігармонійні розв'язки рівняння пластичності

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-4K^2=0, \tag{1}$$

де K – стала, досліджувались в [2].

У нашій роботі ми знаходимо основну групу перетворень рівняння (1), що дало можливість одержати в явному вигляді деяку сукупність його розв'язків, серед яких є і не бігармонійні. Під час визначення розв'язків рівняння (1) використана методика С. Лі [3] і Л.В.Овсянникова [1].

Нехай

$$XF=\xi(x,y,u)\frac{\partial F}{\partial x}+\eta(x,y,u)\frac{\partial F}{\partial y}+\zeta(x,y,u)\frac{\partial F}{\partial u} \tag{2}$$

інфінітезімальний оператор шуканої групи перетворень, яка залишає рівняння (1) інваріантним. Використовуючи ознаку Лі інваріантності диференціальних рівнянь відносно груп перетворень, одержимо визначальну систему рівнянь у частинних похідних для знаходження коефіцієнтів ξ, η, ζ оператора (2)

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial \xi}{\partial u}-\frac{\partial \eta}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial \zeta}{\partial u}-2\frac{\partial \xi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial u}-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}=0,\\ 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\partial u}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=0,\qquad 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial u}-\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}=0,\end{gathered} \tag{3}$$

звідки

$$\xi(x,y,u)=\alpha_1 y+\alpha_2,\quad \eta(x,y,u)=-\alpha_1 x+\alpha_3,$$
$$\zeta(x,y,u)=\beta_1(x^2+y^2)+\beta_2 x+\beta_3 y+\beta_4 .$$

Отже, інфінітезімальні оператори групи перетворень рівняння (1) мають вигляд

$$X_1F=y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y},\quad X_2F=\frac{\partial F}{\partial x},\quad X_3F=\frac{\partial F}{\partial y},\quad X_4F=\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{4}$$

$$X_5F=(x^2+y^2)\frac{\partial F}{\partial u},\quad X_6F=x\frac{\partial F}{\partial u},\quad X_7F=y\frac{\partial F}{\partial u}.$$

довільна лінійна комбінація операторів (4) є також інфінітезімальним оператором цієї групи перетворень. Як відомо [1], розв'язки диференціальних рівнянь, інваріантних відносно заданої групи перетворень, належать інваріантним многовидам цієї групи; а неособливі інваріантні многовиди можна зобразити у вигляді

$$\Phi(J_1, \dots, J_e) = 0, \tag{5}$$

де $J_1, \dots, J_e$ – повний набір функціонально незалежних інваріантів групи. У зв'язку з цим розв'язки рівняння (1) можна шукати, користуючись інваріантними многовидами всіх можливих підгруп групи перетворень (4).

Наприклад, розглянемо підгрупу

$$XF = \alpha X_1 F + \beta X_5 F, \tag{6}$$

де α, β – довільні сталі. Інваріанти групи (6)

$$J_1 = x^2 + y^2, \quad J_2 = \frac{u}{x^2+y^2} - \frac{\beta}{\alpha} \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

є розв'язками рівняння $XF = 0$, а $\Phi(J_1 J_2) = 0$ – неособливі інваріантні многовиди цієї групи, звідки

$$u = \frac{\beta}{\alpha}(x^2+y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi(x^2+y^2).$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (1), одержимо

$$\varphi''(J_1) = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,(x^2+y^2)^{-1},$$

звідки

$$\varphi(J_1) = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,(x^2+y^2)\left[\ln(x^2+y^2) + c_1\right] + c_2,$$

а розв'язками рівняння (1), інваріантними відносно групи перетворень з інфінітезімальним оператором (6), є

$$u = \frac{\beta}{\alpha}(x^2+y^2) \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,(x^2+y^2)\left[\ln(x^2+y^2) + c_1\right] + c_2, \tag{7}$$

де α, β, C_1, C_2 – довільні сталі, $\alpha \neq 0$.

Аналогічно, розглядаючи лінійну комбінацію всіх операторів (4)

$$XF = \alpha_1 X_1 F + \alpha_2 X_2 F + \alpha_3 X_3 F + \alpha_4 X_4 F + \alpha_5 X_5 F + \alpha_6 X_6 F + \alpha_7 X_7 F, \qquad (4')$$

одержимо
$$J_1 = (\alpha_1 x - \alpha_3)^2 + (\alpha_1 y + \alpha_2)^2,$$

$$J_2 = u - \left(\frac{\alpha_7}{\alpha_1} - \frac{2\alpha_2\alpha_5}{\alpha_1^2}\right)x + \left(\frac{2\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1^3} + \frac{\alpha_6}{\alpha_1^2}\right)(\alpha_1 y + \alpha_2) - \left(\frac{A}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_5}{\alpha_1^3} J_1\right) \arcsin \frac{\alpha_1 x - \alpha_3}{\sqrt{J_1}},$$

$$\varphi''(J_1) = \pm \frac{1}{2\alpha_1^3 J_1^2} \sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a},$$

$$\varphi(J_1) = \pm \frac{1}{2\alpha_1^3}\Big[\left(\sqrt{c} J_1 - \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) \ln\left(\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} + \sqrt{c} J_1 + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) -$$

$$- 2\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} - 2(\alpha_3 J_1 + \sqrt{a}) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a}}{(\alpha_1 k + \alpha_5) J_1 - \sqrt{a}}\Big] +$$

$$+ c_1 J_1 + c_2,$$

а всі розв'язки рівняння (1), інваріантні відносно групи перетворень (4) наберуть вигляду

$$u(x,y) = \left(\frac{\alpha_7}{\alpha_1} - \frac{2\alpha_2\alpha_5}{\alpha_1^2}\right)x - \left(\frac{2\alpha_3\alpha_5}{\alpha_1^3} + \frac{\alpha_6}{\alpha_1^2}\right)(\alpha_1 y + \alpha_2) +$$

$$+ \left(\frac{A}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_5}{\alpha_1^3} J_1\right) \arcsin \frac{\alpha_1 x - \alpha_3}{\sqrt{J_1}} \pm \frac{1}{2\alpha_1^3}\Big[\left(\sqrt{c} J_1 - \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) \ln\left(\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} + \sqrt{c} J_1 + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) - \qquad (8)$$

$$- 2\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a} - 2(\alpha_5 J_1 + \sqrt{a}) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c J_1^2 + b J_1 - a}}{(\alpha_1 k + \alpha_5) J_1 - \sqrt{a}}\Big] + c_1 J_1 + c_2,$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_7$, c_1, c_2 – довільні сталі

$$\alpha_1 \neq 0, \quad a = A^2 \alpha_1^2, \quad b = 2A\alpha_4\alpha_5, \quad c = \alpha_1^2 k^2 - \alpha_5^2,$$

$$A = \frac{\alpha_5}{\alpha_1}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_3\alpha_6 - \alpha_2\alpha_7.$$

Якщо ж $\alpha_1 = 0$, то оператор (4) запишемо

$$XF = \alpha_2 X_2 F + \alpha_3 X_3 F + \alpha_4 X_4 F + \alpha_5 X_5 F + \alpha_6 X_6 F + \alpha_7 X_7 F,$$

і аналогічно попередньому одержимо

$$J_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} x - y,$$

$$J_2=\frac{\alpha_4}{\alpha_2}x+\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2\alpha_2}\left(\alpha_6-2\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2}J_1+\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}\right)x^2-\frac{\alpha_7}{\alpha_2}xJ_1+\frac{\alpha_5}{\alpha_2}xJ_1^2-u,$$

$$u=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2\alpha_2}\left(\alpha_6+\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2}J_1\right)x^2+\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}-\frac{\alpha_7}{\alpha_2}J_1+\frac{\alpha_5}{2}J_1^2\right)x+\varphi(J_1),$$

$$\varphi''(J_1)=\frac{A+2B}{R}J_1+\frac{1}{R}\sqrt{(4B^2-RN)J_1^2+(4AB+RM)J_1+(A^2-RZ)}\ ,$$

$$\varphi(J_1)=D(J_1-K)\ln\left(\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}+\sqrt{c}\,J_1+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)+\left(\frac{cJ_1^2+bJ_1+a}{6R}-D\right)\frac{\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}}{c}+$$

$$+\frac{B}{3R}J_1^3+\frac{A}{2R}J_1^2+C_1J_1+C_2,$$

а розв'язок рівняння (1), інваріантний відносно останньої групи перетворень, є

$$u(x,y)=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2\alpha_2}\left(\alpha_6+\frac{\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}-2\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2}J_1\right)x^2+\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}-\frac{\alpha_7}{\alpha_2}J_1+\frac{\alpha_5}{\alpha_2}J_1^2\right)x+$$

$$+D(J_1-K)\ln\left(\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}+\sqrt{c}\,J_1+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)+\frac{B}{3R}J_1^3+\frac{A}{2R}J_1^2+ \qquad /9/$$

$$+\left(\frac{cJ_1^2+bJ_1+a}{6R}-D\right)\frac{\sqrt{cJ_1^2+bJ_1+a}}{c}+C_1J_1+C_2,$$

де $\alpha_2,\dots,\alpha_7$, C_1, C_2 – довільні сталі, $\alpha_2\neq 0$,

$$A=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{\alpha_6+\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2}-\frac{4\alpha_3\alpha_7}{\alpha_2^2},\quad B=4\frac{\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2^3}-\frac{\alpha_5}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right),$$

$$Z=\frac{\alpha_6^2}{\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3^2\alpha_7^2}{\alpha_2^4}+\frac{\alpha_6\alpha_7}{\alpha_2^2}-4K^2,\quad M=4\frac{\alpha_3\alpha_5\alpha_6}{\alpha_2^3}+4\frac{\alpha_3^2\alpha_5\alpha_7}{\alpha_2^4}+16\frac{\alpha_3\alpha_5\alpha_7}{\alpha_2^3},$$

$$R=\left(1+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)^2,\quad N=20\frac{\alpha_3^2\alpha_5^2}{\alpha_2^3},\quad K=1-\frac{b}{a},\quad D=\frac{4ac-b^2}{8c},$$

$$c=4B^2-RN,\quad b=4AB+MR,\quad a=A^2-RZ\ .$$

Розв'язки рівняння (1), інваріантні відносно підгруп групи перетворень (4), можна одержати як частинні випадки розв'язків (8), (9), приймаючи в них відповідні довільні сталі $\alpha_1, \dots, \alpha_7$, які дорівнюють нулю. Наприклад, якщо в (8) лише $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_5 \neq 0$, то одержимо (7), а якщо в (8) прийняли лише $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, то

$$u(x,y)=\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \pm \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{\alpha_1 K}{2}(x^2+y^2)\ln\left\{\alpha_1^2\left(\sqrt{\alpha_1^2K^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}+\alpha_1K(x^2+y^2)\right)\right\}- \right.$$
$$\left. -\sqrt{\alpha_1^2K^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2} - \alpha_4 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha_1^2K^2(x^2+y^2)^2-\alpha_4^2}}{\alpha_1K(x^2+y^2)-\alpha_4}\right]+c_1(x^2+y^2)+c_2 .$$

буде інваріантним відносно підрупи $XF=\alpha_1X_1F+\alpha_4X_4F$ розв'язком рівняння (1), причому небігармонійним.

Література

1. О в с я н н и к о в Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.

2. С а в і н Г. М., П а р а с ю к О. С. Бігармонійні розв'язки рівняння пластичності. ДАН УРСР, 1947, № 6.

3. S o p h u s L i e. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformation. Leipsig, 1891.

УДК 517:513:88

МЕЗЕН ШАХІН

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ЗАДАНІ НА РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЯХ

Розглянемо лінійний диференціальний вираз

$$l(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y \qquad (1)$$

з коефіцієнтами $p_j(x)$, $(n-j)$-раз неперервно диференційованими на скінченному інтервалі $[a,b]$.

Нехай $x_1, \dots, x_{s-1}$ деякі фіксовані точки з $[a,b]$ такі, що

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{s-1} < b, \tag{2}$$

Позначимо через D сукупність таких комплексно-значних функцій f, заданих на (a, b), що мають абсолютно неперервну похідну $(n-1)$-го порядку в кожному інтервалі $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, який не містить жодної з точок $x_1, \dots, x_{s-1}$ і, крім того, $f^{(n)} \in L_1(a, b)$. Визначимо оператор L таким чином

$$Lf = \ell(f), \quad f \in D(L) \stackrel{def}{=} D.$$

Нехай $U(f)$ – лінійна форма відносно змінних $f^{(j)}(x_{s'} + 0)$,

$$f^{(j)}(x_{s'} - 0), \quad s' = 0, \dots, s-1, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

$$x_0 + 0 \stackrel{df}{=} a \qquad і \qquad x_s - 0 \stackrel{df}{=} b$$

так, що $U(f)$ має вигляд

$$U(f) = \sum_{s'=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \gamma_{s'j}^{-} f^{(j)}(x_{s'} - 0) + \gamma_{s'j}^{+} f^{(j)}(x_{s'} + 0) \right\}. \tag{3}$$

Через $D(T)$ позначимо сукупність всіх функцій $f \in D(L)$, які задовольняють крайовим умовам

$$U_\nu(f) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, m \tag{4}$$

і нехай T – звуження оператора L на $D(T)$.

Згідно з формулою Гріна існують такі лінійні форми V_ν, від змінних $g^{(j)}(x_{s'} \pm 0)$, $j = 0, \dots, n-1$, $s' = 0, \dots, s-1$, що

$$\forall f \in D(L) \;\; і \;\; \forall g \in D(M), \;\; де \;\; M = L_0^*$$

$$(Lf, g) - (f, Mg) = U_1(f)\overline{V_{2s_n}(g)} + U_2(f)\overline{V_{2s_{n-1}}(g)} + \dots + U_{2s_n}(f)\overline{V_1(g)}.$$

Однорідна крайова задача

$$\ell^*(g) = 0, \tag{5}$$

$$V_\nu(g) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2sn - m \tag{6}$$

називається спряженою до однорідної крайової задачі

$$\ell(f)=0, \tag{7}$$

$$U_\nu(f)=0, \qquad \nu=1,2,\dots,m \tag{8}$$

Тут $\ell^*(g)$ означає диференціальний вираз, спряжений до $\ell(f)$.

Нехай S диференціальний оператор в області визначення $D(S)$, де $D(S)$ сукупність функцій $f\in D(L)$, що задовольняють крайовим умовам

$$f^{(j)}(x_{s'}+0)=f^{(j)}(x_{s'}-0), \tag{9}$$

$$x_0+0=a, \quad x-0=b, \quad j=0,\dots,n-1, \quad s'=0,\dots,s-1,$$

$$Sf=\ell(f), \qquad \forall f\in D(S). \tag{10}$$

Через $\mathscr{C}^{\cdot}(H)$ позначимо множину всіх лінійних замкнутих операторів $T:H\to H$, для яких $\dim[D(T)]<\infty$ і приймемо $\mathscr{C}(H)=\{T\in\mathscr{C}^{\cdot}(H):\dim D(T)^\perp=0\}$. Якщо T_1 і $T_2\in\mathscr{C}^{\cdot}(H)$, то запис $T_1\dot{\vee}T_2$ означає, що в операторів T_1 і T_2 є спільне скінченно кратне звуження $A\in\mathscr{C}^{\cdot}(H)$. У цьому випадку пара називається обмеженою знизу, а число

$$\varkappa(T_1,T_2)\overset{\mathrm{df}}{=}\dim D(T_2)/D(A)-\dim D(T_1)/D(A)$$

називається відносним індексом цієї пари [1].

Дефект, кодефект та індекс оператора $T:H\to H$ визначаються співвідношенням

$$\operatorname{def}T=\dim Z(T), \quad \operatorname{codef}T=\dim R(T)^\perp,$$

$\operatorname{ind}T=\operatorname{codef}T-\operatorname{def}T$, де $Z(T)$ - многовид нулів оператора T.

Т е о р е м а 1. Число лінійно незалежних розв'язків q даної задачі зв'язано з числом лінійно незалежних розв'язків q^* спряженої задачі співвідношенням

$$q^*=3n-m+q. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Нехай q – число лінійно незалежних розв'язків даної задачі $\ell(f)=0$, $U_\nu(f)=0$, $\nu=1,\dots,m$ і q^* – число лінійно незалежних розв'язків спряженої задачі $\ell^*(g)=0$, $V_\nu(g)=0$, $\nu=1,2,\dots,2\mathfrak{z}n-m$. Очевидно $q=\operatorname{def}T$ і $q^*=\operatorname{def}T^*$ і тому $\operatorname{ind}T=\operatorname{codef}T-\operatorname{def}T=\operatorname{def}T^*-\operatorname{def}T=q^*-q$. Крім того, $\operatorname{ind}L=\operatorname{codef}L-\operatorname{def}L=0-\mathfrak{z}n=-\mathfrak{z}n$, тому що $R(L)=H$ і $\operatorname{codef}L=\dim R(L)^\perp=0$. Врешті, враховуючи, що число крайових умов вихідної задачі рівне m, то $m=\varkappa(L,T)=\operatorname{ind}T-\operatorname{ind}L=q^*-q+\mathfrak{z}n$, що й треба було довести.

Як відомо, оператори L, T і S належать $\mathscr{C}(H)$, причому L є спільним скінченнократним розширенням операторів S і T. Тому [1] пара S, T обмежена знизу $S\dot\vee T$. Тому що

$$\varkappa(L,S)=m,\quad \varkappa(L,T)=m,\quad \text{то}\quad \varkappa(S,T)=0.$$

Позначимо через $\rho(S)$ резольвентну множину оператора S і опишемо загальний розв'язок f рівняння

$$(T-\zeta)f=g,\quad g\in L_2(a,b).$$

Л е м а. Нехай $\zeta\in\rho(S)$, тоді $D(L)$ можна розкласти в пряму суму

$$D(L)=D(S)\dot+Z(L-\zeta),\qquad \forall\,\zeta\in\rho(S),\tag{12}$$

де $Z(L-\zeta)$ – множина нулів оператора $L-\zeta$.

Д о в е д е н н я. Для довільної функції $f\in D(L)$ покладемо

$$f_S\overset{\mathrm{df}}{=}S_\zeta(L-\zeta)f,\quad z=f-f_S,\quad \text{де}\quad S_\zeta=(S-\zeta)^{-1}$$

Тоді

$$(L-\zeta)z=(L-\zeta)f-(L-\zeta)f_S=(L-\zeta)f-(L-\zeta)S_\zeta(L-\zeta)f=$$
$$=(L-\zeta)f-(S-\zeta)S_\zeta(L-\zeta)f=0,\quad \text{тому що}\quad S\subset L.$$

Звідси випливає $z\in Z(L-\zeta)$. Далі нехай $u\in D(S)\cap Z(L-\zeta)$. Тоді $(L-\zeta)u=0$ і $(S-\zeta)u=0$, тобто ζ – власне значення для S, що суперечить тому, що $\zeta\in\rho(S)$. Очевидно, $\dim Z(L-\zeta)=m=\mathfrak{z}n$. Нехай $z_1(\zeta),\dots,z_m(\zeta)$ – деякий фіксований базис простору $Z(L-\zeta)$, тоді $f\in D(L)$ можна зобразити у вигляді

$$f = f_s + z(\zeta)^* C, \tag{13}$$

де $f_s \in D(S)$, $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$, $z(\zeta)^* c = c_1 z_1(\zeta) + \dots + c_m z_m(\zeta)$

Позначимо
$$\omega(\zeta) \stackrel{df}{=} U_1 z(\zeta)^* = \begin{pmatrix} U_1 z_1(\zeta) & \dots & U_1 z_m(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_m z_1(\zeta) & \dots & U_m z_m(\zeta) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Теорема 2. Якщо $\det \omega(\zeta) \neq 0$, то $\zeta \in \rho(T)$ і рівняння

$$(T - \zeta) f = g, \quad g \in L_2(0, b) \tag{15}$$

має розв'язок

$$f = T_\zeta(g) = S_\zeta g - z(\zeta)^* \omega(\zeta)^{-1} S_\zeta g \tag{16}$$

Доведення. Підставивши значення f з співвідношення (13) у рівняння (15), одержимо $(T - \zeta)(f_s + z(\zeta)^* c) = g$.

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} (L - \zeta)(f_s + z(\zeta)^* c) &= g, \\ (L - \zeta) f_s + 0 &= g, \\ f_s &= S_\zeta g. \end{aligned} \tag{17}$$

Згідно з (17) і (13)

$$f = S_\zeta g + z(\zeta)^* c. \tag{18}$$

Підставивши співвідношення (18) у крайові умови (4), одержуємо

$$\begin{aligned} U(S_\zeta g) + U z(\zeta)^* c &= 0, \\ c &= -\omega(\zeta)^{-1} U S_\zeta g. \end{aligned} \tag{19}$$

Тому

$$f = T_\zeta g = S_\zeta g - z(\zeta)^* \omega(\zeta)^{-1} S_\zeta g.$$

Якщо вираз $l(y)$ самоспряжений, то оператор S теж самоспряжений. Крім того, припустимо, що оператор T також самоспряжений.

Теорема 3. Резольвента оператора T є інтегральним оператором квадратично інтегрованим симетричним ядром (з ядром Гільберта-Шмідта).

Доведення. Очевидно, що $Z(\zeta)^{*}\omega(\zeta)^{-1}S_{\zeta}g$ скінченновимірний оператор, оскільки будь-який скінченновимірний оператор в $L_2(a,b)$ являє собою інтегральний оператор з ядром Гільберта-Шмідта. А тому що оператор S_{ζ} також є інтегральним оператором з ядром Гільберта-Шмідта, то з формули (16) випливає твердження теореми. ∎

Теорема 4. Власні функції оператора T утворюють повну ортогональну систему в $L_2(a,b)$. Кожна функція з $D(T)$ розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд по власних функціях оператора T.

Доведення. Як відомо [2], резольвента оператора S_{ζ} зображається інтегральним оператором

$$S_{\zeta}g(x)=\int_a^b S(x,y,\zeta)\,g(y)\,dy,$$

де ядро $S(x,y,\zeta)$ неперервне при $a\le x\le b$, $a\le y\le b$ для кожного ζ, яке не є власним значенням оператора S. На основі формули (16) маємо

$$T_{\zeta}g(x)=\int_a^b T(x,y;\zeta)\,g(y)\,dy,$$

де ядро $T(x,y,\zeta)$ також неперервна при $a\le x\le b$, $a\le y\le b$. Таким чином, T - самоспряжений оператор з цілком неперервною резольвентою. Звідси випливає перша частина теореми, а друга з того, що [3]

$$\sup_{a\le x\le b}\int_a^b |T(x,y;\zeta)|^2\,dy<\infty,$$

оскільки неперервна функція на замкнутому проміжку обмежена. ∎

Література

1. Лянце В. Э. О некоторых отношениях между замкнутыми операторами. ДАН, т. 204, 1972, № 3.

2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., "Наука", 1969.

3. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.

УДК 513.812

А.І.ПИЛИПОВИЧ

ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ В ПРОСТОРІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО ЗА ДОПОМОГОЮ СФЕРОГРАФА, ОРИСФЕРОГРАФА, ГІПЕРСФЕРОГРАФА

Смогоржевський, використовуючи метод інверсії, довів теорему про те, що всяку конструктивну задачу другого степеня в площині Лобачевського можна розв'язати за допомогою циркуля, орициркуля і гіперциркуля, аналогічну теоремі Мора-Маскероні на евклідовій площині [3]. Використовуючи метод інверсії, А.Л.Пікус у [2] обгрунтовувала, що за допомогою сферографа в евклідовому просторі можна розв'язати всяку задачу на побудову, яку можна розв'язати площинографом і сферографом, тобто задачу другого степеня. Ми доведемо таку теорему.

Т е о р е м а. Всяку конструктивну задачу простору Лобачевського, яку можна розв'язати за допомогою комплекса П-С-О-Г (площинограф, сферограф, орисферограф, гіперсферограф), можна розв'язати також і комплексом С-О-Г. У побудовах не використовуємо перетворення інверсії, що надає їм значної наочності.

Вважається за можливе побудувати такі геометричні побудови.

І. Сферографом - сферу, якщо: 1) дано її центр і задано радіус $\Sigma(O,r)$; 2) дано центр і точку сфери.

П. Орисферографом - орисферу, якщо: 1) задано її вісь $\overline{AA_1}$, де A - точка орисфери на цій осі $\Omega(\overline{AA_1},A)$; 2) задано вісь $\overline{A_1A_2}$ і дано точку B орисфери, яка лежить на цій осі.

Ш. Гіперсферографом - гіперсферу Γ, якщо задані: 1) її базова площина α і дистанція d; 2) базова площина α і дана одна точка M гіперсфери.

Доведення теореми полягає в розв'язанні так званих елементарних, основних і головних задач, до яких зводиться будь-яка задача другого порядку простору Лобачевського.

Елементарні задачі

1. Подвоїти заданий відрізок AB.

2. Знайти точки, що визначають площину α, яка проходить через дану точку M, перпендикулярно до заданої прямої AB.

3. Розділити заданий відрізок AB навпіл.

4. З даної точки M опустити перпендикуляр на задану пряму AB.

5. Знайти деяку точку прямої, яка проходить через дану точку M, перпендикулярно до площини α, заданої трьома точками A, B, C.

6. Перенести заданий відрізок AB на задану пряму CD, відклавши його від даної точки C.

7. Розділити навпіл заданий лінійний кут BAC.

8. У заданій трьома точками A, B, C площині α побудувати при заданій прямій AB кут M_1AN_1, що дорівнює заданому куту MON.

9. Розділити навпіл заданий двогранний кут $\varphi(ABC, ABD)$, де ABC, ABD площини двогранного кута, задані трьома точками.

10. Побудувати точку D_1 площини β_1, яка проходить через дві точки A_1, B_1 і утворює із заданою площиною $\alpha_1(A_1, B_1, C_1)$ кут φ_1, що дорівнює заданому двогранному куту $\varphi(ABC, ABD)$, де A, B, C, D точки площин кута φ.

Основні побудови

11. Побудувати точку N прямої, яка проходить через дану точку M паралельно заданому вектору $\overline{AB}$.

12. Дано відрізок паралельності $AB = a$. Визначити кут паралельності $\alpha = \Pi(a)$, що відповідає даному відрізку a.

13. Дано кут паралельності $\alpha = \angle BAC$. Визначити відрізок паралельності $a = \Delta(\alpha)$, що відповідає даному куту α.

14. Визначити спільний перпендикуляр MN двох розбіжних площин $\alpha(A, B, C)$ і $\alpha_1(A_1, B_1, C_1)$

15. Побудувати спільний перпендикуляр MN двох розбіжних прямих $a(A, B)$ і $a_1(A_1, B_1)$.

16. Задані площина $\alpha(A, B, C)$ і пряма $a_1(P_1, Q_1)$, які не перетинаються

тьоя. Побудувати точку, яка належить площині α_1, що проходить че-з пряму a_1, паралельно площині α.

Головні задачі

Побудувати точки перетину такої заданої поверхні з такими заданими оверхнями та лініями:

I. Зі сферою Σ : 17/ сфери; 18) орисфери; 19) гіперсфери; 20) площини; 21) прямої; 22) кола; 23) орицикла; 24) гіперцикла.

II. З орисферою Ω : 25) орисфери; 26) гіперсфери; 27) площини; 28) прямої; 29) кола; 30) орицикла; 31) гіперцикла.

III. З гіперсферою Γ : 32) гіперсфери; 33) площини; 34) прямої; 35) кола; 36) орицикла; 37) гіперцикла.

IУ. З площиною: 38) площини; 39) прямої; 40) кола; 41) орицикла; 42) гіперцикла.

У. Побудувати точки перетину таких заданих ліній: 43) двох прямих; 44) двох кіл; 45) двох орициклів; 46) двох гіперциклів; 47) прямої і кола; 48) прямої і орицикла; 49) прямої і гіперцикла; 50) кола й орицикла; 51) кола та гіперцикла; 52) орицикла і гіперцикла.

Вважаємо побудованими всі дані фігури і їх перетини, тоді як задані фігури потрібно побудувати. Приймаємо за можливе вибирати довільні точки простору.

Розв'язання елементарних і основних задач

№ 1. Будуємо сферу $\angle(B, BA)$ й орисферу $\Omega(BA, B)$. На колі $\Sigma \times \Omega$ вибираємо три довільні точки P, Q, R. Нехай D - точ- перетину прямої AB з площиною PQR. Тоді з формул XXX_7 і XX_8 [1] випливає $DB < \frac{1}{2} AB$. Звідки $PA > PB$. Побудувавши сфери $\Sigma_1(P, PA)$, $\Sigma_2(Q, PA)$, $\Sigma_3(R, PA)$, одержуємо точку S їх тину, відмінну від A та розміщену зовні відрізка AB за точкою удуємо орисферу $\Omega(\overline{BS}, B)$. Вона перетинається зі сферою Σ у K_1. Виберем на K_1 довільну точку T і побудуємо сфери

$\Sigma_4(P,TA)$, $\Sigma_5(Q,TA)$. Тоді шукана точка C визначиться на перетину сфер Σ, Σ_4 і Σ_5.

№ 2. а) Якщо точка M не лежить на прямій AB, то будуємо сфери $\Sigma(A,AM)$, $\Sigma_1(B,BM)$, що перетнуться по колу k, яке визначає шукану площину α.

б) Якщо M лежить на прямій AB, то будуємо на AB точку таку, що $AN=2AM$ /N/. Виконуємо сфери $\Sigma(A,r)$, $\Sigma_1(N,r)$, $r > AM$, які перетнуться по колу k, що належить шуканій площині.

№ 3. На прямій AB будуємо точки C, D такі, що відрізки $AC = 2AB$, $BD = 2BA$ (1). Виконуємо сфери $\Sigma_1(A,AB)$, $\Sigma_2(B,AB)$, коло k перетину яких визначає площину $\alpha \perp AB$, яка проходить через середину X відрізка AB. Колами k_1, k_2 задаємо площини α_1, α_2, які проходять через точки A, B, перпендикулярно AB (2). Наладивши гіперсферограф так, щоб його базова площина збігалась з площиною α, а поверхня гіперсфери проходила через точку A, зафіксуємо одержану дистанцію $d=\frac{1}{2}AB$. Будуємо гіперсфери $\Gamma_1(\alpha_1,d)$, $\Gamma_2(\alpha_2,d)$, точка дотику X яких є шуканою.

№ 4. Відшукаємо коло $k=\Sigma(A,AM)\times\Sigma_1(B,BM)$, на якому виберемо три довільні точки P, Q, R. Будуємо сфери $\Sigma_2(P,PA)$, $\Sigma_3(Q,QA)$, $\Sigma_4(R,RA)$, які перетнуться в точках A, C, та середину O відрізка AC (3), де O - основа шуканого перпендикуляра.

№ 5. а) Нехай $M \notin \alpha$. Будуємо точку N, симетричну точці M відносно площини $\alpha(A,B,C)$. $N=\Sigma(A,AM)\times\Sigma_1(B,BM)\times\Sigma_2(C,CM)$. Середина O відрізка MN - основа шуканого перпендикуляра (3).

б) $M \in \alpha$. Виберемо ту з прямих AB, AC, BC, яка не містить точки M. Нехай $M \notin AB$. Задамо колами площини $\beta \perp AM$, $\gamma \perp BM$, які проходять через M (2). Побудуємо точки прямої перетину заданих площин β і γ (№ 38).

Нехай $\measuredangle AMB \neq \frac{\pi}{2}$, тобто β і γ не перпендикулярні. Будуємо сферографом три точки площини β', симетричної площині β відносно γ. Виберемо деяку точку T площини γ, розміщену на колі, яке визначає цю площину. Побудуємо точки T_1, T_2, симетричні точці T відносно площин відповідно β і β'. Виконуємо кола $k_1 = \Sigma_1(T_1, r) \times \Sigma(T, r)$, $k_2 = \Sigma_2(T_2, r) \times \Sigma(T, r)$, причому r вибираємо так, щоб кола k_1 і k_2 перетинались. Точки P, Q перетину кіл k_1 і k_2 визначають шукану пряму.

Якщо $\measuredangle AMB = \frac{\pi}{2}$, то $\beta \perp \gamma$, $\beta' \equiv \beta$. У цьому випадку замість площини β' будуємо гіперсферографом бісекторіальну площину δ двогранного кута, утвореного площинами β і γ (див. нижче задачу № 9). Знаходимо точки P, Q лінії перетину площин β і δ.

З а у в а ж е н н я 1. Як проміжна побудова до задачі № 5 розв'язана задача № 38 про побудову точок лінії перетину площин β і γ.

№ 6. Задаємо колом площину $\alpha \perp CD$, яка проходить через точку C (2). Будуємо гіперсферу $\Gamma(\alpha, AB)$ і сферу $\Sigma(C, AB)$, які дотикаються в шуканій точці M, $CM = AB$.

№ 7. На стороні AC відкладаємо відрізок $AC_1 = AB$ (6). Ділимо точкою O відрізок C_1B навпіл (3). AO – шукана бісектриса.

№ 8. На стороні ON відкладаємо відрізок $ON_2 = OM$, а на прямій AB – відрізок $AM_1 = OM$ (6). В точці A будуємо $\perp$ до площини α (5), на якому буде відома деяка точка P, будуємо точку P', симетричну точці P відносно площини α. Виконуємо $k = \Sigma(P, PM_1) \times \Sigma_1(P', P'M_1)$, яке проходить через точку M_1, має центр у точці A і лежить у площині α. Перетнувши коло k сферою $\Sigma_2(M_1, MN_2)$, одержимо дві точки N_1, N_1' такі, що $\measuredangle M_1AN_1 = \measuredangle M_1AN_1' = \measuredangle MON$.

№ 9. Будуємо $\Gamma_1(ABC, d)$, $\Gamma_2(ABD, d)$, що перетнуться по гіперциклу h, базою якого є AB. Площина гіперциклу h є шуканою бісекторіальною площиною.

№ 10. З точки D опускаємо перпендикуляр DO на площину ABC. При ребрі A_1B_1 в площині α_1 будуємо $\measuredangle B_1A_1O_1 = \measuredangle BAO$ (8), де $A_1O_1 = AO$ (6). У точці O_1 ставимо перпендикуляр до площини α_1 (5), на якому відкладаємо $O_1D_1 = OD$ (6). D_1 – шукана точка.

№ 11. Проводимо орисферу $\Omega(\overline{AB}, M)$ і будуємо її вісь у точці M, для чого будуємо $k = \Omega \times \Sigma(M, r)$, на якому вибираємо три довільві точки P , Q , R . Тоді точка $N=\Sigma_1(P,r)\times\Sigma_2(Q,r)\times\Sigma_3(R,r)$ визначає вісь $\overline{MN}$ орисфери Ω. $\overline{MN}\parallel\overline{AB}$.

№ 12. Задамо площину, що проходить через точку A , перпендикулярно до AB (2), в якій виберемо деяку відому точку C . Через точку B проводимо пряму $\overline{BN}\parallel\overline{AC}$ (11). $\angle NBA=\alpha=\Pi(a)$.

№ 13. Будуємо $\Omega(\overline{AB},A)$. Знайдемо точку B' , симетричну точці B, відносно AC (4), (1). Будуємо $k=\Omega\times\Omega_1(\overline{AB'},A)$. Знайдемо центр O кола k , для чого виберемо на k крім точки A ще дві точки P , Q . Через середини відрізків AP, PQ (3) проведемо перпендикулярні до них площини β , γ (2). Нехай T - точка, яка лежить на лінії перетину площин β і γ (заув. 1). Будуємо точку T', симетричну точці T відносно площини кола k (див. 5,а). Середина відрізка TT' (3) є центром O кола k . $AO=\Delta(\alpha)$.

Зауваження 2. Як видно з № 13 можна побудувати центр кола.

№ 14. З точки A опускаємо перпендикуляр AD_1 на площину α_1 , а з точки D_1 – $DD_1\perp\alpha$ (5). Одержуємо площину $\beta(A,D_1,D)$, перпендикулярну до площин α і α_1 . Так само задамо другу площину γ , перпендикулярну до площин α і α_1 . Побудуємо точки M_1 , N_1 лінії перетину площин β і γ (заув. 1). Виконуємо точки M_1' , M_1'' , симетричні точці M_1 відносно площин α і α_1 (5). Будуємо середину M відрізка M_1M_1' і середину N відрізка M_1M_1'' (3). MN - шуканий перпендикуляр.

№ 15. З точки A опускаємо перпендикуляр AD_1 на a_1 , а з точки D_1 - перпендикуляр D_1D на пряму a (4). Через точку D_1 побудуємо площину $\alpha_1\perp AD_1$, а через точку D - площину $\alpha\perp D_1D$ (2). Площини α і α_1 - розбіжні. Будуємо їх спільний перпендикуляр (14), який є шуканим.

№ 16. а) Нехай пряма P_1Q_1 розбіжна з площиною α . Проектуємо точки P_1 , Q_1 на площину α (5). P , Q - проекції P_1, Q_1 на α , Будуємо спільний перпендикуляр MN розбіжних прямих P_1Q_1 , PQ (15) Через точку N прямої PQ будуємо площину $\beta\perp PQ$ (2). Знаходимо кут $\varphi = \Pi(MN)$ (12), який відкладаємо в площині β при прямій MN з вершиною в точці M по обидві сторони від прямої MN (6). Нехай другі сторони кута визначаються точками S_1, S_2. Тоді $\measuredangle S_1MN = \measuredangle S_2MN = \varphi = \Pi(MN)$, а площини $S_1P_1Q_1$ і $S_2P_1Q_1$ паралельні площині α.

б) Нехай $\overline{P_1Q_1} \parallel \alpha$. Виконуємо проекції P, Q точок P_1, Q_1 на площину α (5). У точці P_1 будуємо пряму $M_1N_1 \perp$ пл.P_1Q_1QP (5). Площина, визначена прямими M_1N_1 і P_1Q_1, паралельна до площини α.

Розв'язування головних задач

На основі постулатів інструментів C, O, Γ задані сферу, орисферу і гіперсферу можна побудувати. Тоді матимемо і їх перетини. Певним чином комбінуючи сфери, орисфери і гіперсфери, можна побудувати також задані кола, орицикли, гіперцикли. Отже, на основі постулатів прикладів можна розв'язати задачі 17,18,19,22,23,24,25,26,29,30,31,32,35, 36,37,44,45,46,50,51,52. Для доведення теореми потрібно розв'язати ще задачі 20,21,27,28,33,34,39,40,41,42,43,47,48,49.

№ 20. Побудувати коло K перетину заданої площини $\alpha(A,B,C)$ і сфери $\Sigma(O,r)$.

а) $O \notin \alpha$. Будуємо O', симетричну точці O відносно площини α (див. 5,а). Тоді $K = \Sigma \times \Sigma_1(O', r)$.

б) $O \in \alpha$. Побудуємо відрізок, який дорівнює стороні PM вписаного у великий круг сфери Σ квадрата, для чого на сфері Σ виберемо дві довільні точки P, Q. Побудуємо гіперсферу $\Gamma(PQO, r)$, яка дотикається сфери Σ у точці M такій, що PM – шуканий відрізок. Будуємо гіперсферу $\Gamma_1(\alpha, r)$, яка дотикається сфери Σ у точці T. Тоді $K = \Sigma \times \Sigma_1(T, MP)$.

№ 21. Побудувати точки перетину заданої прямої $a(A,B)$ і даної сфери $\Sigma(O,r)$.

Виберемо дві довільні точки C, C_1, які не лежать в одній площині з прямою a. Будуємо кола K і K_1 перетину площин $\alpha(A,B,C)$

і $\alpha_1(A_1,B_1,C_1)$ з сферою Σ (20). Кола κ і κ_1 перетинаються в шуканих точках.

№ 27. Побудувати лінію перетину площини $\alpha(A,B,C)$ і даної орисфери $\Omega(\overline{MN},M)$

а) Якщо MN перетинає або розбіжна з площиною α, то шукане коло $\kappa = \Omega \times \Omega_1(\overline{M'N'},M')$, де M', N' – точки, симетричні до точок M,N відносно α.

б) Якщо $\overline{MN} \parallel \alpha$, то шукана лінія – орицикл q, який будуємо так. Нехай M' – проекція точки M на площину α (5). Позначимо $MM' = d$. Побудуємо точку P перпендикуляра до площини $M'MN$, який проходить через точку M. Тоді $q = \Omega \times \Gamma(MNP,d)$.

№ 28. Розв'язуємо аналогічно до (21), використовуючи розв'язок (27).

№ 33. Побудувати лінію перетину заданої площини $\alpha(A,B,C)$ і даної гіперсфери $\Gamma(\beta,d)$, де $\beta(P,Q,R)$ – базова площина.

Лінія перетину ℓ є колом, орициклом, гіперциклом, якщо площини α і β відповідно розбіжні, паралельні, перетинаються. $\ell = \Gamma \times \Gamma'(\beta',d)$, де $\beta'(P',Q',R')$ – площина, симетрична площині $\beta(P,Q,R)$ відносно площини α. Розглянута побудова шуканого гіперцикла ℓ перетину α і Γ не здійснима, якщо $\alpha \perp \beta$. У цьому випадку будуємо дві точки M, N лінії перетину площин α і β (заув. 1). Проведемо сферу $\Sigma(M,d)$, яка дотикається гіперсфери $\Gamma(\beta,d)$ в точці T. Виберемо довільну точку S, яка не належить площинам α, β. Тоді гіперсфери $\Gamma_1(MNS,T)$ і Γ перетинаються по шуканому гіперциклу $h(MN,d)$.

№ 34. Розв'язуємо аналогічно до (21), використовуючи розв'язок (33).

№ 39. Побудувати точку P перетину заданих прямої $a(M,N)$ і площини $\alpha(A,B,C)$.

Побудуємо точки площини $\alpha'(A',B',C')$, симетричної площині α відносно прямої a (4), (1). Будуємо кола κ, κ' перетину площин α і α' з сферою $\Sigma(M,r)$ такого радіуса r, щоб κ і κ' перетиналися (20). Нехай S і T – точки перетину κ і κ'. Тоді середина відрізка ST є шуканою точкою P (2). Якщо $a \perp \alpha$, то задача зводиться до (5).

№ 40. Знайти точки перетину даного кола $k(O,r)$ і заданої площини $\alpha(A,B,C)$.

Будуємо коло $k_1 = \alpha \times \Sigma(O,r)$. Точки перетину кіл k і k_1 є шуканими.

№№ 41, 42. Розв'язуються аналогічно (40).

№ 43. Побудувати точку перетину двох заданих прямих $a(A_1,A_2)$, $b(B_1,B_2)$.

Виберемо не інцидентну цим прямим точку C. Знаходимо точку P перетину a з площиною B_1B_2C (39) і точку $Q = b \times A_1A_2C$. Якщо $P \equiv Q$, то прямі перетинаються і P – точка їх перетину.

№ 47. Побудувати точки перетину заданої прямої $a(A,B)$ і даного кола $k(O,r)$.

Будуємо точки перетину прямої a і сфери $\Sigma(O,r)$ (21), які є шуканими, якщо пряма лежить в площині α даного кола. Коли $a \notin \alpha$, то будуємо точку $P = a \times \alpha$. Якщо $P \in k$, то P – шукана точка.

№№ 48, 49. Розв'язуються аналогічно до (47).

Теорема доведена.

Л і т е р а т у р а

1. К а г а н В. Ф. Основания геометрии, ч. I. М.-Л., 1949.

2. П и к у с А. Л. Вопросы теории и методики геометрических построений в пространстве. Автореф. канд. дисс., Ленинград, 1955.

3. С м о г о р ж е в с ь к и й О. С. Про розв'язування конструктивних задач другого степеня в пр. Лобачевського з допомогою циркуля, горициркуля і гіперциркуля. Математичний збірник Київ. ун-ту, № 2, 1948.

УДК 515-69

А.О.КОПИСТЯНСЬКИЙ

ПРО ГЕОМЕТРІЮ ОПТИЧНИХ ІЛЮЗІЙ

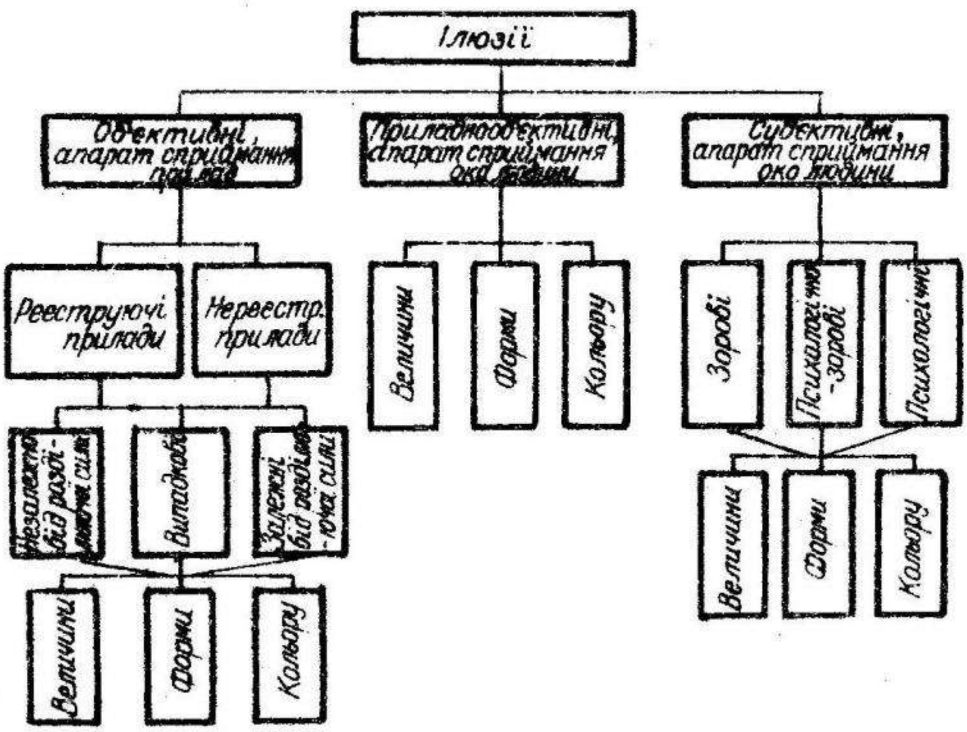
Експериментальні дослідження в різних ділянках наук спираються на показники органів сприймання явищ людиною або апаратів та приладів, які ці органи замінюють. Проте всім органам чуття людини, як і їх замінникам, притаманна певна недосконалість, яка проявляється в спотворенні відображень дійсних фактів в органах сприймання. Саме ці деформації називають ілюзіями. Зокрема, під оптичними ілюзіями розуміють явища спотворення зображень геометричних форм,зареєстровані апаратом сприймання оптичних явищ. Апаратом сприймання може бути довільна реєструюча, а також нереєструюча оптична система (око спостерігача, фотоапарат, кіноапарат, телевізійна система, спектрограф, відеомагнітофонічна система тощо).

Усім цим системам притаманна "недосконалість" відтворення зображень геометричних форм, тобто така властивість апарата сприймання, яка дає певні відхилення від теоретичних основ побудови зображень. Тут беруться до уваги теоретичні основи геометричних перетворень, які використовуються в геометричній оптиці. Зокрема,центральна, афінна колінеації та інші геометричні перетворення.

Геометрична інтерпретація оптичних явищ, які відбуваються в реальному просторі, не враховує деяких фізичних та хімічних факторів (неоднорідність середовища, недосконалість апарата сприймання, особливості хімічних процесів обробки фотоматеріалів тощо). Тому спостережувальний матеріал обробляється з певним наближенням, і тільки в окремих випадках використовуються емпіричні поправки для поліпшення наближень. Але на сучасному етапі розвитку науки такі наближення недостатні. Наприклад, у фізиці, астрономії, хімії, геології, біології та інших, де основою досліджень є обробка спостережуваного матеріалу, вимога уточнень геометричних зображень набирає особливого значення.

Саме можливості виявлення та врахування певних спотворень зображень (ілюзій) присвячується наша робота. Тому що питання геометричних (оптичних) ілюзій широке, необхідно обмежити статтю характеристикою тільки ілюзій, тобто загальною класифікацією та описанням методики теоретичного обгрунтування окремих типів ілюзій.

За основу класифікації оптичних ілюзій доцільно взяти характеристику апарата сприймання зображень (див. схему).



Отже, всі ілюзії можна поділити на три групи:

1. Об'єктивні ілюзії, які властиві оптичним приладам.

2. Суб'єктивні ілюзії, притаманні оптичним процесам в оці людини і психологічній обробці оптичної інформації.

3. Приладно-суб'єктивні ілюзії, які виступають у процесі спостережень показників оптичних приладів.

Групу об'єктивних ілюзій можна поділити на дві підгрупи - ілюзії в реєструючих та нереєструючих приладах, які в свою чергу поділяються на а) незалежні від розділяючої сили приладу; б) залежні від розділяючої сили приладу; в) випадкові (змішані).

Аналогічно, суб'єктивні ілюзії поділяються також на три групи: а) зорові, тобто залежні тільки від оптичних властивостей ока; б) психологічні, залежні від процесу обробки оптичної інформації в мозку людини; в) психологічно-зорові.

Класифікацію завершує поділ підгруп на три типи ілюзій: а) ілюзії величини; б) ілюзії форми; в) ілюзії кольору.

Як видно з класифікації, групи суб'єктивних та приладно-суб'єктивних ілюзій підлягають частково або цілком законам психології. Але оскільки закони психології ще не мають у фізичній інтерпретації конкретного математичного виразу, явища, які опираються на ці закони, можна характеризувати тільки з певним наближенням. Основним засобом для дослідження таких явищ поки що є статистика, тобто якісні та кількісні дані про ілюзії (психологічні та об'єктивно психологічні) можна охарактеризувати усередненою оцінкою спостережень певної кількості осіб.

Усі інші види ілюзій, що не пов'язані з законами психології, можна змоделювати або аналітично, або геометрично і тим самим закласти теоретичні основи їх утворення. Це питання ускладнюється в окремих випадках тим, що ілюзії виступають часто в комбінованій формі, і ефекти окремих спотворень або віднімаються, або додаються, або в кращому випадку виділяються кожне зокрема.

Додаткові ускладнення створюють групи ілюзій кольору. Але в усіх цих випадках ускладнень можна знайти оптимальний розв'язок, якщо відома структура ілюзії чи групи ілюзій, або коли ефект відповідатиме одній із схем моделювання пропонованих у статті.

Як було з'ясовано вище, основною схемою методики вивчення оптичних явищ є моделювання оптичних процесів на базі геометричних перетворень, які використовуються в теорії геометричної оптики. Проте, щоб використати теорію геометричних перетворень для моделювання оптичних процесів з врахуванням ілюзій, необхідно ввести в окремі схеми перетворень певні доповнення. Зокрема, в основних схемах перетворень - центральній і афінній колінеаціях доцільно ввести:

1. Поняття осереддя центральної колінеації, тобто узагальнення центра колінеації до будь-яких геометричних форм а) прямої або відрізка прямої; б) кривої лінії або частини кривої лінії; в) кривої поверхні або частини кривої поверхні.

2. Колінеації з рухомим центром або осереддям.

3. Колінеації на кривих поверхнях.

4. Колінеації із декількома центрами-осереддями.

5. Ламаної і криволінійної колінеації.

6. Колінеації з рухомою віссю колінеації або колінеації з більшою кількістю осей.

Використання таких типів перетворень для побудови моделі оптичних процесів побудови зображень, дає можливість уточнити теорію оптичних явищ з врахуванням різних спотворень, залежних від різних факторів практичного походження.

Література

1. Грегори Р. Разумный глаз. М., "Мир", 1972.
2. Толанский С. Оптические иллюзии. М., "Мир", 1967.

УДК 539.3

Я.Г.САВУЛА

РОЗРАХУНОК НЕКОЛОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Задача про пружну деформацію циліндричної оболонки неколового перетину розглядалась багатьма авторами. У [2] методом малого параметру розв'язано задачу про деформацію еліптичного ортотропного циліндра при умовах вільного опирання на краях. Цей же метод застосовувався і в [1,3], де досліджувались циліндричні оболонки довільного поперечного перетину при довільних умовах на криволінійних краях. В останніх використовувалось комплексне рівняння теорії циліндричних оболонок В.В.Новожилова [4], записане в криволінійній системі координат (α, β), де β – дуговий параметр. Проте у деяких задачах (наприклад, у задачі спряження оболонки з плоским днищем) вигідно мати розв'язок у системі координат з кутовим параметром β. Тому ми розв'язуємо методом малого параметра комплексне рівняння теорії неколових циліндричних оболонок, яке записане в системі координат з кутовим параметром β.

1. Задамо криволінійний циліндр рівняннями

$$\begin{aligned} x &= R[\sin\beta + \varepsilon\varphi_1(\beta)]; \\ y &= R[\cos\beta + \varepsilon\varphi_2(\beta)]; \\ z &= R\alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

де α, β – криволінійні координати серединної поверхні циліндра, причому α – віддаль вздовж твірної; β – кут, що відраховується від осі OY у напрямку осі OX; ε – малий параметр;

$$\varphi_1(\beta)=\sum_{m=2}^{N}(\alpha_m \sin m\beta+\gamma_m \cos m\beta);$$
$$\varphi_2(\beta)=\sum_{m=2}^{N}(\alpha_m \cos m\beta-\gamma_m \sin m\beta); \tag{2}$$

α_m, β_m – задані дійсні величини.

Параметри Ляме у цьому випадку будуть

$$A_1=R; \qquad A_2=R[1+\varepsilon A^{(1)}+\varepsilon^2 A^{(2)}+\dots], \tag{3}$$

де

$$A^{(1)}=\sum_{m=2}^{N} m[\alpha_m \cos(m-1)\beta-\gamma_m \sin(m-1)\beta].$$

Безрозмірний радіус кривини $\rho=\frac{R_2}{R}$ теж зображається у вигляді розкладу за малим параметром ε

$$\frac{1}{\rho}=[1+\varepsilon\rho^{(1)}+\dots]; \qquad \rho=[1-\varepsilon\rho^{(1)}+\dots], \tag{4}$$

де

$$\rho^{(1)}=\sum_{m=3}^{N} m(m-2)[\alpha_m \cos(m-1)\beta-\gamma_m \sin(m-1)\beta].$$

Систему комплексних рівнянь теорії оболонок В.В.Новожилова [4], записану у вибраній системі координат, можна звести до одного рівняння на допоміжну функцію $\widetilde{T}=\widetilde{T}_1+i\widetilde{T}_2$

$$\Delta(\rho\Delta\widetilde{T})+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{R}{A_2}\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\beta}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial\alpha^2}=i2b^2R\left[-\frac{A_2}{R}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\Delta(\rho q_n)\right] \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (5) шукаємо у вигляді ряду за степенями ε

$$\widetilde{T}=\widetilde{T}^{(0)}+\varepsilon\widetilde{T}^{(1)}+\varepsilon^2\widetilde{T}^{(2)}+\dots \tag{6}$$

Підставляючи розклад (6) у рівняння (5), враховуючи співвідношення (3,4) і прирівнюючи члени при однакових степенях ε, одержуємо

$$\Delta^0\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\widetilde{T}^{(0)}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}^{(0)}}{\partial\alpha^2}=i2b^2R\left[-\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\Delta^0 q_n\right]; \tag{7}$$

$$\Delta^0\Delta^0\widetilde{T}^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\widetilde{T}^{(1)}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}^{(1)}}{\partial\alpha^2}=-\Delta^0\Delta^1\widetilde{T}^{(0)}+\Delta^0\rho^{(1)}\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}-$$

$$-\Delta^1\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}-\frac{\partial}{\partial\beta}\rho^{(1)}\frac{\partial\widetilde{T}^{(0)}}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}A^{(1)}\frac{\partial\widetilde{T}^{(0)}}{\partial\beta}-i2b^2R\Big[\Delta^0(\rho^{(1)}q_n)+$$

$$+A^{(1)}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}-\Delta^1 q_n\Big]. \qquad (8)$$

Тут Δ^0 , Δ^1 - елементи розкладу оператора Δ в ряд за степенями малого параметра

$$\Delta=\Delta^0+\varepsilon\Delta^1+\dots ,$$

$$\Delta^0=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} ,$$

$$\Delta^{(1)}=-\frac{\partial}{\partial\beta}A^{(1)}\frac{\partial}{\partial\beta}-A^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} .$$

Знайшовши $\widetilde{T}^{(i)}$, можна визначити компоненти розкладу за малим параметром комплексних зусиль і переміщень, зробивши розклад по степенях малого параметра у відомих формулах [4] .

Відзначимо, що розв'язки рівнянь нульового, першого і наступних наближень повинні задовольняти відповідним компонентам розкладу граничних умов задачі по степенях малого параметра.

2. Нехай криволінійна циліндрична оболонка, перетин якої має вісь симетрії $\beta=0$ навантажена зовнішнім тиском інтенсивності $p=const$

Уважатимемо, що граничні умови задачі такі, що в нульовому наближенні одержуємо осесиметричну задачу для колового циліндра радіуса R . Цій вимозі задовольняє ряд крайових задач, серед яких задача спряження циліндра з пластинкою (плоским днищем).

Отже, розв'язок задачі нульового наближення $\widetilde{T}^{(0)}=\widetilde{T}^{(0)}(\alpha)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{d^4\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^4}+i2b^2\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}=0, \qquad (9)$$

звідси

$$\widetilde{T}^{(0)}=\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2\alpha+\widetilde{C}_3e^{\kappa\alpha}+\widetilde{C}_4e^{-\kappa\alpha}. \qquad (10)$$

Підставляючи розв'язок (10) у рівняння (8), дістаємо

$$\Delta^0\Delta^0\widetilde{T}^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\widetilde{T}^{(1)}+i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}^{(1)}}{\partial\alpha^2}=\Delta^0\rho^{(1)}\Delta^0\widetilde{T}^{(0)}+i2b^2Rp\Delta^0\rho^{(1)} . \qquad (11)$$

Розв'язок останнього рівняння зобразимо у вигляді

$$\widetilde{T}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\left[\varphi_m(\alpha)+f_m(\alpha)(m-2)m\right]\cos(m-1)\beta=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{T}_m^{(1)}(\alpha)\cos(m-1)\beta, \quad (12)$$

де

$$f_m(\alpha)=G_1^m+G_3^m\cdot e^{\kappa\alpha}+G_4^m e^{-\kappa\alpha},$$

а через $\varphi_m(\alpha)$ позначено загальний розв'язок рівняння

$$\varphi_m^{IV}+2\left[i\beta^2-(m-1)^2\right]\varphi_m^{II}+\left[(m-1)^4-(m-1)^2\right]\varphi_m=0. \quad (13)$$

Тут G_1^m, G_3^m, G_4^m – постійні, що визначаються зі співвідношень

$$\begin{aligned}
&G_1^m\left[(m-1)^2-1\right]=-i2\beta^2Rp,\\
&G_3^m\left[\kappa^4-2\kappa^2(m-1)^2+2i\beta^2\kappa^2+(m-1)^4-(m-1)^2\right]=\left[\kappa^4-\kappa^2(m-1)^2\right]\widetilde{C}_3,\\
&G_4^m\left[\kappa^4-2\kappa^2(m-1)^2+2i\beta^2\kappa^2+(m-1)^4-(m-1)^2\right]=\left[\kappa^4-\kappa^2(m-1)^2\right]\widetilde{C}_4.
\end{aligned} \quad (14)$$

Комплексні переміщення нульового наближення записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
&\widetilde{U}^{(0)}=\frac{R}{E\delta}\left\{pR(1+\mu)\alpha+\widetilde{C}_3e^{\kappa\alpha}\left(\frac{1}{\kappa}-i\frac{(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa\right)+\widetilde{C}_4e^{-\kappa\alpha}\left(-\frac{1}{\kappa}+i\frac{(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa\right)\right\};\\
&\widetilde{V}^{(0)}=0;\\
&\widetilde{W}^{(0)}=\frac{R}{E\delta}\left\{-(1+\mu)pR+\widetilde{C}_3e^{\kappa\alpha}\left[\frac{i(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa^2-\mu\right]+\widetilde{C}_4e^{-\kappa\alpha}\left[\frac{i(1+\mu)}{2\beta^2}\kappa^2-\mu\right]\right\}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Приймаємо, що постійні $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ дорівнюють нулеві, оскільки вони визначають переміщення оболонки як жорсткого цілого.

Для переміщень першого наближення одержуємо формули

$$\begin{aligned}
&\widetilde{W}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{W}_m^{(1)}\cos(m-1)\beta;\\
&\widetilde{V}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{V}_m^{(1)}\sin(m-1)\beta;\\
&\widetilde{U}^{(1)}=\sum_{m=2}^{N}\widetilde{U}_m^{(1)}\cos(m-1)\beta,
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\widetilde{w}_m^{(1)}\left[1+(m-1)^2\right]=\Bigg\{-\frac{iR(1+\mu)}{2b^2E\delta}\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}+\frac{R}{E\delta}\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}+(1+\mu)\frac{pR^2}{E\delta}+$$

$$+\frac{i2b^2pR^2}{E\delta}+\frac{i2b^2pR^2}{E\delta}\frac{\alpha^2}{2}(m-1)^2-\widetilde{w}^{(0)}\Bigg\}\alpha_m(m-2)m+$$

$$+\left[\frac{Ri(1+\mu)}{2b^2E\delta}-\frac{R}{E\delta}\right]\frac{d^2\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha^2}-\left\{\left[\frac{iR(1+\mu)}{2b^2E\delta}-\frac{R}{E\delta}\right](m-1)^2-\left(\frac{2ib^2R}{E\delta}-\mu\frac{p}{E\delta}\right)\right\}\widetilde{T}_m^{(1)};$$

$$\widetilde{v}_m^{(1)}(m-1)=\frac{R}{E\delta}\left[\mu\frac{d^2\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^2}-i2b^2Rp-i2b^2Rp(m-1)\frac{\alpha^2}{2}\right]m(m-2)\alpha_m+$$

$$+\frac{R}{E\delta}\left[i2b^2-(m-1)^2\right]\widetilde{T}_m^{(1)}+\frac{R}{E\delta}\frac{d^2\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha^2}-(m-1)^2\widetilde{w}_m^{(1)};$$

$$\widetilde{u}_m^{(1)}(m-1)^2=-(m-1)\frac{d\widetilde{v}_m^{(1)}}{d\alpha}+\frac{2R(1+\mu)}{E\delta}\Bigg\{-\left[1+\frac{i}{2b^2}(m-1)^2\right]\frac{d\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha}+$$

$$+\frac{i}{2b^2}\frac{d^3\widetilde{T}_m^{(1)}}{d\alpha^3}+\frac{i}{2b^2}(3-m)m\alpha_m\frac{d^3\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha^3}-m\alpha_m\frac{d\widetilde{T}^{(0)}}{d\alpha}\Bigg\}.$$

Л і т е р а т у р а

1. А б д у л р з а е в М. А. Приближенное решение уравнения равновесия некруговых цилиндрических оболочек методом малого параметра. "Труды VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек". М., "Наука", 1966.

2. Б у р м и с т р о в Ф.Е. К вопросу деформации оболочки в виде эллиптического цилиндра, близкого к круговому. Ученые записки Саратовского ун-та, № 19, 1956.

3. М а л к и н а Р. Л. К расчету труб произвольного поперечного сечения. Инженерный сборник, 1954, № 19.

4. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1962.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

ДВОВИМІРНИЙ РОЗПОДІЛ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо густину двовимірного гама-розподілу

$$p(t_1,t_2)=\frac{(\alpha\beta)^{\frac{\nu+1}{2}}}{(1-r^2)r^{\nu-1}\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\alpha t_1+\beta t_2}{1-r^2}}(t_1t_2)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2r\sqrt{\alpha\beta}}{1-r^2}\sqrt{t_1t_2}\right), \quad (1)$$

$$(\alpha>0,\ \beta>0,\ \nu>0,\ 0<r<1;\ t_1>0,\ t_2>0).$$

Густину (1) при $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\nu=\frac{m}{2}$, $(m=1,2,\dots)$ називаємо густиною двовимірного χ^2-розподілу; при $\nu=n$, $(n=1,2,\dots)$ -густиною двовимірного розподілу Ерланга; при $\nu=1$ -густиною двовимірного експонентного розподілу; при $r=0$ - густиною двовимірного гама-розподілу з некорельованими компонентами.

Якщо $\alpha=\beta=1$ та $\nu=\frac{1}{2}$, то густина (1) набирає вигляду

$$p(t_1,t_2)=\frac{1}{\pi\sqrt{(1-r^2)t_1t_2}}e^{-\frac{t_1+t_2}{1-r^2}}ch\left(\frac{2r}{1-r^2}\sqrt{t_1t_2}\right),\ (0<r<1;\ t_1>0,\ t_2>0), \quad (2)$$

оскільки

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,ch\,x .$$

Перша маргінальна густина для (1) дорівнює

$$p(t_1,\cdot)=\frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)}e^{-\alpha t_1}t_1^{\nu-1},\quad (\alpha>0,\ \nu>0;\ t_1>0), \quad (3)$$

а перша умовна густина при фіксованому t_2, $t_2>0$

$$p(t_1|t_2)=\frac{\alpha^{\frac{\nu+1}{2}}}{(1-r^2)r^{\nu-1}(\beta t_2)^{\frac{\nu-1}{2}}}e^{-\frac{\alpha t_1+r^2\beta t_2}{1-r^2}}t_1^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2r\sqrt{\alpha\beta t_2}}{1-r^2}\sqrt{t_1}\right). \quad (4)$$

$$(\alpha>0,\ \beta>0,\ \nu>0;\ t_1>0).$$

Аналогічно записується друга маргінальна густина та друга умовна густина при фіксованому $t_1, t_1 > 0$.

Легко перевірити (порівн. [1]), що зображення густини (1) дорівнює

$$\varphi(z_1, z_2) = \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \beta z_1 + \alpha z_2 + (1-r^2) z_1 z_2} \right)^{\nu}. \qquad (5)$$

Зображення (5) є аналітичною функцією в $C^2_{+0} = \{ \mathrm{Re}\, z_1 > 0, \ \mathrm{Re}\, z_2 > 0 \}$.
Зображення маргінальної густини (3) запишемо

$$\varphi(z_1, 0) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + z_1} \right)^{\nu},$$

а зображення умовної густини (4)

$$\frac{\varphi(z_1, z_2)}{\varphi(0, z_2)} = \left(\frac{\alpha\beta + \alpha z_2}{\alpha\beta + \beta z_1 + \alpha z_2 + (1-r^2) z_1 z_2} \right)^{\nu}.$$

Двовимірному гама-векторові ставиться у відповідність двовимірний випадковий вектор з функцією розподілу

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \beta x_1 + \alpha x_2 + (1-r^2) x_1 x_2} \right)^{\nu}, & (x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0), \\ 0 & \text{— в інших випадках} \end{cases} \qquad (6)$$

На підставі цілковитої монотонності зображення (порівн. [1]) для густини (1) одержуємо вираз

$$\frac{(\alpha\beta)^{\nu} (1-r^2)^{k_1+k_2+\nu} \Gamma(k_1+\nu) \Gamma(k_2+\nu)}{[\alpha + (1-r^2) x_1]^{k_1+\nu} [\beta + (1-r^2) x_2]^{k_2+\nu} \Gamma(\nu) \Gamma(\nu)} F\left(k_1+\nu, k_2+\nu; \nu; \frac{\alpha\beta r^2}{[\alpha + (1-r^2)x_1][\beta + (1-r^2) x_2]} \right),$$

де $F(a, b; c; z)$ – гіпергеометрична функція. Якщо останній вираз пронормувати, то дістанемо шестипараметричну двовимірну густину

$$q(x_1, x_2; \alpha, \beta, \nu, r, k_1, k_2) =$$

$$= \frac{(k_1+\nu-1)(k_2+\nu-1)\, \alpha^{k_1+\nu-1} \beta^{k_2+\nu-1} (1-r^2)^2}{F(k_1+\nu-1, k_2+\nu-1; \nu; r^2)} \cdot \frac{F\left(k_1+\nu, k_2+\nu; \nu; \dfrac{\alpha\beta r^2}{[\alpha+(1-r^2)x_1][\beta+(1-r^2)x_2]}\right)}{[\alpha + (1-r^2) x_1]^{k_1+\nu} [\beta + (1-r^2) x_2]^{k_2+\nu}}, \qquad (7)$$

$$(\alpha > 0, \ \beta > 0, \ \nu > 0, \ 0 \leq r < 1; \ k_1 = 1, 2, \ldots; \ k_2 = 1, 2, \ldots; \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0).$$

Розподіл заданий густиною(7) назвемо двовимірним розподілом гіпергеометричної функції, щоб не сплутувати з дискретним гіпергеометричним розподілом.

При $r = 0$ густина (7) стає добутком двох одновимірних густин Берра [2] . Розподіли асиметрії й ексцесу у вибірках з нормальної популяції мають одновимірні густини, що виражаються гіпергеометричною функцією [3] . Це показує, що розподіл з густиною (7) може застосовуватися у математичній статистиці.

Розподіли (6) і (7) виведено на основі відповідних властивостей зображення (5) густини (1). Аналогічно до того, як для густини (1) записано густини (3) і (4), можна записати маргінальні й умовні густини відповідні густині (7) двовимірного розподілу гіпергеометричної функції, а також знайти їхні числові характеристики. І густини, і числові характеристики виражаються в термінах гіпергеометричної функції.

Л і т е р а т у р а

1. К в і т І. Д. Зображення випадкового вектора. Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
2. B u r r I. W. Ann. Math. Statist., 1942, 13, 215-232.
3. M c K a y A. T. Biometrika, 1933, 25, 204-210, 411-415.

УДК 517:946

Є.М.ПАРАСЮК, А.І.КАРДАШ

ОДНА ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Як відомо, під оберненою задачею теорії логарифмічного потенціалу розуміють задачу про знаходження форми області за заданим зовнішнім потенціалом і при заданій густині. Аналогічно ставиться обернена задача і для потенціалу простого шару. При цьому можна вважати, що зовнішній потенціал заданий лише на деякій замкненій кривій C , всередині якої знаходиться шукана індукуюча крива γ .

У роботі [1] було запропоновано один простий спосіб знаходження розв'язку вказаної задачі в припущенні, що шукана крива γ симетрична відносно осей координат, а густина μ кусково-стала

$$\mu(\varphi)=\begin{cases}+1, & 0<\varphi<\pi,\\ -1, & -\pi<\varphi<0,\end{cases}$$

де φ - полярний кут. При цьому для простоти роль кривої C відігравало коло з центром у початку координат радіуса R.

Вказаний метод грунтувався на можливості застосування ортогональних рядів до розв'язування інтегро-диференціального рівняння першого роду:

$$\int_0^{2\pi}\mu(\varphi)\ln\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2(\varphi)-2Rr(\varphi)\cos(\theta-\varphi)}}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi=f(\theta), \qquad (1)$$

до якого зводиться названа задача. Тут $r=r(\varphi)$ - полярне рівняння шуканої кривої γ; $f(\theta)$ - задана функція-потенціал на колі C.

Зображаючи функції $r(\varphi)$ і $f(\theta)$ через відповідні ряди Фур'е, після нескладних обчислень рівняння (1) зводиться до безмежної системи трансцендентних рівнянь вигляду

$$g_p(r_0,r_1,r_2,\ldots)=0, \qquad p=0,1,2,3\ldots \qquad (2)$$

де

$$g_p(r_0,r_1,r_2,\ldots)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2+r'^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{2p+1}\sin(2p+1)\varphi\,d\varphi-\frac{2p+1}{4}f_{2p+1}.$$

Тут $r=\sum_{n=0}^{\infty}r_n\cos 2n\varphi$; f_{2p+1} - коефіцієнт Фур'е функції $f(\theta)$.

Далі до системи (2) спочатку застосовують метод редукції, а потім - метод найскорішого спуску. При цьому ($s+1$)-наближення знаходиться за формулою

$$r_n^{(s+1)}=r_n^{(s)}-\alpha\rho_n^{(s)}, \quad n=0,1,2,\ldots,N-1, \qquad (3)$$

де числа $\rho_n^{(s)}$ становлять розв'язок лінійної алгебраїчної системи

$$\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\partial g_p(r_0^{(s)},\dots,r_{N-1}^{(s)})}{\partial r_q} \rho_q^{(s)} = g_p(r_0^{(s)},\dots,r_{N-1}^{(s)}), \tag{4}$$

$p=0,1,2,\dots,N-1$, а число α підбирається з умови

$$\| g(r_0^{(s)},\dots,r_{N-1}^{(s)}\| > \| g(r_0^{(s)}-\alpha\rho_0^{(s)},\dots,r_{N-1}^{(s)}-\alpha\rho_{N-1}^{(s)})\| . \tag{5}$$

Тут

$$\| g(r_0,\dots,r_{N-1}\| = \sum_{p=0}^{N-1} g_p^2(r_0,\dots,r_{N-1}).$$

В [1] наводився приклад, який ілюстрував достатню ефективність такого методу.

Однак вказаний метод має той недолік, що в ньому процес збіжності суттєво залежить від вибору нульового наближення при вибраному N, оскільки можливі локальні мінімуми можуть мати значний вплив на метод найскорішого спуску.

Зокрема, згаданий в [1] приклад не вдалось розв'язати методом спуску, беручи за нульове наближення одиничне коло.

Ми наводимо нижче приклад, який дає підстави твердити, що процес вибору нульового наближення можна удосконалювати шляхом поступового поліпшення наперед вибраного наближення. При цьому метод спуску досить спочатку здійснювати при малому N. Іноді це приводить прямо до кінцевої мети, про що свідчить і пропонований приклад.

На машині "Мінськ-22" ми розв'язували задачу про знаходження замкнутої кривої, що індукує на колі C радіуса $R=5$ функцію-потенціал

$$f(\theta) = 3{,}135 \sin\theta - 0{,}118 \sin 3\theta + 0{,}0101 \sin 5\theta . \tag{6}$$

Нульове наближення вибирали найбільш природним чином: одиничне коло $r_0(\varphi)\equiv 1$. Спуск здійснювали при $N=3$. У результаті були одержані такі наближення (обчислення проводили з точністю 1/512) :

$$r_1(\varphi) = 1{,}323 + 0{,}148\cos 2\varphi + 1{,}299\cos 4\varphi;$$

$$r_2(\varphi) = 0{,}863 + 0{,}358\cdot 10^{-1}\cos 2\varphi + 1{,}683\cos 4\varphi;$$

$$r_3(\varphi) = 0{,}810 - 0{,}250\cos 2\varphi + 1{,}493\cos 4\varphi;$$

$$r_4(\varphi) = 0{,}831 - 0{,}474\cos 2\varphi + 1{,}203\cos 4\varphi;$$

$$r_5(\varphi) = 0.867 - 0{,}588\cos 2\varphi + 1{,}043\cos 4\varphi;$$

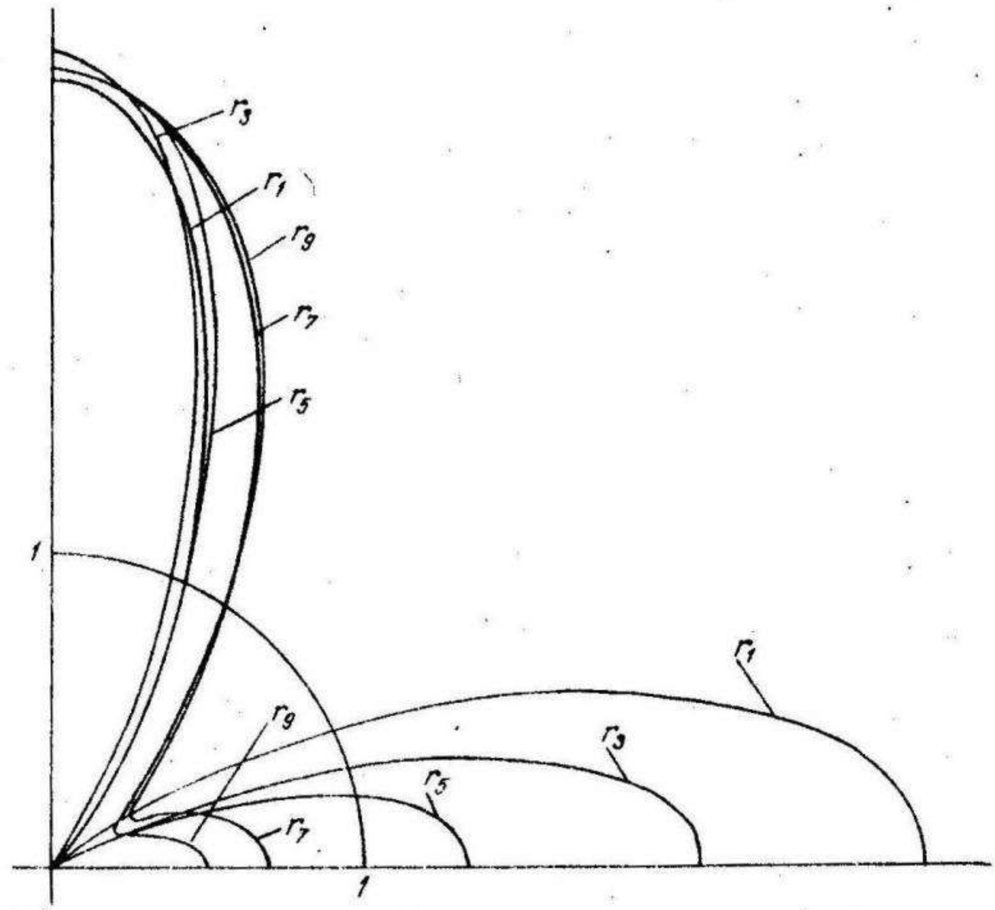
$$r_6(\varphi) = 0{,}917 - 0{,}700\cos 2\varphi + 0{,}875\cos 4\varphi;$$

$$r_7(\varphi) = 1{,}048 - 0{,}893\cos 2\varphi + 0{,}550\cos 4\varphi;$$

$$r_8(\varphi) = 1{,}024 - 0{,}968\cos 2\varphi + 0{,}508\cos 4\varphi;$$

$$r_9(\varphi) = 1{,}003 - 0{,}996\cos 2\varphi + 0{,}501\cos 4\varphi;$$

$$r_{10}(\varphi) = 1{,}000 - 1{,}000\cos 2\varphi + 0.500\cos 4\varphi;$$



На рисунку зображені всі непарні наближення на проміжку $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Як виявилось, досить виконати десять ітерацій, щоб добитися необхідної точності наближення. Про це, зокрема, свідчить значення останньої норми

$$\| g(z_0^{(10)}, z_1^{(10)}, z_2^{(10)}) \| = \| g(1, -1, \tfrac{1}{2}) \| = 0{,}203 \cdot 10^{-11}.$$

Зауважимо, що майже всі наближення одержані при $2 = 1$, крім першого (де $\alpha = \frac{1}{4}$), другого, п'ятого і шостого, що одержані при $\alpha = \frac{1}{2}$.

При цьому на одну ітерацію в середньому використовувалось до 2 хв машинного часу.

При $N > 4$ процес спуску від одиничного кола зупинявся. Це означає, що одиничне коло в цьому випадку є грубим наближенням. При поліпшеному нульовому наближенні ($r_0(\varphi) = r_1(\varphi)$) процес спуску продовжувався і знову приводив до мети. Але при цьому кількість машинного часу на одну ітерацію зросла до 12 хв.

Література

1. Парасюк Е. Н. та ін. Об одном методе решения обратной задачи теории логарифмического потенциала. - "Физика Земли", 1972, № 11

УДК 539.3:534.1

Н.П.ФЛЕЙШМАН, І.І.ОСИПОВА

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕКСЦЕНТРИЧНИМИ РЕБРАМИ

Вплив симетричних ребер жорсткості на коливання ізотропних і трансверсально ізотропних пластинок досліджувався в багатьох роботах [6,3,1] та інші.

Ми розглядаємо вільні коливання прямокутної ізотропної пластинки товщини h , шарнірно обпертої по двох паралельних сторонах $x = 0$, $x = a$ і підкріпленої різними ізотропними тонкими пружними ексцентричними опорними ребрами з іншого матеріалу по краях $y = \pm b$ (рис. 1).

Осі ребер паралельні серединній площині пластинки xoy і розміщені від неї на віддалі z_k $(k = 0,1)$ відповідно.

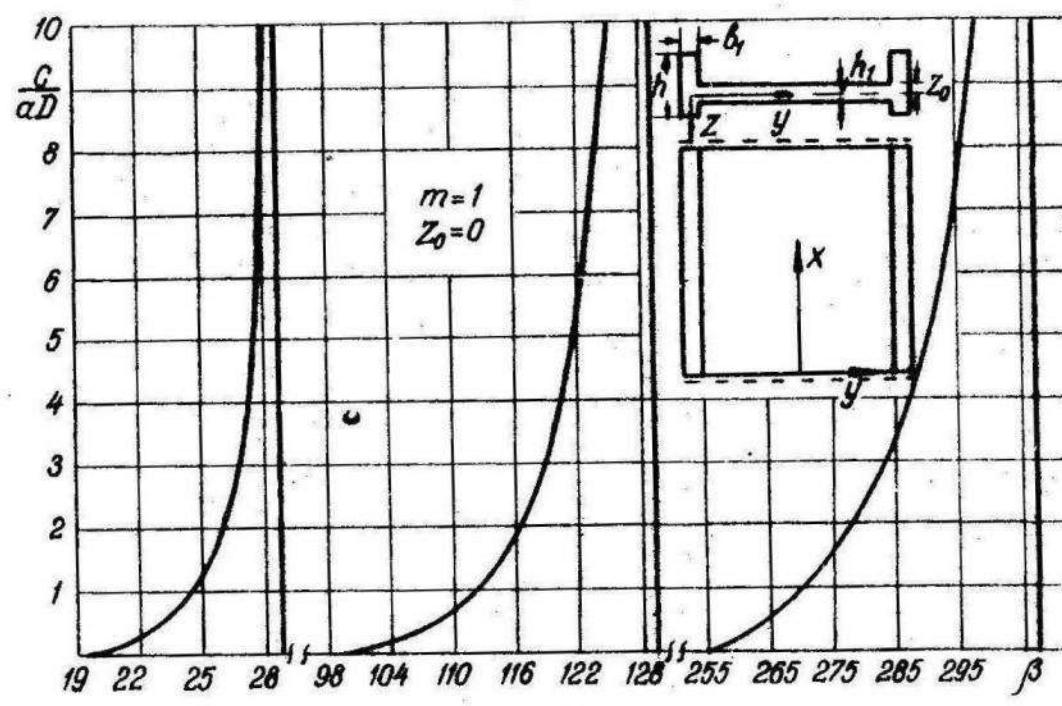


Рис. 1

Якщо знехтувати тангенціальними силами інерції, то диференціальні рівняння вільних поперечних коливань тонкої пластинки в безрозмірних координатах $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$ записуються у вигляді [6]:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \frac{q a^4}{g D}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = 0, \qquad (2)$$

де $W(\xi, \eta, t)$ - прогин точки (ξ, η); $\frac{q}{g} = \rho h$ - маса пластинки, віднесена до одиниці поверхні; Φ - функція напружень Ері; $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$ - циліндрична жорсткість пластинки; μ - коефіцієнт Пуассона.

На непідкріплених краях $x = 0$, $x = a$ повинні виконуватись умови рівності нулеві прогину W, згинального моменту, нормального напруження і дотичного переміщення [4] :

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_x = 0, \quad v = 0. \tag{4}$$

Якщо знехтувати масою ребер, то на краях $y = (-1)^\kappa b$ $(\kappa = 0, 1)$ повинно бути

$$(-1)^\kappa C_\kappa \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = D\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - h z_\kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$(-1)^\kappa B_{2\kappa}\left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + (2+\mu)\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} - E z_\kappa \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right] = Eh\,\Phi, \tag{5}$$

$$(-1)^\kappa E^{-1}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + E z_\kappa \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{h}{F_\kappa E_\kappa},$$

$$W = 0.$$

Тут C_κ, $E_\kappa F_\kappa$, $B_{2\kappa}$ - жорсткості ребер при крученні, розтягу і згині в горизонтальній площині.

Наші умови (5) відрізняються від умов, одержаних в [2], наявність деяких додаткових членів. При $z_\kappa = 0$, тобто для симетричних ребер, вони збігаються з умовами [5] (стор. 362) після належного інтегрування останніх.

Система рівнянь (1)-(2) разом з граничними умовами (5) утворює вихідну крайову задачу про власні поперечні коливання пластинки.

Розв'язок рівняння (1), який задовольняє граничні умови (3), шукається у вигляді

$$W(\xi, \eta, t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sum_m Y_m(\eta)\sin m\pi\xi \tag{6}$$

Підставляючи розв'язок (6) у рівняння (1), одержуємо звичайне диференціальне рівняння, розв'язок якого $Y_m(\eta)$ характеризує форми вільних коливань і має вигляд

$$Y_m(\eta) = A_m \operatorname{sh} s_{1m}\eta + B_m \operatorname{ch} s_{1m}\eta + C_m \operatorname{sh} s_{2m}\eta + \\ + D_m \operatorname{ch} s_{2m}\eta. \tag{7}$$

Тут

$$s_{1m} = -s_{3m} = \sqrt{m^2\pi^2 - \beta},$$

$$s_{2m} = -s_{4m} = \sqrt{m^2\pi^2 + \beta},$$

$$\beta^2 = \frac{a^4 \bar{q}\,\bar{\omega}^2}{gD}.$$

Розв'язок рівняння (2) записується у вигляді

$$\Phi(\xi,\eta) = \sum_m f_m(\eta) \sin m\pi\xi, \tag{8}$$

де

$$f_m(\eta) = K_m \operatorname{ch} m\pi\eta + L_m m\pi\eta \operatorname{sh} m\pi\eta + \\ + N_m \operatorname{sh} m\pi\eta + P_m m\pi\eta \operatorname{ch} m\pi\eta. \tag{9}$$

Із граничних умов (5) одержуємо систему восьми алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A_m, B_m, C_m, D_m, K_m, L_m, N_m і P_m функцій (7) та (8). Для нетривіальності розв'язку задачі прирівнюємо до нуля визначник цієї системи, елементи якого виражаються через шукану частоту і залежать від відносних жорсткостей ребер та їх ексцентриситетів.

Отримане при цьому рівняння є квадратним алгебраїчним рівнянням відносно кожного з двох ексцентриситетів Z_K. Розв'язуючи його для випадку однакових ребер ($Z_0 = Z_1 = Z_0$), знаходимо при $C_K = C$, $B_{2K} = B_{20}$, $E_K F_K = E_0 F_0$.

$$\sqrt{\frac{m\pi R_3}{6(1-\mu^2)R_1 R_2}} = \frac{z_0}{h}. \qquad (10)$$

Вирази для функцій R_1, R_2, R_3 наведені нижче відповідно для симетричних і антисиметричних (відносно осі OX) коливань квадратної пластинки:

$$R_1 = S_{2m} \begin{matrix} th \\ cth \end{matrix} \left(\frac{S_{2m}}{2}\right) - S_{1m} \begin{matrix} th \\ cth \end{matrix} \left(\frac{S_{1m}}{2}\right),$$

$$R_2 = 4 \begin{matrix} ch^2 \\ sh^2 \end{matrix} \left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{ahE}{m\pi E_0 F_0}(sh\, m\pi \pm m\pi), \qquad (11)$$

$$R_3 = \frac{\mu}{2}\left[\frac{C}{aD} \cdot R_1 + \frac{2\beta}{(m\pi)^2}\right]\left[(1+\mu)^2 m\pi + (\mu^2 - 2\mu - 3)\, sh\, m\pi - \right.$$

$$\left. - 4\frac{ahE}{m\pi E_0 F_0} \begin{matrix} sh^2 \\ ch^2 \end{matrix} \left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{a^3 h E}{(m\pi)^3 B_{20}} R_2\right].$$

Формула (10) вигідна для чисельного аналізу впливу ексцентриситету на частоту власних поперечних коливань пластинки.

Для випадку квадратної пластинки зі стороною a, підкріпленою опорними ребрами прямокутного перерізу ($h_1 \times b_1$), при $h_1 = 3b_1$, $b_1 = 0{,}08a$, $h_1 = 3h$, $\mu = 0{,}3$ досліджено частоти власних симетричних коливань залежно від відносної жорсткості на кручення підкріплюючих ребер.

На рис. 1,2 для значень $m = 1$ та $m = 2$ побудовано графіки трьох перших частот пластинки з симетричними ребрами ($z_0 = 0$) залежно від параметру жорсткості C/Da.

Аналіз графіків (рис. 1,2) показує, що, як і слід чекати, зі збільшенням жорсткості ребер на кручення зростають відповідні частоти власних коливань.

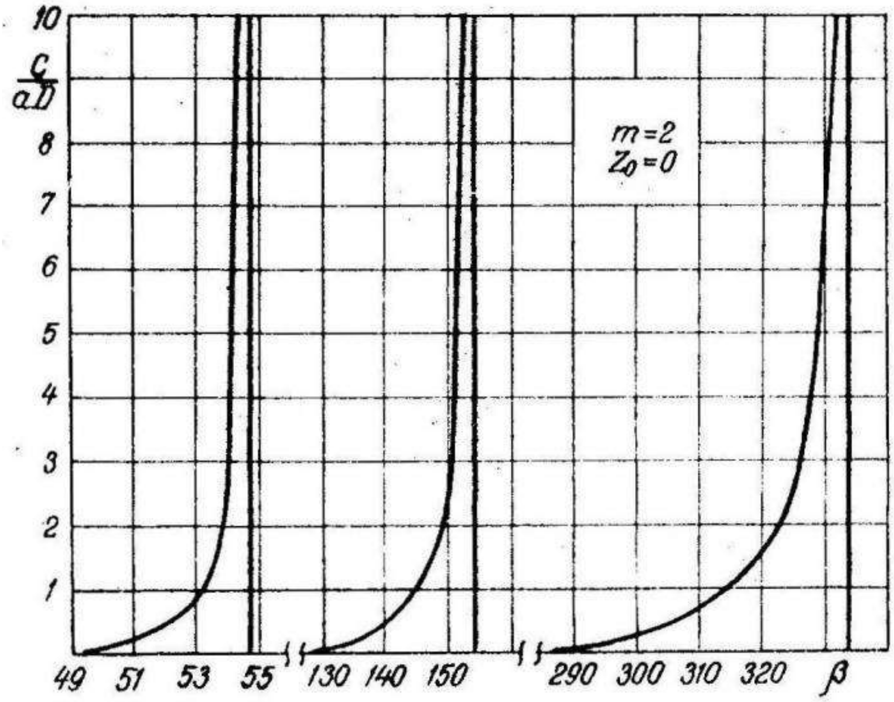

10
c/aD
8
7
6
5
4
3
2
1
m=2
Z0=0
49 51 53 55 130 140 150 290 300 310 320 β

Рис. 2

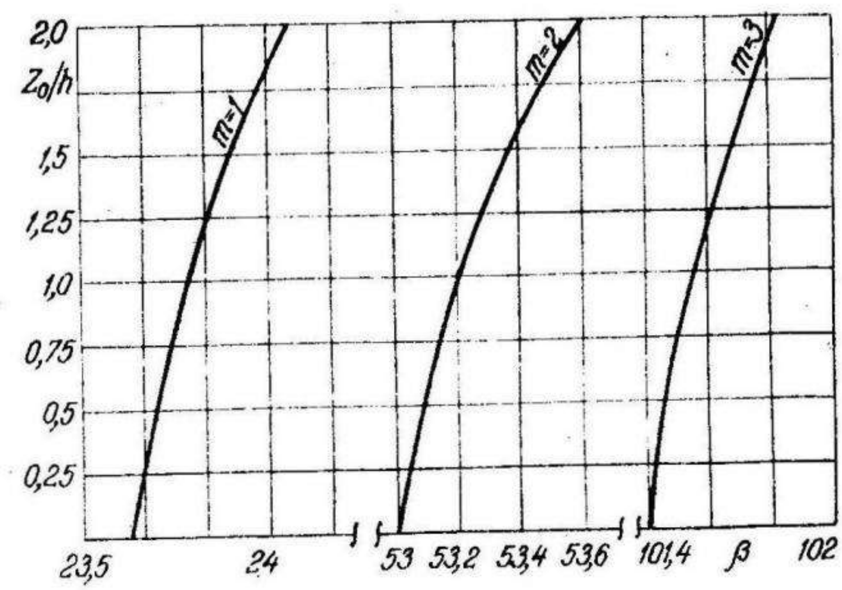

2,0
Z0/h
1,5
1,25
1,0
0,75
0,5
0,25
m=1
m=2
m=3
23,5 24 53 53,2 53,4 53,6 101,4 β 102

Рис. 3

При $C/Da > 8$, наприклад, для визначення розглянутих частот, з точністю до 5%, можна вважати ребро абсолютно жорстким $(C=\infty)$.

З метою дослідження впливу ексцентриситету z_0 на величину частот власних коливань квадратної пластинки на рис. 3, 4 побудовано графіки залежності основної частоти від параметра z_0/h для двох значень жорсткостей ребра на кручення $C=0{,}69aD$; $C=1{,}25aD$.

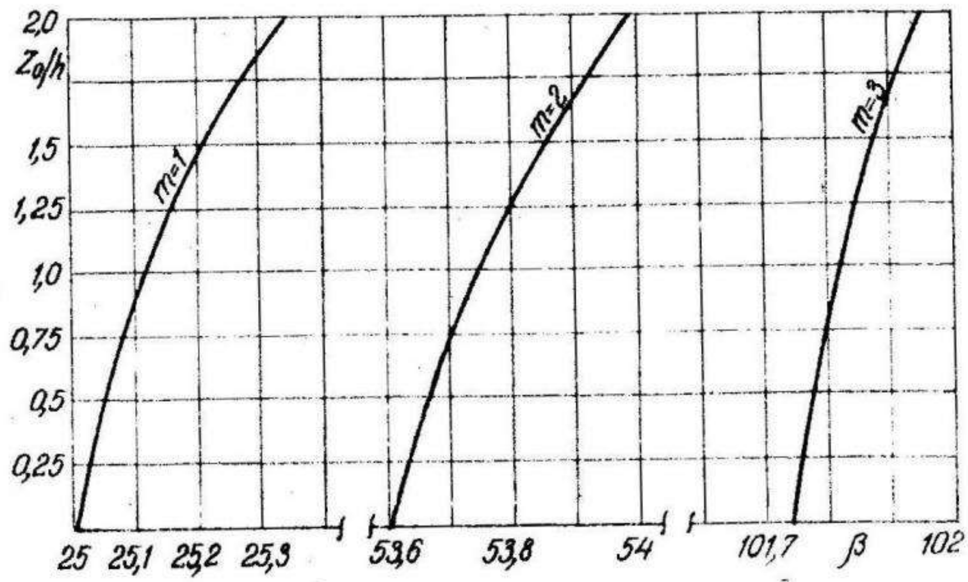


Рис. 4

Графіки показують (рис. 3,4), що відносний вплив ексцентриситету ребра на частоту коливань пластинки не більше ніж 2% при $z_0/h \leq 2$. При врахуванні маси ребер цей вплив буде, очевидно, ще меншим.

Література

1. Ларионова Г. И. Свободные колебания прямоугольной трансверсально изотропной пластинки, подкрепленной ребрами жесткости, с учетом инерции вращения и сдвига. - Труды II Саратовской областной конференции молодых ученых. "Теория расчета и надежность приборов", Изд-во Саратов. ун-та, 1969.

2. Лившиц Я. Д. Изгиб гибких пластин, эксцентрично защемленных в упругом контуре.- Труды IУ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1964.

3. Огибалов П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. Изд-во Московского ун-та, 1958.

4. Папкович П. Ф. Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939.

5. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, "Наукова думка", 1964.

6. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Киев, Изд-во АН УССР, 1956.

УДК 539.3

А.Г. ЗІНЕВИЧ

ПЛАСТИНКА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ, КРАЙ ЯКОГО ПІДКРІПЛЕНО РЕБРОМ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Внаслідок нерівномірності концентрації напружень вздовж непідкріплених отворів слід чекати, що раціонально підібрані підкріплюючі елементи змінного перерізу дозволять з меншою затратою матеріалу добитись зниження розрахункових напружень. Для цього ми розглядаємо безмежно однорідну ізотропну пластинку постійної товщини з криволінійним отвором, край якого підкріплено тонким кільцем змінного перерізу з іншого матеріалу. Кільце має жорсткість на розтяг (стиск) $G_1(s)$ і на згин у своїй площині $G_2(s)$.

1. Припускаємо, що на лінії спаю пластинки з кільцем, ототожнюваної з віссю останнього, виконуються умови спряження роботи [3]. Будемо вважати за невідому функцію градієнтів переміщень

$$U(\sigma)+iV(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(a_k+ib_k)\sigma^{k}+(\bar{a}_k+i\bar{b}_k)\sigma^{-k}\right], \qquad (1)$$

через яку зміщення U, V виражаються за формулою

$$g(\sigma)=u+iv=\frac{1}{2\mu hR}\int_{1}^{\sigma}(U+iV)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma+const. \qquad (2)$$

Розв'язуючи другу основну задачу плоскої теорії пружності для цієї пластинки в припущенні, що функція $g(\sigma)$ задана, маємо [2]:

$$\varphi(\zeta)=\frac{2\mu}{\varkappa}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-Q(\zeta). \tag{3}$$

Тут прийняті ті ж позначення, що й у [1]. Зауважимо, що для випадку безмоментного кільця, тобто коли $\delta_2(\sigma)=0$, відповідні граничні умови [3] за відсутності сил на контурі отвору суттєво спрощуються до вигляду

$$\begin{gathered}F_2(\sigma)/R\delta_1(\sigma)-Re[(u+iv)/\omega'(\sigma)]=0,\\ F_1(\sigma)=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Шляхом додавання граничних умов першої і другої основних задач плоскої теорії пружності [1] функції $F_1(\sigma)$ і $F_2(\sigma)$ можна виразити таким чином

$$-\frac{i\sigma\,\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}(F_1+iF_2)=(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-2\mu g(\sigma). \tag{5}$$

Підставляючи вирази (5) і (1) у граничні умови [3], одночасно розкладаємо в комплексні ряди Фур'є всі відомі функції та праві частини.

Внаслідок порівняння коефіцієнтів при однакових степенях σ, одержуємо квазірегулярну безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих комплексних коефіцієнтів a_k, b_k функції (1).

2. Як приклад розглянемо розтяг пластинки з коловим отвором радіуса R, край якого L підкріплено ребром змінного перерізу. Край отвору вільний від зовнішніх зусиль. Граничні умови (1) для цього випадку при $\omega(\zeta)=R\zeta$ запишемо у вигляді (див. позначення роботи [1])

$$\begin{gathered}\delta_1(\sigma)U(\sigma)-F_2(\sigma)+i\int\limits_1^{\sigma}\frac{F_1(\sigma)}{\sigma}d\sigma=0,\\ \delta_2(\sigma)\left[V'(\sigma)+iU(\sigma)\sigma\right]+\frac{1}{\sigma}\int\limits_1^{\sigma}\frac{F_1(\sigma)}{\sigma}d\sigma=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Припускаємо, що $\delta_1\neq 0$ і $\delta_2\neq 0$ всюди на L. Зобразимо величини δ_1^{-1} і δ_2^{-1} рядами Фур'е з відомими коефіцієнтами

$$\delta_2^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(\sigma^n + \sigma^{-n}), \qquad \delta_1^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} N(\sigma^n + \sigma^{-n}) . \tag{7}$$

Можна показати, що у випадку геометричної і силової симетрії дійсна та уявна частина функції (1) матимуть вигляд

$$U(\sigma) = \sum_{\kappa=0,2,4} a_\kappa (\sigma^\kappa + \sigma^{-\kappa}), \qquad V(\sigma) = \sum_{\kappa=2,4}^{\infty} b_\kappa (\sigma^\kappa + \sigma^{-\kappa}). \tag{8}$$

Виключаючи функції $F_1(\sigma)$ і $F_2(\sigma)$ з граничних умов (6) з врахуванням співвідношень (2), (3), (8) та (5), а також розкладів (7) остаточно одержимо дві безмежні системи рівнянь

$$\begin{aligned} &M_0 a_0 + \sum_{n=2,4}^{\infty} A_{n0} a_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} B_{n0} b_n = K_{10} ; \\ &2M_0 a_0 + \sum_{n=2,4}^{\infty} A_{n2} a_n + \sum_{n=4,6}^{\infty} B_{n2} b_n = K_{1m} ; \qquad m = 2, 4, \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2,4}^{\infty} C_{nm} b_n + \sum_{n=4,6}^{\infty} D'_{n2} a_n = K_{22} ; \\ &\sum_{n=2,4}^{\infty} C_{nm} b_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} D_{nm} a_n = K_{2m} ; \qquad m = 4, 6, \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{n=2,4}^{\infty} C_{n0} b_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} D_{n0} a_n = K_{20} . \tag{11}$$

Рівняння (11) служить для визначення постійного доданка у формулі (2). Відомі коефіцієнти A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}, K_{1m}, K_{2m} не наводимо тут через нестачу місця.

Квазірегулярну систему (9)-(10) відносно коефіцієнтів a_κ і b_κ можна розв'язувати методом редукції. Знайшовши коефіцієнти a_κ і b_κ напруження визначаємо за відомими формулами.

3. Якщо підкріплююче ребро достатньо тонке і має тільки жорсткість на розтяг (стиск) $G(s)$, тобто $\delta_2(s) = 0$, то на лінії спаю L вико-

нуються граничні умови (4). Поступаючи так само, як і в першому випадку, одержимо дві квазірегулярні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_n, b_n функцій (8).

Розглянемо частковий випадок, коли отвір має форму кола і $\omega(\zeta)=R\zeta$.

Припускаємо, що на безмежності діють розтягуючі зусилля паралельно осі Ox. Тоді можна прийняти [1]

$$\Gamma=\bar{\Gamma}=\frac{1}{4}, \qquad \Gamma'=\bar{\Gamma}'=-\frac{1}{2}. \tag{12}$$

З другого рівняння (4) знаходимо зв'язок між коефіцієнтами a_k і b_k

$$\begin{gathered}(\varkappa-3)a_2+3(1+\varkappa)\Gamma'R=(\varkappa+3)b_2,\\ \alpha_n a_n=\beta_n b_n \qquad n=4,6,\ldots\end{gathered} \tag{13}$$

Тут

$$\alpha_n=\frac{\varkappa(n-1)+(n+1)}{\varkappa(n^2-1)}\quad;\qquad \beta_n=\frac{\varkappa(n-1)+(n+1)}{\varkappa(n^2-1)}.$$

З першого рівняння (4), враховуючи (13) і перше співвідношення (7), одержуємо безмежну систему рівнянь

$$\begin{gathered}a_0+2N_0+\sum_{n=2}^{\infty}B_nN_na_n=K_0,\\ a_m+2N_ma_0+\sum_{n=2}^{\infty}B_n\left[N_{n+m}+N_{|n-m|}+\delta_{nm}A_0\right]a_n=K_m \qquad m\geq 2.\end{gathered}$$

Тут

$$2K_0=C_4N_0+\frac{4C_3}{\varkappa}N_2,\qquad C_4=2(C_1-2C_3),\qquad C_3=\frac{1}{4}(1+\varkappa)\Gamma'R,$$

$$2K_2=C_4N_2+\frac{\alpha_2+\beta_2}{\beta_2}\cdot\frac{4C_3}{\varkappa}(2N_0+N_4),\qquad C_1=(1+\varkappa)R\left(\Gamma+\frac{1}{2}\Gamma'\right),$$

$$2K_m=C_4N_m+\frac{4C_3}{\varkappa}(N_{m-2}+N_{m+2}),\qquad B_n=\frac{\beta_n^2-\alpha_n^2}{2\beta_n},$$

$\delta_{nm}=1$ коли $n=m$, і $\delta_{nm}=0$ $n\neq m$.

Легко показати, що, прийнявши $\delta_1^{-1}(\sigma)=2A_0=const$, одержимо випадок, розглянутий у [2]. Якщо прийняти, що відносна жорсткість на розтяг міняється за законом

Таблиця 1

α	β	$\gamma°$	$\frac{(\sigma_\theta)_{max}}{P}$	$\frac{\sigma_\theta(\theta^0)}{P}$	$\frac{\sigma_\theta(\frac{\pi}{2})}{P}$
0.05	1.0	90	1.138	-0,668	1.138
	8.0	90	1.110	-0,66	1.112
0.15	1.0	90	1.187	-0.657	1.187
	8.0	65	1.239	-0.820	1.127
0.3	1.0	90	1.350	-0.682	1.350
	8.0	65	1.572	-1.045	1.245
0.35	1.0	90	1.422	-0.697	1.422
	8.0	65	1.666	-1.104	1.301
0.45	1.0	90	1.581	-0.734	1.581
	8.0	65	1.831	-1.202	1.430
0.55	1.0	90	1.750	-0.726	1.750
	8.0	65	1.969	-1.278	1.573
0.65	1.0	90	1.922	-0.821	1.922
	8.0	65	2.083	-1.388	1.722
0.75	1.0	90	2.088	-0.866	2.088
	8.0	65	2.132	-1.365	1.796
0.85	1.0	90	2.245	-0.909	0.017
	8.0	70	2.269	-1.427	2.319
0.95	1.0	90	2.359	-1.033	2.359
	8.0	70	2.357	-1.460	2.157

Таблиця 2

θ	$\sigma_\theta(\theta)$
0	-0,663
5	-0,641
10	-0.578
15	-0.478
20	-0.345
25	-0.188
30	-0.148
35	0.164
40	0.341
45	0.506
50	0.655
55	0.782
60	0.886
65	0.967
70	1.026
75	1.066
80	1.092
85	1.106
90	1.110

$$\delta_1^{-1}(\sigma) = H_1 + H_2 \cos 2\theta ,$$

то для випадку ребра з прямокутним поперечним перерізом висотою h_1 і шириною b матимемо

$$H_1 = \alpha(\beta + 1) \ , \quad H_2 = \alpha(\beta - 1) .$$

Тут

$$\alpha = C_* \left(\frac{h}{h_1}\right)_{max} , \quad \beta = \frac{(h_1)_{max}}{(h_1)_{min}} ,$$

$$C_* = ER / 2E_1 b(1+\nu) .$$

У табл. 1,2 наведено результати обчислень на ЕОМ "Мінськ-22" напружень σ_θ у точках контура L

$$E/E_1 = 1, \quad b/R = 0{,}1 , \quad \nu = 0{,}3 , \quad \alpha = 0{,}05 \div 1{,}0 , \quad \beta = 1; 8 .$$

Через γ^0 позначимо кут (в градусах), що визначає точки $(\sigma_\theta)_{max}$ на контурі. У табл. 2 показано розподіл напружень σ_θ на L, для випадку $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 8$. Отже, при майже одному і тому ж напруженні висота підкріплення в точці $\theta = 0^\circ$ у вісім разів менша, ніж висота підкріплення в точці $\theta = \frac{\pi}{2}$, що відповідає зменшенню об'єму підкріплюючого матеріалу на 64,5% (табл. 1). Це свідчить про те, що відповідним підбором підкріплення можна досягти підсилення конструкції з меншою затратою підкріплюючого матеріалу.

Задача, аналогічна розглянутій в [4] з використанням тих же, по суті, граничних умов, але записаних в більш складному вигляді. Внаслідок цього задача зводиться там до розв'язку складної безмежної системи алгебраїчних рівнянь, про квазірегулярність якої нічого не говориться.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

2. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, "Наукова думка", 1966.

3. Флейшман Н.П., Старовойтенко Е.В. Решение задач плоской теории упругости для пластинки с подкрепленной криволинейной границей. – /Сопротивление материалов и теория сооружений", вып. XX 1973.

4. I.K. Dhirt and I.I. Brock. A new method of reinforcing a hole effecting large weight Savings. Int. Solids Structure, Vol. 6. 1970.

УДК 24.2.531.1.

Ч.Н.КОЙФМАН

КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ В ПЛАНІ ПОЛОГОЇ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянемо задачу про рух ортотропної оболонки подвійної кривизни під дією рухомого навантаження в середовищі з опором. Як відомо [2], ця задача зводиться до інтегрування рівняння

$$\frac{1}{R^4}\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4 F+\frac{Ehm_2}{Dn_2}\Delta_k\Delta_k F+\frac{\varepsilon_1}{Dn_2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\Delta_4 F+ \tag{1}$$

$$+\frac{\rho h}{Dn_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\Delta_4 F=\frac{ZR^4}{Dn_2},$$

де

$$Z=q_0-m_q\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2v}{R}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}+\frac{v^2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\Delta_3\Delta_4 F. \tag{2}$$

Всі позначення такі ж, як і в [2].

Припустимо, що прямокутна в плані полога оболонка оперта шарнірно по краях $\eta=0$ та $\eta=\eta_1$. На двох інших краях граничні умови довільні. Після виконання синус-перетворення Фур"є [3] за змінною η над рівнянням [1] з врахуванням /2/ одержуємо

$$\left[\frac{1}{R^4}\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}-\beta\frac{j^2\pi^2}{\eta_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+n^2\frac{j^4\pi^4}{\eta_1^4}\right)+\frac{m_q+\rho h}{Dn_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_1}{Dn_2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2m_q v}{Dn_2 R}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}+\frac{m_q v^2}{Dn_2 R^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\times \tag{3}$$

$$\times\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}-\alpha\frac{j^2\pi^2}{\eta_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+m^2\frac{j^4\pi^4}{\eta_1^4}\right)\overline{F}+$$

$$+\frac{Ehm_2}{Dn_2}\left(k_2^2\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}-2k_1k_2\frac{j^2\pi^2}{\eta_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+k_1^2\frac{j^4\pi^4}{\eta_1^4}\right)\bar{F}=\frac{R^4\bar{q}_0}{Dn_2}.$$

Тут

$$\bar{F}=\int_0^{\eta_1}F\sin\frac{j\pi\eta}{\eta_1}d\eta,\quad \bar{q}_0=\int_0^{\eta_1}q\sin\frac{j\pi\eta}{\eta_1}d\eta. \tag{4}$$

Якщо шукати розв"язок рівняння /3/ у вигляді [1]

$$\bar{F}(\xi,j,t)=\varphi(\xi)\cos\omega t+\psi(\xi)\sin\omega t+\chi, \tag{5}$$

де χ - відомий частковий розв"язок, ω - шукана частота коливань, то для комплексної функції $\Phi(\xi)=\varphi(\xi)+i\psi(\xi)$ дістанемо однорідне звичайне диференціальне рівняння восьмого порядку з комплексними коефіцієнтами, характеристичне рівняння якого має вигляд

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{R^4}\left(k^4-\beta\frac{j^2\pi^2}{\eta_1^2}k^2+n^2\frac{j^4\pi^4}{\eta_1^4}\right)-\frac{m_2+\rho h}{Dn_2}\omega^2-\frac{B_1}{Dn_2}\omega i-\right.\\ \left.-\frac{m_2}{Dn_2}\cdot\frac{2v}{R}i\omega k+\frac{m_2v^2}{Dn_2\cdot R^2}k^2\right]\left(k^4-\alpha\frac{j^2\pi^2}{\eta_1^2}k^2+m^2\frac{j^4\pi^4}{\eta_1^4}\right)+\\ +\frac{Ehm_2}{Dn_2}\left(k_2^2k^4-2k_1k_2\frac{j^2\pi^2}{\eta_1^2}k^2+k_1^2\frac{j^4\pi^4}{\eta_1^4}\right)=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Остаточно маємо $\Phi(\xi)=\sum_{i=1}^{8}C_ie^{k_i\xi}$, де k_i - корені рівняння /6/. Після задовольняння умов на краях $\xi=0$ та $\xi=\xi_1$ прирівнюємо до нуля визначник одержаної системи алгебраїчних рівнянь і дістаємо частотне рівняння задачі.

Зокрема, для ортотропної пластинки жорстко затиснутої по краях $\xi=\xi_1$, $\xi=0$ при $B_1=0$ /немає опору середовища/, $\rho h=0$ /рухома стрічка/, $\beta=2n$ /пружні сталі матеріалу задовольняють умову $\sqrt{E_2'/E_1'}+\mu=E_2'/2G$, яка виконується, наприклад, у випадку ізотропної пластинки/ це частотне рівняння

$$\begin{gathered}\left(\delta^2+n\frac{j^2\pi^2}{\eta_1^2}\right)sh\beta_1\xi_1\sin\gamma_1\xi_1+\beta_1\gamma_1(\cos2\delta\xi_1-\\ -\cos\gamma_1\xi_1\,ch\,\beta_1\xi_1)=0,\end{gathered} \tag{7}$$

Тут позначено

$$\beta_1=\sqrt{\lambda_1^2-\left(\delta^2-n\frac{j^2\pi^2}{l_1^2}\right)}\,,\quad \gamma_1=\sqrt{\lambda_1^2+\left(\delta^2-n\frac{j^2\pi^2}{l_1^2}\right)},$$

$$\delta^2=R^2\frac{m_2 v^2}{Dn_2\cdot 4},\qquad \lambda_1^2=R^2\omega\sqrt{\frac{m_2}{Dn_2}}\,.$$

Відзначимо, що у випадку ортотропної шарнірно-опертої по всіх краях пологої оболонки під дією навантаження /2/ /без врахування сил Коріоліса/ частота коливань визначається формулою

$$\omega^2=\left(K_{ij}^2-\frac{m_2}{\rho h}\cdot\frac{i^2\pi^2 v^2}{a^2}\right)\Big/\left(1+\frac{m_2}{\rho h}\right). \tag{8}$$

де K_{ij} – частота вільних коливань оболонки [2] .

Література

1. Горошко О.А., Киба С.П. О собственных и сопровождающих колебаниях одномерной упругой конструкции с подвижной нагрузкой. – "Прикладная механика", 1972, т.8, вып.1.

2. Койфман Ч.Н. Колебания прямоугольной в плане пологой конструктивно ортотропной оболочки. – В сб.: Динамика и прочность машин, вып.8, Изд-во Харьковского ун-та, 1968.

3. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.

УДК 539.311.374.377

Д.В. ГРИЛІЦЬКИЙ

КОНТАКТНА ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ

Плоска контактна пружнопластична задача для ідеального пружнопластичного тіла, яке наслідує умову пластичності Треска-Сен-Венана, вперше поставлена і розв'язана Л.О.Галіним і Г.П.Черепановим [1], які показали, що існує єдиний точний розв'язок задачі, неперервний у напруженнях і розривний в нормальному переміщенні.

У цій статті ми наводимо розв'язок цієї задачі з врахуванням температури штампа при ідеальному тепловому контакті.

Кількість смуг пластичності на границі півплощини під штампом та їх розміщення визначається з фізичних міркувань.

Через L позначимо всю границю півплощини; через L' – сукупність участків границі півплощини, на яких задано вертикальне переміщення; L'' – сукупність смуг пластичності; L''' – границя півплощини зовні штампа. Очевидно, що має місце співвідношення $L = L' + L'' + L'''$.

Позначаючи через σ_s границю текучості матеріалу півплощини на стискання, крайові умови задачі матимуть вигляд:

$$
\begin{gathered}
\sigma_y(x) = \tau_{xy}(x) = 0, \qquad x \in L''' ; \\
\sigma_y(x) = -\sigma_s, \qquad x \in L''; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f'(x), \quad x \in L'; \\
\tau_{xy}(x) = 0, \qquad x \in (L' + L''); \\
T = T(x), \qquad x \in (L' + L''); \quad T(x) = 0, \quad x \in L''',
\end{gathered} \tag{1}
$$

де $f(x)$ – рівняння основи штампа.

Визначимо характер розподілу нормальних напружень під штампом на лінії L' .

Якщо на границі нижньої півплощини задані нормальні та тангенціальні напруження й температура, то має місце така залежність

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{\varkappa-1}{4\mu}\left[\sigma_y(x) + \gamma T(x)\right] + \frac{\varkappa+1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{xy}\,dt}{t-x}\,; \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y=0} = -\frac{\varkappa-1}{4\mu}\tau_{xy}(x) + \frac{\varkappa+1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_y\,dt}{t-x} + \frac{\gamma}{2\pi(\lambda+\mu)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T\,dt}{t-x}\,,$$

де $\gamma = \frac{\alpha E}{1-2\mu} = \alpha(3\lambda + 2\mu)$; α - коефіцієнт лінійного розширення; інші позначення загальноприйняті.

Формули (2) є вихідними під час розв'язування контактних задач теорії пружності й термопружності для півплощини та служать узагальненням відомих результатів Л.О.Галіна [2] .

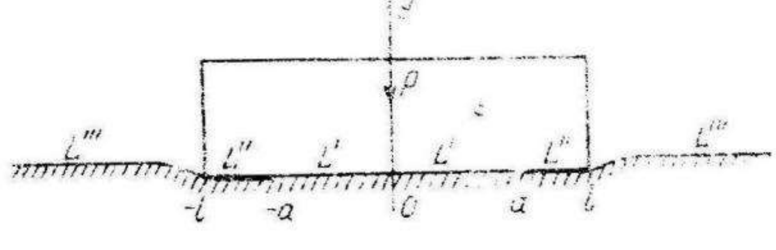
Задовольнивши граничним умовам (1) за допомогою другого співвідношення (2), доходимо до сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_{L'}(\sigma_y + K_0 T)\frac{dt}{t-x} = \frac{4\pi\mu}{\varkappa+1}\varphi(x)\,, \qquad x \in L'. \tag{3}$$

Тут введені позначення

$$K_0 = \frac{2\gamma\mu}{(\varkappa+1)(\lambda+\mu)}\,, \qquad \varphi(x) = f'(x) - \frac{\varkappa+1}{4\pi\mu}\int_{L''}\frac{(K_0 T - \sigma_S)\,dt}{t-x}\,. \tag{4}$$

Рівняння (3) належить до характеристичного й легко обертається.



Як приклад розглянемо задачу про тиск штампа з прямолінійною основою, температура основи якого стала й дорівнює T_0 (див. рисунок).

За допомогою функції

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{a}(\sigma_y+\kappa_0 T_0)\frac{dt}{t-z} \tag{5}$$

рівняння (3) зведемо до задачі лінійного спряження

$$W^+(x)+W^-(x)=-\frac{4\mu i}{\varkappa+1}\varphi(x),\quad x\in(-a,a). \tag{6}$$

Розв'язуючи граничну задачу (6) у класі необмежених функцій [3] та скориставшись умовою рівноваги штампа, одержуємо

$$W(z)=-\frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{z^2-a^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{t^2-a^2}\,\varphi(t)\,dt}{t-z}+\frac{P-2\sigma_s(l-a)-2a\kappa_0 T_0}{2\pi i\sqrt{z^2-a^2}}. \tag{7}$$

Обчислюючи $\varphi(x)$, $W(z)$ і $\sigma_y(x)$, послідовно знаходимо

$$\varphi(x)=-\frac{\varkappa+1}{4\pi\mu}(\kappa_0 T_0-\sigma_s)\left(\ln\frac{x-l}{x+l}-\ln\frac{x-a}{x+a}\right), \tag{8}$$

$$W(z)=\frac{i}{2\pi}(\kappa_0 T_0-\sigma_s)\left[\ln\frac{z-l}{z+l}-\ln\frac{z-a}{z+a}+\ln\frac{\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{l^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}-\sqrt{l^2-a^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(l-a-\sqrt{l^2-a^2})}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+\frac{P-2\sigma_s(l-a)-2a\kappa_0 T_0}{2\pi i\sqrt{z^2-a^2}}, \qquad /9/$$

$$\sigma_y(x)+\kappa_0 T_0=\frac{i}{\pi}(\kappa_0 T_0-\sigma_s)\ln\frac{\sqrt{a^2-x^2}-i\sqrt{l^2-a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+i\sqrt{l^2-a^2}}+$$

$$+\frac{2(\kappa_0 T_0-\sigma_s)(l-a-\sqrt{l^2-a^2})}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{P-2\sigma_s(l-a)-2a\kappa_0 T_0}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad /10/$$

$$x\in(-a,a).$$

Із умови обмеженості тиску $\sigma_y(x)$ у точках $x=\pm a$ знаходимо довжину лінії L'

$$a^2=l^2-\frac{(2\kappa_0 T_0 l-P)^2}{4(\kappa_0 T_0-\sigma_s)^2} \tag{11}$$

З врахуванням останнього результату й після простих перетворень, формула для тиску під штампом набере остаточного вигляду

$$\sigma_y(x) = \frac{2}{\pi}(\kappa_0 T_0 - \sigma_s)\, arctg \frac{2\kappa_0 T_0 \ell - P}{2(\kappa_0 T_0 - \sigma_s)\sqrt{a^2 - x^2}} - \kappa_0 T_0 \qquad (12)$$

$$x \in (-a, a)$$

$$\sigma_y(x) = -\sigma_s, \qquad x \in (-\ell, -a;\ a, \ell).$$

З першої формули (12) можна одержати всі відомі частинні випадки.

Література

1. Галин Л. А., Черепанов Г. П. Контактная упруго-пластическая задача для пластин. ДАН СССР, т. 177, 1967, № 1.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.311

Р.І.МОКРИК, Д.В.ГРИЛІЦЬКИЙ

КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ В ЗАДАЧІ ПРО ТИСК ШТАМПА НА ПРУЖНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ШАР

Тепер розглянуто багато контактних задач теорії пружності про тиск штампа на ізотропний шар великої товщини. Аналогічні задачі для анізотропних матеріалів, зокрема трансверсально ізотропних, розв'язувалися лише в осесиметричному випадку [4], [5], [7], [8].

Ми досліджуємо загальний випадок контактної задачі про тиск гладкого короткого штампа на пружний трансверсально ізотропний шар великої і сталої товщини. При цьому розглядаються два випадки: 1) шар лежить на гладкій неподатливій основі; 2) шар спаяний з неподатливою основою.

Під час розв'язання задачі скористуємося методом послідовних наближень, який застосували В.М.Александров і И.І.Ворович [2] в аналогічній задачі для ізотропного матеріалу. Зауважимо, що вперше задача про тиск штампа на ізотропний шар скінченної товщини розв'язана Й.І.Воровичем і Ю.А.Устиновим [3].

1. Введемо ортогональну систему координат так, щоб площина $x_1 x_2$ збігалася з нижньою площиною шару, а вісь x_3 спрямуємо вертикально вгору.

Нехай Ω - область контакту штампа з шаром товщини h ; $q(x_1,x_2)$ - функція розподілу нуканого контактного тиску під штампом; $\delta(x_1,x_2)$ - зміщення штампа. Вважаємо, що сили тертя між штампом і шаром відсутні. Тоді визначення тиску під штампом зводиться до знаходження функції $q(x_1,x_2)$ з інтегрального рівняння

$$\iint_{\Omega} q(\xi_1,\xi_2) K_j\left(\frac{\rho}{h}\right) d\xi_1 d\xi_2 = 2\pi \Delta_0 h \delta(x_1,x_2); \tag{1.1}$$

$$K_j(\tau) = \int_0^\infty [L_j(u)] J_0(u\tau)\,du; \qquad \rho = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}; \tag{1.2}$$

$$x_1 x_2 \in \Omega; \qquad j = 1,2; \qquad \Delta_0 = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{\sqrt{A_{11}A_{33}}},$$

де $J_0(z)$ - функція Бесселя нульового порядку;

$$L_1(u) = \frac{t_1 t_2 [ch t_1 u - ch t_2 u]}{t_1 sh t_1 u + t_2 sh t_2 u};$$

$$L_2(u) = t_1 t_2 \frac{\lambda_1 t_2 sh t_1 u - \lambda_2 t_1 sh t_2 u}{\lambda_1 t_2^2 ch t_1 u + \lambda_2 t_1^2 ch t_2 u - 4N};$$

$$\lambda_1 = A_{11} + t A_{44}; \quad \lambda_2 = A_{11} - t A_{44}; \quad N = \frac{A_{11}}{A_{33}}(A_{13} + A_{44}),$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})}{A_{33}A_{44}} + 2t}; \qquad t_2 = \sqrt{\frac{A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})}{A_{33}A_{44}} - 2t}; \quad t = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{33}}}$$

A_{ik} - модулі пружності для трансверсально ізотропного матеріалу.

Значення індекса $j=1$ відповідає випадку, коли шар лежить на гладкій жорсткій основі, а $j=2$ - шар нерухомо зчеплений з нею.

2. Якщо d - половина максимальної віддалі між двома точками, що належить Ω, то значення параметра $\lambda=\frac{h}{d}>1$ характеризуватимуть шар відносно великої товщини.

Зобразимо ядро (1.2) інтегрального рівняння (1.1) у вигляді

$$K_j(\tau)=\frac{P_j}{\tau}-\mathcal{F}_j(\tau), \tag{2.1}$$

де

$$\mathcal{F}_j(\tau)=\int_0^\infty [P_j-L_j(u)]J_0(u\tau)du; \tag{2.2}$$

$$P_j=\lim_{u\to\infty} L_j(u).$$

Можна показати, що $\mathcal{F}_j(\tau)$ розкладається в ряд

$$\mathcal{F}_j(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} f_{jk}\,\tau^{2k}, \tag{2.3}$$

де

$$f_{jk}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\int_0^\infty [P_j-L_j(u)]u^{2k}du; \tag{2.4}$$

причому ряд (2.3) рівномірно збігається при $\lambda>\frac{t_1-t_2}{2}$.

Використовуючи (2.1)-(2.3), рівняння (1.1) зводиться до вигляду

$$P_j\iint_\Omega q(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho}=2\pi\Delta_0\delta(x_1,x_2)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{ik}}{h^{2k+1}}\iint_\Omega q(\xi_1,\xi_2)\rho^{2k}d\xi_1 d\xi_2. \tag{2.5}$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.5) у вигляді ряду по степенях $\frac{1}{h}$

$$q(\xi_1,\xi_2)=\sum_{m=0}^{\infty} q_m(\xi_1,\xi_2)h^{-m}. \tag{2.6}$$

Підставляючи (2.6) в (2.5) і прирівнюючи вирази при однакових степенях h, одержимо безмежну систему інтегральних рівнянь:

$$P_j \iint_{\Omega} q_0(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = 2\pi\Delta_0\delta(x_1,x_2); \qquad (2.7)$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_1(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = f_{j0}\iint_{\Omega} q_0(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 ; \qquad (2.8)$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_2(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = f_{j0}\iint_{\Omega} q_1(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 ; \qquad (2.9)$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_3(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = \iint_{\Omega}\left[f_{j0}q_2(\xi_1,\xi_2)+f_{j1}q_0(\xi_1,\xi_2)\rho^2\right] d\xi_1 d\xi_2 ; \qquad (2.10)$$

$$P_j \iint_{\Omega} q_4(\xi_1,\xi_2)\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho} = \iint_{\Omega}\left[f_{j0}q_3(\xi_1,\xi_2)+f_{j1}q_1(\xi_1,\xi_2)\rho^2\right] d\xi_1 d\xi_2 ; \qquad (2.11)$$

. . . .

Співвідношення (2.7) є інтегральним рівнянням задачі про тиск штампа на трансверсально ізотропний півпростір. Вважаємо, що розв'язок його відомий

$$q_0(x_1,x_2) = \Phi(\delta). \qquad (2.12)$$

На основі властивостей однорідності й адитивності оператора Φ розв'язок (2.6) можна записати

$$\frac{1}{\Delta_0}q(x_1,x_2) = \Phi(\tilde{\delta}) + \frac{\Phi(1)}{2\pi P_j \lambda}\left\langle f_{j0}\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P\lambda}+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^2+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^3+\frac{f_{j1}}{\lambda^2}\left\{\left[\mathcal{F}_{20}(\tilde{\delta})+\mathcal{F}_{02}(\tilde{\delta})\right]\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})}{2\pi P_j\lambda}\left[\mathcal{F}_{20}(1)+\mathcal{F}_{02}(1)\right]\right\}+\frac{f_{j0}f_{j1}}{2\pi P_j\lambda^3}\left[\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})\mathcal{F}_{00}(x_1^2+x_2^2)-2\mathcal{F}_{10}(\tilde{\delta})\mathcal{F}_{00}(x_1)-\right.$$

$$\left.-2\mathcal{F}_{01}(\tilde{\delta})\mathcal{F}_{00}(x_2)\right]\Bigg\rangle-\frac{2f_{j1}}{2\pi P_j\lambda^3}\left\{\mathcal{F}_{10}(\tilde{\delta})\Phi(x_1)+\mathcal{F}_{01}(\tilde{\delta})\Phi(x_2)+\right. \qquad /2.13/$$

$$\left.+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})}{2\pi P_j\lambda}\left[\mathcal{F}_{10}(\tilde{\delta})\Phi(x_1)+\mathcal{F}_{01}(1)\Phi(x_2)\right]\right\}+\frac{f_{j1}\mathcal{F}_{00}(\tilde{\delta})\Phi(x_1^2+x_2^2)}{2\pi P_j\lambda^3}\times$$

$$\times\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)$$

$$\tilde{\delta}=\frac{\delta}{d};\qquad \mathcal{F}_{ik}(\tilde{\delta})=\iint_{\Omega}\Phi(\tilde{\delta})\,\xi_1^i\,\xi_2^k\,d\xi_1\,d\xi_2. \qquad /2.14/$$

У формулах (2.13) і (2.14) x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 вважаємо безрозмірними величинами, тобто ті ж самі величини віднесені до характеристики d.

3. У випадку, коли x_1 і x_2 взаємно перпендикулярні осі симетрії області Ω, $\delta(x_1, x_2)$ буде функцією парною по змінних x_1, x_2 і формула (2.13) набирає вигляду

$$q(x_1,x_2)=\Delta_0\tilde{\delta}(x_1,x_2)\Phi(1)\left\{1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^2+\right.$$

$$+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^3+\left(\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right)^4+\frac{f_{j1}}{2\pi P_j\lambda^3}\left[\mathcal{F}_{20}(1)+\mathcal{F}_{20}(1)\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right]+\frac{f_{j0}f_{j1}}{(2\pi P_j)^2\lambda^4}\left[\mathcal{F}_{00}(1)\mathcal{F}_{00}(x_1^2+x_2^2)\right]\Big\}+$$

$$+\frac{f_{j1}\mathcal{F}_{00}(1)\Phi(x_1^2+x_2^2)}{2\pi P_j\lambda^3}\left[1+\frac{f_{j0}\mathcal{F}_{00}(1)}{2\pi P_j\lambda}\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right).$$

Розглянемо тепер як приклад задачу про тиск плоского еліптичного в плані штампа на трансверсально ізотропний шар. Отже, нехай $\mathfrak{R}$ – еліпс з ексцентриситетом e і півосями a, b. Для знаходження операторів Φ та $\mathcal{F}_{ik}$ скористаємося розв'язком задачі про тиск плоского еліптичного в плані штампа на ізотропний півпростір, наведений у [1,6]. Тоді формула для тиску під штампом набере вигляду

$$q(x_1,x_2)=\Delta_0\frac{\tilde{\delta}}{K(e)\sqrt{1-e^2}}\left[1+x_1^2-\frac{x_2^2}{1-e^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\Big\{1+\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}+$$

$$+\left(\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}\right)^2+\left(\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}\right)^3+\left(\frac{f_{j0}}{K(e)P_j\lambda}\right)^4+$$

$$+\frac{2}{3}\frac{f_{j1}}{\chi(1-e^2)P_j\lambda^3}\left[\left(\chi_{20}x_1^2+\chi_{02}\frac{x_2^2}{1-e^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{S_{01}}{S_{00}}(1-e^2)\chi_{20}+\frac{S_{10}}{S_{00}}\chi_{02}\right)\right]\Big\}+O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right),$$

де

$$S_{01}=\frac{E(e)-(1-e^2)K(e)}{e^2(1-e^2)};\qquad S_{10}=\frac{K(e)-E(e)}{e^2};$$

$$S_{02}=\frac{2(2e^2-1)E(e)+(1-e^2)(2-3e^2)K(e)}{3e^4(1-e^2)^2};$$

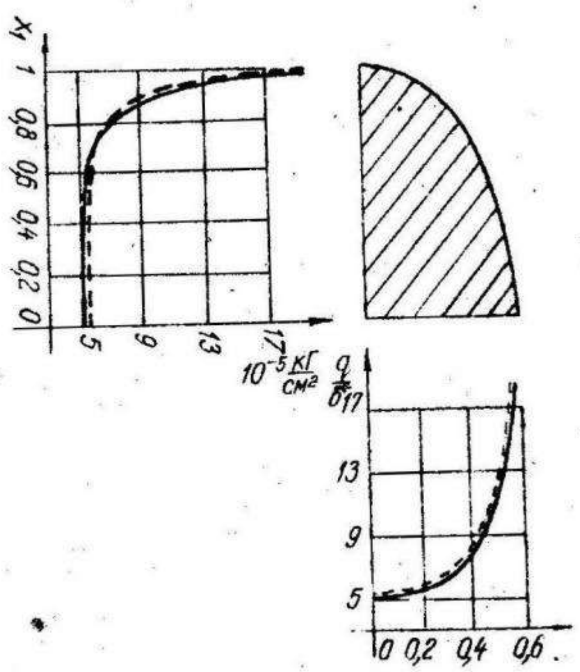
$$S_{20}=\frac{-2(1+e^2)E(e)+(2+e^2)K(e)}{3e^4};$$

$$\mathcal{X}_{02} = S_{20} + 2S_{02}(1-e^2) + S_{11}(2e^2-3);$$

$$\mathcal{X}_{20} = 2S_{20} + S_{02}(1-e^2) + S_{11}(e^2-3);$$

$$S_{11} = \frac{(2-e^2)E(e) - 2(1-e^2)K(e)}{3e^4(1-e^2)}; \qquad \mathcal{X} = S_{20}S_{02} - S_{11}^2 .$$

$K(e)$, $E(e)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду. На рисунку зображені результати розрахунків тиску під плоским еліптичним в плані штампом проведені за формулою (3.2) при значенні $e=0,8$, $\lambda=2$ і пружних сталих пісковика $A_{11} = 6,07 \cdot 10^5$ кГ/см^2; $A_{13} = 1,59 \cdot 10^5$ кГ/см^2; $A_{33} = 4,015 \cdot 10^5$ кГ/см^2; $A_{44} = 1,55 \cdot 10^5$ кГ/см^2.



Суцільна лінія відповідає розподілу тиску під штампом, коли шар лежить на жорсткій основі без тертя. Пунктирна лінія відповідає випадку, коли шар нерухомо зчеплений з основою.

Література

1. Александров В.М. Авторефераты научно-исследовательских работ за 1959 год. Изд-во Ростовского ун-та, 1960.
2. Александров В.М., Ворович И.И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, т. 24, вып. 2, 1960.
3. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, т. 23, вып. 3, 1959.

4. Грилицький Д.В., Кізима Я.М. Тиск штампа на трансверсально ізотропний шар. ДАН УРСР, 1962, № 1.

5. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричная контактная задача для трансверсально изотропного слоя, покоящегося на жестком основании. Известия АН СССР, механика и машиностроение, 1962, № 8.

6. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1959.

7. Кизыма Я.М. Напряженно-деформированное состояние трансверсально изотропного слоя, подверженного осесимметричному давлению сцепленного штампа. Известия АН СССР, механика, 1965, № 6.

8. England A. A punch problem for a transversely isotropio layer. Proc. lambridge Philos. Loc.1962,vol., 58, N 3.

УДК 539.377

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, І.О.НІЩЕНКО, МАХМУД АЛЛАМ

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОТВОРІВ, ВИКЛИКАНІ ОДНОРІДНИМ ТЕПЛОВИМ ПОТОКОМ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Розглянемо плоску задачу термопружності для нескінченної області з криволінійним отвором, обмеженим контуром L . У випадку узагальненого плоского напруженого стану вважається, що бічні поверхні пластинки теплоізольовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем вздовж контура L відбувається за законом Ньютона, а на нескінченності заданий однорідний тепловий потік інтенсивності q , напрямлений під кутом α до осі Ox. Зовнішнє силове поле відсутнє.

Випадок теплоізольованого контура L розглядається в роботі [1].

Як відомо [1,3,4,5], проблема зводиться до розв'язування такої крайової задачі термопружності:

$$\Delta T = 0; \tag{1}$$

$$\lambda_t \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_n (T - T_c) = 0 \quad \text{на} \quad L; \tag{2}$$

$$d[\overline{\varphi(t)} + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] = 2\kappa T d t + 2\kappa t \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} d\bar{t} \quad \text{на} \quad L; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q}{\lambda_t}\cos\alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q}{\lambda_t}\sin\alpha \quad \text{при} \quad |x|, |y| \to \infty. \quad (4)$$

Тут Δ – оператор Лапласа; T – температура; λ_t – коефіцієнт теплопровідності; α_n – коефіцієнт тепловіддачі; T_c – температура зовнішнього середовища вздовж контура L ; $\kappa = \frac{\alpha_t E}{4}$ (для узагальненого плоского напруженого стану); $\kappa = \frac{\alpha_t E}{4(1-\nu)}$ (для плоскої деформації); α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі; $z = x + iy$; t – афікс точки контура L .

Враховуючи, що $T = Re f(z)$, де $f(z)$ – аналітична функція комплексного змінного, контурну умову (2) перетворимо до вигляду [3]

$$\lambda_t d[f(t) - \overline{f(t)}] + \alpha_n[f(t) + \overline{f(t)} - 2T_c] e^{-i\beta} dt = 0 \qquad (t \in L), \qquad (5)$$

де β – кут між нормаллю до контура L і віссю Ox .

Помножимо рівність (5), а також рівність (3) і її комплексно спряжену на довільну функцію $F(z)$, голоморфну в розглядуваній області, і проінтегруємо вздовж контура L . У результаті одержимо інтегральні співвідношення, які служать для визначення аналітичних функцій $f(z)$ $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$, тобто

$$\lambda_t \int_L F(t) d[f(t) - \overline{f(t)}] + \int_L \alpha_n [f(t) + \overline{f(t)} - 2T_c] F(t) e^{-i\beta} dt = 0; \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}\int_L F(t)\Phi(t)dt - \int_L t\overline{\Phi(t)}\,dF(t) + \int_L F(t)\overline{\Psi(t)}\,d\bar{t} = \\ = \kappa\int_L F(t) f(t) d\bar{t} - \kappa\int_L t\overline{f(t)}\,dF(t);\end{gathered} \qquad (7)$$

$$\int_L F(t)\overline{\Phi(t)}d\bar{t} - \int_L \bar{t}\,\Phi(t)dF(t) + \int_L F(t)\Psi(t)dt =$$
$$= \kappa\int_L F(t)\overline{f(t)}d\bar{t} - \kappa\int_L \bar{t} f(t)d\bar{F}(t). \quad (8)$$

Нехай функція

$$z=\omega(\zeta)=R\left[\zeta+\frac{m}{(N-1)\zeta^{N-1}}\right] \qquad |m|<1,\ N\neq 1 \quad (9)$$

конформно відображає зовнішність одиничного кола γ на зовнішність контура отвору L, причому $N=2$ відповідає зовнішності еліпса, $N=3$, $m=\frac{2}{3}$ - зовнішності трикутного, а $N=4$, $m=-0{,}5$ - зовнішності квадратного отворів з заокругленими кутами.

Зовні одиничного кола γ площини ζ функції

$$f_1(\zeta)=f[\omega(\zeta)],\quad \Phi_1(\zeta)=\Phi[\omega(\zeta)],\quad \Psi_1(\zeta)=\Psi[\omega(\zeta)],$$

$F_1(\zeta)=F[\omega(\zeta)]$ можна подати у вигляді рядів

$$f_1(\zeta)=T_0+\beta_1\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^{-n}=T_0+\beta_1\zeta+f_0(\zeta);$$
$$\Phi_1(\zeta)=A_0+\beta_2\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\zeta^{-n}=A_0+\beta_2\zeta+\Phi_0(\zeta); \quad (10)$$
$$\Psi_1(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\zeta^{-n};\qquad F_1(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}E_j\zeta^{-j}.$$

З умови (4) випливає, що

$$\beta_1=-\frac{qR}{\lambda_t}e^{-i\alpha}. \quad (11)$$

Умова відсутності напружень на нескінченності приводить до залежностей $A_0=\kappa T_0$, $\beta_2=\kappa\beta_1$.

Далі вважатимемо температуру середовища T_c і коефіцієнт тепловіддачі α_n сталими.

Внесемо (9), (10) в (6) - (8) і виконаємо інтегрування вздовж одиничного кола γ. Вважаючи при цьому всі E_n, крім E_j, дорівнюють нулеві, в результаті одержимо такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_n, A_n і B_n:

$$-\kappa_1 j\bar{a}_j+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n h_{\frac{n+j}{N}}+\bar{a}_n h_{\frac{n-j}{N}}\right)=-\kappa_1\beta_1\delta_{j1}-\varrho(T_0-T_c)h_{\frac{j}{N}}-\left(\beta_1 h_{\frac{j-1}{N}}+\bar{\beta}_1 h_{\frac{j+1}{N}}\right)\qquad(j=0,1,2,\dots);\tag{12}$$

$$A_{j+1}-mA_{j-N+1}-\frac{jm}{N-1}\bar{A}_{N-j-1}-\bar{B}_1\delta_{j0}=\kappa\left(a_{j+1}-ma_{j-N+1}-\frac{jm}{N-1}\bar{a}_{N-j-1}\right);\tag{13}$$

$$\bar{A}_1\delta_{j0}+j\left(A_{j-1}+\frac{m}{N-1}A_{j+N-1}\right)-\left(B_{j+1}-mB_{j-N+1}\right)=\kappa\bar{a}_1\delta_{j0}+j\kappa\left(a_{j-1}+\frac{m}{N-1}a_{j+N-1}\right),\tag{14}$$

$$(j=0,1,2,\dots)$$

З умови однозначності зміщень

$$\varkappa\int_L\Phi(t)\,dt-\int_L\overline{\Psi(t)}\,d\bar{t}+\kappa\int_L f(t)\,dt=0\tag{15}$$

одержуємо

$$\varkappa A_1+\bar{B}_1+\kappa a_1=m\kappa\beta_1(1+\varkappa)\delta_{N2}\,.\tag{16}$$

Тут введені позначення

$$
h_\ell = \begin{cases} \dfrac{2m}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}\,(mx^2)^{|\ell|-1}\,dx & (\ell=\pm1,\pm2,\dots); \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{2m^2x^2-m^2-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}\,dx & (\ell=0); \\ 0 & /\ \ell - \text{дробове}\ /\,. \end{cases} \tag{17}
$$

$$
k_1=\frac{\lambda_t}{\alpha_n R}, \qquad \delta_{jn}=\begin{cases}1 & n=j\,, \\ 0 & n\neq j\,.\end{cases}
$$

Система (12) регулярна. Це твердження випливає з нерівності

$$
2\sum_{n=1}^{\infty}|h_n| = \frac{4m}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}{1-mx^2}\,dx \le |h_0|\,, \tag{18}
$$

причому рівність має місце тільки при $m=1$.

Із системи (13) з врахуванням (16) визначаємо деякі з коефіцієнтів

$$
\begin{aligned} &A_1 = km\beta_1\delta_{N2}\,, \qquad \bar{B}_1 = A_1 - ka_1\,, \\ &A_n = ka_n \qquad (n=2,3,\dots,N-2). \end{aligned} \tag{19}
$$

Для визначення явних виразів функцій напружень $\Phi_0(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$ помножимо системи (13) і (14) на ζ^{-j-1} і просумуємо їх по j від 0 до ∞ з врахуванням (19). У результаті одержуємо

$$
\Phi_0(\zeta) = -\frac{k(N-1)(a_1-m\beta_1\delta_{N2})\zeta^{N-1}+km(N-2)\bar{a}_1\zeta}{(N-1)(\zeta^N-m)} + kf_0(\zeta);
$$

$$\Psi_1(\zeta)=\frac{\zeta^N}{\zeta^N-m}\Big\{\kappa(m\bar\beta_1\delta_{N2}-\bar a_1)\zeta^{-1}-\frac{\kappa m(N-2)}{N-1}a_1\zeta^{N-3}-$$

$$-\frac{d}{d\zeta}\Big[\Big(\frac{1}{\zeta}+\frac{m}{N-1}\zeta^{N-1}\Big)\big(\Phi_0(\zeta)-\kappa f_0(\zeta)\big)\Big]\Big\}. \tag{20}$$

Напруження в пластинці обчислюються за формулами [1,4]

$$\sigma_\rho+\sigma_\theta=2\big[\Phi_0(\zeta)+\overline{\Phi_0(\zeta)}\big]-2\kappa\big[f_0(\zeta)+\overline{f_0(\zeta)}\big];$$

$$\sigma_\theta-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\theta}=\frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\Big[\overline{\omega(\zeta)}\Phi_0'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi_1(\zeta)-\kappa f_0'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\Big]. \tag{21}$$

Зокрема, напруження σ_θ на площадках, що нормальні до контура криволінійного отвору L, виражається формулою

$$\sigma_\theta=-4\kappa\,\mathrm{Re}\Big[\frac{(N-1)(a_1-m\beta_1\delta_{N2})\zeta^{N-1}+m(N-2)\bar a_1\zeta}{(N-1)(\zeta^N-m)}\Big]. \tag{22}$$

Звідси одержуємо $\left(a_1=\frac{qR}{\lambda_t}(\alpha_1+\alpha_2)\right)$.

а) при $\alpha=0$, $N=2$ (зовнішність еліптичного отвору)

$$\sigma_\theta=-\frac{4\kappa qR}{\lambda_t}(\alpha_1+m)\frac{(1-m)\cos\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta}; \tag{23}$$

б) при $\alpha=0$, $N=3,4,\ldots$

$$\sigma_\theta=-\frac{4\kappa qR}{\lambda_t}\alpha_1\frac{[N-1-m^2(N-2)]\cos\theta-m\cos(N-1)\theta}{(N-1)(1+m^2-2m\cos N\theta)}; \tag{24}$$

в) при $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $N=2$

$$\sigma_\theta=-\frac{4\kappa qR}{\lambda_t}(\alpha_2-m)\frac{(1+m)\sin\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta}; \tag{25}$$

г) при $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $N=3,4\ldots$

$$\sigma_\theta=-\frac{4kqR}{\lambda_t}\alpha_2\frac{[N-1-m^2(N-2)]\sin\theta+m\sin(N-1)\theta}{(N-1)(1+m^2-2m\cos N\theta)}. \qquad (26)$$

Якщо тепловий потік направлений під кутом α до осі Ox , то кільцеві напруження σ_θ обчислюються за формулою

$$\sigma_\theta^{(\alpha)}=\sigma_\theta^{(0)}\cos\alpha+\sigma_\theta^{(\frac{\pi}{2})}\sin\alpha. \qquad (27)$$

Розглянемо деякі часткові випадки:

1) Контур пластинки L теплоізольований [1]. У цьому випадку $k_1=\infty$ ($\alpha_n=0$) і з системи (12) одержуємо

$$a_1=\bar{\beta}_1=-\frac{qR}{\lambda_t}e^{i\alpha}. \qquad (28)$$

Отже, $\alpha_1=-\cos\alpha$, $\alpha_2=-\sin\alpha$.

2) На контурі пластинки L підтримується стала температура T_c. Тоді $K_1=0$ $(\alpha_n=\infty)$ і з системи (12) маємо

$$a_1=-\bar{\beta}_1=\frac{qR}{\lambda_t}e^{i\alpha}. \qquad (29)$$

Отже, $\alpha_1=\cos\alpha$, $\alpha_2=\sin\alpha$.

Якщо теплообмін з зовнішнім середовищем вздовж контура L відбувається за законом Ньютона, то коефіцієнти α_1 і α_2 визначаються з системи (12). Для пластинки з еліптичним отвором (m = 0,5) при K_1 = = 3,183, α_1 = 0,6027, а з квадратним отвором α_1 = 0,5023.

Аналогічно розв'язується термопружна задача при заданих зміщеннях точок контура L .

Література

1. Гайвась И.В. Температурные напряжения,обусловленные возмущением однородного теплового потока в окресности макровключений. - "Прикладная механика", Т. II, вып. 2, 1966.

2. Ніщенко І.О., Мартинович Т.Л. Про один метод розв"язування двовимірних стаціонарних задач теплопровідності. П"ята

наукова конференція молодих математиків України. Тези доповіді. Київ, 1970.

3. Мартынович Т. Л., Нищенко И.А. К решению плоской задачи термоупругости для двухсвязных областей. - "Прикладная механика", Т. УП, вып. 7, 1972.

4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

5. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, "Наукова думка", 1968.

УДК 539.3

В.В.БОЖИДАРНИК

НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З НЕСИМЕТРИЧНО ПІДКРІПЛЕНИМ КОЛОВИМ ОТВОРОМ

Розглянемо пружну рівновагу анізотропної пластинки товщиною $2h$ з коловим отвором L_1 радіуса r_1, край якого несиметрично підкріплений пружним кільцем сталого перерізу. Площина осі стержня зміщена від серединної площини пластинки на величину ζ_0^*. Підкріплюючий стержень вільний від навантаження. Напруження і згинальні моменти в пластинці на нескінченності обмежені

$$\sigma_x^\infty = 0, \quad \sigma_y^\infty = q, \quad \tau_{xy}^\infty = \tau, \quad M_x^\infty = M_1, \quad M_y^\infty = M_2, \quad H_{xy}^\infty = M_{12}$$

Область, зайняту пластинкою, і відповідні їй області змінних $z_j = x + s_j y$, $z_j^* = x + \mu_j y$ конформно відобразимо на зовнішність одиничного кола γ_1, прийнявши

$$z = \omega(\zeta), \quad z_j = \omega_j(\zeta_j), \quad z_j^* = \omega_j^*(\zeta_j^*), \tag{1}$$

причому для контурних точок γ_1 змінні $\zeta, \zeta_j, \zeta_j^*$ набувають одного і того ж значення $\sigma = e^{i\theta}$.

У перетвореній області (1) граничні умови задачі (8) статті [3] при відсутності навантаження на кільце наберуть вигляду (зовнішній контур області $L_2(\gamma_2)$ віддалений у нескінченність) $(r_1 > r_0)$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)}\, dU = -\frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{\varrho_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\beta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \right] -$$

$$- \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \overline{F_1'(\sigma)}\, d\bar{\sigma} ;$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma)\, dU = \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{\varrho_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \cdot \frac{d\theta_\beta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 F_1'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \right] -$$

$$- \frac{g}{2h} \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} F_1(\sigma)\, d\sigma ;$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)}\, dV = \int_{\gamma_1} \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + i \frac{(r_1 - r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\beta}{d\sigma} + i\theta_\beta - \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_n}{d\sigma} - \frac{1}{r_1} \theta_\tau \right) \right] \overline{F_1(\sigma)}\, \omega'(\sigma)\, d\sigma ,$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma)\, dV = \int_{\gamma_1} \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + i \frac{(r_1 - r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \cdot \frac{d\theta_\beta}{d\sigma} + i\theta_\beta - \zeta_0^* \left(\frac{i\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \cdot \frac{d\theta_n}{d\sigma} - \frac{1}{r_1} \theta_\tau \right) \right] F_1(\sigma)\, \omega'(\sigma)\, d\sigma ;$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)}\, dV^* = - \int_{\gamma_1} \frac{r_1}{r_0} \left[\frac{C}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{d\theta_\tau}{d\bar{\sigma}} - i \frac{A}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{d\theta_n}{d\bar{\sigma}} + \frac{i\sigma\omega'(\sigma)}{r_1 |\omega'(\sigma)|} (C\theta_n + iA\theta_\tau) \right] \times$$

$$\times \overline{F_1'(\sigma)}\, d\bar{\sigma} - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \overline{F_1'(\sigma)}\, d\bar{\sigma} - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{\varrho_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\beta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\overline{F_1'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \right] ;$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma)\, dV^* = - \int_{\gamma_1} \frac{r_1}{r_0} \left[\frac{C}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{d\theta_\tau}{d\bar{\sigma}} - i \frac{A}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{d\theta_n}{d\bar{\sigma}} + \frac{i\sigma\omega'(\sigma)}{r_1 |\omega'(\sigma)|} (C\theta_n + iA\theta_\tau) \right] \times \quad (2)$$

$$\times F'(\sigma)\, d\sigma - \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} e_0 \frac{\omega'(\sigma)\sigma}{|\omega'(\sigma)|} F_1'(\sigma)\, d\sigma + \zeta_0^* g \int_{\gamma_1} \left[(r_0 - r_1) e_0 + i \frac{\varrho_c r_1 \sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\theta_\beta}{d\sigma} \right] d \left[\frac{\sigma^2 F_1'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \right] ;$$

$$\int_{\gamma_1} \overline{F_1(\sigma)}\, dU^* = \int_{\gamma_1} \frac{\sigma\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\tau - i\left(\frac{r_0}{r_1}\theta_n - i\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\tau}{d\sigma}\right)\right] \overline{F_1'(\sigma)}\, d\sigma,$$

$$\int_{\gamma_1} F_1(\sigma)\, dU^* = \int_{\gamma_1} \frac{\sigma\cdot\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \left[\theta_\tau - i\left(\frac{r_0}{r_1}\theta_n - i\frac{(r_1-r_0)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta_\tau}{d\sigma}\right)\right] F_1'(\sigma)\, d\sigma.$$

Тут $\sigma = e^{i\theta}$ – афікс точки контура γ_1 ; $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ – до. функція, голоморфна в перетвореній області; $g = E^*F$, A і C – ... ткості криволінійного стержня на розтяг, згин і кручення; r_1 – р... кривини крайнього волокна стержня, спаяного з пластинкою; r_0 – рад... кривини нейтрального (для чистого згину) волокна стержня L_0 , яке ... ребуває на відстані η_C від центральної осі; e_0 – відносне видовже... волокна L_0 ; θ_n , θ_τ , θ_B – кути повороту поперечного перерізу стержня. У випадку пластинки з коловим отвором радіуса r_1 функції $\omega(\zeta)$, $\omega_j(\zeta_j)$, $\omega_j^*(\zeta_j^*)$ мають вигляд

$$\begin{gathered}\omega(\zeta) = r_1\zeta, \qquad t = r_1\sigma, \\ \omega_j(\zeta_j) = \frac{r_1}{2}\left[(1-iS_j)\zeta_j + (1+iS_j)\frac{1}{\zeta_j}\right]; \\ \omega_j^*(\zeta_j^*) = \frac{r_1}{2}\left[(1-i\mu_j)\zeta_j^* + (1+i\mu_j)\frac{1}{\zeta_j^*}\right],\end{gathered} \tag{1'}$$

де S_j , μ_j – корені відповідних характеристичних рівнянь [1,4]. Функції U , V , U^* , V^* виражаються через комплексні потенціали $\varphi_j(z_j)$, $\varphi_j^*(z_j^*)$, за формулами (3), (4) з [3].

Функції $\varphi_{*j}(\zeta_j) = \varphi_j[\omega_j(\zeta_j)]$, $\varphi_{*j}^*(\zeta_j^*) = \varphi_j^*[\omega_j^*(\zeta_j^*)]$, $F_1(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$, голоморфні зовні одиничного кола γ_1 з полюсом на нескінченності, допускають розклади

$$\varphi_{*1}(\zeta_1) = R_1 A_0^*\zeta_1 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k\zeta_1^{-k}; \qquad \varphi_{*2}(\zeta_2) = R_2(B_0^* + iC_0^*)\zeta_2 + \sum_{k=0}^{\infty} B_k\zeta_2^{-k};$$

$$\varphi_{*1}^{*}(\zeta_1^*) = R_1^* a_0^* \zeta_1^* + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta_1^{*-k}; \qquad \varphi_{*2}^{*}(\zeta_2^*) = R_2^* b_0^* \zeta_2^* + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta_2^{*-k}; \tag{3}$$

$$F_1(\zeta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}; \qquad R_j = \frac{1}{2} r_1 (1 - i s_j); \qquad R_j^* = \frac{1}{2} r_1 (1 - i \mu_j).$$

Сталі A_0^*, B_0^*, C_0^*; a_0^*, b_0^* виражаються через компоненти напружень, згинальні і крутні моменти в пластинці на нескінченності за відомими формулами [1,4].

На підставі формул (3), (4) з [3] і розкладів (3) функції U, V, U^*, V^* на γ_1 набирають вигляду

$$\begin{aligned}
U &= D_1 \sigma + D_2 \sigma^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [t_1 A_k + t_2 B_k] \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [t_1^* \bar{A}_k + t_2^* \bar{B}_k] \sigma^{k}; \\
V &= D_3 \sigma + D_4 \sigma^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [n_1 A_k + n_2 B_k] \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [n_1^* \bar{A}_k + n_2^* \bar{B}_k] \sigma^{k}; \\
U^* &= K_3 \sigma + K_4 \sigma^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [d_1 a_k + d_2 b_k] \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [d_1^* \bar{a}_k + d_2^* \bar{b}_k] \sigma^{k}, \\
V^* &= K_1 \sigma + K_2 \sigma^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [l_1 a_k + l_2 b_k] \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} [l_1^* \bar{a}_k + l_2^* \bar{b}_k] \sigma^{k}
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned}
&D_1 = R_1 A_0^* t_1 + R_2 (B_0^* + i C_0^*) t_2; \qquad && D_2 = \bar{R}_1 A_0^* t_1^* + \bar{R}_2 (B_0^* - i C_0^*) t_2^*; \\
&D_3 = R_1 A_0^* n_1 + R_2 (B_0^* + i C_0^*) n_2; \qquad && D_4 = \bar{R}_1 A_0^* n_1^* + \bar{R}_2 (B_0^* - i C_0^*) n_2^*; \\
&K_1 = R_1^* a_0^* l_1 + R_2^* b_0^* l_2; \qquad && K_2 = \bar{R}_1^* \bar{a}_0^* l_1^* + \bar{R}_2^* \bar{b}_0^* l_2^*; \\
&K_3 = R_1^* a_0^* d_1 + R_2^* b_0^* d_2; \qquad && K_4 = \bar{R}_1^* \bar{a}_0^* d_1^* + \bar{R}_2^* \bar{b}_0^* d_2^* \\
&t_j = 1 + i s_j; \quad t_j^* = 1 + i \bar{s}_j; \qquad && n_j = p_j + i q_j; \quad n_j^* = \bar{p}_j + i \bar{q}_j; \\
&l_j = q_j^* + i \frac{p_j^*}{\mu_j}; \quad l_j^* = \bar{q}_j^* + i \frac{\bar{p}_j^*}{\bar{\mu}_j}; \qquad && d_j = 1 + i \mu_j; \quad d_j^* = 1 + i \bar{\mu}_j
\end{aligned} \tag{5}$$

Компоненти деформації стержня e_0, θ_ℓ, θ_n, θ_τ подано на γ_1 у формі комплексних рядів Фур'є

$$e_0=\alpha_0+2Re\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sigma^k; \qquad \theta_\ell=\beta_0+2Re\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sigma^k;$$
$$\theta_n=\gamma_0+2Re\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sigma^k; \qquad \theta_\tau=\delta_0+2Re\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\sigma^k. \qquad (6)$$

У випадку ортотропної пластинки при симетричному навантаженні відносно головних напрямків пружності x та y розклади (6) запишуться

$$e_0=\alpha_0+\sum_{k=2,4...}^{\infty}\alpha_k(\sigma^k+\sigma^{-k}), \qquad \theta_\ell=i\sum_{k=2,4...}^{\infty}\beta_k^*(\sigma^k-\sigma^{-k}),$$
$$\theta_\tau=\delta_0+\sum_{k=2,4...}^{\infty}\delta_k(\sigma^k+\sigma^{-k}), \qquad \theta_n=i\sum_{k=2,4...}^{\infty}\gamma_k^*(\sigma^k-\sigma^{-k}), \qquad (7)$$

де α_k, β_k^*, δ_k, γ_k^* – величини дійсні.

Внесемо розклади (3), (4), (6), (1') у граничну умову задачі (2) і виконаємо інтегрування вздовж замкнутого контура γ_1. Приймаючи при цьому всі E_j, крім E_n, рівними нулеві, одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій. Цю систему запишемо для ортотропної пластинки при симетричному навантаженні на нескінченності відносно головних напрямків пружності x та y ($a_k=\bar{b}_k$; A_k, B_k – величини дійсні):

$$t_1A_n+t_2B_n=\frac{g}{2hr_1}\left[(n+1)(r_1-r_0)+r_1\right]\alpha_{n+1}+\frac{g(n+1)^2\varrho_c}{2hr_1}\beta_{n+1}^*-D_2\delta_{1n};$$

$$t_1^*A_n+t_2^*B_n=\frac{g}{2hr_1}\left[(1-n)(r_1-r_0)+r_1\right]\alpha_{n-1}-\frac{g(1-n)^2\varrho_c}{2hr_1}\beta_{n-1}^*-D_1\delta_{1n};$$

$$n_1^*A_n+n_2^*B_n=\frac{r_0}{n}\alpha_{n-1}-\frac{1}{n}\left[(r_1-r_0)(n-1)+r_1\right]\beta_{n-1}^*+\frac{\gamma_0^*(n-1)}{n}\gamma_{n-1}^*+$$
$$+\frac{\gamma_0^*}{n}\delta_{n-1}-D_3\delta_{1n};$$

$$n_1A_n+n_2B_n=-\frac{r_0}{n}\alpha_{n+1}+\frac{1}{n}\left[(r_1-r_0)(n+1)-r_1\right]\beta_{n+1}^*-$$
$$-\frac{\gamma_0^*(n+1)}{n}\gamma_{n+1}^*-\frac{\gamma_0^*}{n}\delta_{n+1}-D_4\delta_{1n};$$

$$
\begin{aligned}
&\ell_1 a_n + \ell_2 b_n = \zeta_0^* g\left[1+(n+1)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\right]\alpha_{n+1} + \frac{(n+1)^2 \zeta_0^* g \varrho_c}{r_1}\beta_{n+1}^* + \\
&\quad + \frac{1}{r_0}\left[C-(n+1)A\right]\gamma_{n+1}^* - \frac{1}{r_0}\left[A-(n+1)C\right]\delta_{n+1} - K_2\delta_{1n}\,; \\
&\ell_1^* \bar{a}_n + \ell_2^* \bar{b}_n = \zeta_0^* g\left[1+(1-n)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\right]\alpha_{n-1} - \frac{(1-n)^2 \zeta_0^* g \varrho_c}{r_1}\beta_{n-1}^* - \\
&\quad - \frac{1}{r_0}\left[A-(1-n)C\right]\delta_{n-1} - \frac{1}{r_0}\left[C+(n-1)A\right]\gamma_{n-1}^* - K_1\delta_{1n}\,; \\
&d_1 a_n + d_2 b_n = -\left[1+(n+1)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\right]\delta_{n+1} + \frac{r_0}{r_1}\gamma_{n+1}^* - K_4\delta_{1n}\,; \\
&d_1^* \bar{a}_n + d_2^* \bar{b}_n = -\left[1+(1-n)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\right]\delta_{n-1} - \frac{r_0}{r_1}\gamma_{n-1}^* - K_3\delta_{1n}\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Тут δ_{kn} – символ Кронекера.

Для прикладу за ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КАСТ-В [5] і кільце прямокутного перерізу $2h^* \times b$ з дюралюміна з такими пружними і геометричними характеристиками:

$$E_1 = 1{,}97 \cdot 10^5\ кГ/см^2, \quad E_2 = 1{,}36 \cdot 10^5\ кГ/см^2, \quad G = 0{,}33 \cdot 10^5\ кГ/см^2,$$

$$\nu_2 = 0{,}12; \quad E^* = 7{,}2 \cdot 10^5\ кГ/см^2, \quad \frac{b}{r_1} = 0{,}1; \quad \frac{2h^*}{2h} = 5;$$

$$\frac{2h^*}{b} = 6, \quad \frac{\zeta_0^*}{2h} = 1.$$

Пластинка згинається навколо головних напрямків пружності x та y ($E_x = E_1$) моментами:

1. $M_x^\infty = M, \quad M_y^\infty = H_{xy}^\infty = 0, \quad \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0;$
2. $M_y^\infty = M, \quad M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0, \quad \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0.$

На рис. 1, 2 зображені графіки розподілу кільцевих напружень $\sigma_\theta \cdot \frac{h^2}{M}$ у пластинці вздовж лінії спаю з кільцем відповідно у першому і другому випадках навантаження. Криві 1,2,3 на всіх рисунках отосуються відповідно точок верхньої, середньої та нижньої площин пластинки. Крива 4 відповідає симетричному підкріпленню пластинки стержнем тієї ж жорсткості ($\zeta_0^* = 0$) на верхній і нижній площині.

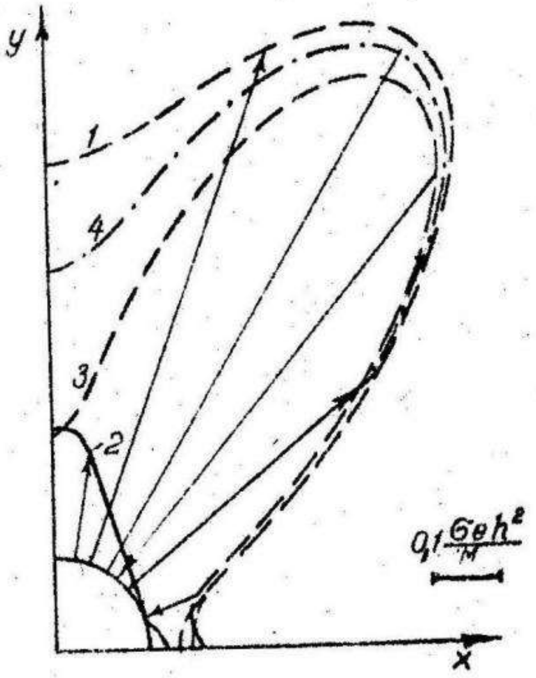


Рис. 1

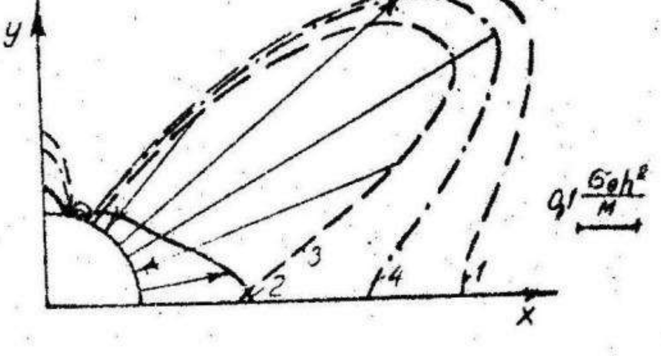


Рис. 2

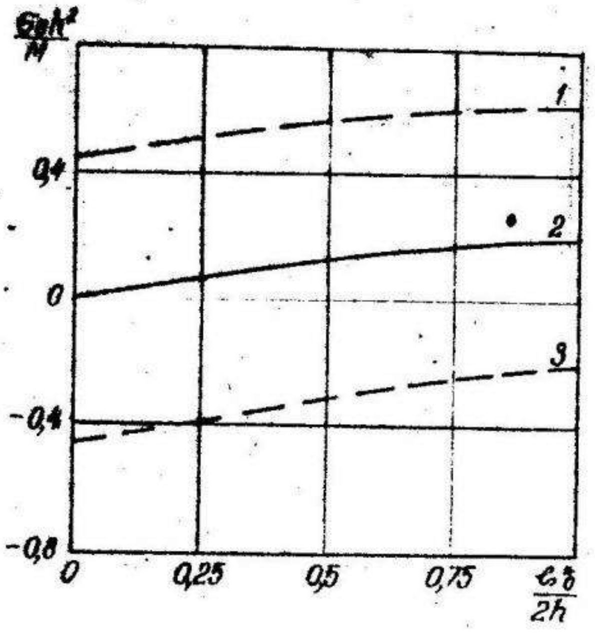


Рис. 3

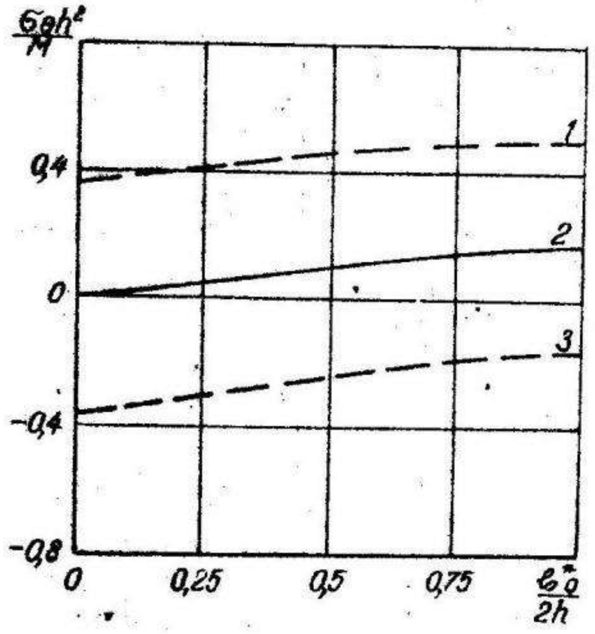


Рис. 4

На рис. 3, 4 дана залежність тих же напружень $\sigma_\theta \cdot \frac{h^2}{M}$ у пластинці від ексцентриситету підкріплення $\frac{\zeta_0^*}{2h}$ при $\theta = 90^0$ у першому випадку навантаження (рис. 3) і при $\theta = 0^0$ – у другому випадку навантаження (рис. 4).

Література

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., ГТТИ, 1957.

2. Мартынович Т.Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис., Львов, 1970.

3. Мартинович Т.Л., Божидарник В.В. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленим краєм. Вісник Львівського ун-ту, серія мех.-мат., вип. 7. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.

4. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., ГТТИ, 1951.

5. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластинки. М., Оборонгиз, 1960.

УДК 517.3

В.Г.ГАБРУСЄВ

ОДНА ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

1. Розглянемо безмежний плоскопаралельний трансверсально ізотропний шар скінченної товщини $2h$. Вважаємо, що площини ізотропії паралельні граничним площинам, які вільні від зовнішнього навантаження.

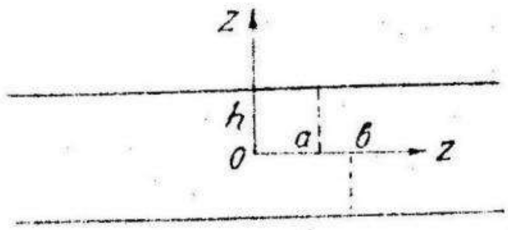


Рис. 1

Виберемо початок системи циліндричних координат на серединній площині шару. Вісь Oz направимо перпендикулярно до граничних площин вертикально вверх (рис. 1).

Граничні умови задачі мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k_1 \left(T - T_0^{(1)}\right), \quad z = h, \quad 0 \leq r < a,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k_2 \left(T - T_0^{(2)}\right), \quad z = h, \quad r \geq a,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = k_3 (T - T_0^{(3)}), \quad z = -h, \quad 0 \le r < b,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = k_4 (T - T_0^{(4)}), \quad z = -h, \quad r \ge b$$

$$\sigma_{zz}(r,z) = 0, \quad z = h, \ z = -h, \quad 0 \le r < \infty \tag{1.1}$$

$$\sigma_{rz}(r,z) = 0, \quad z = h, \ z = -h \quad 0 \le r < \infty$$

При заданих граничних умовах (1.1) необхідно визначити розподіл температурного поля та температурні напруження.

Під час розв'язання задачі будуть використані співвідношення

$$T(r,z) = A_{33} A_{44} \left(\mu_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Psi(r,z),$$

$$\sigma_{zz}(r,z) = \beta A_{33} A_{44} \nabla^2 \left(d\nabla^2 - e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Psi(r,z), \tag{1.2}$$

$$\sigma_{rz}(r,z) = -\beta A_{33} A_{44} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(d\nabla^2 - e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Psi(r,z),$$

$$\left(\mu_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_5^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Psi(r,z) = 0,$$

які разом з відповідними позначеннями наводяться в [3].

2. Застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля [4], [5] і формулу обернення до співвідношень (1.2), одержимо

$$T(r,z) = B^* \int_0^\infty \alpha^5 [C_5^*(\alpha) \operatorname{sh} \mu_5 z\alpha + D_5^*(\alpha) \operatorname{ch} \mu_5 z\alpha] J_0(r\alpha)\, d\alpha,$$

$$\sigma_{zz}(r,z) = -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e\frac{d^2}{dz^2} - d\alpha^2\right) \bar{\Psi}(\alpha,z) J_0(r\alpha)\, d\alpha,$$

$$\sigma_{rz}(r,z) = \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e\frac{d^2}{dz^2} - d\alpha^2\right) \bar{\Psi}(\alpha,z) J_1(r\alpha)\, d\alpha, \tag{2.1}$$

$$\bar{\Psi}(\alpha,z) = \sum_{j=1,3,5} [C_j^*(\alpha) \operatorname{sh} \mu_j z\alpha + D_j^*(\alpha) \operatorname{ch} \mu_j z\alpha],$$

$$B^* = A_{33} A_{44} (\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2).$$

Використовуючи заміну

$$\eta = a\alpha, \quad \rho = \frac{z}{a}, \quad \gamma = \frac{h}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \frac{b}{a} = m,$$

$$\varphi_1(\eta) = \alpha^5 C_5^*(\alpha), \qquad \varphi_2(\eta) = \alpha^5 D_5^*(\alpha), \tag{2.2}$$

і вимагаючи виконання граничних умов для температури, одержуємо

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) Q_1(\eta) + \varphi_2(\eta) R_1(\eta)\right] J_0(\rho\eta)\, d\eta = k_1 T_0^{(1)}, \qquad 0 \le \rho < 1,$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) Q_2(\eta) + \varphi_2(\eta) R_2(\eta)\right] J_0(\rho\eta)\, d\eta = k_2 T_0^{(2)}, \qquad \rho > 1, \tag{2.3}$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) Q_3(\eta) - \varphi_2(\eta) R_3(\eta)\right] J_0(\rho\eta)\, d\eta = -k_3 T_0^{(3)}, \quad 0 \le \rho < m,$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) Q_4(\eta) - \varphi_2(\eta) R_4(\eta)\right] J_0(\rho\eta)\, d\eta = -k_4 T_0^{(4)}, \qquad \rho > m. \tag{2.4}$$

У співвідношеннях (2.3) та (2.4) використані позначення

$$Q_i(\eta) = \mu_5 \eta \operatorname{ch} \mu_5 \gamma \eta + k_i a \operatorname{sh} \mu_5 \gamma \eta,$$

$$R_i(\eta) = \mu_5 \eta \operatorname{sh} \mu_5 \gamma \eta + k_i a \operatorname{ch} \mu_5 \gamma \eta. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.5}$$

Друге рівняння (2.3) та (2.4) можна записати у вигляді

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) Q_2(\eta) + \varphi_2(\eta) R_2(\eta)\right] J_0(\rho\eta)\, d\eta =$$

$$= k_2 T_0^{(2)} \left[u(\rho - 1) + x(\rho) u(1-\rho)\right], \qquad 0 < \rho < \infty, \tag{2.6}$$

$$\frac{B^*}{a^2}\int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) Q_4(\eta) - \varphi_2(\eta) R_4(\eta)\right] J_0(\rho\eta)\, d\eta =$$

$$= -k_4 T_0^{(4)} \left[u(\rho - m) + y(\rho) u(m-\rho)\right], \qquad 0 < \rho < \infty. \tag{2.7}$$

де $x(\rho)$ та $y(\rho)$ невідомі функції, а

$$u(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Застосовуючи формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля до співвідношень (2.6) та (2.7), одержимо

$$\begin{aligned} &\frac{B^*}{a^2}\eta^{-1}\left[\varphi_1(\eta)Q_2(\eta)+\varphi_2(\eta)R_2(\eta)\right]= \\ &= k_2 T_0^{(2)}\left[\int_1^\infty \rho J_0(\rho\eta)d\rho+\int_0^1 \rho x(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho\right], \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{B^*}{a^2}\eta^{-1}\left[\varphi_1(\eta)Q_4(\eta)-\varphi_2(\eta)R_4(\eta)\right]= \\ &= -k_4 T_0^{(4)}\left[\int_m^\infty \rho J_0(\rho\eta)d\rho+\int_0^m \rho y(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho\right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Невідомі функції $x(\rho)$ та $y(\rho)$ шукаємо у вигляді

$$x(\rho)=1+\sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\rho\lambda_n), \tag{2.11}$$

$$y(\rho)=1+\sum_{n=1}^{N} b_n J_0\left(\rho\frac{\lambda_n}{m}\right), \tag{2.12}$$

де a_n та b_n – невідомі коефіцієнти, а λ_n – додатні нулі функції $J_0(x)$.

Підставивши (2.11) та (2.12) в (2.9) та (2.10), обчисливши інтеграли та ввівши позначення

$$\begin{aligned} X(\eta) &= \frac{k_2 T_0^{(2)} a^2}{B^*}\left[\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta)-\sum_{n=1}^{N} a_n\lambda_n J_1(\lambda_n)\frac{\eta J_0(\eta)}{\eta^2-\lambda_n^2}\right], \\ Y(\eta) &= \frac{k_4 T_0^{(4)} a^2}{B^*}\left[\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta)-\sum_{n=1}^{N} b_n\lambda_n J_1(\lambda_n)\frac{\eta J_0(m\eta)}{\eta^2-\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)^2}\right], \end{aligned} \tag{2.13}$$

одержимо систему двох рівнянь для визначення двох невідомих $\varphi_1(\eta)$ та $\varphi_2(\eta)$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\eta)\,Q_2(\eta) + \varphi_2(\eta)\,R_2(\eta) = X(\eta), \\ &\varphi_1(\eta)\,Q_4(\eta) - \varphi_2(\eta)\,R_4(\eta) = -Y(\eta). \end{aligned} \tag{2.14}$$

У (2.13) та (2.14) $\delta(\eta-\Delta)$ – дельта функція Дірака.

Розв'язавши систему (2.14) відносно $\varphi_1(\eta)$ та $\varphi_2(\eta)$, маємо

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\eta) = \frac{1}{D(\eta)}\left[X(\eta)\,R_4(\eta) - Y(\eta)\,R_2(\eta)\right], \\ &\varphi_2(\eta) = \frac{1}{D(\eta)}\left[X(\eta)\,Q_4(\eta) + Y(\eta)\,Q_2(\eta)\right], \end{aligned} \tag{2.15}$$

де

$$D(\eta) = Q_2(\eta)\,R_4(\eta) + Q_4(\eta)\,R_2(\eta). \tag{2.16}$$

Підставивши (2.15) в (2.13) в перше рівняння (2.3) та перше рівняння (2.4) і ввівши позначення

$$\begin{aligned} &G_1(\eta) = Q_1(\eta)\,R_4(\eta) + Q_4(\eta)\,R_1(\eta), \\ &E_1(\eta) = Q_1(\eta)\,R_2(\eta) - Q_2(\eta)\,R_1(\eta), \\ &E_3(\eta) = Q_3(\eta)\,R_4(\eta) - Q_4(\eta)\,R_3(\eta), \\ &G_3(\eta) = Q_3(\eta)\,R_2(\eta) + Q_2(\eta)\,R_3(\eta), \end{aligned} \tag{2.17}$$

після обчислення інтегралів, одержимо умови для визначення невідомих коефіцієнтів a_n та b_n

$$\begin{aligned} &k_2 T_0^{(2)} \frac{[k_1+k_4+2k_1k_4\bar{h}]}{[k_2+k_4+2k_2k_4\bar{h}]} - k_4 T_0^{(4)} \frac{k_2-k_1}{[k_2+k_4+2k_2k_4\bar{h}]} - k_2 T_0^{(2)} \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda_n \times \\ &\times \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{G_1^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \frac{I_0(\rho y_k) K_0(y_k)}{y_k^2+\lambda_n^2} - \frac{G_1(\lambda_n) J_0(\rho\lambda_n)}{\lambda_n D\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)} \right\} + k_4 T_0^{(4)} \sum_{n=1}^{N} b_n \lambda_n \times \\ &\times \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{E_1^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \frac{I_0(\rho y_k) K_0(m y_k)}{y_k^2+\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)^2} - \frac{E_1\left(\frac{\lambda_n}{m}\right) J_0\left(\rho\frac{\lambda_n}{m}\right)}{\lambda_n D\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)} \right\} = k_1 T_0^{(1)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$0 \le \rho < 1,$$

$$k_2 T_0^{(2)} \frac{[k_4 - k_3]}{[k_3 + k_4 + 2k_3 k_4 h]} - k_4 T_0^{(4)} \frac{[k_2 + k_3 + 2k_2 k_3 h]}{[k_2 + k_4 + 2k_2 k_4 h]} - k_2 T_0^{(2)} \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda_n \times \tag{2.19}$$

$$\times \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{E_3^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \begin{bmatrix} I_0(\rho m y_k) K_0(y_k) \\ I_0(y_k) K_0(\rho m y_k) \end{bmatrix} \frac{1}{y_k^2 + \lambda_n^2} - \frac{E_3(\lambda_n)}{\lambda_n D(\lambda_n)} \begin{bmatrix} J_0(\rho m \lambda_n) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$+ k_4 T_0^{(4)} \sum_{n=1}^{N} b_n \lambda_n \left\{ 2J_1(\lambda_n) \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{G_3^*(y_k)}{\Delta'(y_k)} \frac{I_0(\rho m y_k) K_0(y_k m)}{y_k^2 + \left(\frac{\lambda_n}{m}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{G_3\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)}{\lambda_n D\left(\frac{\lambda_n}{m}\right)} J_0(\rho \lambda_n) \right] = - k_3 T_0^{(3)}, \qquad 0 \le \rho < 1.$$

У співвідношеннях (2.18) та (2.19) використані позначення

$$\Delta'(y_k) = \left\{ \frac{d}{d\eta} D(\eta) \right\}_{\eta = i y_k}, \qquad i G_j^*(y_k) = G_j(i y_k), \tag{2.20}$$

$$i E_j(y_k) = E_j(i y_k), \qquad D(i y_k) = i \Delta(y_k) = 0,$$

де

$I_0(x)$, $K_0(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Вирази, що стоять у квадратних дужках рівняння (2.19), слід розуміти так: при $0 \le \rho m < 1$ треба брати співмножником верхній вираз, при $1 \le \rho m < m$ нижній вираз.

Інтеграли обчислювали за допомогою методу лишків [2] з використанням властивостей функцій Бесселя [1].

Розбиваючи інтервал $0 \le \rho < 1$ рівномірно N точками і вимагаючи виконання рівностей (2.18) та (2.19) у цих точках, одержимо $2N$ алгебраїчних рівнянь для визначення $2N$ невідомих a_n та b_n $(n = 1 \dots N)$.

3. Знаючи вирази для $\varphi_2(\eta) = \alpha^5 D_5^*(\alpha)$ та $\varphi_1(\eta) = \alpha^5 C_5^*(\alpha)$, можна знайти розподіл температурного поля.

Для визначення температурних напружень необхідно знайти функцію

$$\bar{\Psi}(\alpha, z) = \sum_{j=1,3,5} \left[C_j^*(\alpha) \, sh \mu_j z \alpha + D_j^*(\alpha) \, ch \mu_j z \alpha \right], \tag{3.1}$$

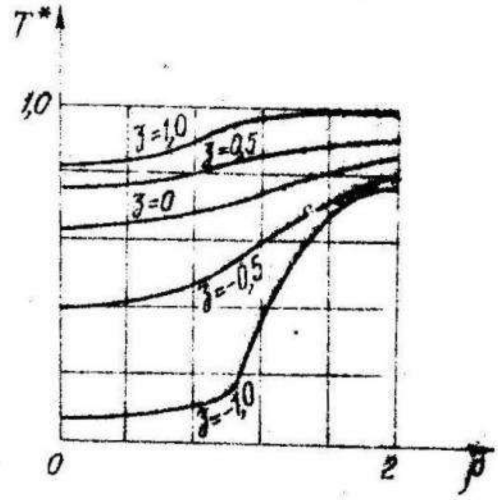


Рис. 2

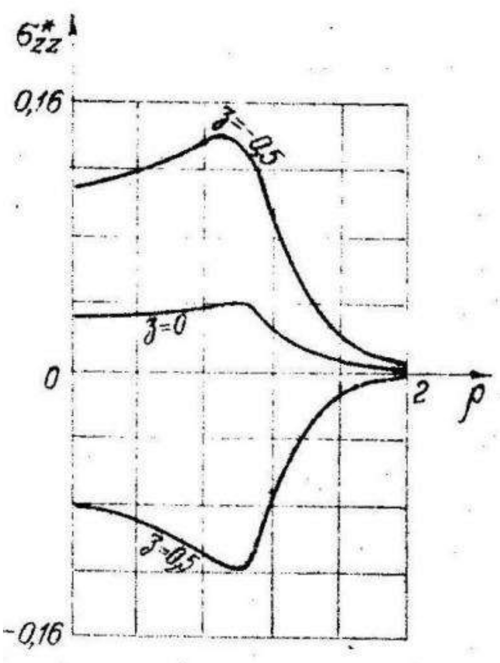


Рис. 3

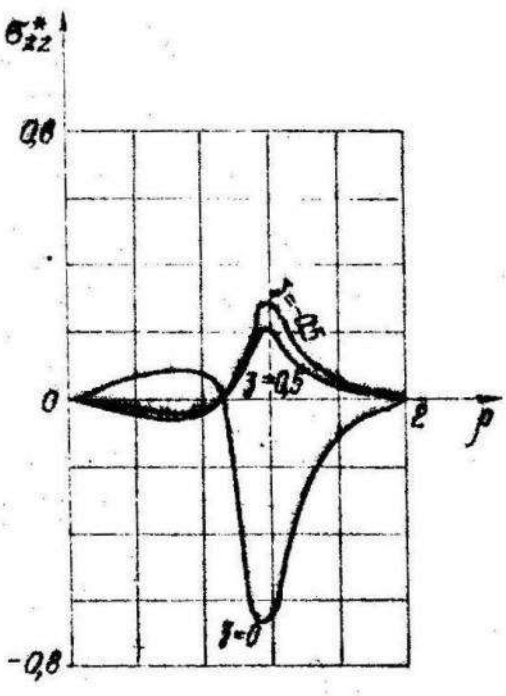


Рис. 4

тобто знайти $C_1^*(\alpha)$, $D_1^*(\alpha)$, $C_3^*(\alpha)$, $D_3^*(\alpha)$. Щоб дістати ці невідомі, використовуємо умови вільності границь шару від зовнішнього навантаження:

$$\begin{aligned} &\sigma_{zz}(r,z)=0, \quad z=h, \quad z=-h, \quad 0\le r<\infty \\ &\sigma_{rz}(r,z)=0, \quad z=h, \quad z=-h, \quad 0\le r<\infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

Знайшовши функцію $\overline{\Psi}(\alpha,z)$ і підставивши її у співвідношення (2.1), після обчислення інтегралів одержимо формули розподілу температурного поля та температурних напружень σ_{zz} , σ_{rz} , які внаслідок їх громіздкості в статті не наводяться.

4. Розглянемо числовий приклад з такими параметрами:

$$\begin{aligned} &m=\frac{b}{a}=1{,}2, \quad k_1h=10^{-6}, \quad k_2h=10, \quad k_3h=10, \quad k_4h=10^{-6}, \\ &T_0^{(1)}=T_0^{(3)}=T_0^{(4)}=0, \qquad T_0^{(2)}=T_0, \qquad \gamma=\frac{h}{a}=1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Щоб одержати систему сорока двох рівнянь для визначення сорока двох невідомих a_n^* та b_n^* $(n=1\dots 21)$ зробимо заміну $k_2T_0^{(2)}a_n=a_n^*$, $k_4T_0^{(4)}b_n=b_n^*$, підставимо (4.1) в (2.18) та (2.19) і розіб'ємо інтервал $0\le\rho<1$ рівномірно двадцять однією точкою, вимагаючи виконання (2.18) та (2.19) у цих точках. Підставивши отримані значення a_n^*, b_n^* у відповідні співвідношення, дістанемо розподіл температурного поля та температурних напружень σ_{zz} , σ_{rz} . Всі підрахунки ми проводили для трансверсально ізотропного магнію, для якого $\mu_1=1{,}388$, $\mu_3=0{,}\ 5$, $\mu_5=1$.

На рисунках 2-4 зображені графіки температури та температурних напружень σ_{zz} , σ_{rz} .

Література

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., ГИФМЛ, 1958.
3. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., ИЛ, 1962.
4. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., "Наука", 1967.

Ф.Энгельс и математика. Л я н ц е В.Е., С т а с и ш и н В.М. Ф.Енгельс і математика. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 3-8 /укр./.

Рассматривается в свете философских идей Ф.Энгельса вопрос о происхождении и развитии математических абстракций, о природе математических обьектов, об обьективных основах применения математики в других науках. Дается критика идеалистического и метафизического понимания природы математического знания. Библ.5.

УДК 517.512.7

Некоторые теоремы о сходимости почти всюду почти ортогональных по Беллману рядов. Г у к е в и ч В.О. Деякі теореми про збіжність майже всюди рядів, що майже ортогональні за Белманом. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ну, 1973, с. 9-12 /укр./.

Даются обшения известных теорем типа Радемахера-Меньшова о сходимости почти всюду ортогональных систем на системы функций почти ортогональных в смысле Беллмана. Библ.1.

УДК 517.94

Групповые свойства обыкновенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка и представление их решений в замкнутой форме К о с т е н к о К.С. Групові властивості звичайних лінійних диференціальних рівнянь третього порядку та зображення їх розв"язків у замкнутій формі. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 13-20 /укр./.

Найден некоторый класс линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, фундаментальная система решений каждого из которых представляется в замкнутой форме. В частности, этому классу уравнений принадлежат уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера. Библ. 3.

УДК 519.21

Случайная континуальная свертка. К в і т І.Д. Випадкова континуальна згортка. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 20-29 /укр./.

Понятие случайной свертки используется для вывода существенных новых распределений, и для установления простых взаимоотношений между распределениями. Библ. 7.

УДК 517.917

S^P -почти периодические матрицы и линейная система дифференциальных уравнений с S^P -почти периодической правой частью. Л і с е в и ч Л.М., К о в а л ь ч у к Б.В. S^P -майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^P -майже періодичною правою частиною. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 30-36 (укр.).

Вводится понятие S -нормы матрицы и понятие S^P-почти периодической матрицы. Рассматриваются простейшие свойства S^P -почти периодических матриц, а также исследуется почти периодичность решения линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей и правой S^P -почти периодической частью. Библ. 3.

УДК 517.946

Единственность решения первой граничной задачи для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением. Б о б и к О.І., Б о й к о Г.П. Єдиність розв'язку першої граничної задачі для еліптичного рівняння другого порядку з виродженням. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 36-41 (укр.).

Используя обобщенный метод защитных неравенств, получены признаки единственности решения первой граничной задачи для уравнения эллиптического типа второго порядка с вырождением, которые выражаются через коэффициенты уравнения, размеры или внутренний диаметр области. Библ. 5.

УДК 51 /091/

"Studia mathematica" - орган Львовской математической школы (1929-1940 гг.). Р о г а ч е н к о В.Ф. "Studia mathematica" - орган Львівської математичної школи (1929-1940 рр.). Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 41-44 (укр.).

Дается краткий обзор журнала "Studia mathematica", основателями которого были выдающиеся львовские математики С.Банах и Г.Штейнгауз. Этот журнал быстро стал авторитетным международным органом, в котором публиковались работы по функциональному анализу и его приложениям. Рассматривается период издания журнала во Львове (1929-1940 гг.).

УДК 517.946

Внешняя обобщенная задача Дирихле. Г у п а л о Г.-В.С. Ш а б а т-Ф е д а к І.Г. Зовнішня узагальнена задача Діріхле. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 44-48 (укр.).

Рассмотрена внешняя задача Дирихле для трехмерного уравнения Лапласа, когда на границе области задана обобщенная функция. Доказаны теорема о представлении решения и теорема единственности. Библ. 5.

УДК 517.946

Внешняя обобщенная задача Неймана. Г у п а л о Г.-В.С., Я к о б ч у к О.А. Зовнішня узагальнена задача Неймана. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 48-51 (укр.).

Рассмотрена внешняя задача Неймана для трехмерного уравнения Лапласа, когда на границе области задана обобщенная функция. Доказаны теорема о представлении решения и теорема единственности. Библ. 6.

УДК 517.946

Интегральные оценки устойчивости обратной задачи метагармонического потенциала простого слоя. Л а в р е н ю к С.П., П а р а с ю к Є.М. Інтегральні оцінки стійкості оберненої задачі метагармонійного потенціалу простого шару. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 51-54 (укр.).

Получены интегральные оценки устойчивости решения обратной задачи метагармонического потенциала простого слоя в классе звездных кривых. Оценки зависят от отклонения потенциалов на дуге окружности, внутри которой лежат индуцирующие кривые. Библ. 2.

УДК 517.512

Приближение периодических функций срезанными средними от полиномов, наилучших в заданной системе равноотдаленных точек. Г у б а н о в Г.П., К о в а л ь ч у к Б.В. Наближення періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, що найліпші в заданій системі рівновіддалених точок. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 55-57 /укр./.

Получена асимптотическая оценка верхней грани уклонений класса функций $H\omega$, имеющих заданный модуль непрерывности ω, от срезанных средних, построенных на базе полиномов, наилучших в заданной системе равноотдаленных точек. Библ. 6.

УДК 517.946

Классификация четырехчленных групп преобразований. К о с т е н к о В.Г., С т а с е н к о Р.В. Класифікація чотиричленних груп перетворень. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 57-61. /укр./.

Найдены все канонические формы четырехчленных групп преобразований. Табл.3, библ.1.

УДК 517.946

Групповые свойства уравнения пластичности. К о с т е н к о В.Г., Л и т в и н І.І. Групові властивості рівняння пластичності. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 62-66 /укр./.

Найдена максимальная группа преобразований, оставляющая уравнение пластичности инвариантным, и совокупность решений уравнения пластичности, инвариантная относительно этой группы преобразований. Библ.3.

УДК 517:513:88

Дифференциальные операторы, заданные на разрывных функциях. М е з е н Ш а х і н. Диференціальні оператори, задані на розривних функціях. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 66-71 /укр./.

Рассматривается краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения в классе функций, допускающих /вместе с производными/ разрывы первого рода в некоторых точках рассматриваемого интервала. В предположении самосопряженности строится резольвента, доказывается полнота и соответствующая теорема разложения. Библ.3.

УДК 513.812

Геометрические построения в пространстве Лобачевского с помощью сферографа, орисферографа, гиперсферографа. П и л и п о в и ч А.І. Геометричні побудови в просторі Лобачевського за допомогою сферографа, орисферографа, гіперсферографа. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 72-80 /укр./.

Доказывается теорема о том, что всякую конструктивную задачу пространства Лобачевского, разрешимую комплексом П-С-О-Г /плоскограф, сферограф, орисферограф, гиперсферограф/, можно решить комплексом С-О-Г. Библ.3.

УДК 515-69

О геометрии оптических иллюзий. К о п и с т я н с ь к и й А.О. Про геометрію оптичних ілюзій. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 81-84 /укр./.

Дается общая характеристика и классификация оптических искажений и описание возможных направлений методики исследования этих явлений, а именно: а/ путем обобщения геометрических моделей оптических схем; б/ путем обработки статистических данных. Ил.1, библ.2.

УДК 539.3

Расчет некруговых цилиндрических оболочек. С а в у л а Я.Г. Розрахунок некругових циліндричних оболонок. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 85-89 /укр./.

Приближенным методом малого параметра решена задача об упругом равновесии цилиндрической оболочки некругового сечения довольного общего вида. Выходные уравнения этой оболочки записаны в системе координат, которая удобна для исследования задачи сопряжения цилиндрической оболочки с плоским дном. Решение сводится к последовательности уравнения для круговой цилиндрической оболочки. Приведены формулы для перемещений нулевого и первого приближений. Библ.4.

УДК 519.21

Двумерное распределение гипергеометрической функции. К в і т І.Д. Двовимірний розподіл гіпергеометричної функції. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 90-92 (укр.).

На основании свойства полной монотонности изображения и двумерного гамма-распределения получено новую шестипараметрическую двумерную плотность, выражающуюся через гипергеометрическую функцию. Библ. 3.

УДК 517:946

Одна численная реализация решения обратной задачи теории логарифмического потенциала простого слоя. П а р а с ю к Є.М, К а р д а ш А.І. Одна чисельна реалізація розв"язку оберненої задачі теорії логарифмічного потенціалу простого шару. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту,1973, с.92-96./укр./.

Рассмотрен один метод решения обратной задачи теории логарифмического потенциала простого слоя, который основывается на возможности применения рядов Фурье. Приводится один численный пример, иллюстрирующий достаточную эффективность указанного метода. Ил. 1, библ. 1.

УДК 539.3:534.1

Свободные колебания прямоугольной пластинки с эксцентричными ребрами. Ф л е й ш м а н Н.П., О с и п о в а І.І. Вільні коливання прямокутної пластинки з ексцентричними ребрами. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 96-103(укр.).

Рассматриваются свободные колебания прямоугольной изотропной пластинки постоянной толщины, опертой шарнирно по двум параллельным краям и подкрепленной по двум другим краям различными тонкими упругими опорными ребрами из другого материала. Предполагается, что оси ребер не лежат в срединной плоскости пластинки, но параллельны ей. Полученное частотное уравнение записано для случая квадратной пластинки в форме, удобной для численного анализа влияния эксцентриситета подкрепляющих ребер на частоту поперечных колебаний. Построены графики, иллюстрирующие зависимость первых трех частот квадратной пластинки от жесткостей ребер и их эксцентриситета. Ил. 4, библ. 6.

УДК 539.3

Пластинка с криволинейным отверстием, край которого подкреплен ребром переменного сечения. З і н е в и ч А.Г. Пластинка з криволінійним отвором, край якого підкріплений ребром змінного перерізу. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 103-108 /укр./.

Рассматривается задача о подкреплении криволинейных отверстий в изотропных пластинках упругими элементами переменной жесткости. При этом упругое равновесие подкрепляющего элемента описывается уравнениями теории тонких криволинейных стержней. Решение задачи получено в комплексных рядах Фурье, коэффициенты определяются из квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Получены числовые результаты. Табл.2, библ.4.

УДК 2.4.2.531.1

Колебания прямоугольной в плане пологой ортотропной оболочки под действием подвижной нагрузки. К о й ф м а н Ч.Н. Коливання прямокутної в плані пологої ортотропної оболонки під дією рухомого навантаження. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 109-111 /укр./.

Рассматривается задача о движении ортотропной оболочки двоякой кривизны, два края которой шарнирно оперты, под действием подвижной нагрузки. На двух других краях граничные условия произвольны. Для ортотропной пластинки, жестко защемленной по двум краям, получено частотное уравнение. Библ. 3.

УДК 539.311.374.377

Контактно термоупругопластическая задача для полуплоскости. Г р и л і ц ь к и й Д.В. Контактна термопружнопластична задача для півплощини. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 112-115 /укр./.

Рассматривается контактная задача о давлении нагретого штампа на идеально упруго-пластическую полуплоскость, подчиняющуюся условию пластичности Треска-Сен-Венана. Задача решается с помощью методов теории функций комплексного переменного. Приведены формулы для определения контактного давления и вычисления длин полос пластичности в случае штампа с прямолинейным горизонтальным основанием и постоянной температурой. Ил.1, библ.3.

УДК 539.3[14]

Контактные напряжения в задаче о давлении штампа на упругий трансверсально-изотропный слой. М о к р и к Р.І., Г р и л і ц ь к и й Д.В. Контактні напруження в задачі про тиск штампа на пружний трансверсально-ізотропний шар. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 115-122 (укр.).

Рассматривается задача о давлении жесткого гладкого штампа на трансверсально-изотропный слой. Приводится формула для контактных давлений под штампом для слоя относительно большой толщины для двух случаев: когда слой лежит на гладком жестком основании и, когда он неподвижно сцеплен с ним. Графиком проиллюстрировано распределение давлений под плоским эллиптическим в плане штампом. Ил. 4, библ. 8.

УДК 539.377

Температурные напряжения около криволинейных отверстий, вызванные однородным тепловым потоком на бесконечности. М а р т и н о в и ч Т.Л., Н і щ е н к о І.О., М а х м у д А л л а м. Температурні напруження біля криволінійних отворів, викликані однорідним тепловим потоком на несінченності. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип. 8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 122-129 (укр.).

Получено решение плоской задачи термоупругости для бесконечной области с криволинейным отверстием, когда теплообмен с внешней средой вдоль контура отверстия происходит по закону Ньютона, а на бесконечности задан однородный тепловой поток, направленный под углом α к оси Ox. Внешнее силовое поле отсутствует. Боковые поверхности пластинки теплоизолированы. Получены расчетные формулы для вычисления напряжений в пластинке вблизи отверстия. Библ. 5.

УДК 539.3

Напряженное состояние анизотропной пластинки с несимметрично подкрепленным круговым отверстием. Б о ж и д а р н и к В.В. Напружений стан анізотропної пластинки з несиметрично підкріпленим коловим отвором. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 130-137 /укр./.

Решена задача о напряженном состоянии анизотропной пластинки с несимметрично подкрепленным круговым отверстием. Подкрепляющий стержень спаян с пластинкой до деформации таким образом, что плоскость оси стержня смещена от срединной плоскости пластинки на некоторую величину. Приводится численный анализ зависимости напряженного состояния в ортотропной пластинке от эксцентриситета подкрепляющего кольца. Ил. 4, библ.5.

УДК 517.3

Одна осесимметричная задача термоупругости для трансверсально-изотропного слоя. Г а б р у с е в В.Г. Одна осесиметрична задача термопружності для трансверсально-ізотропного шару. Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична, вип.8. Вид-во Львівського ун-ту, 1973, с. 137-144 /укр./.

Рассматривается осесимметричная задача термоупругости для плоскопараллельного трансверсально изотропного слоя конечной толщины при наявности двух круговых линий раздела граничных условий для температуры, заданных в виде законов Ньютона при теплообмене с внешней средой. Граничные плоскости слоя предполагаются свободными от внешней нагрузки.

Получены формулы распределения температурного поля и температурных напряжений. Рассмотрен числовой пример. Ил.4, библ.5.

З М І С Т

М а т е м а т и к а

Министерство высшего и среднего специального образования УССР
ВЕСТНИК ЛЬВОВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. Ив. ФРАНКО

С е р и я м е х а н и к о - м а т е м а т и ч е с к а я, в. 8
/на украинском языке/

Объем 9,75 печ.л., 8 уч.-изд.л. Тираж 600. Цена 80 коп. Зак.
Издательство Львовского университета. Львов, Университетская, I.
Областная книжная типография Львовского областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Львов, Стефаника, II.

Редактор В.В. В о й т о в и ч.   Коректор М.Т. Л о м е х а

БГ 00561. Підписано до друку 21.VI.1973 р. Формат 60x90 I/16. Папір друк. № 2. Папер.арк. 4,875. Друк. арк. 9,75. Обл.-вид. арк. 8. Тираж 600. Ціна 80 коп. Зам. 1677

Видавництво Львівського університету. Львів, Університетська, I.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління у справах видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі.
Львів, Стефаника, II.

80 коп.