ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 80

Львівський національний університет імені Івана Франка
2015

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 80

Львівський національний університет імені Івана Франка
2015

V I S N Y K	В І С Н И К
OF THE LVIV	ЛЬВІВСЬКОГО
UNIVERSITY	УНІВЕРСИТЕТУ
Series	**Серія**
Mechanics and Mathematics	**механіко-математична**
Issue 80	**Випуск 80**
Scientific journal	Збірник наукових праць
Published 1-2 issues per year	Виходить 1-2 рази на рік
Published since 1965	Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv	Львівський національний університет імені Івана Франка

2015

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол №13/12 від 30.12.2015 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №528 від 12.05.2015р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-41-72

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 14,4
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 5–9
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 5–9

УДК 512.552.13

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1 З УМОВОЮ ДУБРОВІНА ТА УМОВОЮ Z

Василина БОХОНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: b_strannik@ukr.net

Доведено, що область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників.

Ключові слова: область Безу, стабільний ранг 1, кільце елементарних дільників, умови Дубровіна та Z.

Кільця елементарних дільників ввів у 1949 р. Капланський [1]. Комутативні кільця елементарних дільників активно вивчають у [2], але цього не можна сказати про некомутативні кільця елементарних дільників. Серед небагатьох праць з теорії некомутативних кілець елементарних дільників відзначимо результат [2], де доведено, що майже атомна область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна є кільцем елементарних дільників.

У цій праці обмеження на майже атомні області Безу знято. Доведено, що область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна з обмеженням певного вигляду на двобічні ідеали (умова Z — з умови $RaR = R$ випливає, що a — скінченний елемент) є кільцем елементарних дільників.

Зауважимо, що умова Дубровіна згідно з [2] є необхідною і достатньою умовою, щоб напівлокальне, напівпервинне кільце Безу було кільцем елементарних дільників. Позаяк напівлокальне кільце є кільцем стабільного рангу 1 [2], то зрозуміло, що умова Дубровіна є, в крайньому випадку, необхідною для розгляду питання канонічної діагональної редукції матриць над кільцями Безу стабільного рангу 1 .

Під кільцем розуміємо асоціативне кільце з одиницею і $1 \neq 0$. Правим (лівим) кільцем Безу називається кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце, яке є одночасно правим і лівим кільцем Безу, називається кільцем Безу. Скажемо, що кільце R є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ знайдеться такий елемент $t \in R$, що $(a + bt)R = R$ [2].

Елемент кільця називається атомом, якщо він незворотний, ненульовий і не може бути зображеним у вигляді добутку двох незворотних елементів.

Ненульовий елемент a області R назвемо лівим скінченним, якщо довільний тривіальний лівий дільник a є зворотним, або скінченний добуток атомів і правий скінченний елемент — це елемент, довільний правий множник якого зворотний або є добутком скінченної кількості атомів. Елемент a області R назвемо скінченним, якщо він є лівим і правим скінченним. Довжиною $l(a)$ скінченного елемента a області R назвемо кількість атомних дільників.

Зауважимо, що в області Безу елемент є скінченним тоді і лише тоді, коли він має скінченну довжину [2].

Фактично, область Безу є областю головних ідеалів тоді і лише тоді, коли довільний ненульовий, незворотний елемент є скінченним [2].

Матриці A та B називаються еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q над кільцем відповідних розмірів, що

$$A = PBQ.$$

Будемо говорити, що матриця A над кільцем R має канонічну діагональну редукцію, якщо вона еквівалентна до діагональної матриці

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subset \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i, i \in 1, 2 \ldots, r-1$.

Якщо над кільцем R довільна матриця має канонічну діагональну редукцію, то кільце R називається кільцем елементарних дільників [1].

У [2] Забавський довів, що проста область Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли R є 2–простою, тобто, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ існують такі елементи $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$, що $u_1 a v_1 + u_2 a v_2 = 1$. Зазначимо, що у простій області R для довільного ненульового елемента $a \in R$ отримуємо $RaR = R$.

Мета нашої праці — вивчити різні умови на ідеал RaR. Серед перших видів обмежень на область відзначимо умову L.

Означення 1. *Скажемо, що над областю R виконується умова L, якщо з умови $RaR = R$ випливає, що $aR = R$.*

Твердження 1. *Нехай R є областю з умовою L, в якій довільний максимальний правий ідеал є головним, тоді довільний максимальний правий ідеал — двобічний.*

Доведення. Нехай $M = mR$ — довільний максимальний правий ідеал R, і нехай існує елемент x такий, що $xm \notin M$. Розглянемо правий ідеал $M + xmR = R$, оскільки $M \subseteq M + xmR$, на підставі означення M одержимо $M + xmR = R$, тобто $ms + xmy = 1$ для деяких елементів $s, y \in R$, тобто $RmR = R$. На підставі умови L отримаємо, що m — оборотний елемент R, що неможливо, оскільки mR — максимальний правий ідеал R. Таке протиріччя засвідчує, що $Rm \subseteq mR$, тобто mR є двобічним ідеалом. Теорема доведена. □

Означення 2. *Скажемо, що над кільцем R виконується умова Дубровіна, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ існує елемент $\alpha \in R$ такий, що $RaR = \alpha R = R\alpha$.*

Очевидним прикладом кільця з умовою Дубровіна є просте кільце. Наступна теорема визначає зв'язок кілець з умовою L і кілець з умовою Дубровіна.

Теорема 1. *Нехай R кільце елементарних дільників з умовою L. Тоді R є кільцем з умовою Дубровіна.*

Доведення. Нехай $aR + bR = R$ і розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки R є кільцем елементарних дільників, тоді для матриці A існують оборотні матриці другого порядку P і Q, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $RcR \subseteq zR \cap Rz$.

Оскільки $aR+bR = R$, тоді $RaR+RbR = R$. Зауважимо, що $RaR+RbR = RzR$, оскільки $RcR \subseteq zR \cap Rz$, то $RaR + RbR = RzR$. З умови L випливає, що z — оборотний елемент R.

Нехай $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, тоді $(p_{11} + p_{12}b)q_{11} = z$ оборотний елемент R. Тобто $Ra + Rb = R$.

Якщо $Ra + Rb = R$, то, провівши для матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ аналогічні міркування, ми доведемо, що $aR + bR = R$.

Тепер доведемо, що над R виконується умова Дубровіна. Нехай a — довільний ненульовий елемент R. Оскільки R є кільцем елементарних дільників, тоді для матриці $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ існують оборотні матриці другого порядку $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, що

$$AP = Q\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $RbR \subseteq zR \cap Rz$. Зауважимо, що $RaR = RzR$. А з рівності 2 отримаємо $ap_{12} = q_{12}b$, $ap_{22} = q_{22}b$.

Оскільки P — оборотна матриця, то $Rp_{12} + Rp_{22} = R$. На підставі доведеного вище одержимо $p_{12}R+p_{22}R = R$, тобто $p_{12}u+p_{22}v = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Позаяк $ap_{12} = q_{12}b$, $ap_{22} = q_{22}b$, то $a = ap_{12}u + ap_{22}v = q_{12}bu + q_{22}bv \in RbR$. Звідси $RaR \subseteq RbR$. Так як $RbR \subseteq RzR$ і $RaR = RzR$, то $RaR = RbR \subseteq zR \cap Rz \subseteq RzR$. Звідси $RaR = zR = Rz$. Теорему доведено. □

Частковим випадком скінченного елемента слугує оборотний елемент. За аналогією з умовою L розглянемо таку умову. З умови $RaR = R$ випливає, що a — скінченний елемент. Цю умову назвемо умовою Z.

Твердження 2. *Нехай R область Безу з умовою Дубровіна та умовою Z. Тоді довільний ненульовий елемент $a \in R$ можна зобразити у вигляді,*

$$a = \alpha f = \varphi\alpha,$$

де α — дуо-елемент, а f, φ — скінченні елементи R.

Доведення. Оскільки $RaR = \alpha R = R\alpha$, то $a = \alpha f = \varphi\alpha$, де $RfR = R\varphi R = R$. Згідно з обмеженнями, які накладено на R, отримаємо f, φ — скінченні елементи. Твердження доведено. □

Твердження 3. [2] *Нехай R область Безу з умовою Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільна матриця*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $RaR + RbR + RcR = R$ має канонічну діагональну редукцію.

Твердження 4. [2] *Нехай R — ліве (праве) кільце Безу стабільного рангу 1. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі $x \in R$ $(y \in R)$ і $d \in R$ $(\delta \in R)$, що $a + xb = d$ $(a + by = \delta)$ і $Ra + Rb = Rd$ $(aR + bR = \delta R)$.*

Теорема 2. *Нехай R — область Безу стабільного рангу 1, в якому виконуються умова Z і умова Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Згідно з твердженням 4 для доведення теореми необхідно і достатньо довести, що довільна матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $RaR + RbR + RcR = R$ має канонічну діагональну редукцію.

Оскільки R є областю Безу стабільного рангу 1, то згідно з твердженням 5 для елементів $a, b \in R$ існують елементи $x, d \in R$, що $xa + b = d$, де $Ra + Rb = Rd$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + d & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

де $a = a_0 d$ для деякого елемента $a_0 \in R$.

Нехай $cR + dR = zR$ і $cy + d = z$, зазначимо, що ці елементи існують згідно з твердженням 5. Звідси

$$\begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + xy & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут $d = zt$, $c = zc_0$. Оскільки матриця A еквівалентна матриці $\begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix}$, де $a = a_0 zt$, $c = zc_0$ і того, що $R = RaR + RbR + RcR = RzR + RcR$, одержимо, що $RzR = R$. Згідно з умовою Z отримаємо, що z — скінчений елемент області R.

Розглянемо матрицю $B = \begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Замінюючи елемент z послідовно на Н.С.Л.Д. (найбільший спільний лівий дільник) елемент z і c, ми отримаємо, що новий елемент z матриці на місці (1.1) буде скінченним, і його довжина буде менша за $l(z)$.

Аналогічні перетворення виконаємо на першому стовпцеві матриці, де перший рядок нової матриці може знову стати ненульовим, але це можливо лише, коли довжина скінченного елемента z на місці (1.1) зменшується, тобто матрицю B зведемо до вигляду

$$C = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

де z' — скінченний елемент.

Використовуючи операцію додавання до першого стовпця (рядка) правого (лівого) кратному другого стовпця (рядка) і знову виконавши послідовну заміну елемента z' на Н.С.Л.Д. (Н.С.П.Д.) цього елемента й утвореного так елемента, ми будемо зменшувати довжину елемента z'. Цей процес продовжуватимемо доти, доки не отримаємо еквівалентну до R матрицю C вигляду

$$C = \begin{pmatrix} z'' & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Тут $RsR \subseteq z''R \cap Rz''$. Теорема доведена. □

Зауважимо, що в доведенні цієї теореми ми використали той факт, що довільний дільник скінченного елемента області Безу є скінченним [2].

Література

1. *Kaplansky I.* Elementary devisors and modules / *I. Kaplansky* // Trans. Amer. Mat. Sven. — 1949. — Vol. 66. — P. 464–491.
2. *Zabavsky B. V.* Diagonal reduction of matrices over rings / *Zabavsky B.V.* // Mat. Studies Monograph Series Vol. 16, 2012. — 251 p.

Стаття: надійшла до редколегії 03.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

REDUCTION OF MATRICES OVER BEZOUT DOMAIN OF STABLE RANGE ONE WITH THE DUBROVIN CONDITION AND THE CONDITION Z

Vasylyna Bokhonko

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: b_strannik@ukr.net

In this paper we shown that any Bezout domain of stable range one with Dubrovin condition and condition Z is an elementary divisor ring.

Key words: Bezout domain, stable range one, elementary divisor ring, Dubrovin condition, condition Z.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 10–26
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 10–26

УДК 517.547

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ІНДИКАТОРІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ В ПРОКОЛЕНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ. І

Олег ВИШИНСЬКИЙ, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Доведено неперервність індикаторів зростання голоморфних функцій цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині стосовно функції зростання λ, а також властивість одностайної неперервності для класу функцій скінченного λ-типу в проколеній площині.

Ключові слова: функція цілком регулярного зростання, індикатор зростання, функція скінченного λ-типу, верхня відносна міра, одностайна неперервність, формула Пуассона-Єнсена, коефіцієнти Фур'є, голоморфна функція.

1. Вступ. Одним з останніх підходів до вивчення властивостей функцій мероморфних у багатозв'язних областях є підхід, який запропоновано в [1], [2], [3]. Застосовуючи апарат, розроблений у згаданих працях, у [4] було введено поняття голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, поняття індикаторів зростання таких функцій і доведено деякі їхні властивості. Зокрема, ω-тригонометрична опуклість суми індикаторів зростання та існування кутової щільності множини нулів голоморфних функцій цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^*$ на певних послідовностях. Пізніше в [5] було розглянуто питання про одностайне цілком регулярне зростання модуля та аргументу голоморфної в $\mathbb{C}^*$ функції. Автори, використовуючи метод рядів Фур'є, результати праці [6] та інші допоміжні результати, які вони одержали, які також мають самостійне значення, отримали у формі критеріїв опис множин голоморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій, модулі й аргументи яких зростають одностайно й цілком регулярно.

Мета нашої праці — продовжити згаданий цикл робіт з вивчення властивостей функцій цілком регулярного зростання у проколеній площині. Головними об'єктами дослідження передусім є індикатори зростання таких функцій. У цій частині доводиться неперервність індикаторів, а також, задіюючи аналог формули Пуассона-Єнсена для кільця, отриманий І. П. Кшановським у [7], доводиться одностайна неперервність для класу функцій скінченного λ-типу в $\mathbb{C}^*$. Ця властивість є ключовою для доведення теорем про асимптотичну поведінку голоморфної функції цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^*$ при $r \to +\infty$ та $r \to 0$ поза деякими E_0-множинами, які становлять зміст другої частини цієї праці.

2. Означення та допоміжні поняття. Нехай f — функція, голоморфна в проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f \not\equiv 0$. Під функцією зростання ми розумітимемо додатну, неспадну, неперервну, необмежену функцію $\lambda(r)$, $r \geqslant 1$. Через $T_0(r, f)$ позначатимемо характеристику типу Неванлінни для функцій мероморфних у кільці $\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, де $1 < R_0 \leqslant +\infty$, яка була введена в [1], а саме

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) + N_0(r, f), \qquad 1 < r < R_0,$$

де

$$m_0(r, f) = m(r, f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1, f),$$

$$m(t, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(te^{i\theta})|\, d\theta, \qquad \frac{1}{R_0} < t < R_0,$$

а $N_0(r, f) = \int_1^r \frac{n_0(t,f)}{t} dt$, де $n_0(t, f)$ – лічильна функція полюсів функції f в кільці $1/t \leqslant |z| \leqslant t$, $t \geqslant 1$.

Означення 1 ([3]). *Нехай λ функція зростання а f голоморфна функція в $\mathbb{C}^*$. Будемо говорити, що f функція скінченного λ-типу, і записувати $f \in \Lambda_H$, якщо $T_0(r, f) \leqslant B\lambda(Cr)$ при деяких сталих B, C для всіх r, $r \geqslant 1$.*

Всюди надалі будемо припускати, що $\lambda(r)$ є функцією так званого помірного зростання, тобто $(\exists M > 0)$ $(\forall r > 1) : \lambda(2r) \leqslant M\lambda(r)$. Крім того, обмежимось лише такими функціями зростання $\lambda(r)$, для яких $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$.

Ми використовуватимемо такі позначення для коефіцієнтів Фур'є:

$$c_k(t, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(te^{i\theta})|\, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t > 0.$$

Означення 2 ([6]). *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f називається функцією цілком регулярного зростання стосовно функції зростання λ, якщо f є скінченного λ-типу і $\forall k \in \mathbb{Z}$ існують границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} =: c_k^{(1)}$ та $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} =: c_k^{(2)}$.*

Клас таких функцій позначатимемо Λ_H°.

Означення 3 ([6]). *Якщо $f \in \Lambda_H^\circ$, то функції $h_1(\theta, f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(1)} e^{ik\theta}$, $h_2(\theta, f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(2)} e^{ik\theta}$, де $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, визначені в Означенні 2, називаються індикаторами зростання функції f або, коротше, індикаторами.*

Означення 4. *Верхньою відносною мірою множини $E \subset (0, +\infty)$ будемо називати величину*

$$\overline{m}_0^*(E) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{mes(E \cap (1, r))}{r} + \varlimsup_{r\to\infty} \frac{mes(E' \cap (1, r))}{r}, \text{ де } E' = \{\frac{1}{r} : r \in E \cap (0, 1)\}. \quad (1)$$

Множину E з нульовою верхньою відносною мірою називатимемо E_0-множиною.

Також будемо припускати, що функція f не має нулів на колі $|z|=1$. Якщо для Теорем 1, 2 це припущення не зменшує загальності і результат залишається правильним також й у випадку, коли функція f має нулі на одиничному колі, то для Теорем 3, 4 це припущення є суттєвим, оскільки доведення двох останніх теорем використовує аналог формули Пуассона-Єнсена для кільця, отриманий І. П. Кшановським [7], саме за умови відсутності нулів (а також полюсів у випадку мероморфної функції) на колі $|z|=1$.

Нарешті наведемо дещо модифіковані позначення з [1], які ми неодноразово будемо використовувати в доведенні основних результатів. Для голоморфної в $\mathbb{C}^*$, відмінної від тотожного нуля функції f через $n_0^{(1)}(t,f)$, $n_0^{(2)}(t,f)$ позначимо кількість нулів a_j функції $f(z)$ відповідно в $\{z : 1<|z|\leqslant t\}$, та $\{z : \frac{1}{t}\leqslant |z|<1\}$, $t>1$, з врахуванням їхньої кратності. Крім того, нехай $N_0^{(i)}(r,f) := \int\limits_1^r \frac{n_0^{(i)}(t,f)}{t}dt$, $i=1,2$, $r>1$.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай $f\in\Lambda_H^\circ$. Тоді індикатор $h_1(\theta,f)$ є неперервною функцією.*

Теорема 2. *Нехай $f\in\Lambda_H^\circ$. Тоді індикатор $h_2(\theta,f)$ є неперервною функцією.*

Теорема 3. *Нехай $f\in\Lambda_H$, $f(z)\neq 0$ при $|z|=1$. Тоді*

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\forall\eta>0)\,(\exists\delta_0>0)\,(\exists E_\eta,\ \overline{m}_0^*(E_\eta)\leqslant\eta)\,(\forall r\in[2,+\infty)\setminus E_\eta)\,(\forall\varphi,\theta):$$
$$|\varphi-\theta|<\delta_0 \quad\Longrightarrow\quad |\log f(re^{i\theta})-\log f(re^{i\varphi})|<\varepsilon\lambda(r).$$

Теорема 4. *Нехай $f\in\Lambda_H$, $f(z)\neq 0$ при $|z|=1$. Тоді*

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\forall\mu>0)(\exists\delta_0>0)\,(\exists E_\mu,\ \overline{m}_0^*(E_\mu)\leqslant\mu)\,(\forall r\in[2,+\infty)\setminus E_\mu)\,(\forall\varphi,\theta):$$
$$|\varphi-\theta|<\delta_0 \quad\Longrightarrow\quad \left|\log f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)-\log f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)\right|<\varepsilon\lambda(r).$$

4. Доведення основних результатів.

4.1. Доведення Теореми 1.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція f не має нулів на колі $|z|=1$. Запишемо вирази для коефіцієнтів Фур'є [3, Лема 21.1, с. 59]

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2}(\alpha_k r^k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-k})+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right),\quad k\in\mathbb{N},\quad r>1. \tag{2}$$

Звідси

$$r^k\left|(\alpha_k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-2k})+\frac{1}{k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right|\leqslant 2|c_k(r,f)|+\left|\frac{1}{k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right|. \tag{3}$$

Поділимо (3) на r^k. Оцінимо праву частину отриманої нерівності

$$\frac{2|c_k(r,f)|}{r^k}+\frac{1}{k}\left|\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\frac{\overline{a}_j}{r^2}\right)^k\right|\leqslant\frac{4T_0(r,f)}{r^k}+\frac{1}{k}\frac{n_0^{(1)}(r,f)}{r^{2k}},\quad k\in\mathbb{N},\quad r>1. \tag{4}$$

Нагадаємо, що ми розглядаємо лише функції помірного зростання $\lambda(r)$. В цьому випадку порядок ρ_0 функції f, який визначається ([3]) так:

$$\rho_0 = \rho[f] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log T_0(r,f)}{\log r}$$

буде скінченним. Спрямуємо $r \to +\infty$. В правій частині нерівності (4) обидва доданки прямують до 0 при $k > \rho_0$. Тоді з (3) отримуємо

$$\alpha_k = -\frac{1}{k}\sum_{1<|a_j|}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k, \quad k > \rho_0.$$

Повертаючись до (2), матимемо

$$c_k(r,f) = -\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|>r}\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \frac{1}{2k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k + \frac{1}{2}\overline{\alpha}_{-k}r^{-k}, \quad k > \rho_0. \tag{5}$$

Оцінюючи абсолютні величини коефіцієнтів Фур'є (5), замінюючи суми інтегралами Стільтьєса та інтегруючи частинами, отримуємо при $k > \rho_0$

$$|c_k(r,f)| \leqslant \frac{1}{2k}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_0^{(1)}(t,f) + \frac{1}{2k}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k dn_0^{(1)}(t,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\frac{r^k}{t^k}n_0^{(1)}(t,f)\Big|_r^\infty + k\int_r^\infty \frac{r^k}{t^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) + \frac{1}{2k}\left(\frac{t^k}{r^k}n_0^{(1)}(t,f)\Big|_1^r - k\int_1^r \frac{t^k}{r^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= -\frac{1}{2k}n_0^{(1)}(r,f) + \frac{1}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{1}{2k}n_0^{(1)}(r,f) - \frac{1}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k}, \quad r > 1.$$

Знову інтегруючи частинами, при $k \geqslant q+1$, $q = [\rho_0]$ одержуємо

$$|c_k(r,f)| \leqslant \frac{1}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k dN_0^{(1)}(t,f) - \frac{1}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k dN_0^{(1)}(t,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{r^k}{t^k}N_0^{(1)}(t,f)\Big|_r^\infty + k\int_r^\infty \frac{r^k}{t^k}\frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^k}{r^k}N_0^{(1)}(t,f)\Big|_1^r - k\int_1^r \frac{t^k}{r^k}\frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{k}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{k}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt - N_0^{(1)}(r,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k}, \quad r > 1. \tag{6}$$

Виконуючи аналогічні перетворення, при $1 \leqslant k \leqslant q$ спочатку отримаємо

$$|c_k(r,f)| \leq \frac{1}{2}|\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k}r^{-k}| + \frac{1}{2}\int_1^r \frac{r^k}{t^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{1}{2}\int_1^r \frac{t^k}{r^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt, \quad r > 1.$$

Після повторного інтегрування частинами матимемо при $1 \leqslant k \leqslant q$, $r > 1$

$$|c_k(r,f)| \leq \frac{1}{2}|\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}| + \frac{k}{2}\int\limits_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + N_0^{(1)}(r,f). \quad (7)$$

Очевидно, що порядок ρ функції $N_0^{(1)}(r,f)$ не перевищує ρ_0. Тоді за лемою Пойя [10, с. 155-156] для довільного додатного $\varepsilon < q+1-\rho$ існує послідовність $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$ така, що

$$\begin{aligned} N_0^{(1)}(t,f) &\leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon} N_0^{(1)}(t_n,f), \quad 0 < t \leqslant t_n, \\ N_0^{(1)}(t,f) &\leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon} N_0^{(1)}(t_n,f), \quad t_n \leq t < +\infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи (8), із (6) отримуємо

$$|c_k(t_n,f)| \leqslant \left(\frac{k}{2}\int\limits_{t_n}^{\infty}\left(\frac{t_n}{t}\right)^k\left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon}\frac{dt}{t} + \frac{k}{2}\int\limits_1^{t_n}\left(\frac{t}{t_n}\right)^k\left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon}\frac{dt}{t} - 1\right)N_0^{(1)}(t_n,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2t_n^k} =$$

$$= N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k}{2}t_n^{k-\rho-\varepsilon}\cdot\int\limits_{t_n}^{\infty} t^{\rho+\varepsilon-k-1}dt + \frac{k}{2}t_n^{-k-\rho+\varepsilon}\cdot\int\limits_1^{t_n} t^{k+\rho-\varepsilon-1}dt - 1\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2t_n^k} =$$

$$= N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2t_n^k}, \quad k \geqslant q+1.$$

Якщо $1 \leqslant k \leqslant q$, то з (7) та (8) випливає

$$|c_k(t_n,f)| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^k + \overline{\alpha}_{-k} t_n^{-k}| + N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k}{2}\int\limits_1^{t_n}\left(\frac{t_n^k}{t^k} - \frac{t^k}{t_n^k}\right)\left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon}\frac{dt}{t} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^k + \overline{\alpha}_{-k} t_n^{-k}| + N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k}{2}t_n^{k-\rho+\varepsilon}\cdot\int\limits_1^{t_n} t^{\rho-\varepsilon-k-1}dt - \right.$$

$$\left. -\frac{k}{2}t_n^{-k-\rho+\varepsilon}\cdot\int\limits_1^{t_n} t^{k+\rho-\varepsilon-1}dt + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^k + \overline{\alpha}_{-k} t_n^{-k}| + N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right).$$

Враховуючи те, що $N_0^{(1)}(r,f) \leqslant T_0(r,f) \leqslant A\lambda(r)$ при $r > 1$, спрямовуючи $n \to +\infty$, одержуємо

$$|c_k^{(1)}| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|c_k(t_n,f)|}{\lambda(t_n)} \leqslant \begin{cases} A\left(\dfrac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right), & k > \rho, \\ A\left(\dfrac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right), & 1 \leqslant k \leqslant \rho. \end{cases} \quad (9)$$

Враховуючи довільність ε, отримуємо, що

$$|c_k^{(1)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для від'ємних цілих використовуємо властивість коефіцієнтів Фур'є $c_{-k}(r,f) = \overline{c_k(r,f)}$, що разом з отриманим раніше дає підстави записати

$$|c_k^{(1)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Це дає право стверджувати, що ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(1)} e^{ik\theta}$ збігається рівномірно на $[0,2\pi]$, а отже, $h_1(\theta,f)$ є неперервною функцією стосовно θ на $[0,2\pi]$.

□

4.2. Доведення Теореми 2.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція f немає нулів на одиничному колі. Коефіцієнти Фур'є для нашого випадку мають такий вигляд ([3, с.59]):

$$c_k\left(\frac{1}{r},f\right) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k) + \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} \left((\overline{a}_j r)^k - \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k\right), \; k\in\mathbb{N},\; r>1. \quad (10)$$

З (10) випливає

$$r^k \left| (\alpha_k r^{-2k} + \overline{\alpha}_{-k}) + \frac{1}{k} \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} \overline{a}_j^k \right| \leqslant 2\left| c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| + \left| \frac{1}{k} \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right|. \quad (11)$$

Поділимо (11) на r^k. Для правої частини отриманої нерівності справджується така оцінка:

$$2\frac{|c_k(\frac{1}{r},f)|}{r^k} + \frac{1}{k}\left| \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} \left(\frac{1}{a_j r^2}\right)^k \right| \leqslant \frac{4T_0(r,f)}{r^k} + \frac{1}{k}\frac{n_0^{(2)}(r,f)}{r^{2k}}. \quad (12)$$

Нехай $q = [\rho_0]$, де ρ_0 – порядок функції f. Спрямуємо $r \to +\infty$. В правій частині (12) обидва доданки прямують до 0 при $k > q$. Тоді з (11) отримуємо

$$\overline{\alpha}_{-k} = -\frac{1}{k} \sum_{0\leqslant|a_j|<1} \overline{a}_j^k, \quad k > q.$$

Повертаючись до (10), матимемо

$$c_k\left(\frac{1}{r},f\right) = -\frac{1}{2k} \sum_{0<|a_j|<\frac{1}{r}} (\overline{a}_j r)^k - \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k + \frac{1}{2}\alpha_k r^{-k}, \quad k > \rho. \quad (13)$$

Далі доведення стає аналогічним до доведення Теореми 1 з відповідними змінами у позначеннях. Тому ми не будемо наводити проміжних міркувань, які аналогічні до міркувань у відповідних місцях доведення Теореми 1.

Інтегруючи частинами в (13), отримуємо при $k > q$

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt + \frac{|\alpha_k|}{2r^k}, \quad r > 1.$$

Знову інтегруючи частинами при $k \geqslant q+1$, одержимо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| \leqslant \frac{k}{2}\int\limits_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_0^{(2)}(t,f)}{t}dt + \frac{k}{2}\int\limits_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_0^{(2)}(t,f)}{t}dt - N_0^{(2)}(r,f) + \frac{|\alpha_k|}{2r^k}, \ r > 1. \tag{14}$$

Якщо ж $1 \leqslant k \leqslant q$, то після першого інтегрування частинами матимемо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k| + \frac{1}{2}\int\limits_1^r \frac{r^k}{t^k}\frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt + \frac{1}{2}\int\limits_1^r \frac{t^k}{r^k}\frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt, \quad r > 1,$$

а після другого для $1 \leq k \leq q$, $r > 1$

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k| + \frac{k}{2}\int\limits_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_0^{(2)}(r,f)}{t}dt + N_0^{(2)}(r,f). \tag{15}$$

Оскільки порядок ρ функції $N_0^{(2)}(r,f)$ не перевищує ρ_0, то, застосовуючи лему Пойя [10, с. 155-156], отримуємо, що для довільного додатного $\varepsilon < q+1-\rho$ знайдеться послідовність $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$ така, що

$$\begin{gathered} N_0^{(2)}(t,f) \leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon} N_0^{(2)}(t_n,f), \quad 0 < t \leqslant t_n \\ N_0^{(2)}(t,f) \leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon} N_0^{(2)}(t_n,f), \quad t_n \leq t < +\infty. \end{gathered} \tag{16}$$

Використовуючи (16), із (14) отримуємо при $k \geqslant q+1$

$$\left|c_k\left(\frac{1}{t_n},f\right)\right| \leqslant N_0^{(2)}(t_n,f)\left(\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right) + \frac{|\alpha_k|}{2r^k}, \quad r > 1.$$

Якщо $1 \leqslant k \leqslant q$, то з (15), застосовуючи (16), отримуємо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{t_n},f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} t_n^k| + N_0^{(2)}(t_n,f)\left(\frac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right), \quad r > 1.$$

Оскільки $N_0^{(2)}(r,f) \leqslant T_0(r,f) \leqslant A\lambda(r)$ при $r > 1$, то, спрямовуючи $n \to +\infty$, отримаємо

$$|c_k^{(2)}| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|c_k(\frac{1}{t_n},f)|}{\lambda(t_n)} \leqslant \begin{cases} A\left(\dfrac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right), & k > \rho, \\ A\left(\dfrac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right), & 1 \leqslant k \leqslant \rho. \end{cases} \tag{17}$$

На підставі довільності ε робимо висновок, що $|c_k^{(2)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}$ при $k \in \mathbb{N}$. Використовуючи властивість $c_{-k}(r,f) = \overline{c_k(r,f)}$, матимемо $|c_k^{(2)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}$ при всіх $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Тому ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(2)} e^{ik\theta}$ збігається рівномірно на $[0,2\pi]$, а отже, $h_2(\theta,f)$ є неперервною при $\theta\in[0,2\pi]$.

□

4.3. Доведення Теореми 3.

Оскільки $f\in\Lambda_H$ то $(\exists A>0)$ $(\forall r>0)$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$: $|c_k(2r,f)|\leqslant A\lambda(r)$, $n_0(2r,f)\leqslant A\lambda(r)$. Нехай $\{a_j\}$ – нулі функції f, $z=re^{i\varphi}$, $R>r$. Використовуючи аналог формули Пуассона-Єнсена [7] для проколеної площини $\mathbb{C}^*$, можемо записати

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|P(R,r,\theta-\varphi)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\frac{1}{R}e^{i\theta})|P(Rr,1,\theta-\varphi)d\theta-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P(R^2,r,\theta-\varphi)d\theta - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P(rR^2,1,\theta-\varphi)d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1}\log\left|\frac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta-$$

$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant R}\log\left|\frac{R^2-\overline{a_j}z}{R(a_j-z)}\right| - \sum_{\frac{1}{R}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{R^2}-\overline{a_j}z}{\frac{1}{R}(a_j-z)}\right| + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\cdot\log R, \qquad (18)$$

де $P(X,x,\tau)=\dfrac{X^2-x^2}{X^2-2Xx\cos\tau+x^2}$ – ядро Пуассона.

Оскільки

$$P(R,r,\theta-\varphi)=\operatorname{Re}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{r}{R}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)},\quad r<R, \qquad (19)$$

то при $R=2r$

$$\begin{aligned}
P(Rr,1,\theta-\varphi)=P(r,\frac{1}{2r},\theta-\varphi) &= \operatorname{Re}\frac{re^{i\varphi}+\frac{1}{2r}e^{i\theta}}{re^{i\varphi}-\frac{1}{2r}e^{i\theta}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2r^2}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)},\\
P(R^2,r,\theta-\varphi)=P(4r,1,\theta-\varphi) &= \operatorname{Re}\frac{4re^{i\varphi}+e^{i\theta}}{4re^{i\varphi}-e^{i\theta}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{4r}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)}, \qquad (20)\\
P(rR^2,1,\theta-\varphi) &= \operatorname{Re}\frac{4r^3e^{i\varphi}+e^{i\theta}}{4r^3e^{i\varphi}-e^{i\theta}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{4r^3}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)}.
\end{aligned}$$

Застосовуючи розвинення ядер Пуассона (20), отримуємо, що рівність (18) при $R=2r$ набуде вигляду

$$\log|f(re^{i\varphi})|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi}-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}}+\frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}-$$

$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{2r-\frac{\overline{a_j}z}{2r}}{a_j-z}\right|-\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{2r}-2r\overline{a_j}z}{a_j-z}\right|+O(\log r) \qquad (21)$$

де $1 < r \neq |a_j|$, $\frac{1}{r} \neq |a_j|$. Розглянемо суму 4-го та 5-го доданків в (21):

$$\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2r - \frac{\overline{a_j}z}{2r}\right| - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log|z-a_j| +$$

$$+ \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|\frac{1}{2r} - 2r\overline{a_j}z\right| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|z-a_j| =$$

$$= \log r \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} 1 + \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| -$$

$$- \log r \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} 1 - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| +$$

$$+ \log\frac{1}{2r} \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} 1 + \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|1 - 4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}| -$$

$$- \log r \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} 1 - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| =$$

$$= \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| +$$

$$+ \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|1 - 4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| - n_0^{(2)}(2r,f)\log 2r^2.$$

Позначимо

$$G(r,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}} + \frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S(r,\varphi) = \; & - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| + \sum_{1<|a_j|\leqslant \frac{r}{2}} \log|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}| - \\ & - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|1 - 4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}| + \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right|. \end{aligned} \quad (23)$$

а також

$$F(r,\varphi) = \sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant 2r} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right|, \quad F(r,\varphi) = \sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant 2r} \log\frac{|z-a_j|}{|z|} =: F(z). \quad (24)$$

Тоді (21) набуде вигляду

$$\log|f(re^{i\varphi})| = G(r,\varphi) + S(r,\varphi) + F(r,\varphi) + n_0^{(2)}(2r,f)\log 2r^2 + O(\log r), \quad r > 1. \quad (25)$$

Розглянемо окремо кожен з перших трьох доданків у (25). Доведемо спочатку, що $S(r,\varphi)/\lambda(r)$ буде одностайно неперервною функцією при $r \geq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Для цього розглянемо окремо кожен доданок-суму, що входить в $S(r,\varphi)$.

Розглянувши першу суму з $S(r,f)$, враховуючи, що при $1 < |a_j| \leqslant 2r$ та $r \geqslant 2$ правильні нерівності

$$1 = 2\left(1 - \frac{2r}{4r}\right) \leqslant 2\left(1 - \frac{|a_j|}{4r}\right) \leqslant \left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| \leqslant 2\left(1 + \frac{|a_j|}{4r}\right) \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3,$$

а також той факт, що функція $\log|w|$ є рівномірно неперервною в кільці $1 \leq |w| \leq 3$, робимо висновок, що функція $\log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right|$ рівномірно неперервна функція при $r \geqslant 2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Тому отримали, що $(\forall\varepsilon_1 > 0)$ $(\exists\delta_1 > 0)$ $(\forall r \geq 2)$ $(\forall\varphi,\theta)$ таких, що $|\varphi - \theta| < \delta_1$ виконується

$$\left|\sum_{1<|a_j|\leq 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| - \sum_{1<|a_j|\leq 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\theta}}{4r}\right)\right|\right| < \varepsilon_1 n_0^{(1)}(2r,f) < \varepsilon_1 A\lambda(r). \tag{26}$$

Для другої суми аналогічний висновок отримуємо, якщо зауважити, що при $1<|a_j|\leqslant \frac{r}{2}$ та $r \geqslant 2$ правильні нерівності

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{|a_j|}{r} \leqslant \left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| \leqslant 1 + \frac{|a_j|}{r} \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Одностайна неперервність четвертої суми з $S(r,\varphi)$ випливає з нерівностей

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} \leqslant 1 - \frac{1}{2r} \leqslant 1 - \frac{|a_j|}{r} \leqslant \left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| \leqslant 1 + \frac{|a_j|}{r} \leqslant 1 + \frac{1}{2r} \leqslant \frac{5}{4},$$

які правильні при $\frac{1}{2r} \leqslant |a_j| < 1$ та $r \geqslant 2$ після міркувань подібних до (26).

Зрештою, розглянемо третю суму $\sum\limits_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|1 - 4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}|$. Кожен доданок у цій сумі набуває вигляду $\log|1-\zeta|$, де $\zeta = \rho e^{i\psi}$, $\rho = 4r^3|a_j|$, $\rho \in [2r^2, 4r^3)$. Якщо $r \geqslant 2$, то $\rho \geqslant 8$ і тим більше $\rho \geqslant 2$. Тому $\forall\zeta_k = \rho e^{i\psi_k}$, $k = 1,2$ при $r \geqslant 2$ матимемо

$$\begin{aligned} \log|\zeta_1 - 1| - \log|\zeta_2 - 1| &= \log\left|\frac{\zeta_1 - 1}{\zeta_2 - 1}\right| = \log\left|1 + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_2 - 1}\right| = \\ &= \log\left|1 + \frac{\rho(e^{\psi_1} - e^{\psi_2})}{\zeta_2 - 1}\right| \leqslant \log\left(1 + \frac{\rho|\psi_1 - \psi_2|}{|\zeta_2 - 1|}\right) \leqslant \\ &\leqslant \log\left(1 + \frac{\rho}{\rho - 1}|\psi_1 - \psi_2|\right) \leqslant \log(1 + 2|\psi_1 - \psi_2|) \leqslant 2|\psi_1 - \psi_2|. \end{aligned} \tag{27}$$

Повертаючись до $S(r,\varphi)$, робимо висновок, що $(\forall\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{8A})$ $(\exists\delta_1' > 0)$ $(\forall r \geqslant 2)$ $(\forall\varphi,\theta):$

$$|\varphi - \theta| < \delta_1' \Rightarrow |S(r,\varphi) - S(r,\theta)| < 2\varepsilon_1(n_0^{(1)}(2r,f) + n_0^{(2)}(2r,f)) < 2\varepsilon_1 A\lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{28}$$

Перейдемо тепер до розгляду $G(r,\varphi)$.

Оскільки для всіх $r>1$ і $k\in\mathbb{Z}$ за критерієм скінченності λ-типу [3] виконується $|c_k(2r,f)| \leqslant A\lambda(r)$, $|c_k(\frac{1}{2r},f)| \leqslant A\lambda(r)$, то всі ряди в (22) збігаються рівномірно при

$r>1$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Крім того, $(\forall\varepsilon_1>0)$ $(\exists\delta_1''>0)$ $(\forall\varphi,\theta,\ |\varphi-\theta|<\delta_1'')$

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi}-\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}}e^{ik\theta}\right|=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}}(e^{ik\varphi}-e^{ik\theta})\right|<$$

$$<A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{|k|}}=3A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1,\quad r>1.$$

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi}-\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\theta}\right|=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}}(e^{ik\varphi}-e^{ik\theta})\right|<$$

$$<A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2r^2)^{|k|}}=3A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1,\quad r>1,$$

а також

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}}+\frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}-\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}}+\frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}\right|<$$

$$<\varepsilon_1|c_k(1,f)|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2}{4^{|k|}}<4\varepsilon_1A\lambda(r),\quad r>1.$$

Отже, $G(r,\varphi)$ є рівномірно неперервною стосовно $\varphi\in[0,2\pi]$ на кожному колі $|z|=r$, $r>1$. Насправді, ми отримали навіть більше. А саме, що $(\forall\varepsilon_1\leqslant\frac{\varepsilon}{40A})$ $(\exists\delta_1''>0)$ $(\forall r\geqslant2)$ $(\forall\varphi,\theta)$ таких, що $|\varphi-\theta|<\delta_1''$ виконується

$$|G(r,\varphi)-G(r,\theta)|<\varepsilon_1\cdot10A\lambda(r)<\frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{29}$$

Нам залишилося розглянути $F(r,\varphi)$. Якщо для деяких додатних чисел δ і R виконується $|\varphi-\theta|<\delta^3$ і $\frac{R}{2}\leqslant r\leqslant R$, то, позначивши $z=re^{i\varphi}$, $\zeta=re^{i\theta}$ та вживаючи позначення $F(z)$ з другої частини (24), матимемо

$$F(\zeta)-F(z)=\sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant2r}\log\left|\frac{\zeta-a_j}{z-a_j}\right|=\sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant2r}\log\left|1+\frac{|\zeta-a_j|-|z-a_j|}{|z-a_j|}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant2r}\log\left(1+\frac{|\zeta-z|}{|z-a_j|}\right)\leqslant\sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant2r}\log\left(1+\frac{r|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|}{|z-a_j|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant2r}\log\left(1+\frac{\delta^3r}{|z-a_j|}\right)\leqslant\sum_{\frac{R}{4}\leqslant|a_j|\leqslant2R}\log\left(1+\frac{2\delta^3R}{|z-a_j|}\right). \tag{30}$$

Приймемо $H=\delta R$, $p=n_0^{(1)}(2R,f)-n_0^{(1)}(\frac{R}{4},f)$. Застосувавши Лему Бутру-Картана [8, с.137] (див. також [9, ст. 31]), отримаємо, що для довільного $z=re^{i\varphi}$ такого, що $\frac{R}{2}\leqslant|z|\leqslant R$ поза деякою системою кругів з загальною сумою радіусів $2H=2\delta R$ виконується

$$|z-a_j|>\frac{jH}{p}=\frac{\delta Rj}{p},\quad j=1,2,...,p,$$

де a_j занумеровані у порядку зростання їхніх відстаней від z. Тоді з (30) отримуємо, що для довільного $\zeta = re^{i\theta}$ такого, що $|\varphi - \theta| < \delta^3$

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \log\left(1 + \frac{2p\delta^2}{j}\right). \tag{31}$$

Розглянемо довільні $\varepsilon > 0$, $0 < \eta < 1$. Нехай $\delta < \min\left\{\frac{\eta}{40}, \frac{\varepsilon}{12A}\right\}$, де A – стала з умови скінченності λ-типу. Застосовуючи нерівності $\log(1+x) < \sqrt{x}$ при $x > 0$ та $\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m}} \leqslant 2\sqrt{n}$, з (31) отримуємо

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{\delta\sqrt{2p}}{\sqrt{j}} \leqslant \delta\sqrt{2p}\cdot 2\sqrt{p} < 3\delta\cdot p \leqslant 3\delta\cdot n_0^{(1)}(2R, f) \leqslant 3\delta A\lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{32}$$

Приймемо $R_n = 2^n, n \geqslant 3$ і для кожного R_n побудуємо множину виняткових кругів з сумою радіусів $2\delta R_n$ таку, що для всіх z, які не належать до цих кругів і для довільних $\zeta = re^{i\theta}$ таких, що $|\varphi - \theta| < \delta^3$, $\frac{R_n}{2} \leqslant |z| = |\zeta| \leqslant R_n$ виконується (32). Оскільки ці круги містять всі a_j такі, що $\frac{R_n}{4} < |a_j| \leqslant 2R_n$, то центри цих кругів належать до кільця $(\frac{1}{4} - 2\delta)R_n < |z| \leqslant (2 + 2\delta)R_n$.

Зауваження 1. За зроблених припущень виконується $(\frac{1}{4} - 2\delta)R_n \geq 1$. Справді, припустивши протилежне, негайно отримуємо, що $\delta > 1/16$, що суперечить вибору δ.

Тоді в кільці $\{z : 2 \leqslant |z| \leqslant r\}$ містяться центри виняткових кругів, сума радіусів яких не перевищує $2\delta(R_1 + \cdots + R_n)$. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k \leqslant 2^{k+1}$, то ця сума не перевищує $4\delta R_n$, де n — найбільше серед тих, для яких $(\frac{1}{4} - 2\delta)R_n \leqslant r$. Тоді, враховуючи, що $\delta < \eta/40 \leq 1/40$, тобто $1 - 8\delta > 4/5$, отримуємо

$$4\delta R_n \leqslant \frac{16r\delta}{1 - 8\delta} \leqslant 20\delta r \leqslant \frac{\eta}{2}r. \tag{33}$$

Позначимо множину тих r, для яких $z = re^{i\varphi}$ належить побудованій множині виняткових кругів через E_η. Враховуючи, що $|\theta - \varphi| < \delta^3$ для $r \notin E_\eta$ отримуємо, що правильні нерівності (32). Тоді з (33) випливає, що $\overline{m}_0^*(E_\eta) \leqslant \eta$.

Змінюючи θ і φ місцями, отримаємо, що для $r \notin E_\eta$ при $|\theta - \varphi| < \delta^3$ виконується $F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\theta}) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r)$. З огляду на (32) отримуємо, що

$$|F(\zeta) - F(z)| < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{34}$$

Прийнявши $\delta_0 = \min\{\delta_1', \delta_1'', \delta^3\}$ та враховуючи (28), (29), (34), а також те, що $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, з (25), отримуємо, що при $r \geqslant 2$, $r \notin E_\eta$ та $|\theta - \varphi| < \delta_0$ правильна нерівність

$$|\log f(re^{i\theta}) - \log f(re^{i\varphi})| < \varepsilon\lambda(r).$$

□

4.4. Доведення Теореми 4.

За послідовністю логічних міркувань доведення цієї теореми збігається з доведенням Теореми 3, але конкретні співвідношення на кожному кроці мають вигляд відмінний від відповідних у доведенні Теореми 3.

На підставі скінченності λ-типу ([3]) функції f існує така додатна стала A, що для всіх додатних r та всіх цілих k виконується $|c_k(2r,f)| \leqslant A\lambda(r)$ та $n_0(2r,f) \leqslant A\lambda(r)$. Позначивши через $\{a_j\}$ нулі функції f і застосовуючи аналог формули Пуассона-Єнсена [7] для проколеної площини $\mathbb{C}^*$, отримуємо при $R > r$

$$\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|P(R,\frac{1}{r},\theta-\varphi)d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\frac{1}{R}e^{i\theta})|P(\frac{R}{r},1,\theta-\varphi)d\theta-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P\left(R^2,\frac{1}{r},\theta-\varphi\right)d\theta-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P\left(\frac{R^2}{r},1,\theta-\varphi\right)d\theta-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1}\log\left|\frac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta-$$
$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant R}\log\left|\frac{R^2-\overline{a_j}z}{R(a_j-z)}\right|-\sum_{\frac{1}{R}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{R^2}-\overline{a_j}z}{\frac{1}{R}(a_j-z)}\right|+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\cdot\log R,$$

де $P(R,r,\theta-\varphi)$ — ядро Пуассона, для якого справджуються розвинення (19), (20). Прийнявши, $R=2r$, отримуємо

$$\log|f(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi}-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}+\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}-$$
$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{2r-\frac{\overline{a_j}z}{2r}}{a_j-z}\right|-\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{2r}-2r\overline{a_j}z}{a_j-z}\right|+O(\log r) \tag{35}$$

при $1<r\neq|a_j|$, $r\neq\frac{1}{|a_j|}$. Розглянемо суму 4-го та 5-го доданків з (35):

$$\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|2r-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^2}\right|-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}-a_j\right|+$$
$$+\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2r}-2\overline{a_j}e^{i\varphi}\right|-\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}-a_j\right|=$$
$$=\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|2r\left(1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right)\right|-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}\left(1-ra_je^{-i\varphi}\right)\right|+$$
$$+\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2r}(1-4\overline{a_j}re^{i\varphi})\right|-\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}(1-ra_je^{-i\varphi})\right|=$$
$$=n_0^{(1)}(2r,f)\log 2r^2+\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right|-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|1-ra_je^{-i\varphi}\right|+$$

$$+\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2}(1-4\overline{a_j}re^{i\varphi})\right|-\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|1-ra_je^{-i\varphi}\right|.$$

Позначимо

$$G(r,\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi}-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}+\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} S(r,\varphi)= & -\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right|+\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log|1-ra_je^{-i\varphi}|- \\ & -\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2}(1-4r\overline{a_j}e^{i\varphi})\right|+\sum_{\frac{2}{r}\leqslant|a_j|<1}\log|1-ra_je^{-i\varphi}|, \end{aligned} \quad (37)$$

а також

$$F(r,\varphi)=\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|\leqslant\frac{2}{r}}\log|1-ra_je^{-i\varphi}|.$$

З огляду на введені позначення (35) набуде вигляду

$$\log\left|f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)\right|=G(r,\varphi)+S(r,\varphi)+F(r,\varphi)-n_0^{(1)}(2r,f)\log 2r^2+O(\log r), \quad r>1. \quad (38)$$

Для отримання бажаного результату проаналізуємо детальніше кожен з перших трьох доданків в (38). Доведемо спершу, що $S(r,f)/\lambda(r)$ буде одностайно неперервною функцією при $r\geq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$. Для цього розглянемо окремо кожен доданок-суму, що входить в $S(r,f)$.

Для кожного доданка першої суми отримуємо рівномірну неперервність при $r\geq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, зважаючи на нерівності

$$\frac{3}{2}\leqslant 2\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\leqslant\left|1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right|\leqslant 1+\frac{|a_j|}{2r^3}\leq\frac{5}{4}, \quad \text{при } 1<|a_j|\leqslant 2r,\ r\geq 2.$$

Міркуючи подібно до (26), робимо висновок про одностайну неперервність першої суми з $S(r,\varphi)$ поділеної на $\lambda(r)$ при $r\geq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$.

Для трьох інших сум з $S(r,f)$ одностайну неперервність визначають способом, який був застосований для доведення одностайної неперервності третього доданка-суми з $S(r,f)$ в Теоремі 3. А саме, всі доданки в другій і четвертій сумах набувають вигляду $\log|1-\zeta|$, а в третій $\log\frac{1}{2}|1-\zeta|$, де всюди $|\zeta|\geq 2$. Тому, використовуючи (27), отримуємо бажане.

Отже, $(\forall\varepsilon_2>0,\varepsilon_2<\frac{\varepsilon}{8A})$ $(\exists\delta_2'>0)$ $(\forall r\geqslant 2)$ $(\forall\varphi,\theta)$:

$$|\varphi-\theta|<\delta_2'\implies|S(r,\varphi)-S(r,\theta)|<2\varepsilon_2(n_0^{(1)}(2r,f)+n_0^{(2)}(2r,f))<2\varepsilon_2A\lambda(r)<\frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \quad (39)$$

Перейдемо до розгляду $G(r,\varphi)$. Зважаючи на критерій скінченності λ-типу [3], знову як і в доведенні Теореми 3, отримуємо спочатку рівномірну збіжність рядів з $G(r,\varphi)$ в (36) при $r>1$, а потім й одностайну неперервність $G(r,\varphi)/\lambda(r)$ при $r\geqslant 2$,

$\varphi \in [0, 2\pi]$. Тому $(\forall \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{40})$ $(\exists \delta_2'' > 0)$ $(\forall r \geqslant 2)$ $(\forall \varphi, \theta)$ таких, що $|\varphi - \theta| < \delta_2''$ виконується

$$|G(r, \varphi) - G(r, \theta)| < \varepsilon_2 10 A \lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4} \lambda(r). \tag{40}$$

Нарешті розглянемо $F(r, \varphi)$. Якщо для деяких додатних чисел δ і R виконується $|\varphi - \theta| < \delta^3$ і $R/2 \leqslant r \leqslant R$, то, позначивши $\zeta = \frac{1}{r} e^{i\theta}$, $z = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$ аналогічно до (30), отримаємо

$$F(\zeta) - F(z) = \sum_{\frac{1}{2r} \leqslant |a_j| \leqslant \frac{2}{r}} \log \left| \frac{\zeta - a_j}{z - a_j} \right| \leqslant \sum_{\frac{1}{2R} \leqslant |a_j| \leqslant \frac{4}{R}} \log \left(1 + \frac{2\delta^3 \frac{1}{R}}{|z - a_j|} \right). \tag{41}$$

Приймемо $H = \delta/R$, $p = n_0^{(2)}(2R, f) - n_0^{(2)}(R/4, f)$. Застосовуючи лему Бутру-Картана ([8, ст. 137], [9, ст. 31]), отримуємо, що для довільного $z = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$, $\frac{1}{R} \leqslant |z| \leqslant \frac{2}{R}$ поза деякою системою кругів з загальною сумою радіусів $2H = 2\delta/R$ виконується

$$|z - a_j| > \frac{jH}{p} = \frac{\delta \frac{1}{R} j}{p}, \quad j = 1, 2, ...p,$$

де a_j занумеровані у порядку зростання їхніх відстаней від z. Тоді з (41) отримуємо, що для довільного $\zeta = \frac{1}{r} e^{i\theta}$ такого, що $|\varphi - \theta| < \delta^3$

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \log \left(1 + \frac{2p\delta^2}{j} \right). \tag{42}$$

Для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ виберемо додатне $\delta < \min \left\{ \frac{\mu}{32}, \frac{\varepsilon}{12A}, \frac{1}{4\sqrt{2}} \right\}$, де A — стала з умови скінченності λ-типу. Враховуючи нерівність $\log(1 + x) < \sqrt{x}$ при $x > 0$, а також $\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m}} \leqslant 2\sqrt{n}$, з (42) отримуємо

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{\sqrt{2p}\delta}{\sqrt{j}} \leqslant 3\delta \cdot n_0^{(2)}(2R, f) \leqslant 3\delta A \lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4} \lambda(r). \tag{43}$$

Для кожного $R_n = 2^n, n \geqslant 3$ і побудуємо множину виняткових кругів з сумою радіусів $2\delta/R_n$ таку, що для всіх z, які не належать до цих кругів і для довільних $\zeta = \frac{1}{r} e^{i\theta}$ за умов $|\varphi - \theta| < \delta^3$, $\frac{1}{R_n} \leqslant |z| = |\zeta| \leqslant \frac{2}{R_n}$ виконується (43). Оскільки ці круги містять усі a_j такі, що $\frac{1}{2R_n} < |a_j| \leqslant \frac{4}{R_n}$, то центри цих кругів лежать у кільці $(\frac{1}{2} - 2\delta) \frac{1}{R_n} < |z| \leqslant (4 + 2\delta) \frac{1}{R_n}$.

Зауваження 2. За зроблених припущень очевидно виконується $(4 + 2\delta) \frac{1}{R_n} \leq 1$.

Позначимо через E_μ множину тих r, для яких $z = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$ належить побудованій множині виняткових кругів. Тоді

$$E_\mu = \bigcup_{\frac{1}{r} < |a_j| < 1} \left[|a_j| - \frac{2\delta}{R_n}, |a_j| + \frac{2\delta}{R_n} \right].$$

Тому

$$E'_\mu = \bigcup_{1 < \frac{1}{|a_j|} < r} \left[\frac{1}{|a_j| + \frac{2\delta}{R_n}}, \frac{1}{|a_j| - \frac{2\delta}{R_n}} \right].$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k \leqslant 2^{k+1}$, то $\sum\limits_{n=1}^{n_0} 2\delta R_n$ не перевищує $4\delta R_{n_0}$, де n_0 — найбільше серед тих n, для яких виконується нерівність $\frac{1}{r} < (\frac{1}{2} - 2\delta)\frac{1}{R_n}$, яка еквівалентна нерівності $r > \frac{2R_n}{1-4\delta}$. Крім того, якщо $\frac{1}{2R_n} < |a_j| \leqslant \frac{4}{R_n}$, то, пригадуючи, що $0 < \delta < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, отримуємо оцінку $R_n^2|a_j|^2 - 4\delta^2 > \frac{1}{4} - 4\delta^2 > \frac{1}{8}$. Звідси

$$mes\big(E'_\mu \cap (1,r)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{n_0}\left(\frac{1}{|a_j| - \frac{2\delta}{R_n}} - \frac{1}{|a_j| + \frac{2\delta}{R_n}}\right) = \sum_{n=1}^{n_0}\frac{\frac{4\delta}{R_n}}{|a_j|^2 - \frac{4\delta^2}{R_n^2}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{n_0}\frac{4\delta R_n}{R_n^2|a_j|^2 - 4\delta^2} \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} 32\delta R_n \leqslant 32\delta R_{n_0+1} = 64\delta R_{n_0} \leqslant \tag{44}$$
$$\leqslant 64\delta\frac{(1-4\delta)r}{2} = 32\delta(1-4\delta)r < 32r\delta < r\mu.$$

Враховуючи означення 4, з (44) випливає, що $\overline{m}_0^*(E_\mu) \leqslant \mu$. За умови $|\theta-\varphi| < \delta^3$ для $r \notin E_\mu$ справджується (43). Змінюючи θ і φ місцями, отримуємо, що для $r \notin E_\mu$ при $|\theta - \varphi| < \delta^3$ виконується $F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\theta}) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r)$. Це разом з (43) дає

$$|F(\zeta) - F(z)| < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{45}$$

Приймемо $\delta_0 = \min\{\delta'_2, \delta''_2, \delta^3\}$. З огляду на (39), (40), (45), враховуючи, що $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$ з (38) отримуємо, що при $r \geq 2$, $r \notin E_\mu$ та $|\theta-\varphi| < \delta_0$ справджується

$$\left|\log f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) - \log f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)\right| < \varepsilon\lambda(r).$$

□

Література

1. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I / A. Ya. Khrystiyanyn, A. A. Kondratyuk // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 23, №1. — P. 19–30.
2. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II /A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 24, №2. — P. 57–68.
3. *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains. // Joensuu–L'viv, 2006. – 116 p. (A. Kondratyuk, I. Laine, *Meromorphic functions in multiply connected domains*, Fourier series methods in complex analysis // Mekrijärvi, 2005, Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. **10** (2006), 9–111.)
4. *Голдак М.* Голоморфні функції цілком регулярного зростання в проколеній площині / М. Голдак, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — с. 91–96.
5. *Вишинський О.* Про одностайне цілком регулярне зростання модуля та аргумента голоморфної в проколеній комплексній площині функції / О. Вишинський, А. Христіянин // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2014. — Вип. 79. — с. 33–47.
6. *Голдак М.* Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій / М. Голдак, А. Христіянин // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2009. — Вип. 71. — с. 71–77.
7. *Kshanovskyy I.* An analog of Poisson-Jensen formula for annuli / I. Kshanovskyy // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 24, — P. 147–158.
8. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / А. А. Кондратюк — Львів, 1988.

9. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин — М.:ГИТТЛ, 1956.
10. *Хейман У.* Мероморфные функции / У. Хейман — М.: Мир, 1966.

Стаття: надійшла до редколегії 12.05.2015.
доопрацьована 04.11.2015.
прийнята до друку 11.11.2015.

ON THE PROPERTIES OF THE INDICATORS OF COMPLETELY REGULARLY GROWING HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE PUNCTURED PLANE. I

Andriy KHRYSTIYANYN, Oleg VYSHYNS'KYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: khrystiyanyn@ukr.net, vyshynskyi@ukr.net

We prove that the growth indicators of a holomorphic function of completely regular growth with respect to a growth function λ in the punctured complex plane are continuous. We also establish the property of uniform equicontinuity for the functions of finite λ-type in the punctured plane.

Key words: function of completely regular growth, growth indicator, function of finite λ-type, upper relative measure, uniform equicontinuity, Poisson-Jensen formula, Fourier coefficients, holomorphic function.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. C. 27–32
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 27–32

УДК 512.552.13

ON PROPERTIES OF RADICALS AND SPECTRUM OF FINITE HOMOMORPHIC IMAGES OF A COMMUTATIVE BEZOUT DOMAIN

Andriy GATALEVYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

The properties of finite homomorphic images of commutative Bezout domains under certain conditions on the Jacobson radical and maximal ideals are investigated. We describe the structure of maximal ideals in the case of semisimple rings. We also describe the rings R and R/aR provided that R/aR is a Kasch ring.

Key words: Bezout ring, adequate ring, Kasch ring, pure ideal.

1. Introduction

Finite homomorphic images of a commutative Bezout domain are a source of examples and counterexamples in the current research in the ring theory. In the article [3] it is proved that any finite homomorphic image of a commutative Bezout domain is an IF-ring, i.e. a ring over which any injective module is flat, and in the article [9] it is proved that it is a P-injective ring. Furthermore, it is known that a commutative domain is hereditary if and only if every homomorphic image of the ring is self-injective Artinian ring [7]. In addition, a commutative domain is a Dedekind ring if every homomorphic image of this domain is a quasi-Frobenius ring [7]. In [14], there are investigated commutative Bezout domains by calculating their homological dimensions. In [13] it is proved that the finite homomorphic images of a commutative Bezout ring R are semiregular if and only if R is an adequate domain. In [2] it is proved that a Noetherian ring whose Jacobson radical is projective has an Artinian quotient ring. In [5] there are investigated the rings whose Jacobson radicals are coherent (flat, injective). Note that a finite homomorphic image of the ring will be understood as factor ring on principal ideal.

Throughout this paper R is assumed to be a commutative ring with $1 \neq 0$. By a Bezout ring we mean a ring in which all finitely generated ideals are principal. By $J(R)$ and $\mathrm{rad}(R)$ we denote Jacobson radical and nilradical of the ring R.

Definition 1. *A nonzero element a of a ring R is called adequate if for every element $b \in R$, there exist $r, s \in R$ such that*
1. $a = r \cdot s$,
2. $(r, b) = 1$,
3. for every nonunit divisor s' of s, we have $(s', b) \neq 1$.

A commutative Bezout ring with identity is said to be adequate if every nonzero element is adequate [15].

First note the following result.

Proposition 1. *Let R be a commutative Bezout domain and $a \in R\backslash(0)$. If the element a is not adequate then* $\mathrm{rad}(R/aR) \neq (0)$.

Proof. Note that if $a = b \cdot c$, where $(b, c) = 1$ for all such representations, then a is an adequate element. Hence, $a = b \cdot c$, and $bR + cR = dR, d \notin U(R)$, otherwise the element a will be adequate. Then we have $c = c_0 d, b = b_0 d$ for some elements $c_0, b_0 \in R$. Denote $\alpha = c_0 b_0 d$. It is evident that $aR \subset c_0 b_0 dR = \alpha R$ and $\alpha^2 = ac_0 b_0$. That is $aR \subsetneq \alpha R$ and $\alpha^2 R \subset aR$. Hence $\bar{\alpha} \in \mathrm{rad}(R/aR)$ and $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$, and we obtain $\mathrm{rad}(R/aR) \neq (0)$.

Note that the condition $\mathrm{rad}(R/aR) \neq (0)$ or, more generally, $J(R/aR) \neq (0)$ does not imply that the element a is not an adequate element. For example, $J(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \neq \bar{0}$, but 12 is an adequate element in the ring $\mathbb{Z}$.

The answer to the question for an adequate element a is given by Theorem.

Theorem 1. *Let R be a commutative Bezout domain and $a \in R\backslash 0$. Then the element a is adequate if and only if R/aR is a semiregular ring. [13]*

2. Main Results

For finite homomorphic images of a commutative Bezout domain we describe the ring in which the Jacobson radical is a principal ideal.

Theorem 2. *Let R be a commutative Bezout domain and for $a \in R\backslash(0)$: $J(R/aR)$ is a principal ideal. Then the element a is contained only in a finite number of maximal ideals which are principal ideals.*

Proof. Denote $\bar{R} = R/aR$ and $\bar{b} = b + aR$. According to [12] the annihilator $Ann(\bar{b})$ of any element $\bar{b}$ is a principal ideal. By virtue of [9] the ring $\bar{R}$ satisfies the condition that $Ann(Ann(\bar{b})) = \bar{b}\bar{R}$. If $J(\bar{R}) = \bar{b}\bar{R}$, then $J(\bar{R}) = Ann(\bar{c})$ for some element $\bar{c} \in \bar{R}$. According to [1], $J(\bar{R})$ is a principal ideal if and only if the element a is contained in a finite set of maximal ideals which are principal. The proof is complete.

Definition 2. *An ideal I of a ring is called pure if for every $a \in I$ there exists an element $b \in I$ such that $ab = a$ [4].*

Note that if I is a pure ideal and $I \subseteq J(R)$, then $I = (0)$.

Let us investigate whether the Jacobson radical is a pure ideal for any finite homomorphic image of a commutative Bezout domain.

Definition 3. *An ideal I is called dense if $Ann(I) = (0)$ [6].*

Remark that the following results are obvious.

Proposition 2. *Let R be a commutative ring and $J(R) \neq (0)$ but $Ann(J(R)) = (0)$. Then every maximal ideal of the ring R is dense.*

Proof. Let M be a maximal ideal of the ring R. Then $J(R) \subset M$, and hence $Ann(M) \subset Ann(J(R)) = (0)$. That is $Ann(M) = (0)$, which was to be shown.

Proposition 3. *Let R be a commutative ring and $J(R) \neq (0)$ and there exists a maximal ideal M such that $Ann(M) \neq (0)$. Then $Ann(J(R)) \neq (0)$.*

Proof. Since $J(R) \subset M$, then $(0) \neq Ann(M) \subset Ann(J(R))$.

Proposition 4. *Let R be a commutative semiprime (i.e. reduced) ring. Then in the ring R does not exist an ideal M such that $(0) \neq Ann(M) \subset M$.*

Proof. Let M be an ideal in R such that $(0) \neq Ann(M) \subset M$. Then $(Ann(M))^2 = (0)$. Since R is semiprime ring, we obtain that $Ann(M) = (0)$. Contradiction.

The proposition is proved.

By a semisimple ring we mean a ring R with $J(R) = (0)$.

As a consequence we obtain the following result.

Theorem 3. *Let R be a commutative semisimple ring. Then for any maximal ideal M of the ring R we have $Ann(M) = (0)$ or $M = mR, (m^2 = m)$.*

Proof. Let M be a maximal ideal of the ring R. If $Ann(M) \neq (0)$ then by Proposition 2.4, $Ann(M) \not\subseteq M$ and we obtain $M + Ann(M) = R$. Whence $m + n = 1$, where $m \in M, n \in Ann(M)$. Then $m^2 + mn = m$ and $m^2 = m$, hence $mR \subset M$. Then for any $s \in M$ we have $sm + sn = s$ and $s = sm$ that is $M \subset mR$. Hence $M = mR$ and $m^2 = m$. The proof is complete.

Thus, we have proved that any commutative ring with pure Jacobson radical is a ring with projective socle, i.e., so-called PS-ring [7].

Theorem 4. *Let R be a commutative semisimple ring. Then R is a PS-ring.*

Definition 4. *A commutative ring in which any arbitrary maximal ideal is dense is called a Kasch ring [6].*

By an atom we mean a non-unit which is not a product of non-units.

Theorem 5. *Let R be commutative Bezout domain and for $a \in R\backslash(0)$ $\bar{R} = R/aR$ is a Kasch ring. Then an arbitrary maximal ideal $\bar{M}$ of the ring $\bar{R}$ has the form $\bar{M} = \bar{e}\bar{R}$, where $\bar{e}^2 = \bar{e}$ or $\bar{M} = \bar{p}\bar{R}$, where $\bar{p}$ is an atom.*

Proof. If $Ann(\bar{M}) \not\subseteq \bar{M}$ then, as we have shown, $\bar{M} = \bar{e}\bar{R}$. If $Ann(\bar{M}) \subset \bar{M}$ then since $\bar{R}$ is a Kasch ring we have $\bar{M} = \bar{p}\bar{R}$. We prove that the element $\bar{p}$ is an atom. Let $\bar{p} = \bar{b}\bar{c}$. If there is $\bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, it is proved. Let $\bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. The inclusion $\bar{p}\bar{R} \subset \bar{b}\bar{R}$ and that $\bar{p}\bar{R}$ is a maximal ideal of the ring $\bar{R}$ imply $\bar{p}\bar{R} = \bar{b}\bar{R}$, and then $\bar{b} = \bar{p}\bar{t}$. Hence $\bar{p} = \bar{p}\bar{b}\bar{t}$ and $\bar{p}(\bar{1} - \bar{b}\bar{t}) = \bar{0}$. We get that $\bar{1} - \bar{b}\bar{t} \in Ann(\bar{M})$. Because of what is proven above, for any $\bar{x} \in ann\bar{M}$ it follows that $\bar{x}^2 = \bar{0}$ and then $\bar{b}\bar{t} = \bar{1} + \bar{r}$, where $\bar{r} \in \mathrm{rad}(\bar{R})$. We obtain that the element $\bar{b}\bar{t}$ is a unit and that $\bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, which proves the theorem.

Corollary 1. *Let R be a commutative Bezout domain and, for $a \in R\backslash(0)$; $\bar{R} = R/aR$ is a Kasch ring and let $\bar{M}$ be a maximal ideal of the ring $\bar{R}$ such that $\bar{M} = \bar{p}\bar{R}$, where $\bar{p}^2 \neq \bar{p}$. Then the ideal $\bar{M}$ is not pure.*

Proof. Suppose that the ideal $\bar{M}$ is pure. According to the definition of a pure ideal, for any element $\bar{p} \in \bar{M}$ there exists an element $\bar{q} \in \bar{M}$ such that $\bar{p}\bar{q} = \bar{p}$. Since p is an atom, this is possible only when $\bar{b} \in U(\bar{R})$, which contradicts to the fact that $\bar{q} \in \bar{M}$. The corollary is proved.

Corollary 2. *Let R be a commutative Bezout domain and, for $a \in R\backslash(0)$; $\bar{R} = R/aR$ is a Kasch ring. The ring $\bar{R}$ is a finite direct sum of fields if and only if all maximal ideals of the ring $\bar{R}$ are pure.*

Proof. According to Theorem 2.4 and Corollary 2.1, any maximal ideal of the ring $\bar{R}$ has the form $\bar{M} = \bar{e}\bar{R}$, where $\bar{e}^2 = \bar{e}$. Based on [10], we obtain the proof of our Corollary.

Theorem 6. *Let R be a commutative Bezout domain and, for $a \in R\backslash(0)$; $\bar{R} = R/aR$ is a Kasch ring and let a maximal ideal $\bar{M}$ of the ring $\bar{R}$ be flat. Then there exists an idempotent $\bar{e}$ of the ring $\bar{R}$ such that $\bar{M} = \bar{e}\bar{R}$.*

Proof. Since $\bar{R}$ is a Kasch ring, then $\bar{M} = \bar{p}\bar{R}$. And since $Ann(\bar{M}) \subset \mathrm{rad}(\bar{R})$, then according to [11] $\bar{M}$ is a projective module that is generated by an idempotent. The theorem is proved.

Similarly to the Corollary 2.2, by virtue of Theorem 2.5, we obtain the following result.

Corollary 3. *Let R be a commutative Bezout domain and, for $a \in R\backslash(0)$, $\bar{R} = R/aR$ is a Kasch ring. The ring $\bar{R}$ is a finite direct sum of fields if and only if all maximal ideals of the ring $\bar{R}$ are flat.*

We formulate a similar question (about the purity and flatness) for the case of annihilator of arbitrary maximal ideal of the ring $\bar{R}$.

According to [4], the pure ideal contained in the Jacobson radical is zero and therefore preliminary results we obtain the following result.

Corollary 4. *Let R be a commutative Bezout domain and, for $a \in R\backslash(0)$, $\bar{R} = R/aR$ is a Kasch ring. The ring $\bar{R}$ is a finite direct sum of fields if and only if an annihilator of every maximal ideal of the ring $\bar{R}$ is pure.*

As a consequence of previos results we obtain the following theorem.

Theorem 7. *Let R be a commutative Bezout domain in which an arbitrary maximal ideal is principal and let an element $a \in R\backslash(0)$ be not adequate. Then any maximal ideal $\bar{M} = M/aR$ of the ring $\bar{R} = R/aR$ (here M is a maximal ideal containing the element a) cannot be neither flat, pure, nor injective.*

Proof. Since an arbitrary maximal ideal of the ring R is a principal ideal, then by [12] the annihilator of an arbitrary element $\bar{b} \in \bar{R}$ is a principal ideal. By virtue of the article [7] in the ring $\bar{R}$ the following holds: $Ann(Ann(\bar{b})) = \bar{b}\bar{R}$. Then from [8] we obtain that $\bar{R}$ is a Kasch ring. According to Proposition 1.1 and Corollaries 2.1, 2.4 we obtain that

$\bar{M}$ is neither pure nor flat $\bar{R}$-module. Since the ring $\bar{R}$ is an IF-ring, $\bar{M}$ cannot be an injective $\bar{R}$-module. The theorem is proved.

References

1. V. Camillo, W.K. Nicholson, Z. Wang, Left quasi-morphic rings, *J. Algebra Appl.*, **7** (2008), pp. 725–733.
2. A. W. Chatters and C. R. Hajarnavis, Noetherian rings with projective Jacobson radical, *Comm. Algebra*, **3(6)** (1985), pp. 1359–1366.
3. Colby R., Rings which have flat injective modules, *J. Algebra*, **35** (1975), pp. 239–252.
4. De Marco G., Projectivity of pure ideals, *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, **69** (1983), pp. 289–304.
5. N. Ding, Y. Li, L. Mao, J-coherent rings, *J. Algebra Appl.*, **8** (2009), pp. 139–155.
6. Faith C., Annihilator ideals associated primes and Kasch-McCoy commutative rings, *Comm. Algebra*, **19(7)** (1991), pp. 1867–1892.
7. G. A. Garkusha, FP-injective and weakly Quasi-Frobenius rings, *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, **265** (1999), pp. 110-–129 (in Russian); translation in *J. Math. Sci. (New York)* **112** (2002), no. 3, pp. 4303–4312.
8. Nicholsow W.K.,Watter J.F., Rings with projective socle, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102 (3)** (1988), pp. 443–450.
9. Nicholson W.K., Yousif M.F., On Principally Injective Rings, *J. Algebra*, **174** (1995), pp. 77–93.
10. M. Satyanarayana, Rings with primary ideals as maximal ideals, *Math.Scand.*, **20** (1967) pp. 52–54.
11. W. W. Smith, Projective ideals of finite type, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), pp. 1057–1061.
12. Zabavsky B.V., Fractionally regular Bezout rings, *Math. Stud.*, **32** (2009), pp. 76–80.
13. B. V. Zabavsky, S. I. Bilavska Decomposition of finitely generated projective modules over Bezout ring, *Math. Stud.*, **40(1)** (2013), pp. 104–107.
14. B. V. Zabavsky, S. I. Bilavska Weakly global dimension of finite homomorfic images of commutative Bezout domain, *Applied prob. of mech. and math.*, **10** (2013), pp. 71–73. (in Ukrainian)
15. B. V. Zabavsky, M. Ya. Komarnitskiy, Remarks on adequate rings, *Visnyk Lviv. univ., ser. phys.-math.*, **27** (1988), pp. 39–43.(in Ukrainian)

Стаття: надійшла до редколегії 9.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

ПРО ВЛАСТИВОСТІ РАДИКАЛІВ І СПЕКТРА СКІНЧЕННИХ ГОМОМОРФНИХ ОБРАЗІВ КОМУТАТИВНОЇ ОБЛАСТІ БЕЗУ

Андрій ГАТАЛЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Досліджено властивості скінченних гомоморфних образів комутативних областей Безу за деяких умов на радикал Джекобсона і на максимальні ідеали. У випадку напівпростого кільця описано структуру максимальних ідеалів. Описано кільця R і R/aR за умови, що R/aR є кільцем Каша.

Ключові слова: кільце Безу, адекватне кільце, кільце Каша, чистий ідеал.

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 33–41
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 33–41

УДК 512.536

ON THE DICHOTOMY OF A LOCALLY COMPACT SEMITOPOLOGICAL BICYCLIC MONOID WITH ADJOINED ZERO

Oleg GUTIK

Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, 79000, Lviv,
e-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, ovgutik@yahoo.com

We prove that a Hausdorff locally compact semitopological bicyclic semigroup with adjoined zero $\mathscr{C}^0$ is either compact or discrete. Also we show that the similar statement holds for a locally compact semitopological bicyclic semigroup with an adjoined compact ideal and construct an example which witnesses that a counterpart of the statements does not hold when $\mathscr{C}^0$ is a Čech-complete metrizable topological inverse semigroup.

Key words: semigroup, semitopological semigroup, topological semigroup, bicyclic monoid, locally compact space, Čech-complete space, metrizable space, zero, compact ideal.

1. Introduction and preliminaries

Further we shall follow the terminology of [7, 8, 10, 24]. Given a semigroup S, we shall denote the set of idempotents of S by $E(S)$. A semigroup S with the adjoined zero will be denoted by S^0 (cf. [8]).

A semigroup S is called *inverse* if for every $x \in S$ there exists a unique $y \in S$ such that $xyx = x$ and $yxy = y$. Later such an element y will be denoted by x^{-1} and will be called the *inverse of* x. A map $\mathsf{inv}\colon S \to S$ which assigns to every $s \in S$ its inverse is called *inversion*.

In this paper all topological spaces are Hausdorff. If Y is a subspace of a topological space X and $A \subseteq Y$, then by $\operatorname{cl}_Y(A)$ we denote the topological closure of A in Y.

A *semitopological* (*topological*) *semigroup* is a topological space with separately continuous (jointly continuous) semigroup operations. An inverse topological semigroup with continuous inversion is called a *topological inverse semigroup*.

We recall that a topological space X is:

- *locally compact* if every point x of X has an open neighbourhood $U(x)$ with the compact closure $\operatorname{cl}_X(U(x))$;

- *Čech-complete* if X is Tychonoff and there exists a compactification cX of X such that the remainder $cX \setminus c(X)$ is an F_σ-set in cX.

The *bicyclic semigroup* (or the *bicyclic monoid*) $\mathscr{C}(p,q)$ is a semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q with only one condition $pq = 1$. The distinct elements of the bicyclic monoid are exhibited in the following array:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & p & p^2 & p^3 & \cdots \\
q & qp & qp^2 & qp^3 & \cdots \\
q^2 & q^2p & q^2p^2 & q^2p^3 & \cdots \\
q^3 & q^3p & q^3p^2 & q^3p^3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

The bicyclic monoid is a combinatorial bisimple F-inverse semigroup and it plays an important role in the algebraic theory of semigroups and in the theory of topological semigroups. For example the well-known Andersen's result [1] states that a (0–)simple semigroup with an idempotent is completely (0–)simple if and only if it does not contain an isomorphic copy of the bicyclic semigroup. The bicyclic semigroup admits only the discrete semigroup topology and if a topological semigroup S contains it as a dense subsemigroup then $\mathscr{C}(p,q)$ is an open subset of S [11]. Bertman and West in [6] extended this result for the case of semitopological semigroups. Stable and Γ-compact topological semigroups do not contain the bicyclic semigroup [2, 15]. The problem of an embedding of the bicyclic monoid into compact-like topological semigroups is discussed in [4, 5, 13].

In [11] Eberhart and Selden proved that if the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is a dense subsemigroup of a topological monoid S and $I = S \setminus \mathscr{C}(p,q) \neq \varnothing$ then I is a two-sided ideal of the semigroup S. Also, there they described the closure of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ in a locally compact topological inverse semigroup. The closure of the bicyclic monoid in a countably compact (pseudocompact) topological semigroups was studied in [5].

The well known A. Weil Theorem states that *every locally compact monothetic topological group* G (i.e., G contains a cyclic dense subgroup) *is either compact or discrete* (see [26]). Locally compact and compact monothetic topological semigroups was studied by Hewitt [14], Hofmann [16], Koch [18], Numakura [23] and others (see more information on this topics in the books [7] and [17]). Koch in [19] posed the following problem: "*If S is a locally compact monothetic semigroup and S has an identity, must S be compact?*" (see [7, Vol. 2, p. 144]). From the other side, Zelenyuk in [27] constructed a countable locally compact topological semigroup without unit which is neither compact nor discrete.

In this paper we prove that a Hausdorff locally compact semitopological bicyclic semigroup with adjoined zero $\mathscr{C}^0$ is either compact or discrete. Also we show that the similar statement holds for a locally compact semitopological bicyclic semigroup with an adjoined compact ideal and construct an example which witnesses that a counterpart of the statements does not hold when $\mathscr{C}^0$ is a Čech-complete metrizable topological inverse semigroup.

2. On a locally compact semitopological bicyclic semigroup with adjoined zero

The following proposition generalizes Theorem I.3 from [11].

Proposition 1. *If the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is a dense subsemigroup of a semitopological monoid S and $I = S \setminus \mathscr{C}(p,q) \neq \varnothing$ then I is a two-sided ideal of the semigroup S.*

Proof. Fix an arbitrary element $y \in I$. If $xy = z \notin I$ for some $x \in \mathscr{C}(p,q)$ then there exists an open neighbourhood $U(y)$ of the point y in the space S such that $\{x\} \cdot U(y) = \{z\} \subset \mathscr{C}(p,q)$. The neighbourhood $U(y)$ contains infinitely many elements of the semigroup $\mathscr{C}(p,q)$. This contradicts Lemma I.1 [11], which states that for each $v, w \in \mathscr{C}(p,q)$ both sets $\{u \in \mathscr{C}(p,q) \colon vu = w\}$ and $\{u \in \mathscr{C}(p,q) \colon uv = w\}$ are finite. The obtained contradiction implies that $xy \in I$ for all $x \in \mathscr{C}(p,q)$ and $y \in I$. The proof of the statement that $yx \in I$ for all $x \in \mathscr{C}(p,q)$ and $y \in I$ is similar.

Suppose to the contrary that $xy = w \notin I$ for some $x, y \in I$. Then $w \in \mathscr{C}(p,q)$ and the separate continuity of the semigroup operation in S implies that there exist open neighbourhoods $U(x)$ and $U(y)$ of the points x and y in S, respectively, such that $\{x\}\cdot U(y) = \{w\}$ and $U(x)\cdot\{y\} = \{w\}$. Since both neighbourhoods $U(x)$ and $U(y)$ contain infinitely many elements of the semigroup $\mathscr{C}(p,q)$, both equalities $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ and $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$ contradict mentioned above Lemma I.1 from [11]. The obtained contradiction implies that $xy \in I$.

For every non-negative integer n we put

$$\mathscr{C}[q^n] = \left\{q^n p^i \in \mathscr{C}(p,q) \colon i = 0,1,2,\ldots\right\} \quad \text{and} \quad \mathscr{C}[p^n] = \left\{q^i p^n \in \mathscr{C}(p,q) \colon i = 0,1,2,\ldots\right\}.$$

Lemma 1. *Let $(\mathscr{C}^0, \tau)$ be a locally compact semitopological semigroup. Then the following assertions hold:*

(1) *for every open neighbourhood $U(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$ there exists an open compact neighbourhood $V(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$ such that $V(0) \subseteq U(0)$;*
(2) *for every open compact neighbourhood $U(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$ and every open neighbourhood $V(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$ the set $U(0) \cap V(0)$ is compact and open, and the set $U(0) \setminus V(0)$ is finite.*

Proof. The statements of the lemma are trivial in the case when τ is the discrete topology on $\mathscr{C}^0$, and hence later we shall assume that the topology τ is non-discrete.

(1) Let $U(0)$ be an arbitrary open neighbourhood of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$. By Theorem 3.3.1 from [10] the space $(\mathscr{C}^0, \tau)$ is regular. Since it is locally compact, there exists an open neighbourhood $V(0) \subseteq U(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$ such that $\mathrm{cl}_{\mathscr{C}^0}(V(0)) \subseteq U(0)$. Since all non-zero elements of the semigroup $\mathscr{C}^0$ are isolated points in $(\mathscr{C}^0, \tau)$, $\mathrm{cl}_{\mathscr{C}^0}(V(0)) = V(0)$, and hence our assertion holds.

(2) Let $U(0)$ be an arbitrary compact open neighbourhood of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$. Then for an arbitrary open neighbourhood $V(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0, \tau)$ the family

$$\mathscr{U} = \{V(0), \{\{x\} \colon x \in U(0) \setminus V(0)\}\}$$

is an open cover of $U(0)$. Since the family $\mathscr{U}$ is disjoint, it is finite. So the set $U(0) \setminus V(0)$ is finite and the set $U(0) \cap V(0)$ is compact.

Lemma 2. *If $(\mathscr{C}^0,\tau)$ is a locally compact non-discrete semitopological semigroup, then for each open neighbourhood $U(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ there exist non-negative integers i and j such that both sets $\mathscr{C}[q^i]\cap U(0)$ and $\mathscr{C}[p^j]\cap U(0)$ are infinite.*

Proof. By Lemma 1(1), without loss of generality we may assume that $U(0)$ is a compact open neighbourhood of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$. Put

$$V_q(0)=\{x\in U(0)\colon x\cdot q\in U(0)\} \qquad \text{and} \qquad V_p(0)=\{x\in U(0)\colon p\cdot x\in U(0)\}.$$

If the set $\mathscr{C}[q^i]\cap U(0)$ is finite for any non-negative integer i, then the formula

$$q^ip^l\cdot q=\begin{cases} q^{i+1}, & \text{if } l=0;\\ q^ip^{l-1}, & \text{if } l \text{ is a positive integer,}\end{cases} \tag{1}$$

implies that the right translation $\rho_q\colon \mathscr{C}^0\to\mathscr{C}^0\colon x\mapsto x\cdot q$ shifts all non-zero elements of the neighbourhood $V_q(0)$. Then $U(0)\setminus V_q(0)$ is an infinite subset of $\mathscr{C}(p,q)$, which contradicts Lemma 1(2). Similarly, if the set $\mathscr{C}[p^j]\cap U(0)$ is finite for any non-negative integer j, then the formula

$$p\cdot q^jp^l=\begin{cases} p^{l+1}, & \text{if } j=0;\\ q^{j-1}p^l, & \text{if } j \text{ is a positive integer,}\end{cases} \tag{2}$$

implies that the left translation $\lambda_p\colon \mathscr{C}^0\to\mathscr{C}^0\colon x\mapsto p\cdot x$ shifts all non-zero elements of the neighbourhood $V_p(0)$. This implies that $U(0)\setminus V_p(0)$ is an infinite subset of $\mathscr{C}(p,q)$, which contradicts Lemma 1(2).

Lemma 3. *Let $(\mathscr{C}^0,\tau)$ be a locally compact non-discrete semitopological semigroup. Then there exist non-negative integers i and j such that $\mathscr{C}[q^i]\setminus U(0)$ and $\mathscr{C}[p^j]\setminus U(0)$ are finite for every open neighbourhood $U(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$.*

Proof. Fix an arbitrary open compact neighbourhood $U_0(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0,\tau)$. Then Lemma 2 implies that there exist non-negative integers i and j such that both sets $\mathscr{C}[q^i]\cap U_0(0)$ and $\mathscr{C}[p^j]\cap U_0(0)$ are infinite. Let $U(0)$ be an arbitrary open neighbourhood of zero in $(\mathscr{C}^0,\tau)$. By Lemma 1(2), the set $U_0(0)\setminus U(0)$ is finite. By Lemma 1(1), there exists an open compact neighbourhood $U'(0)\subseteq U(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0,\tau)$.

Now, Lemma 1(1) and the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ imply that there exists an open compact neighbourhood $V(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ such that

$$V(0)\subseteq U'(0), \qquad V(0)\cdot q\subseteq U'(0) \qquad \text{and} \qquad p\cdot V(0)\subseteq U'(0).$$

If the set $\mathscr{C}[q^i]\setminus U(0)$ is infinite, then formula (1) implies that the right translation $\rho_q\colon \mathscr{C}^0\to\mathscr{C}^0\colon x\mapsto x\cdot q$ shifts all non-zero elements of the neighbourhood $V(0)$ and hence the inclusion $V(0)\cdot q\subseteq U'(0)$ implies that $U'(0)\setminus V(0)$ is an infinite set, which contradicts Lemma 1(2). Hence the set $\mathscr{C}[q^i]\setminus U(0)$ is finite. Similarly, if the set $\mathscr{C}[p^j]\setminus U(0)$ is infinite, then by formula (2) we have that the left translation $\lambda_p\colon \mathscr{C}^0\to\mathscr{C}^0\colon x\mapsto p\cdot x$ shifts all non-zero elements of the neighbourhood $V(0)$ and hence the by inclusion $p\cdot V(0)\subseteq U'(0)$ we obtain that $U'(0)\setminus V(0)$ is an infinite set, which contradicts Lemma 1(2). Therefore, the set $\mathscr{C}[p^j]\setminus U(0)$ is finite as well.

Lemma 4. *Let $(\mathscr{C}^0,\tau)$ be a locally compact non-discrete semitopological semigroup. Then for every open neighbourhood $U(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ and any non-negative integer i both sets $\mathscr{C}[q^i]\setminus U(0)$ and $\mathscr{C}[p^i]\setminus U(0)$ are finite.*

Proof. By Lemma 1(1), without loss of generality we may assume that the open neighbourhood $U(0)$ is compact. By Lemma 3 there exists a non-negative integer i_0 such that $\mathscr{C}[q^{i_0}]\setminus U'(0)$ is finite for any open compact neighbourhood $U'(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$.

Fix an arbitrary non-negative integer $i\neq i_0$. If $i<i_0$, then the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ implies that there exists an open compact neighbourhood $V(0)\subseteq U(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ such that $p^{i_0-i}\cdot V(0)\subseteq U(0)$. Then

$$p^{i_0-i}\cdot q^{i_0}p^l=q^ip^l, \qquad \text{for any non-negative integer } l. \tag{3}$$

The set $\mathscr{C}[q^{i_0}]\setminus V(0)$ is finite, and hence by (3) the set $\mathscr{C}[q^i]\setminus U(0)\subseteq \mathscr{C}[q^i]\setminus\big(p^{i_0-i}\cdot V(0)\big)$ is finite as well.

If $i>i_0$, then the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ implies that there exists an open compact neighbourhood $W(0)\subseteq U(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ such that $q^{i-i_0}\cdot W(0)\subseteq U(0)$. Then

$$q^{i-i_0}\cdot q^{i_0}p^l=q^ip^l, \qquad \text{for any non-negative integer } l, \tag{4}$$

The set $\mathscr{C}[q^{i_0}]\setminus W(0)$ is finite, and hence (4) implies that the set $\mathscr{C}[q^i]\setminus U(0)\subseteq \mathscr{C}[q^i]\setminus\big(q^{i-i_0}\cdot W(0)\big)$ is finite as well.

The proof of finiteness of the set $\mathscr{C}[p^i]\setminus U(0)$ is similar.

Lemma 5. *Let $(\mathscr{C}^0,\tau)$ be a non-discrete locally compact semitopological semigroup. Then for every open neighbourhood $U(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ the set $\mathscr{C}^0\setminus U(0)$ is finite.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists an open neighbourhood $U(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ such that $\mathscr{C}^0\setminus U(0)$ is infinite. Lemma 1(1) implies that without loss of generality we may assume that the neighbourhood $U(0)$ is compact.

Now, the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ implies that there exists an open neighbourhood $V(0)\subseteq U(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0,\tau)$ such that $p\cdot V(0)\subseteq U(0)$. By Lemma 4 for every non-negative integer n both sets $\mathscr{C}[q^n]\setminus U(0)$ and $\mathscr{C}[p^n]\setminus U(0)$ are finite. Thus, the following conditions hold:

- (i) $U(0)\cup\bigcup_{n=0}^m(\mathscr{C}[q^n]\cup\mathscr{C}[p^n])\neq\mathscr{C}^0$ for every positive integer m;
- (ii) for every positive integer k there exists a non-negative integer k_{max} such that $\big\{q^kp^j\colon j\geqslant k_{\mathsf{max}}\big\}\subset U(0)$.

We have $p\cdot q^kp^l=q^{k-1}p^k$ for any integers $k\geqslant 1$ and l. This and conditions (i) and (ii) imply that the set $U(0)\setminus V(0)$ is infinite, which contradicts Lemma 1(2). The obtained contradiction implies the statement of the lemma.

The following simple example shows that on the semigroup $\mathscr{C}^0$ there exists a topology τ_{Ac} such that $(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}})$ is a compact semitopological semigroup.

Example 1. On the semigroup $\mathscr{C}^0$ we define a topology τ_{Ac} in the following way:

- (i) every element of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is an isolated point in the space $(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}})$;
- (ii) the family $\mathscr{B}(0)=\big\{U\subseteq\mathscr{C}^0\colon U\ni 0 \text{ and } \mathscr{C}(p,q)\setminus U \text{ is finite}\big\}$ determines a base of the topology τ_{Ac} at zero $0\in\mathscr{C}^0$,

i.e., τ_{Ac} is the topology of the Alexandroff one-point compactification of the discrete space $\mathscr{C}(p,q)$ with the remainder $\{0\}$. The semigroup operation in $(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}})$ is separately continuous, because all elements of the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ are isolated points in the space $(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}})$.

Remark 1. In [6] Bertman and West showed that the discrete topology τ_{d} is a unique topology on the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ such that $\mathscr{C}(p,q)$ is a semitopological semigroup. So τ_{Ac} is the unique compact topology on $\mathscr{C}^0$ such that $(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}})$ is a compact semitopological semigroup.

Lemma 5 and Remark 1 imply the following dichotomy for a locally compact semitopological semigroup $\mathscr{C}^0$.

Theorem 1. *If $\mathscr{C}^0$ is a Hausdorff locally compact semitopological semigroup, then either $\mathscr{C}^0$ is discrete or $\mathscr{C}^0$ is topologically isomorphic to $(\mathscr{C}^0,\tau_{\mathsf{Ac}})$.*

Since the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ does not embeds into any Hausdorff compact topological semigroup [2], Theorem 1 implies the following corollary.

Corollary 1. *If $\mathscr{C}^0$ is a Hausdorff locally compact semitopological semigroup, then $\mathscr{C}^0$ is discrete.*

The following example shows that a counterpart of the statement of Corollary 1 does not hold when $\mathscr{C}^0$ is a Čech-complete metrizable topological inverse semigroup.

Example 2. On the semigroup $\mathscr{C}^0$ we define a topology τ_1 in the following way:

- (i) every element of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is an isolated point in the space $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$;
- (ii) the family $\mathscr{B}(0)=\{U_n\colon n=0,1,2,3,\ldots\}$, where
$$U_n=\{0\}\cup\left\{q^ip^j\in\mathscr{C}(p,q)\colon i,j>n\right\},$$
determines a base of the topology τ_1 at zero $0\in\mathscr{C}^0$.

It is obvious that $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$ is first countable space and the arguments presented in [12, p. 68] show that $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$ is a Hausdorff topological inverse semigroup.

First we observe that each element of the family $\mathscr{B}(0)$ is an open closed subset of $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$, and hence the space $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$ is regular. Since the set $\mathscr{C}^0$ is countable, the definition of the topology τ_1 implies that $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$ is second countable, and hence by Theorem 4.2.9 from [10] the space $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$ is metrizable. Also, it is obvious that the space $(\mathscr{C}^0,\tau_1)$ is Čech-complete, as a union two Čech-complete spaces: that are the discrete space $\mathscr{C}(p,q)$ and the singleton space $\{0\}$.

3. On a locally compact semitopological bicyclic semigroup with an adjoined compact ideal

Later we need the following notions. A continuous map $f\colon X\to Y$ from a topological space X into a topological space Y is called:

- *quotient* if the set $f^{-1}(U)$ is open in X if and only if U is open in Y (see [22] and [10, Section 2.4]);
- *hereditarily quotient* or *pseudoopen* if for every $B\subset Y$ the restriction $f|_B\colon f^{-1}(B)\to B$ of f is a quotient map (see [20, 21, 3] and [10, Section 2.4]);
- *closed* if $f(F)$ is closed in Y for every closed subset F in X;

- *perfect* if X is Hausdorff, f is a closed map and all fibers $f^{-1}(y)$ are compact subsets of X [25].

Every closed map and every hereditarily quotient map are quotient [10]. Moreover, a continuous map $f\colon X \to Y$ from a topological space X onto a topological space Y is hereditarily quotient if and only if for every $y \in Y$ and every open subset U in X which contains $f^{-1}(y)$ we have that $y \in \operatorname{int}_Y(f(U))$ (see [10, 2.4.F]).

Later we need the following trivial lemma, which follows from separate continuity of the semigroup operation in semitopological semigroups.

Lemma 6. *Let S be a Hausdorff semitopological semigroup and I be a compact ideal in S. Then the Rees-quotient semigroup S/I with the quotient topology is a Hausdorff semitopological semigroup.*

Theorem 2. *Let $(\mathscr{C}_I, \tau)$ be a Hausdorff locally compact semitopological semigroup, $\mathscr{C}_I = \mathscr{C}(p,q) \sqcup I$ and I is a compact ideal of $\mathscr{C}_I$. Then either $(\mathscr{C}_I, \tau)$ is a compact semitopological semigroup or the ideal I open.*

Proof. Suppose that I is not open. By Lemma 6 the Rees-quotient semigroup $\mathscr{C}_I/I$ with the quotient topology τ_{q} is a semitopological semigroup. Let $\pi\colon \mathscr{C}_I \to \mathscr{C}_I/I$ be the natural homomorphism which is a quotient map. It is obvious that the Rees-quotient semigroup $\mathscr{C}_I/I$ is isomorphic to the semigroup $\mathscr{C}^0$ and the image $\pi(I)$ is zero of $\mathscr{C}^0$. Now we shall show that the natural homomorphism $\pi\colon \mathscr{C}_I \to \mathscr{C}_I/I$ is a hereditarily quotient map. Since $\pi(\mathscr{C}(p,q))$ is a discrete subspace of $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$, it is sufficient to show that for every open neighbourhood $U(I)$ of the ideal I in the space $(\mathscr{C}_I, \tau)$ we have that the image $\pi(U(I))$ is an open neighbourhood of the zero 0 in the space $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$. Indeed, $\mathscr{C}_I \setminus U(I)$ is a closed-and-open subset of $(\mathscr{C}_I, \tau)$, because the elements of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ are isolated point of $(\mathscr{C}_I, \tau)$. Also, since the restriction $\pi|_{\mathscr{C}(p,q)}\colon \mathscr{C}(p,q) \to \pi(\mathscr{C}(p,q))$ of the natural homomorphism $\pi\colon \mathscr{C}_I \to \mathscr{C}_I/I$ is one-to-one, $\pi(\mathscr{C}_I \setminus U(I))$ is a closed-and-open subset of $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$. So $\pi(U(I))$ is an open neighbourhood of the zero 0 of the semigroup $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$, and hence the natural homomorphism $\pi\colon \mathscr{C}_I \to \mathscr{C}_I/I$ is a hereditarily quotient map. Since I is a compact ideal of the semitopological semigroup $(\mathscr{C}_I, \tau)$, $\pi^{-1}(y)$ is a compact subset of $(\mathscr{C}_I, \tau)$ for every $y \in \mathscr{C}_I/I$. By Din' N'e T'ong's Theorem (see [9] or [10, 3.7.E]), $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$ is a Hausdorff locally compact space. If I is not open then by Theorem 1 the semitopological semigroup $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$ is topologically isomorphic to $(\mathscr{C}^0, \tau_{\mathsf{Ac}})$ and hence it is compact. Next we shall prove that the space $(\mathscr{C}_I, \tau)$ is compact. Let $\mathscr{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \mathscr{I}\}$ be an arbitrary open cover of $(\mathscr{C}_I, \tau)$. Since I is compact, there exist $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \in \mathscr{U}$ such that $I \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$. Put $U = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$. Then $\mathscr{C}_I \setminus U$ is a closed-and-open subset of $(\mathscr{C}_I, \tau)$. Also, since the restriction $\pi|_{\mathscr{C}(p,q)}\colon \mathscr{C}(p,q) \to \pi(\mathscr{C}(p,q))$ of the natural homomorphism $\pi\colon \mathscr{C}_I \to \mathscr{C}_I/I$ is one-to-one, $\pi(\mathscr{C}_I \setminus U(I))$ is a closed-and-open subset of $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$, and hence the image $\pi(\mathscr{C}_I \setminus U(I))$ is finite, because the semigroup $(\mathscr{C}_I/I, \tau_{\mathsf{q}})$ is compact. Thus, the set $\mathscr{C}_I \setminus U$ is finite and hence the space $(\mathscr{C}_I, \tau)$ is compact as well.

Corollary 2. *If $(\mathscr{C}_I, \tau)$ is a locally compact topology topological semigroup, $\mathscr{C}_I = \mathscr{C}(p,q) \sqcup I$ and I is a compact ideal of $\mathscr{C}_I$, then the ideal I is open.*

Acknowledgements

The author acknowledges T. Banakh and A. Ravsky for their comments and suggestions.

References

1. *Andersen O.* Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen /O. Andersen// PhD Thesis, Hamburg, 1952.
2. *Anderson L.W.* Some results on stability in semigroups / L.W. Anderson, R.P. Hunter, R.J. Koch// Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 117. – P. 521–529.
3. *Arkhangel'skiĭ A. V.* Bicompact sets and the topology of spaces / A.V. Arkhangel'skiĭ// Dokl. Akad. Nauk SSSR – 1963. – Vol. 150. – P. 9-–12 (in Russian); English version in: Soviet Math. Dokl. – 1963. – Vol. 4. – P. 561–564.
4. *Banakh T.* The Rees-Suschkiewitsch Theorem for simple topological semigroups / T. Banakh, S. Dimitrova, O. Gutik// Mat. Stud. – 2009. – Vol. 31, №2. – P. 211–218.
5. *Banakh T.* Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups / T. Banakh, S. Dimitrova, O. Gutik// Topology Appl. – 2010. – Vol. 157, №18. – P. 2803–2814.
6. *Bertman M.O.* Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups / M.O. Bertman, T.T. West// Proc. Roy. Irish Acad. – 1976. – Vol. A76, №21–23. – P. 219–226.
7. *Carruth J.H.* The theory of topological semigroups / J.H. Carruth, J.A. Hildebrant, R.J. Koch. – Vols. I and II. – New York and Basel: Marcell Dekker, Inc., 1983 and 1986.
8. *Clifford A. H.* The algebraic theory of semigroups / A.H. Clifford, G.B. Preston. – Vols. I and II. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. Surveys **7**, 1961 and 1967.
9. *T'ong D.N.* Preclosed mappings and A. D. Taĭmanov's theorem / Din' N'e T'ong// Dokl. Akad. Nauk SSSR – 1963. – Vol. 152. – P. 525–528 (in Russian); English version in: Soviet Math. Dokl. – 1963. – Vol. 4. – P. 1335–1338.
10. *Engelking R.* General topology / R. Engelking. – 2nd ed. – Berlin: Heldermann, 1989.
11. *Eberhart C.* On the closure of the bicyclic semigroup / C. Eberhart, J. Selden// Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 115–126.
12. *Gutik O.V.* Any topological semigroup topologically isomorphically embeds into a simple path-connected topological semigroup / O.V. Gutik// In: Algebra and Topology, Lviv Univ. Press – 1969. – P. 65–73, (in Ukrainian).
13. *Gutik O.* On countably compact 0-simple topological inverse semigroups / O. Gutik, D. Repovš// Semigroup Forum – 2007. – Vol. 75, №2. – P. 464–469.
14. *Hewitt E.* Compact monothetic semigroups / E. Hewitt// Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23, №3. – P. 447–457.
15. *Hildebrant J.A.* Swelling actions of Γ-compact semigroups / J.A. Hildebrant, R.J. Koch// Semigroup Forum – 1986. – Vol. 33, №1. – P. 65–85.
16. *Hofmann K.H.* Topologische Halbgruppen mit dichter submonoger Untenhalbgruppe / K.H. Hofmann// Math. Zeit. – 1974. – Vol. 74. – P. 232–276.
17. *Hofmann K.H.* Elements of compact semigroups / K.H. Hofmann, P.S. Mostert. – Columbus: Chas. E. Merrill Co., 1966.
18. *Koch R.J.* On monothetic semigroups / R.J. Koch// Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, №2. – P. 397–401.
19. *Koch R.J.* Some open questions in topological semigroups / R.J. Koch// Anais Acad. Brasil. Ci. – 1969. – Vol. 41, №1. – P. 19–20.
20. *McDougle P.* A theorem on quasi-compact mappings / P. McDougle// Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 9, №3. – P. 474–477.

21. *McDougle P.* Mapping and space relations / P. McDougle// Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 10, №2. – P. 320–323.
22. *Moore R.L.* Concerning upper semi-continuous collections of continua / R.L. Moore// Trans. Amer. Math. Soc. – 1925. – Vol. 27. – P. 416–428.
23. *Numakura K.* On bicompact semigroups / K. Numakura// Math. J. Okayama Univ. – 1952. – Vol. 1. – P. 99–108.
24. *Ruppert W.* Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory / W. Ruppert. – Lect. Notes Math. 1079. – Berlin: Springer, 1984.
25. *Vaĭnšteĭn I.A.* On closed mappings of metrc spaces / I.A. Vaĭnšteĭn// Dokl. Akad. Nauk SSSR – 1947. – Vol. 57. – P. 319–321 (in Russian).
26. *Weil A.* L'integration dans les groupes lopologiques et ses applications / A. Weil. – Actualites Scientifiques No. 869, Paris: Hermann, 1938.
27. *Zelenyuk E.G.* On Pontryagin's alternative for topological semigroups / E.G. Zelenyuk// Mat. Zametki – 1988. – Vol. 44, №3. – P. 402-403 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 10.09.2015
доопрацьована 04.11.2015
прийнята до друку 11.11.2015

ПРО ДИХОТОМІЮ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОГО НАПІВТОПОЛОГІЧНОГО БІЦИКЛІЧНОГО МОНОЇДА З ПРИЄДНАНИМ НУЛЕМ

Олег ГУТІК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000

Доведено таке: що гаусдорфова локально компактна напівтопологічна біциклічна напівгрупа з приєднаним нулем $\mathscr{C}^0$ є або компактною, або дискретною. Також доведено, що аналогічне твердження виконується для локально компактного напівтопологічного біциклічного моноїда з приєднаним компактним ідеалом, і побудовано приклад, який доводить, що аналог цих тверджень не виконується, коли $\mathscr{C}^0$ — повна за Чехом метризовна топологічна інверсна напівгрупа.

Ключові слова: напівгрупа, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, біциклічний моноїд, локально компактний простір, повний за Чехом простір, метризовний простір, нуль, компактний ідеал.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 42–51
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 42–51

УДК 512.536

НАПІВГРУПИ ТА ПОЛІГОНИ З АНУЛЯТОРНИМИ УМОВАМИ

Юрій ІЩУК, Ірина КОЗАЧОК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: yishchuk@lnu.edu.ua

Введено означення напівкомутативної напівгрупи і абелевого S-полігона за аналогією з означеннями напівкомутативних, абелевих модулів і кілець, які досліджували у працях [1]–[2]. Напівгрупу S називатимемо напівкомутативною, якщо для всіх $x, y \in S$, з рівності $xy = 0$ випливає $xSy = 0$. Правий S-полігон A_S називатимемо абелевим, якщо для всіх $a \in A_S$, $s \in S$, і всіх ідемпотентів $e \in S$, $ase = aes$.
Використовуючи поняття модулів зануляторними умовами Бера [12], введено поняття S-полігона з умовою р.р.-Бера і доводено таке: якщо A_S — S-полігон з умовою р.р.-Бера, то умови редукованості, симетричності, напівкомутативності й абелевості для нього будуть еквівалентними.

Ключові слова: напівкомутативні, абелеві, редуковані, симетричні, з умовами Бера напівгрупи і S-полігони.

1. Вступ. Нехай S — напівгрупа з нулем 0. Зображення напівгрупи S перетвореннями множини визначає S-полігон (S-act) так само, як зображення кільця R ендоморфізмами абелевої групи визначає R-модуль.

Наша мета — дослідити властивості напівгруп і полігонів над ними, які близькі до комутативних структур або задовольняють ануляторні умови Бера. Ми використовували відомі методи досліджень кілець і модулів, тому багато прикладів, означень і властивостей за аналогією перенесено на напівгрупи і полігони з таких праць: [1]–[5], [7]– [12]. Позначення напівгруп, полігонів та їхні елементарні властивості ми почерпнули з підручників [6], [13]– [15].

Нагадаємо, що модуль M_R називають напівкомутативним модулем, якщо для будь-якого $m \in M$ і будь-якого $a \in R$, з умови $ma = 0$ випливає рівність $mRa = 0$ [1]. У другій частині опрацьовано властивості напівкомутативних полігонів і напівгруп. Також розглянуто напівгрупи, нульові добутки яких комутують. Для напівгрупи S з нулем $\mathbf{0}$ і $n \geqslant 2$ ми кажемо, що S задовольняє умову ZC_n, якщо виконується рівність $a_1 \cdots a_n = 0 \Rightarrow a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = 0$, для кожної перестановки $\sigma \in S_n$. У [3] доведено таке: якщо S задовольняє ZC_n для фіксованого $n \geqslant 3$, тоді S також задовольняє умову ZC_{n+1}, що напівгрупа без нульових нільпотентних елементів задовольняє умову ZC_n для всіх $n \geqslant 2$.

Нехай R — асоціативне кільце з одиницею, модуль M — унітарний правий R-модуль. Для непорожньої множини X кільця R використовуватимемо односторонні ідеали $r_R(X) = \{r \in R \mid Xr = 0\}$ та $l_R(X) = \{r \in R \mid rX = 0\}$, які називають правим анулятором X в R і лівим анулятором X в R, відповідно. Символом " $\leqslant$ " позначимо відношення бути підмодулем.

Нагадаємо, що кільце R називається редукованим, якщо R не має ненульових нільпотентних елементів. Зауважимо, що всі редуковані кільця — абелеві (тобто, всі ідемпотенти в них є центральними). У [8] Капланський ввів кільця Бера як кільця, в яких правий (лівий) анулятор будь-якої непорожньої підмножини обов'язково породжується ідемпотентом. Кільце R називається квазі-Беровим, якщо правий анулятор кожного правого ідеалу кільця R породжується (як правий ідеал) ідемпотентом. Обидва визначення ліво-право симетричні. Кільце R називається правим (відповідно, лівим) головним квазі-Беровим (або просто правим (відповідно, лівим) p.q.-Беровим кільцем, якщо правий (відповідно, лівий) анулятор головного правого (відповідно, лівого) ідеалу кільця R породжується ідемпотентом. Кільце R називається p.q.-Беровим кільцем, якщо воно є одночасно правим і лівим p.q.-Беровим.

Інше узагальнення кілець Бера становлять p.p.-кільця. Кільце R називається правим (відповідно, лівим) p.p.-кільцем, якщо правий (відповідно, лівий) анулятор елемента з R породжується ідемпотентом. Кільце R називається p.p.-кільцем, якщо воно є одночасно правим і лівим p.p.-кільцем. Кільце R називається напівкомутативним, якщо для кожного $a \in R$, $r_R(a)$ є ідеалом в R. (Те саме для будь-яких $a, b \in R$, з умови $ab = 0$ випливає, що $aRb = 0$). Ідемпотент $e \in R$ називається центральним, якщо $xe = ex$ для всіх $x \in R$. Ідемпотент $e^2 = e \in R$ називається лівим (відповідно, правим) напівцентральним ідемпотентом, якщо eR (відповідно, Re) є двостороннім ідеалом в R.

У [9] введено поняття Берових, квазі-Берових і p.p.-модулів так:

а) M_R називається Беровим модулем, якщо для будь-якої підмножини X з M, $r_R(X) = eR$, де $e^2 = e \in R$;

б) M_R називається квазі-Беровим модулем, якщо для будь-якого підмодуля N з M, $r_R(N) = eR$, де $e^2 = e \in R$;

в) M_R називається p.p.-модулем, якщо для будь-якого $m \in M$, $r_R(m) = eR$, де $e^2 = e \in R$.

У [4] модуль M_R називається p.q.-Беровим, якщо для будь-якого $m \in M$, $r_R(mR) = eR$, де $e^2 = e \in R$. Модуль M_R називають напівкомутативним модулем, якщо для будь-якого $m \in M$ і будь-якого $a \in R$, з умови $ma = 0$ випливає, що $mRa = 0$.

Нехай M — правий R-модуль і $S = End_R(M)$. Тоді M — лівий S-модуль, правий R-модуль і S-R-бімодуль. У праці [12] Різві і Роман називають M модулем Бера, якщо правий анулятор в M будь-якого лівого ідеалу в S породжується ідемпотентом з S (або, що еквівалентно, для всіх R-підмодулів N з M, $l_S(N) = Se$ з $e^2 = e \in S$); і M є квазі-Беровим модулем, якщо правий анулятор в M будь-якого ідеалу S породжується ідемпотентом з S (або, що еквівалентно, для всіх цілком характеристичних

R-підмодулів N з M, $l_s(N) = Se$ з $e^2 = e \in S$). Серед іншого, вони довели, що будь-яка пряма сума модулів Бера (відповідно квазі-Бера) є також Беровим (відповідно, квазі-Беровим) модулем, і кілець ендоморфізмів $S = End_R(M)$ Берових (відповідно, квазі-Берових) модулів M є Беровим (відповідно, квазі-Беровим) кільцем (див. теорему 4.1 в [12]).

В [2, твердження 2.7] доведено таке: якщо модуль M_R є напівкомутативним модулем, то M_R є модулем Бера тоді і тільки тоді, якщо він є модулем квазі-Бера, і M_R є p.p.-модулем, тоді і тільки тоді, якщо це p.q.-Беровий модуль. Для напівкомутативного кільця R доведено, що R є p.p.-кільцем тоді і лише тоді, коли $R[x]$ є p.p.-кільцем. Кільце R є Беровим, тоді і тільки тоді, коли $R[x]$ — кільце Бера, R є p.q.-Беровим кільцем, тоді і тільки тоді, коли $R[x]$ — p.q.-Берове кільце.

Нехай S — моноїд з одиницею $\mathbf{1}$.

Означення 1. *Непорожня множина A називається правим S-полігоном (або правим полігоном над моноїдом S), якщо існує таке відображення:*

$$\begin{aligned} &\mu : A \times S \to A, \\ &(a, s) \mapsto as = \mu(a, s), \end{aligned}$$

де для всіх $s, t \in S$ і для всіх $a \in A$ виконуються умови:

1) $a \cdot 1 = a$;

2) $a(st) = (as)t$.

Інколи таке відображення називають структурованим відображенням.

Правий S-полігон A позначається через A_S. Аналогічно визначається лівий S-полігон, який позначається через ${}_SA$. Зазначимо, що сам моноїд S є правим S-полігоном, і одночасно лівим S-полігоном.

Якщо S — напівгрупа без одиниці, то перша умова в означенні полігона є зайвою. Тоді говоримо про полігон над напівгрупою.

Якщо S є комутативним моноїдом, то кожний лівий S-полігон можна розглядати і як правий S-полігон. Справді, якщо ${}_SA$ є лівим S-полігоном, то можна визначити множення справа на елемент з S: $a * s = sa$ для всіх $a \in A$ і $s \in S$. Тоді $a * 1 = 1a = a$ для всіх $a \in A$ і

$$\begin{aligned} &a * (s_1 s_2) = a * (s_2 s_1) = (s_2 s_1)a = \\ &= s_2(s_1 a) = s_2(a * s_1) = (a * s_1) * s_2. \end{aligned}$$

У цьому випадку можна розглядати A над S як S-біполігон, оскільки для всіх $s_1, s_2 \in S$ і $a \in A$ виконується рівність

$(s_1 a) * s_2 = s_2(s_1 a) = (s_2 s_1)a = (s_1 s_2)a = s_1(s_2 a) = s_1(a * s_2)$.

У цій праці всі полігони A володіють нулем $\mathbf{0}$, тобто таким елементом, для якого виконується $\mathbf{0} \cdot s = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in A$, $\forall s \in S$.

Означення 2. *Правий S-полігон A_S називається точним, якщо для всіх $s, t \in S$ і деякого $a \in A$ з рівності $as = at$ випливає, що $s = t$.*

Означення 3. *Правий S-полігон A_S називається строго точним, якщо для всіх $s, t \in S$ і всіх $a \in A$ з рівності $as = at$ випливає, що $s = t$.*

Очевидно, що кожний строго точний полігон є точним полігоном. Полігони S_S та ${}_SS$ є точними, оскільки $1 \in S$, і ці полігони строго точні, якщо S є скоротним зліва або справа.

З означення 2 випливає таке: якщо полігон містить точний полігон, то весь полігон також точний. Якщо ж $A_i, i \in I$ строго точні праві S-полігони, то їхнє об'єднання $\bigcup_{i \in I} A_i$ також є строго точним полігоном.

2. Напівкомутативні напівгрупи й абелеві полігони над ними.

Означення 4. *Напівгрупа S називається напівкомутативною, якщо для будь-яких $a, b \in S$, $ab = 0$ виконується, що $aSb = 0$.*

Твердження 1. *Такі умови для напівгрупи S еквівалентні.*

1. Напівгрупа S — напівкомутативна.

2. Правий анулятор будь-якого елемента є ідеалом в S.

3. Лівий анулятор будь-якого елемента є ідеалом в S.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай S — напівкомутативна та $Ann_r(a) = \{s \in S,\ as = 0\}$ — правий анулятор елемента $a \in S$. Очевидно, що $Ann_r(a)$ — правий ідеал в S.

Тоді з умови (1) випливає, що $\forall s \in S, \forall b \in Ann_r(a)$ виконується $a(sb) = 0$.

Отже, $sb \in Ann_r(a)$ для всіх $s \in S$, тобто $Ann_r(a)$ є двобічним ідеалом в S.

(2) $\Rightarrow$ (1) Якщо $ab = 0$, де $a, b \in S$, то $b \in Ann_r(a)$. Оскільки за умовою (2) $\forall a \in S,\ Ann_r(a)$ — двобічний ідеал, то $\forall s \in S,\ b \in Ann_r(a)$ і $asb = 0$.

Звідси, $aSb = 0$, тобто S — напівгрупа.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) доводиться аналогічно, до еквівалентності (1) $\Leftrightarrow$ (2), розглянувши лівий анулятор $Ann_l(b)$ довільного елемента b напівгрупи S. $\square$

Означення 5. *Напівгрупа S називається редукованою, якщо вона не має ненульових нільпотентних елементів.*

Введемо означення абелевого полігону за аналогією з абелевим кільцем і модулем, проаналізуємо їхні властивості. У [1] введено таке означення абелевого модуля.

Означення 6. *Модуль M над кільцем R називається абелевим, якщо для будь-яких $m \in M$, $a \in R$ і $e^2 = e \in R$, $mae = mea$.*

Означення 7. *Полігон A над моноїдом S називатимемо абелевим, якщо для будь-яких $a \in A$ і $s \in S$ та будь-якого ідемпотента $e^2 = e \in S$ виконується рівність $ase = aes$.*

Лема 1. *1. Напівгрупа S є з центральними ідемпотентами тоді і тільки тоді, коли кожен S-полігон є абелевим.*

2. Напівгрупа S буде з центральними ідемпотентами тоді і тільки тоді, коли S — абелевий полігон над S.

Доведення. 1. Доведемо необхідність.

Нехай S — напівгрупа з центральними ідемпотентами. З означення 7 для будь-яких $e^2 = e \in S$, $s \in S$ виконується рівність $se = es$. Тоді $ase = aes$, для $a \in A$. Отже, полігон A над S — абелевий.

Доведемо достатність.

Нехай кожен полігон A над напівгрупою S — абелевий. Якщо $A = S^1$, тоді $se = a$ і виконується рівність $se = 1se = 1es = es$. Звідси, напівгрупа S з центральними ідемпотентами.

2. Необхідність доводиться аналогічно як в 1.

Доведемо достатність. Нехай полігон A — абелевий. Якщо $A = S^1$, то напівгрупа S з центральними ідемпотентами. Якщо A — без одиниці, то за відомою процедурою можна долучити одиницю й отримати напівгрупу з одиницею. Тоді $se = a$ і виконується рівність $se = 1se = 1es = es$. Тому напівгрупа S є з центральними ідемпотентами. □

З прикладу 1 випливає, що існують абелеві S-полігони навіть, якщо S не є напівгрупою з центральними ідемпотентами.

Приклад 1. Побудуємо абелевий S-полігон A, де S не є напівгрупою з центральними ідемпотентами.

1. Нехай P — будь-яке поле. Розглянемо напівгрупу верхніх трикутних 2×2 матриць $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \text{де } a, b, c \in P \right\}$ і полігон $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{де } d \in P \right\}$. Для будь-якого $a \in A$ і $s \in S$, якщо $e^2 = e \in S$, то виконується $ase = aes$.

Отже, S — абелевий правий S-полігон.

2. Для $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ очевидно, що S — абелева.

Нехай $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$. Тоді e — ідемпотент в S. Для $a = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S$ отримаємо $ae = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та $ea = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отже, S — напівгрупа з центральними ідемпотентами.

Нехай $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$. Тоді $ae = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$,

та $ea = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Тому ідемпотент e не є центральним.

Отже, S — не є напівгрупою з центральними ідемпотентами.

Твердження 2. *Клас абелевих полігонів є замкнутим щодо взяття підполігонів, добутків і гомоморфних образів. Тому абелеві полігони замкнуті щодо прямих сум.*

Доведення. 1. Нехай A — абелевий полігон і його підмножина $B \subset A$, $\forall b \in B$. Тоді $\forall s \in S$, $e^2 = e \in S$ виконується $bes = bse$, бо $b \in B \Rightarrow b \in A$. Отже, B — абелевий підполігон за означенням 7.

2. Нехай A, B — абелеві полігони над S. Тоді добуток полігонів $A \times B$ — також абелевий, бо $A \times B = \{(a, b) \in A \times B\}$ і $(a, b)es = (aes, bes) = (a, b)se$. Для будь-яких $e^2 = e, s \in S$, $a \in A$, $b \in B$.

3. Нехай $\varphi : A \to B$ — гомоморфізм полігону A в B. Тоді для будь-якого $b \in Im\varphi \subseteq B$ існує таке $a \in A$, що $\varphi(a) = b$, і $\forall s \in S$ $\varphi(as) = \varphi(a)s$. Отже, $bes = \varphi(a)es = \varphi(aes) = \varphi(ase) = \varphi(a)se = bse$ для будь-якого ідемпотента $e \in S$. Тому $\varphi(A)$ — абелевий полігон. □

Твердження 3. *Напівгрупа S буде напівгрупою з центральними ідемпотентами тоді і лише тоді, коли існує точний абелевий полігон над нею.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо S напівгрупа з центральними ідемпотентами, то $se = es$ для будь-якого $e^2 = e, s \in S$. За лемою 1 S-полігон S_s є абелевим, отже, $ase = aes$ і $As = 0$. Для всіх $s, t \in S$ і деякого $a \in S_s$, отримаємо $As = At = 0$. Звідси, $s = t$. Отже, існує точний абелевий S-полігон.

($\Leftarrow$) Нехай існує точний абелевий S-полігон A такий, що для будь-яких $a \in A$ і $e^2 = e,\ s \in S$, тоді $aes = ase$. Звідси, з точності A над S випливає, що $es = se$. Отже, S — напівгрупа з центральними ідемпотентами. □

Зі статті Д.Андерсена і В.Каміло [3] розглянемо таке означення і теореми.

Означення 8. *Нехай S — напівгрупа з нулем і $n \geqslant 2$. Тоді кажуть, що S задовольняє умову ZC_n, якщо для будь-яких $a_1, \ldots, a_n \in S$ з того, що $a_1 \cdots a_n = 0$ випливає $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = 0$ для всіх $\sigma \in S_n$.*

Теорема 1. *Будь-яка редукована напівгрупа S володіє властивістю ZC_2.*

Теорема 2. *Нехай S — напівгрупа з 0 і $n \geqslant 3$. Якщо S задовольняє умову ZC_n, тоді S задовольняє умову ZC_{n+1} також.*

Наслідок 1. *Якщо напівгрупа S задовольняє властивість ZC_3, то S задовольнятиме ZC_n для всіх $n \geqslant 3$.*

Теорема 3. *Нехай S редукована напівгрупа. Тоді S задовольняє ZC_n для всіх $n \geqslant 2$.*

Нехай S — напівгрупа з нулем. Якщо S має одиницю, тоді зрозуміло, що S задовольняє умову ZC_n, звідки випливає, що S задовольняє і умову ZC_{n-1} для $n \geqslant 3$. З наступного прикладу випливає таке: коли S не має одиниці, тоді не виконується $ZC_n \Rightarrow ZC_{n-1}$ для $n \geqslant 3$.

Приклад 2. Нехай $M_n = \{0\} \cup \{e_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, де $e_{ij}e_{lk} = e_{ik}$, якщо $j = l$ і 0 в іншому випадку. Будь-який добуток n елементів з M_n дорівнюватиме 0, отже, M_n задовольняє умову ZC_n (також задовольняє умову ZC_m для $m \geqslant n$).

Припустимо, що $2 \leqslant i < n$; тоді $e_{12}e_{23} \cdots e_{ii+1} = e_{1i+1} \neq 0$, і означає, що $e_{ii+1}e_{12} \cdots e_{i-1i} = 0$. Отже, M_n не задовольняє ZC_i.

Означення 9. *Регулярна напівгрупа S з центральними ідемпотентами називається Кліфордовою.*

Використовуючи теореми 1–3 і їхні наслідки, ми довели таке твердження.

Твердження 4. *Нехай S — Кліфордова напівгрупа. Якщо S задовольняє умову ZC_n для деякого $n \geqslant 2$, тоді S — редукована напівгрупа.*

Доведення. Припустимо, що $\exists x \neq 0,\ x \in S$ такий, що $x^m = 0$, де $m \geqslant 1$. І нехай $x = xbx$ для деякого $b \in S$. Тоді xb — центральний ідемпотент, тому $x = xbx = x^2b$. Отже, $x = xxb = x(x^2b)b = x^3b = \cdots = x^m b_{m-1} = 0$, а напівгрупа S — редукована. □

3. Полігони з умовами Бера.

Означення 10. *Полігон A над напівгрупою S називатимемо правим р.р.-Беровим, якщо для всіх $a \in A$, $Ann_S(a) = \{s \in S,\ as = \mathit{0}\} = eS$ — правий ідеал в S.*

Означення 11. *Полігон A над напівгрупою S називатимемо правим (лівим) p.q.-Беровим, якщо для всіх $a \in A$ правий анулятор $Ann_S(aS)$ кожного головного правого ідеалу напівгрупи S породжується (як правий ідеал) ідемпотентом.*

Означення 12. *Полігон A над напівгрупою S називається редукованим, якщо для всіх $a \in A$, $\forall s \in S$ виконується таке: $as = 0 \Rightarrow aS \cap As = 0$.*

Лема 2. *Будь-який редукований полігон є напівкомутативним.*

Доведення. Нехай полігон A — редукований, тоді для будь-якого $a \in A$ та $s \in S$ A не є напівкомутативним, тобто виконується $(as = 0) \Rightarrow aS \cap As = 0$. Доведення проведемо від супротивного.

Припустимо, що $as = 0$ *і* $aSs \neq 0$, тоді $\exists t \in S$ таке, що $ats \neq 0$. З рівності $a(ts) = (at)s$ отримаємо, що $a(ts) \in aS$, а $(at)s \in As$. Отже, $ats \in aS \cap As$. Це суперечить редукованості A. Тому A — напівкомутативний полігон. □

Лема 3. *Якщо S-полігон A — напівкомутативний, то він абелевий. Зворотне твердження буде правильним, якщо A полігон з умовою p.p.-Бера.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай e — ідемпотент в S і $a \in A$, $s \in S$. Оскільки A є напівкомутативним, то з $as = 0$ випливає, що $(as)e = 0$. З іншого боку, $aSs = 0 \Rightarrow aes = 0 \in S$. Тоді $ase = aes = 0$ для будь-якого $a \in A$ і $e^2 = e \in S$. Отже, A — абелевий полігон.

($\Leftarrow$) Тепер припустимо, що A — абелевий полігон з умовою p.p.-Бера. Нехай $a \in A$ і $s \in S$ і $as = 0$, тоді $s \in eS$ для деякого $e^2 = e \in S$. Тому $ae = 0$, бо $e^2 = e \in S$ і $s = es_1$. Отже, $aeS = 0$. За припущенням $aSe = 0$. Домноживши справа на s_1, отримаємо $aSes_1 = 0$. Оскільки $s = es_1$, $aSs = 0$. Тому A — напівкомутативний полігон. □

Лема 4. *Якщо A — редукований полігон, тоді A є абелевим. Зворотне твердження правильне для абелевих полігонів з умовою p.p.-Бера.*

Доведення. Нехай A — редукований. Оскільки будь-який редукований полігон є напівкомутативним (Лема 2) і будь-який напівкомутативний полігон є абелевим (Лема 3), то A — абелевий полігон.

Навпаки. Нехай A буде абелевим полігоном з умовою p.p.-Бера. Припустимо, що $as = 0$ для $a \in A$ і $s \in S$. Якщо $x \in aS \bigcap As$, то існує $a_1 \in A$ і $s_1 \in S$ такі, що $x = as_1 = a_1 s$. Оскільки A задовольняє умову p.p.-Бера і $as = 0$, то звідси $s \in Ann_S(a) = eS$ для деякого ідемпотента $e^2 = e \in S$. Тоді $s = et$ і $xe = as_1 e = a_1 se$, де $t \in S$. Позаяк A абелевий і $ae = 0$, то $as_1 e = aes_1 = a_1 se = a_1 es = a_1 e^2 t = a_1 et = a1s = 0$. Звідси $x = a_1 s = 0$ матимемо протиріччя, отже, $aS \bigcap As = 0$, тобто A — редукований полігон. □

Наступний приклад доводить, що існує полігон A з умовою p.q.-Бера такий, що не задовольняє умову p.p.-Бера і є абелевим полігоном, але не є редукованим. Отже, обернене твердження Леми 2 не є правильним.

Приклад 3. Існує абелевий полігон A з умовою p.q.-Бера, який не є редукованим і не задовольняє умову p.p.-Бера. Нехай $\mathbb{Z}$ — напівгрупа цілих чисел і $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ і 2×2 матриця над $\mathbb{Z}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a \equiv d \mod 2,\ b \equiv c \equiv 0 \mod 2 \right\}$$

і нехай A — правий S-полігон.

Означення 13. *Полігон A називається симетричним, якщо з рівності $ast = 0$ випливає, що $ats = 0$ для будь-яких $a \in A$ і $s, t \in S$.*

Лема 5. *Якщо A — симетричний полігон, тоді A — абелевий. Зворотне твердження правильне, якщо A є полігоном з умовою p.p.-Бера.*

Доведення. Припустимо, що A — симетричний полігон. Нехай $a \in A$ і $e^2 = e$, $s \in S$. Тоді $ase = 0$. З симетричності полігону A випливає, що $aes = 0$. Отже, $aes = aese$. З іншого боку, $ase = asee$. Звідси $ase = aes$. Тому полігон A — абелевий.

Навпаки. Припустимо, що A — полігон з умовою p.p.-Бера. Нехай $a \in A$, $s, t \in S$ і $ast = 0$. Оскільки A — полігон з умовою p.p.-Бера, то $t \in Ann_S(as) = eS$ для деякого ідемпотента $e \in S$. Тоді $t = et$ і $ase = 0$. За Лемою 3 отримаємо $aSs = 0$, зокрема, $atse = 0$. За умовою $ats = aets = atse = 0$. Отже, A — симетричний полігон. □

Теорема 4. *Нехай A — полігон з умовою p.p.-Бера. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) A — редукований;
2) A — симетричний;
3) A — напівкомутативний;
4) A — абелевий.

Доведення. (1) ⇔ (4). Редукований полігон A буде абелевим за Лемою 4.

(2) ⇔ (4). Симетричний полігон A буде абелевим, що випливає з Леми 5.

(3) ⇔ (4). Доведення випливає з Леми 3. □

Лема 6. *Нехай A є абелевим полігоном з умовою p.p.-Бера. Тоді для будь-яких $a \in A$ виконується, $Ann_S(a) = Ann_S(aS)$.*

Доведення. Відомо, що $Ann_S(aS) \subset Ann_S(a)$.

Навпаки, кожен абелевий полігон з умовою p.p.-Бера є комутативним, тому з рівності $as = 0$ випливає $aSs = 0$. Отже, $Ann_S(a) \subset Ann_S(aS)$. Тому $Ann_S(a) = Ann_S(aS)$. □

Наслідок 2. *Нехай A — абелевий полігон з умовою p.p.-Бера. Тоді A буде полігоном з умовою p.q.-Бера.*

Доведення. Нехай полігон A буде абелевим полігоном з умовою p.p.-Бера. За Лемою 6 одержимо $Ann_S(a) = Ann_S(aS) = eS$ для будь-якого $a \in A$ та ідемпотента $e \in S$. Тому A — полігон з умовою p.q.-Бера. □

Література

1. *Agayev N.* On Semicommutative Modules and Rings / Nazim Agayev and Abdullah Harmanci // KYUNGPOOK Math. J. — 2007. — Vol. 47. — P. 21–30.
2. *Agayev N.* Abelian modules / N. Agayev, G. Güngöroğlu, A. Harmanci and S. Halicioğlu // Acta Math. Univ. Comenianae. — 2009. — Vol. 78, №2. — P. 235–244.
3. *Anderson D.D.* Semigroups and rings whose zero products commute / D.D. Anderson and Victor Camillo // Comm. Algebra. — 1999. — Vol. 27,(6). — P. 2847–2852.

4. *Birkenmeier G.F.* Principally Quasi-Baer Rings / G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim and J.K. Park // Comm. Algebra. — 2001. — Vol. 29. — P. 639–660.
5. *Buhphang A.M.* Semicommutative Modules and Armendariz Modules / A.M. Buhphang and M.B. Rege // Arab Journal of Mathematical Sciences. — June 2002. — Vol. 8. — P. 53–65.
6. *Higgins P.* Techniques of semigroup theory. — Oxford, 1992. — 258 p.
7. *Huh C.* Armendariz Rings and Semicommutative Rings. / C. Huh, Y. Lee and A. Smoktunowicz // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 751–761.
8. *Kaplansky I.* Rings of operators. — W. A. Benjamin, New York. — 1968. — 151 p.
9. *Kim N.K.* Armendariz Rings and Reduced Rings. / N.K. Kim and Y. Lee // J. Algebra. — 2000. — Vol. 223. — P. 477–488.
10. *Zhou Y.* Reduced Modules, Rings, modules, algebras and abelian groups. / T.K. Lee and Y. Zhou // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. New york: Dekker. — 2004. — Vol. 236. — P. 365–377.
11. *Rege M.B.* Armendariz rings. / M.B. Rege and S. Chhawchharia // Proc. Japan Acad. — 1997. — Vol. 73(A). — P. 14–17.
12. *Rizvi S.T.* Baer and Quasi-Baer Modules / Rizvi S.T. and Roman C.S.// Comm. Algebra. — 2004. — Vol. 32. — P. 103–123.
13. *Клиффорд А.* Алгебраическая теория полугрупп. Т.1. / Клиффорд А., Престон Г. М.:МИР. — 1972. — 285 с.
14. *Клиффорд А.* Алгебраическая теория полугрупп. Т.2. / Клиффорд А., Престон Г. М.:МИР. — 1972. — 422 с.
15. *Комарницький М.Я.* Елементи теорії груп і наполігонів: курс лекцій. / Комарницький М.Я., Зеліско Г.В. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2011. — 152 с.

Стаття: надійшла до редколегії 15.06.2015
прийнята до друку 11.11.2015

SEMIGROUPS AND S-POLYGONS WITH ANNIHILATION CONDITIONS

Yuriy ISHCHUK, Iryna KOZACHOK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: yishchuk@lnu.edu.ua

We introduce the notions of semicommutative semigroup and abelian S-polygon by analogy with the notions of semicommutative, abelian modules and rings investigated in [1]-[2]. We say that a semigroup S is a semicommutative semigroup if for any $x, y \in S$, $xy = 0$ implies $xSy = 0$. A right S-polygon A_S is called abelian if, for any $a \in A_S$ and any $s \in S$, any idempotent $e \in S$, $ase = aes$.

Using the notions of Baer's conditions for modules in [12] we introduce p.p.-Baer S-polygons and prove that if A_S is a p.p.-Baer S-polygon, then the conditions for A_S to be a reduced, symmetric, semicommutative and an abelian S-polygon are equivalent.

Key words: semicommutative, abelian, reduced, symmetric, p.p.-Baer semigroups and S-polygons.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 52–60
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 52–60

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Наталія КІНАШ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: n_kinash@lnu.edu.ua

Визначено достатні умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у двовимірному рівнянні теплопровідності з нелокальною умовою перевизначення.

Ключові слова: обернена задача, нелокальна умова перевизначення, двовимірне рівняння теплопровідності.

1. Вступ. Проблематика коефіцієнтних обернених задач набула значного поширення ще з 70-х років минулого століття. Нелокальні обернені задачі для одновимірного рівняння теплопровідності дослідив Іванчов М.І. [1]. У праці Березницької І.Б. [2] визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного повного параболічного рівняння з крайовими умовами Неймана та нелокальною умовою перевизначення. Дещо пізніше Гринців Н.М. [3] розглянула обернену задачу знаходження коефіцієнта біля молодшої похідної для повного параболічного рівняння з виродженням також із нелокальною умовою перевизначення. Обернені задачі з нелокальними та інтегральними умовами досліджені також у [4], [5].

Одновимірні задачі менш точно описують дійсність, ніж їхні двовимірні аналоги. Двовимірні задачі визначення старшого коефіцєнта розглянуто, наприклад, у працях Іванчова М.І. та Сагайдака Р.В. [6], [7]. Чисельні методи для обчислення розв'язків двовимірних обернених задач подано у [8], [9]. Загалом праць, де були б розглянуті багатовимірні обернені задачі, є не надто багато. Це спонукало автора виконати дослідження.

Ми розглянули обернену задачу знаходження залежного від часу старшого коефіцієнта двовимірного рівняння теплопровідності з крайовими умовами Неймана та нелокальною умовою як умовою перевизначення. Визначили достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі. Випадок нелокальної умови перевизначення з інтегральним доданком розглянули окремо.

2. Формулювання задачі та основні припущення. В області $Q_T := \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглядаємо обернену задачу визначення пари невідомих функцій $(a(t), u(x,y,t))$ для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in [0,h] \times [0,l], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,y,t) = \mu_{11}(y,t), \quad u_x(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_{21}(x,t), \quad u_y(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T] \tag{4}$$

та нелокальною умовою перевизначення

$$\nu_1(t)u(0,y_0,t) + \nu_2(t)u(h,y_0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

де y_0 — фіксоване значення з проміжку $[0,l]$.

Нехай $G_k(x,t,\xi,\tau)$ — функції Гріна одновимірної задачі для рівняння $u_t = a(t)u_{xx}$ із крайовими умовами першого роду при $k = 1$, другого — при $k = 2$, умовами $u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_4(t), t \in [0,T]$ — при $k = 3$, $u_x(0,t) = \mu_2(t), \quad u(h,t) = \mu_3(t), t \in [0,T]$ — при $k = 4$. Вони визначаються рівністю

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{[\frac{k-1}{2}]n} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right), \quad k = \overline{1,4}, \quad \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau, t \in [0,T]. \tag{6}$$

Функцію $G_m(y,t,\eta,\tau)$ задаємо аналогічно до $G_k(x,t,\xi,\tau)$.

Тоді функція Гріна задачі (1)-(4) визначається рівністю

$$G_{km}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = G_k(x,t,\xi,\tau)G_m(y,t,\eta,\tau). \tag{7}$$

Припустимо, що виконуються умови :
(A1) $f \in C^{2,0}(\overline{Q_T}), \quad \varphi \in C^2([0,h] \times [0,l]), \quad \mu_{11}, \mu_{12} \in C^{1,1}([0,l] \times [0,T]),$
$\mu_{21}, \mu_{22} \in C^{1,1}([0,h] \times [0,T]), \quad \mu_3, \nu_1, \nu_2 \in C^1([0,T]);$
(A2) $\varphi(x,y) \geqslant 0, \quad (x,y) \in [0,h] \times [0,l]; \quad \nu_1'(t) \leqslant 0, \nu_2'(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T];$
$\mu_{11}(y,t) \leqslant 0, \quad \mu_{12}(y,t) \geqslant 0, (y,t) \in [0,l] \times [0,T]; \quad \mu_{21}(x,t) \leqslant 0, \quad \mu_{22}(x,t) \geqslant 0,$
$(x,t) \in [0,h] \times [0,T]; \quad f(x,y,t) \geqslant 0, \quad (x,y,t) \in Q_T;$
(A3) $\Delta\varphi(x,y) > 0, (x,y) \in [0,h] \times [0,l]; \quad \nu_i(t) \geqslant 0, i = 1,2, \nu_1(t)+\nu_2(t) > 0, t \in [0,T];$
$\mu_{11t}(y,t) - f_x(0,y,t) \leqslant 0, \quad \mu_{12t}(y,t) - f_x(h,y,t) \geqslant 0, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T];$
$\mu_{21t}(x,t) - f_y(x,0,t) \leqslant 0, \quad \mu_{22t}(x,t) - f_y(x,l,t) \geqslant 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T];$
$\Delta f(x,y,t) \geqslant 0, \quad (x,y,t) \in Q_T;$
(A4) $\varphi_x(0,y) = \mu_{11}(y,0), \ \varphi_x(h,y) = \mu_{12}(y,0), \ \varphi_y(x,0) = \mu_{21}(x,0), \ \varphi_y(x,h) = \mu_{22}(x,0);$
(A5) $\mu_3'(t) - \nu_1(t)f(0,y_0,t) - \nu_2(t)f(h,y_0,t) > 0, \quad t \in [0,T];$

(A6) $\nu_1(0)\varphi(0,y_0)+\nu_2(0)\varphi(h,y_0)=\mu_3(0)$.

3. Отримання з задачі (1)–(5) рівняння стосовно $a(t)$. Якщо $a(t)$ – відома функція, то $u(x,y,t)$ є розв'язком задачі (1)–(4). Отже, виконується рівність

$$u(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{11}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{12}(\eta,\tau)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a(\tau)\mu_{21}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,h,\tau)a(\tau)\mu_{22}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{8}$$

Застосовуємо до (8) оператор Лапласа. Враховуючи умови узгодження **(A4)** та властивості функції Гріна, застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$\Delta u(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11\tau}(\eta,\tau)-$$
$$-f_\xi(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12\tau}(\eta,\tau)-f_\xi(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)(\mu_{21\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,0,\tau))d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,h,\tau)\times$$
$$\times(\mu_{22\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,l,\tau))d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Delta f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{9}$$

Диференціюючи умову (5) та застосовуючи (1), отримуємо операторне рівняння стосовно $a(t)$ вигляду

$$a=Pa,\quad a\in C([0,T]),\quad \text{де } (Pa)(t)=\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}, \tag{10}$$

$$Q_1(t)=\mu_3'(t)-\nu_1(t)f(0,y_0,t)-\nu_2(t)f(h,y_0,t)-\nu_1'(t)u(0,y_0,t)-\nu_2'(t)u(h,y_0,t), \tag{11}$$

$$Q_2(t)=\nu_1(t)\Delta u(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u(h,y_0,t),\quad t\in[0,T], \tag{12}$$

а $u(0,y_0,t),\Delta u(0,y_0,t),u(h,y_0,t)$ та $\Delta u(h,y_0,t)$ задаються формулами (8) та (9) у $(0,y_0,t)$ та (h,y_0,t), відповідно. Додатність (12) випливає з апріорних оцінок, які визначають у доведенні теореми 1.

Із способу отримання системи рівнянь (8), (10) випливає, що розв'язок (a,u) задачі (1)–(5) задовольняє систему (8), (10). Доведемо, що правильним є і обернене твердження. Еквівалентність рівняння (8) задачі (1)–(4) за умови, що $a(t)$ — відоме, доведена у [10]. Домножуємо (10) на (12) та інтегруємо за часом від 0 до t із врахуванням умови узгодження **(A6)**. Враховуючи еквівалентність задачі (1)–(4) рівнянню (8), бачимо, що отримана рівність еквівалентна умові (5).

4. Існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(5).

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* **(A1)–(A6)**, *то задача* (1)–(5) *має принаймні один розв'язок* $(a(t), u(x,y,t)) \in C([0,T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Щоб довести існування розв'язку задачі (1)–(5), за допомогою теореми Шаудера доведемо існування розв'язку рівняння (10).

Через $C_i, \quad i = \overline{1,6}$ позначаємо різні додатні сталі, які залежать від вихідних даних, h та T.

Наведемо властивості функції Гріна з [12], які використовують у доведенні

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi = 1, \tag{13}$$

$$G_2(0,t,0,\tau) \leqslant \frac{1}{h} + \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}. \tag{14}$$

Щоб застосувати теорему Шаудера, потрібно розглянути операторне рівняння (10) на множині $\mathcal{N} := \{a \in C([0,T]) : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$, де A_0, A_1− такі сталі, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ у себе (тобто, $A_0 \leqslant (Pa)(t) \leqslant A_1, t \in [0,T]$ для довільної $a \in \mathcal{N}$). Визначимо, якими мають бути ці сталі.

Проведемо оцінку $(Pa(t))$ знизу. Зауважимо, що з явного зображення функції Гріна (7) $G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) > 0$. Враховуючи умови **(A2), (A5)**, із (11) отримуємо

$$Q_1(t) \geqslant \min_{t\in[0,T]}(\mu_3'(t) - \nu_1(t)f(0,y_0,t) - \nu_2(t)f(h,y_0,t)) = C_1 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Позначимо $a_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$ та оцінимо (12). Із (13), (14)

$$Q_2(t) \leqslant C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{a_{\min}}}, \quad t \in [0,T].$$

Отже,

$$(Pa)(t) \geqslant \frac{C_1}{C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{a_{\min}}}}, \quad t \in [0,T].$$

Визначимо A_0 із рівності

$$\frac{C_1}{C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{A_0}}} = A_0,$$

тоді

$$A_0 := \left(\frac{-C_3 + \sqrt{C_3^2 + 4C_2C_1}}{2C_2}\right)^2.$$

Отже, для довільного $a \in \mathcal{N}$

$$(Pa)(t) \geqslant A_0, \quad t \in [0,T].$$

Проведемо оцінку $(Pa)(t)$ зверху. Оцінюємо (12), використовуючи **(A3)** та (13)

$$Q_2(t) \geqslant \nu_1(t) \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,0)\Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta + \nu_2(t) \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(h,y_0,t,\xi,\eta,0)\times$$
$$\times\, \Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta \geqslant (\nu_1(t)+\nu_2(t)) \min_{[0,h]\times[0,l]} \Delta\varphi(x,y) \geqslant C_4 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Позначаємо $a_{\max} = \max\limits_{t\in[0,T]} a(t)$ та з (13), (14) отримуємо оцінку (11) зверху

$$Q_1(t) \leqslant C_5 + C_6\sqrt{a_{\max}}.$$

Тоді

$$(Pa)(t) \leqslant \frac{C_5 + C_6\sqrt{a_{\max}}}{C_4}.$$

Знаходимо A_1 з рівності

$$\frac{C_5 + C_6\sqrt{A_1}}{C_4} = A_1,$$

тоді

$$A_1 := \left(\frac{C_6 + \sqrt{C_6^2 + 4C_4C_5}}{2C_4}\right)^2.$$

Отже, для знайдених значень A_0, A_1 отримаємо таке: якщо $a \in \mathcal{N}$, то і $(Pa) \in \mathcal{N}$.

Розглядаємо операторне рівняння (10) на множині $\mathcal{N} := \{a \in C([0,T]) : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$. Оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ у себе згідно з оцінками вище. Те, що P цілком неперервний на $\mathcal{N}$, визначаємо аналогічно до [12], с.27. Тоді існування неперервного розв'язку рівняння (10) випливає з теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Оскільки функція $u \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ однозначно визначається з (1)–(4) при заданому $a \in C(0,T)$, то теорему доведено. $\square$

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* **(A2), (A5)**, *то розв'язок* (1)–(5) *єдиний у класі* $C([0,T]) \times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Припустимо, що існують дві пари функцій $(a_1(t), u_1(x,y,t))$ та $(a_2(t), u_2(x,y,t))$, що є розв'язками задачі (1)-(5). Введемо нові функції:

$$a_3(t) := a_1(t) - a_2(t), \quad t \in [0,T], \quad u_3(x,y,t) := u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T. \tag{15}$$

Тоді пара функцій $(a_3(t), u_3(x,y,t))$ є розв'язком задачі

$$u_{3t} = a_1(t)\Delta u_3 + a_3(t)\Delta u_2, \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{16}$$
$$u_3(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in [0,h]\times[0,l], \tag{17}$$
$$u_{3x}(0,y,t) = 0, \quad u_{3x}(h,y,t) = 0, \quad (y,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{18}$$
$$u_{3y}(x,0,t) = 0, \quad u_{3y}(x,l,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,h]\times[0,T], \tag{19}$$

$$\nu_1(t)u_3(0,y_0,t)+\nu_2(t)u_3(h,y_0,t)=0, \quad t\in[0,T]. \tag{20}$$

Диференціюємо (20) та, застосовуючи (16), отримуємо

$$a_3(t)=\frac{1}{\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)}(-\nu_1'(t)u_3(0,y_0,t)-\nu_2'(t)u_3(h,y_0,t)-$$
$$-\nu_1(t)a_1(t)\Delta u_3(0,y_0,t)-\nu_2(t)a_1(t)\Delta u_3(h,y_0,t)). \tag{21}$$

Позначимо через $\hat{G}_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ функцію Гріна задачі (18), (19) для рівняння $\hat{u}_t=a_1(t)\Delta\hat{u}$. Оскільки $a_1(t)$ – відома функція, то розв'язок задачі (16)-(19) єдиний й визначають за формулою

$$u_3(x,y,t)=\int_0^t\int_0^l\int_0^h\hat{G}_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{22}$$

Застосовуючи до (22) оператор Лапласа, отримуємо

$$\Delta u_3(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l\int_0^h\Delta\hat{G}_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta. \tag{23}$$

Враховуючи (22) та (23), із (21) одержимо рівняння стосовно $a_3(t)$

$$a_3(t)=\frac{1}{\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)}\int_0^t d\tau\int_0^l\int_0^h\Bigg(-\nu_1'(t)\hat{G}_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)-$$
$$-\nu_2'(t)\hat{G}_{22}(h,y_0,t,\xi,\eta,\tau)-\nu_1(t)a_1(t)\Delta\hat{G}_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)-\nu_2(t)a_1(t)\times$$
$$\times\Delta\hat{G}_{22}(h,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\Bigg)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta. \tag{24}$$

Доведемо, що $\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)\neq 0$. Оскільки (a_2,u_2) є розв'язком задачі (1)–(5), то з (10) матимемо

$$\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)=a_2(t)(\mu_3'(t)-\nu_1(t)f(0,y_0,t)-\nu_2(t)f(h,y_0,t)-$$
$$-\nu_1'(t)u_2(0,y_0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,y_0,t)).$$

Зауважимо, що u_2 визначається формулою (8) як розв'язок задачі (1)-(4). Отже, з умов **(A2), (A5)** випливає

$$\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)>0, \quad t\in[0,T].$$

Отримали інтегральне рівняння Вольтерра другого роду (24). Згідно з теоремою 4, с.21 із [11] інтеграли, що містять $\Delta\hat{G}_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)$ та $\Delta\hat{G}_{22}(h,y_0,t,\xi,\eta,\tau)$, є неперервними функціями, оскільки $\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)$ задовольняє умову Гельдера за просторовими змінними. Тоді інтегральне рівняння Вольтерра другого роду (24) має єдиний розв'язок $a_3(t)=0, \quad t\in[0,T]$, а отже, з рівності (22) $u_3(x,y,t)=0, \quad (x,y,t)\in Q_T$. Єдиність розв'язку (1)-(5) у класі $C([0,T])\times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$ доведено. □

5. Випадок нелокальної умови перевизначення з інтегральним доданком. В області Q_T розглядаємо обернену задачу визначення пари невідомих функцій $(a(t), u(x,y,t))$ для рівняння (1), що задовольняє умови (2)-(4) та умову перевизначення вигляду

$$\nu_1(t)u(0,y_0,t)+\nu_2(t)u(h,y_0,t)+\nu_3(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^h u(x,y,t)dxdy=\mu_3(t), \quad t\in[0,T], \tag{25}$$

де y_0 – фіксоване значення з $[0,l]$.
До умов **(A1)-(A4)** приєднуємо:
(A1a) $\nu_3\in C^1([0,T])$; **(A2a)** $\nu_3'(t)\leqslant 0 \quad t\in[0,T]$; **(A3a)** $\nu_3(t)\geqslant 0, \quad t\in[0,T]$;
(A5a) $\mu_3'(t)-\nu_1(t)f(0,y_0,t)-\nu_2(t)f(h,y_0,t)-\nu_3(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^h f(x,y,t)dxdy>0, \quad t\in[0,T]$;
(A6a) $\nu_1(0)\varphi(0,y_0)+\nu_2(0)\varphi(h,y_0)+\nu_3(0)\int\limits_0^l\int\limits_0^h \varphi(x,y)dxdy=\mu_3(0)$.
Враховуючи, що

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^h \Delta u(x,y,t)dxdy=\int\limits_0^l(\mu_{12}(y,t)-\mu_{11}(y,t))dy+\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx,$$
$$t\in[0,T],$$

диференціюємо (25) та, застосовуючи (1), отримуємо

$$a=\tilde{P}a, \quad a\in C([0,T]), \quad \text{де } (\tilde{P}a)(t)=\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)}, \tag{26}$$

$$Q_3(t)=\mu_3'(t)-\nu_1(t)f(0,y_0,t)-\nu_1(t)f(0,y_0,t)-\nu_2(t)f(h,y_0,t)-\nu_3(t)\times$$
$$\times\int\limits_0^l\int\limits_0^h f(x,y,t)dxdy-\nu_1'(t)u(0,y_0,t)-\nu_2'(t)u(h,y_0,t)-\nu_3'(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^h u(x,y,t)dxdy, \tag{27}$$

$$Q_4(t)=\nu_1(t)\Delta u(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u(h,y_0,t)+\nu_3(t)\left(\int\limits_0^l(\mu_{12}(y,t)-\mu_{11}(y,t))dy+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\right), \quad t\in[0,T]. \tag{28}$$

Значення $u(0,y_0,t), \Delta u(0,y_0,t), u(h,y_0,t), \Delta u(h,y_0,t)$ та $u(x,y,t)$ у (27), (28) задають формулами (8) та (9) у відповідних точках. Отож,

$$Q_3=Q_1(t)-\nu_3(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^h f(x,y,t)dxdy-\nu_3'(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^h u(x,y,t)dxdy,$$

$$Q_4 = Q_2(t) + \nu_3(t) \left(\int_0^l (\mu_{12}(y,t) - \mu_{11}(y,t))dy + \int_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx \right),$$

$t \in [0, T]$.

На підставі визначених рівностей формулюємо та доводимо теореми існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(4), (25) аналогічно до теорем 1, 2.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* **(A1)-(A4), (A1a)-(A3a), (A5a), (A6a)**, *то задача* (1)-(4), (25) *має принаймні один розв'язок* $(a(t), u(x,y,t)) \in C([0,T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* **(A2), (A2a), (A5a)**, *то розв'язок* (1)-(4), (25) *единий у класі* $C([0,T]) \times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$.

Література

1. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами / М.І. Іванчов. — К.: ІСДО, 1995. – 84 с. – (Препринт).
2. *Березницька І.Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення/ І.Б. Березницька // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –– 2001. — Т. 44, №1. — С. 54-62.
3. *Hryntsiv N.M.* Nonlocal inverse problems for a weakly degenerate parabolic equation/ N.M. Hryntsiv // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. — 2011. — Т. 696, №696. — С. 32-39.
4. *Lesnic D.* Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions / D. Lesnic , S.A. Yousefi, M. Ivanchov // J. Appl. Math. Comput. — 2013. — Vol. 41. — P. 301-320.
5. *Kanca F.* Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data / F. Kanca, M. Ismailov // Inverse Probl. Sci. Eng. — 2012. — Vol. 20. — P. 463-476.
6. *Сагайдак Р. В.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу/ Р. В. Сагайдак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –– 2002. — Т. 45, №2. — С. 22-30.
7. *Іванчов М. І.* Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні/ М.І. Іванчов, Р.В. Сагайдак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –– 2004. —- Т. 47, №1. — С. 7–16.
8. *Coles C.* Identification of parameters in the 2-D IHCP /C. Coles, D.A. Murio // Computers and Mathematics with Applications, — 2000. — No. 40. — P. 939–956.
9. *Coles C.* Simultaneous space diffusivity and source term reconstruction in 2D IHCP / C. Coles, D.A. Murio // Computers and Mathematics with Applications, — 2001. — No. 42. — P. 1549–1564.
10. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа./ О.А. Ладыженская , В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева — М., 1967.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа./А. Фридман — М., 1967.
12. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type./M. Ivanchov // Math. Studies: Monograph Ser. — 2003. — Vol. 10. — 238 p.

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015
прийнята до друку 11.11.2015

AN INVERSE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION WITH NONLOCAL OVERDETERMINATION CONDITION

Nataliia KINASH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: n_kinash@lnu.edu.ua

Sufficient conditions of existence and uniqueness of solution to the inverse problem of determining time-dependent leading coefficient in a 2-dimensional heat equation with nonlocal overdetermination condition are established.

Key words: inverse problem, nonlocal overdetermination condition, 2D heat equation.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 61–67
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 61–67

УДК 512.536

ПРО КЛАСИЧНІ ДУОПОЛІГОНИ ТА ДЕЯКІ ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Микола КОМАРНИЦЬКИЙ, Галина ЗЕЛІСКО

Львівский національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 , Львів, 79000
e-mail: nick.komarnytsky@yandex.ua

Введено поняття двостороннього підполігону центрованого полігону над моноїдом з нулем, яке природно узагальнює двосторонні ідеали моноїда. Воно ґрунтується на відомій властивості вставки множника (IFP), яку вивчали Грунвальд і Ссеввіірі. Двосторонні підполігони застосовують до побудови основ теорії класичних дуополігонів і класично первинних підполігонів. Характеризуються класичні дуополігони засобами мови ануляторних ідеалів. Досліджено класичні топ-дуополігони.

Ключові слова: первинний підполігон, класично первинний полігон, двосторонній підполігон, класичний дуополігон, класичний топ-дуополігон.

1. Вступ. Мета нашої праці – дослідити можливість побудови теорії дуополігонів за класичною схемою, на відміну від технологій, які застосовують ідею цілком інваріантних підполігонів, див., наприклад, працю Роуетана і Ершада [14]. Зауважимо, що клас дуополігонів, який досліджується в цій праці, не є замкненим стосовно переходу до прямих добутків сімей полігонів, що сильно контрастує з класичним розумінням дуокілець та дуомодулів, а отже, і дуополігонів. Ми вводимо двосторонні, і зокрема, двосторонні класично первинні підполігони, які якраз і є точками класичного спектра Като цього полігону. Конкретні приклади засвідчують, що навіть над комутативними моноїдами з нулем існують класично первинні підполігони, які не зобов'язані бути первинними. Назва "класично первинний" для спектра походить від нового терміна "класично первинний підмодуль". Цей тип модулів вперше використали Бехбооді і Кохі в праці [6] (за назвою "слабко первинні"). В [5] дослідження таких модулів продовжено вже під назвою класично первинних модулів. Досліджуватимемо класично первинний спектр Като полігону за схемою, яку започаткували названі автори для модулів. Користуватимемось введеним терміном "двосторонній підполігон", який узагальнює (в деякому сенсі) поняття двостороннього ідеалу кільця (моноїда) і допомагає виділити цікавий клас полігонів, природно названий класом класичних дуополігонів. Використовуватимемо техніку підмодулів з "властивістю вкладення множника" (IFP) (див., наприклад, [10]) та ідею двостороннього підмодуля з [2]. Визначимо найпростіші властивості таких підполігонів. Вводимо поняття класично первинного підполігону і класичного спектра Като мультиплікаційного класичного дуополігону. З'ясуємо властивості таких полігонів та продемонструємо, що класичний спектр Като поводиться подібно як звичайний спектр Като моноїда. Класичні дуополігони охарактеризовані мовою ануляторних правих ідеалів. Результат нагадує твердження Ломпа і Де ла Пен'ї доведений для модулів [13].

2. Попередні дані.

Всюди через S позначатимемо моноїд з нулем 0 і ненульовою одиницею 1, але не обов'язково комутативний. Непорожня множина A називатиметься правим S-полігоном і позначається через A_S, якщо існує така дія $(a, s) \mapsto as$ з $A \times S$ в A, що i) $a(st) = (as)t$ для всіх $a \in A$ і $s, t \in S$, ii) $a1 = 1$ для кожного $a \in A$.

Підмножина B полігону A_S називається підполігоном, якщо $bs \in B$ для всіх $b \in B$ і $s \in S$. Символічно записуємо цю ситуацію так: $B \leqslant A$. Тому підполігон S-полігону S_S(відповідно $_SS$) є правим (відповідно лівим) ідеалом моноїда S. Елемент $0 \in A_S$ називається нерухомим елементом полігону A, якщо для всіх $s \in S$, $0s = 0$. Всі полігони A_S в цій статті мають єдиний нерухомий елемент, який позначається через 0 і такий, що для всіх $a \in A$ і $s \in S$, $0s = 0$ і $a0 = 0$; 0 називатимемо нулем полігону A. Полігони з зазначеною властивістю зазвичай називають центрованими. Якщо I деякий ідеал в S, то рісів фактор моноїда S за модулем I позначатимемо через S/I; добре відомо, що класами еквівалентності в S/I є I (нуль для S/I) і всі одноелементні множини $\{a\}$, де $a \in S \setminus I$. Надалі вираз "S-полігон" означатиме центрований "унітарний правий S-полігон". Категорію всіх центрованих унітарних правих полігонів позначаємо через $CActs - S$.

Словосполучення "ідеал моноїда" S означатиме "двосторонній ідеал моноїда". Ідеал I в S називаємо первинним, якщо для будь-яких $a, b \in S$, з включення $aSb \subseteq I$ випливає, що або $a \in I$ або $b \in I$. Отже, I є первинним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких правих ідеалів J і K моноїда S, з включення $JK \subseteq I$ випливає, що $J \subseteq I$ або $K \subseteq I$.

Підполігон B полігона A називається первинним підполігоном, якщо для кожного $a \in A$ і кожного $r \in S$, з включення $aSr \subseteq B$ випливає, що або $a \in B$ або $Ar \subseteq B$. Сам полігон A з $CActs - S$ називається первинним, якщо підполігон (0) полігону A є первинним (Див. [3]).

Назвемо власний підполігон P полігону A класично первинним підполігоном, якщо для кожного підполігону C полігону A і будь-яких ідеалів $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ моноїда S з включення $C\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq B$ випливає, що або $C\mathcal{A} \subseteq P$ або $C\mathcal{B} \subseteq P$.

Очевидно, над простим моноїдом з нулем всі власні підполігони довільного ненульового полігону будуть класично первинними. Зауважимо, що класично первинні модулі різні автори визначають по-різному, але еквівалентними способами. Означення класично первинного підполігону отримується з означення класично первинного підмодуля з праці [10] заміною відповідних модульних термінів їхніми полігонними відповідниками. Класично первинні полігони мають ту властивість, що праві анулятори ненульових їхніх підполігонів є первинними ідеалами моноїда. Правда, такі первинні анулятори можуть бути різними для різних підполігонів, тоді як у первинних полігонах вони рівні між собою. Для детальнішого знайомства з класично первинними модулями рекомендуємо вже згадану працю [6].

Моноїд S називається дуомоноїдом, якщо кожний односторонній ідеал у ньому двосторонній, тобто для кожного $x \in S$, $xS = Sx$. Додаткову інформацію про це можна почерпнути з [4].

Якщо для кожного підполігону B полігону A існує такий ідеал I моноїда S, що $B = AI$, то S-полігон A називатимемо мультиплікаційним S-полігоном. Такі полігони досліджували в працях [9], [12]. Заданий S-полігон A є мультиплікаційним тоді і тільки тоді, коли для кожного $a \in A$ існує такий ідеал I моноїда S, що $aS = AI$. Очевидно, що для підполігону B мультиплікаційного S-полігону A виконується рівність $B = A(B : A)$, де $(B : A) = \{s \in S : As \subseteq B\}$. Повна підкатегорія категорії $CActs - S$, класом обєктів якої є клас мультиплікаційних полігонів, називається категорією мультиплікаційних полігонів і позначається через $MCActs - S$. За додатковою інформацією щодо теорії полігонів відсилаємо читача до праці [11].

3. Полігони з властивістю (IFP) і двосторонні підполігони.

Нагадаємо, що класичний підхід до дуокілець ґрунтується на понятті двостороннього ідеалу. У випадку модулів, а тим паче полігонів поняття двосторонності ніхто і не намагався ввести у зв'язку з їхньою природно апріорною односторонністю.

Проте скрупульозний аналіз виявив, що деякі підполігони все ж мають властивості, які з великою ймовірністю нагадують двосторонні структури.

Введемо формальне означення підполігону з властивістю вставки множника (В.В.М), або в англійському варіанті (IFP), яке використано в праці Грунвальда і Ссеввіірі [10], в контексті теорії модулів. У вужчій ситуації це поняття вперше сформулював Белл в [7], досліджуючи майже-кільця.

Підполігон B правого полігону A називається підполігоном з властивістю вставки множника (IFP), якщо з умови $sa \in B$ для $s \in S$ і $a \in A$ випливає включення $sSa \subseteq B$. Кажуть, що полігон A має властивість (IFP), якщо його нульовий підполігон має властивість (IFP).

У випадку правих ідеалів моноїда з нулем властивість (IFP) для кожного правого підідеалу K правого ідеалу I еквівалентна двосторонності ідеалу I. Тому надалі підполігони полігону A, всі праві підполігони яких володіють властивістю (IFP), називатимемо двосторонніми підполігонами. Серед прикладів відзначимо, що весь полігон є підполігоном з властивістю (IFP) як підполігон самого себе, а нульовий підполігон є двостороннім у кожному полігоні над дуомоноїдом з нулем. Над комутативним моноїдом всі підполігони довільного полігону є двосторонніми, що свідчить про природність цього поняття.

Нагадаємо деякі означення з праці [1], що стосуються правих ануляторних ідеалів елементів полігону.

Для елемента $a \in A$ визначимо правий анулятор формулою $Ann_r(a) := \{(s,t) \in S \times S : as = at\}$. Це права конгруенція на полігоні A. Нуль-компонента цієї конгруенції називається правим ануляторним ідеалом елемента $a \in A$ і позначається через $ann_r(a)$.

Твердження 1. *Нехай S — моноїд з нулем і A — полігон з категорії $CActs - S$. Тоді перелічені нижче властивості полігону A еквівалентні:*

1) кожний підполігон полігону A має властивість (IFP);

2) кожний скінченно породжений підполігон полігону A має властивість (IFP);

3) кожний циклічний підполігон полігону A має властивість (IFP);

4) для кожного підполігону B полігону A фактор полігон Ріса A/B володіє властивістю: правийануляторний ідеал кожного елемента полігону A/B є двостороннім ідеалом в S.

Доведення. Імплікації 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидні. Доведемо імплікацію 3) $\Rightarrow$ 4). Нехай B — підполігон полігону A і $\overline{a} \in A/B$. Потрібно довести, що правий ідеал $Ann_r(\overline{a})$ також є і лівим ідеалом. Припустимо, що $t \in Ann_r\overline{a}$. Тоді $\overline{a}t = \overline{0}$, звідки $\overline{at} = \overline{0}$, а отже, $at \in B$. Завдяки умові (IFP) отримаємо $aut \in B$ для кожного $u \in S$. Тепер бачимо, що $\overline{aut} = \overline{0}$. Далі $\overline{a}ut = \overline{0}$, звідки випливає, що $ut \in Ann_r(\overline{a})$ за будь-якого $u \in S$. Тому $Ann_r(\overline{a})$ є двостороннім ідеалом моноїда S. Для завершення доведення достатньо перевірити істинність імплікації 4) $\Rightarrow$ 1). Нехай $as \in B$ для фіксованого підполігону B полігону A, де $a \in A$ і $s \in S$. Перейшовши до класів еквівалентності рісового фактора A/B, матимемо $s \in Ann_r(\overline{a})$. Врахувавши двосторонність правого анулятора елемента $\overline{a}$ з A/B бачимо, що $us \in Ann_r(\overline{a})$, а це означає виконання умови $aus \in B$ для кожного $u \in S$. Отже, умова (IFP) для підполігону B виконується і доведення твердження завершене. □

Отже, можна назвати полігон A двостороннім, якщо він задовольняє еквівалентні умови Твердження 1.

З означення випливає, що підполігон двостороннього полігону є двостороннім. Зокрема правильна така лема.

Твердження 2. *Нехай $A, B, C \in CActs - S$. Якщо C — двосторонній підполігон полігону B і B — двосторонній підполігон полігону A, то C — двосторонній підполігон полігону A.*

Твердження 3. *Двосторонні підполігони довільного полігону утворюють повну ґратку, а двосторонні підполігони з єдиними доповненнями — повну булеву ґратку.*

Доведення цього твердження проводиться безпосередньою преревіркою необхідних властивостей. Це рутинні стандартні перевірки, які може виконати зацікавлений читач.

4. Класичні праві дуополігони та строгі праві дуополігони.

Вводимо класичні аналоги правих дуополігонів і правих строгих дуополігонів. Для цього нам треба нагадати необхідні факти з праці [14].

Спочатку введемо поняття класичного дуополігону. Правий полігон називатимемо класичним правим дуополігоном, якщо в ньому всі праві підполігони — двосторонні. Аналогічно формулюється означення класичного лівого дуополігону.

Очевидно, що кожний підполігон правого полігону над правим дуомоноїдом з нулем є двостороннім. Тому всі праві полігони над правим дуомоноїдом з нулем є класичними дуополігонами.

Назвемо B цілком інваріантним підполігоном полігону A, якщо $f(B) \subseteq B$ для кожного ендоморфізму f полігону A і A називається дуополігоном, якщо кожний підполігон полігону A є цілком інваріантним.

Правий S — полігон A називається строгим дуополігоном, якщо для кожного підполігону B полігону A слід $tr(B, A) = \bigcup_{f \in Hom(B,A)} f(B)$ полігону B в A дорівнює B.

Зауважимо, що розглянуті вище поняття дуополігону та строго дуополігону слабко узгоджуються з класичним підходом до дуопонять. Наприклад, навіть над комутативним моноїдом можуть існувати полігони, які не є строгими дуополігонами. З іншого боку, прямий добуток будь-якої сім'ї класичних правих дуополігонів знову є класичним правим дуополігоном.

Твердження 4. *Нехай S — моноїд з ненульовою одиницею $A \in CActs - S$ класичний правий дуополігон. Тоді еквівалентні такі твердження:*

1) A є строгим дуополігоном;

2) кожний підполігон полігону A є строгим дуополігоном;

3) якщо $ann_r(a) \subseteq ann_r(b)$, то $b \in aS$ для будь-яких $a, b \in A$;

4) правіануляторні ідеали елементів кожного гомоморфного образу полігону A є двосторонніми ідеалами моноїда S;

5) правіануляторні ідеали елементів кожного рісового фактор-полігону полігону A є двосторонніми ідеалами моноїда S.

Доведення. Еквівалентність тверджень 1)–3) визначена в [14]. Еквівалентність тверджень 3) і 5) випливає з твердження 1. Еквівалентність 4) і 5) є наслідком властивості вставки множника, переформульованої для конгруенцій. $\square$

5. Класично первинні підполігони і класичний спектр Като класичного дуополігону.

Як ілюстрацію корисності ідеї розгляду двосторонніх підполігонів та класичних дуополігонів пропонуємо одну з можливих технологій перенесення топології Зариського зі спектра Като комутативного моноїда на класичний спектр Като класичного дуополігону.

Надалі, нехай S — дуомоноїд з нулем і нехай A — деякий S-полігон. Як ми вже згадували, кожний правий полігон над S є класичним дуополігоном, тому всі його підполігони є двосторонніми. Класично первинним спектром $CKSpec(A)$ довільного полігону A над моноїдом називається множина всіх двосторонніх підполігонів полігону A, які є класично первинними. Задамо топологію на $CKSpec(A)$, яка узагальнює топологію Зариського з модулів над комутативними кільцями на класичні дуополігони над дуомоноїдами. Називатимемо цю топологію топологією майже-Зариського на полігоні A. Для цього виберемо довільний підполігон B ненульового класичного дуополігону A і визначимо класичний многовид над B, який позначаємо $V(B)$, як множину всіх таких класично-первинних підполігонів P полігону A, для яких $N \subseteq P$. Як добре відомо: $V(N) = \emptyset$; $V(0) = CKSpec(A)$; $\bigcap_{i \in I} V(N_i) = V(\sum_{i \in I} N_i)$ для довільної множини індексів I; $V(N) \cup V(L) \subseteq V(N \cap L)$, де $N, L, N_i \leqslant M$.

Сім'ю всіх підмножин $V(N)$ множини $CKSpec(A)$ позначимо через $C(A)$. Тоді $C(A)$ містить порожню множину і $CKSpec(A)$, але, як і у випадку модулів, $C(A)$ не зобов'язана бути замкненою стосовно скінченних об'єднань.

За аналогією з модулями, назвемо S-полігон A *класичним топ-полігоном*, якщо множина $C(A)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підполігонів N та L полігону A існує такий підполігон K полігону A, що $V(N) \cup V(L) = V(K)$. Очевидно, тоді $C(A)$ задовольняє аксіоми для замкнених підмножин топологічного простору. Зрозуміло також, що усі скінченні перетини доповнень до множин з $C(A)$ утворюють базу відкритих підмножин шуканого простору $CKSpec(A)$.

Зауважимо, що топологія майже-Зариського на моноїді S і звичайна топологія Зариського моноїда S збігаються.

Сформулюємо аналог результату праці [15], який виявився правильним і у випадку класичного спектра Като топ-дуополігону.

Твердження 5. *Топологічний простір X є гомеоморфний до $CKSpec(A)$ для деякого топ-дуополігона A тоді і тільки тоді, коли виконуються такі три властивості:*

1) X є T_0 — простором;

2) множина відкритих латок простору X є базою в X, що містить X і є замкненою стосовно скінченних перетинів;

3) довільний перетин незвідних закритих підмножин простору X є замиканням єдиної точки і X задовольняє умову: якщо $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda \subset U\}$, то існують такі елементи $\lambda_1, .., \lambda_n \in \Lambda$, що $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} \subset U$.

Доведення теореми є модифікацією відповідного доведення з праці [15] із врахуванням фактів, доведених в праці [8].

Література

1. *Комарницький М.Я., Зеліско Г.В.* Елементи теорії напівгруп та полігонів: Курс лекцій. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2011. — 152 с.
2. *Малоїд-Глебова М.* Про класично-первинний спектр цілком-гільбертових мультиплікаційних модулів // Вісник Львів. уні-ту. Сер. мех.-мат. — 2014. — Вип. 79. – С. 185–195.
3. *Ahsan J., Zhongkui L.* Prime and semiprime acts over monoids with zero // Math. J., Ibaraki Univ. — 2001. — Vol. 33. — P. 9–15.
4. *Anjaneyulu A.* Structure and ideal theory of duo semigroups // Semigroup Forum. — 1981. — Vol. 22. — No 1, — P. 257–276.
5. *Behboodi M. R.* Classical prime submodules, // Ph.D Thesis, Chamran University Ahvaz Iran — 2004.
6. *Behboodi M. R., Koohy H.* Weakly prime modules // Vietnam J. Math. — 2004. — Vol. 32. — № 2. — P.185–195.
7. *Bell H.E.* Near-rings in which each element is a power of itself // Bull. Austral. Math. Soc. — 1970. — Vol. 2. — № 1. — P. 363–368.
8. *A.A. Estaji, A.As. Estaji* Some results on noetherian semigroups // Journal of Algebra and Related Topics. — 2014. — Vol. 2, No 1. — P. 43–53.
9. *Estaji A.A., Shabani, M.* A note on multiplication S-act, // Far East J. Mash. Sci. — Vol. 36, No 2. — 2010. — P. 133–150.
10. *Groenewald N.J., Ssevviiri D.* Completely prime submodules, //International Electronic Journal of Algebra. — 2013. — Vol. 13. — No. 1. — P. 1–14.
11. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.* Monoids, Acts and Categories, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.

12. *Komarnitskiy M., Oliynyk R.,* Preradical and kernel functors over categories of S-acts // Algebra and Discrete Mathematics. — 2010. — Vol. 10. — No. 1. — P. 57–66.
13. *Lomp C., Peña P.* A note on prime modules // Divalgaciones Matematicas. — 2000. — Vol. 8. — No 1. — P. 31–42.
14. *Roueentan M., Ershad M.* Strongly duo and duo right S-acts // Italian J.P.A.M. — 2014. Vol. 32, — P. 143–154.
15. *Vale R.* A topological description of the space of prime ideals of a monoid // arXiv:1006. 5687v2 [math.GN] 1 Jul 2010.

Стаття: надійшла до редколегії 02.07.2015
доопрацьована 04.11.2015
прийнята до друку 11.11.2015

CLASSICAL DUO-ACTS AND SOME THEIR APPLICATIONS

Mykola Komarnitskij, Galyna Zelisko

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: nick.komarnytsky@yandex.ua

A notion of a two-sided subact of centered act over a monoid with zero is introduced. Properties of these acts are described and, on their basis, the theory of classical duo-acts is constructed, as opposed to the theory of duo-acts based on the technique of completely invariant subacts. The acts with various annihilator conditions are considered. The two-sided subacts are applied for construction of backgrounds of the theory of classical duo-acts and prime subacts. The classical duo-acts are characterized by means of language of annihilator ideals. The classical duo top-acts are described.

Key words: act, classical duo-act, classical prime act, two-sided subact, classical duo-act, classical duo top-act

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 68–72
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 68–72

УДК 519.213.2+517.53

ПРО БАГАТОЧЛЕННУ АСИМПТОТИКУ АНАЛІТИЧНИХ У КРУЗІ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНОСНИХ ЗАКОНІВ

Любов КУЛЯВЕЦЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: lubov.kulyavets@gmail.com

Для аналітичної в крузі $\{z : |z| < R\}$ характеристичної функції φ ймовірнісного закону F одержано умови на $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, $x > 0$, при виконанні яких для її максимуму модуля $M_\varphi(r)$ правильна асимптотична рівність $\ln M_\varphi(r) = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \dfrac{\tau + o(1)}{(R-r)^p}$ при $r \uparrow R$.

Ключові слова: ряд Діріхле, ймовірнісний закон, характеристична функція.

Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, +\infty)$ функція F називається [1, с. 10] ймовірнісним законом, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, а визначена для дійсних значень z функція $\varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x)$ називається [1, с. 12] характеристичною функцією цього закону. Якщо φ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$, то φ називається аналітичною в $\mathbb{D}_R$ характеристичною функцією. Вважаємо, що $\mathbb{D}_R$ є максимальним кругом аналітичності функції φ. Відомо [1, с. 37-38], що φ є аналітичною в $\mathbb{D}_R$ характеристичною функцією ймовірнісного закону F тоді і тільки тоді, коли $W_F(x) =: 1-F(x)+F(-x) = O(e^{-rx})$ при $x \to +\infty$ для кожного $r \ge 0$. Звідси випливає, що

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} = R. \qquad (1)$$

Для $0 \le r < R$ приймемо $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$. В [2] досліджено умови, за яких для цілої ($R = +\infty$) характеристичної функції правильне співвідношення

$$\ln M_\varphi(r) = \sum_{j=1}^{m} T_j r^{\varrho_j} + (\tau + o(1)) r^{\varrho}, \quad r \to +\infty, \qquad (2)$$

де $\varrho_1 > 1$, $0 < \varrho < \varrho_m < \cdots < \varrho_2 < \varrho_1$ for $m \geq 2$, $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ for $2 \leq j \leq m$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Доведено, що (2) є правильним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконувалась асимптотична нерівність

$$\ln W_F(t) \leq -T_1(p_1-1)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1-1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1-1)}, \quad t \geq t_0(\varepsilon),$$

та існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_k) додатних чисел така, що

$$\ln W_F(t_k) \geq -T_1(p_1-1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_j/p_1-1)} +$$

$$+(\tau-\varepsilon)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p/p_1-1}$$

і $t_{k+1} - t_k = o(t_k^{(p_1+p-2)/2(p_1-1)})$ при $k \to \infty$.

Ми припустимо, що φ — аналітична в крузі $\{z : |z| < R\}$ ймовірнісного закону F і визначимо умови на W_F, за яких

$$\ln M_\varphi(r) = \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R, \tag{3}$$

де $0 < p < p_m < \cdots < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ для $2 \leq j \leq m$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Для цього приймемо $\mu_\varphi(r) = \sup\{W_F(x)e^{rx} : x \geq 0\}$ і доведемо спочатку, що асимптотична рівність (3) рівносильна асимптотичній рівності

$$\ln \mu_\varphi(r) = \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R. \tag{4}$$

Оскільки [1, с. 55] $\mu_\varphi(r) \leq 2M_\varphi(r)$, то з нерівності

$$\ln M_\varphi(r) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R \tag{5}$$

випливає нерівність

$$\ln \mu_\varphi(r) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r \uparrow R. \tag{6}$$

З іншого боку [1, с. 52],

$$M_\varphi(r) \leq I_\varphi(r) + 1 + W_F(0), \quad I_\varphi(r) = \int_0^\infty W_F(x)e^{rx}dx + 1 + W_F(0)$$

для всіх $r \in (0, R)$. Для $I_\varphi(r)$ отримаємо

$$I_\varphi(r-(R-r)^{p_1-p+2}) = \int\limits_0^\infty W_F(x)e^{(r-(R-r)^{p_1-p+2})x}dx \leq$$

$$\leq \mu_\varphi(r)\int\limits_0^\infty e^{-(R-r)^{p_1-p+2}x}dx = \frac{\mu_\varphi(r)}{(R-r)^{p_1-p+2}}.$$

Тому

$$\ln M_\varphi(r-(R-r)^{p_1-p+2}) \leq \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-r)^p}, \quad r\uparrow R. \tag{7}$$

Позначимо $t = r-(R-r)^{p_1-p+2}$. Тоді неважко довести таке: $r = t-(1+o(1))(R-t)^{p_1-p+2}$ при $t\uparrow R$. Тому для кожного $1\leq j\leq m$

$$\frac{1}{(R-r)^{p_j}} = \frac{1}{(R-t)^{p_j}}\left(1-(1+o(1))p_j(R-t)^{p_1-p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{(R-t)^{p_j}} - \frac{(1+o(1))p_j}{(R-t)^{p_j-p_1+p-1}} = \frac{1}{(R-t)^{p_j}} + o\left(\frac{1}{(R-t)^p}\right)$$

при $t\uparrow R$. Тому з (7) випливає, що

$$\ln M_\varphi(t) \leq \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{(R-t)^{p_j}} + \frac{\tau+o(1)}{(R-t)^p}, \quad t\uparrow R,$$

тобто нерівності (5) і (6) еквівалентні.

Якщо тепер виконується (4), то з еквівалентності нерівностей (5) і (6) випливає (3). Якщо ж (4) не виконується, то з огляду на нерівності (3) і $\mu_\varphi(r)\leq 2M_\varphi(r)$ правильна нерівність

$$\ln \mu_\varphi(r_k) \leq \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{(R-r_k)^{p_j}} + \frac{\tau_1+o(1)}{(R-r_k)^p}, \quad k\to\infty,$$

для деякої послідовності $(r_k)\uparrow R$, де $\tau_1<\tau$. Тоді для цієї послідовності $(r_k)\uparrow R$ правильна нерівність (7) з τ_1 замість τ, і повторюючи наведені раніше міркування, отримуємо оцінку (3) з τ_1 замість τ для деякої послідовності $(t_k)\uparrow R$, що неможливо.

Отже, асимптотичні рівності (3) і (4) є рівносильними, і нам залишилось визначити умови на W_F, за яких правильна асимптотична рівність (4). Для цього можемо використати такий отриманий в [2] результат.

Лема 1. *Нехай функції $P(t)$ і $Q(\sigma)=\sup\{P(t)+\sigma t : t\geq 0\}$ спряжені за Юнгом, а $0<p<p_m<\dots<p_2<p_1$, $T_1>0$, $T_j\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ для $2\leq j\leq m$, $\tau\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $p_1+p>2p_2$. Тоді для того*

$$Q(\sigma = \sum_{j=1}^m \frac{T_j}{|\sigma|} + \frac{\tau+o(1)}{|\sigma|^p}, \quad \sigma\uparrow 0, \tag{8}$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) була правильною нерівність

$$P(t)\leq T_1(p_1+1)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^m T_j\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)}, \quad t\geq t_0(\varepsilon);$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_k) додатних чисел така, що

$$P(t_k) \geq T_1(p_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)}$$

і

$$t_{k+1} - t_k = o(t_k^{(p_1+p+2)(2(p_1+1))}), \quad k \to \infty.$$

Якщо приймемо $\sigma = r - R$, то, оскільки

$$\ln \mu_\varphi(r) = \sup\{\ln W_F(x) + rx : x \geq 0\} =$$

$$= \sup\{\ln (W_F(x)e^{Rx}) + (r-R)x : x \geq 0\} = Q(r-R) = Q(\sigma),$$

де $P(t) = \ln (W_F(t)e^{Rt})$. Тому згідно з лемою правильне таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $p_1 + p > 2p_2$. Тоді для того, щоб асимптотична рівність (4) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) була правильною нерівність

$$\ln (W_F(t)e^{Rt}) \leq T_1(p_1+1)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)}, \quad t \geq t_0(\varepsilon);$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_k) додатних чисел така, що

$$\ln (W_F(t_k)e^{Rt_k} \geq T_1(p_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1+1)} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p_j/(p_1+1)} +$$

$$+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{p/(p_1+1)}$$

і

$$t_{k+1} - t_k = o(t_k^{(p_1+p+2)(2(p_1+1))}), \quad k \to \infty.$$

Зрештою, оскільки асимптотичні рівності (3) і (4) є рівносильними, приходимо до такої основної теореми.

Теорема 1. *Нехай $p_1 + p > 2p_2$. Тоді для того, щоб асимптотична рівність (3) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконувались умови 1) і 2) раніше доведеного твердження.*

Автор висловлює подяку Шереметі М.М. за слушні зауваження.

Література

1. *Линник Ю.В.* Разложения случайных величин и векторов / Ю.В. Линник, И.В. Островский // М: Nauka, 1972. — 479 с.

2. *Стець Ю.В.* Багаточленна степенева асимптотика логарифма максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле / Ю.В. Стець, М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2015. — Вип. 80. — С. 145–160.

Стаття: надійшла до редколегії 01.07.2015
прийнята до друку 11.11.2015

ON MANY-TERMED ASYMPTOTIC OF ANALYTIC IN A DISK CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS

Lyubov KULYAVEC'

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: lubov.kulyavets@gmail.com

For an analytic in a disk $\{z : |z| < R\}$ characteristic function φ of the probability law F, there are indicated conditions on $W_F(x) = 1-F(x)+F(-x)$, $x > 0$, under which for its maximum modulus $M_\varphi(r)$ the asymtotical equality $\ln M_\varphi(r) = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{T_j}{(R-r)^{p_j}} + \dfrac{\tau + o(1)}{(R-r)^p}$ as $r \uparrow R$ holds.

Key words: Dirichlet series, probability law, characteristic function.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 73–87
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 73–87

УДК 514

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНА СТРУКТУРА ГЛАДКИХ СУБМЕРСІЙ

Віктор КУЗАКОНЬ[1], **Олександр ШЕЛЄХОВ**[2]

[1]*Одеська національна академія харчових технологій,*
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65039
e-mail: kuzakon_v@ukr.net
[2]*Тверський державний університет,*
вул. Желябова 33, м. Тверь, 170100
e-mail: amshelekhov@rambler.ru

Методом Елі Картана вивчаємо геометрію шарування, яка є породжена гладкою субмерсією. Отримано канонічний вигляд структурних рівнянь гладкої субмерсії, з'ясовано геометричний сенс канонізації. Як приклад, детально розглянуто шарування двовимірних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі, описано усі його інваріанти.

Ключові слова: многовид, зовнішні форми, рухомий репер, гладке шарування, головне розшарування, інваріант, гладкі субмерсії.

1. Вступ. Диференціальні інваріанти шарувань досліджував один з авторів цієї статті у працях [6]–[14]. Застосовували методику, яка запропонована в [1],[3]. Наша мета — дослідити геометрію гладких шарувань класичним методом Е.Картана, в основі якого є зовнішні форми та рухомий репер. Цей метод був суттєво вдосконалений у працях багатьох геометрів: Г.Ф. Лаптєвим, див., наприклад, [15], [16]. Зокрема, у [17] він побудував інваріантну теорію диференційованих відображень гладкого многовиду у многовид більшої розмірності. Ми розвинули цю теорію для випадку гладких субмерсій. В першій частині праці знайдено канонічний вигляд структурних рівнянь гладкої субмерсії та з'ясовано геометричний сенс проведеної канонізації. Також ми продемонстрували, що з субмерсією канонічно пов'язані G-структури першого та другого порядку, та певний тривалентний тензор. У другій частині детально розглядаємо розшарування двовимірних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі, знаходимо його диференціальні інваріанти, з'ясовуємо їхній геометричний сенс. Зокрема, ми довели, що алгебра інваріантів породжена інваріантами другого диференціального околу, які визначають розшарування з точністю до руху.

2. Структурні рівняння гладкої субмерсії.

2.1. Структурні рівняння гладкої субмерсії у довільному репері. Нехай M та X — гладкі многовиди розмірностей n та r, відповідно, $n > r$, та $f : M \to X$ — гладке відображення (субмерсія).

Згідно з [15] задамо структурні рівняння многовиду M у вигляді

$$\begin{aligned} d\omega^i =&\omega^j \wedge \omega^i_j, \\ d\omega^i_j =&\omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \\ d\omega^i_{jk} =&\omega^m_{jk} \wedge \omega^i_m - \omega^i_{mk} \wedge \omega^m_j - \omega^i_{jm} \wedge \omega^m_k + \omega^m \wedge \omega^i_{jkm}, \quad \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Тут ω^i, $i, j, k, m, ... = 1, 2, \ldots n$, — базисні диференціальні форми многовиду M, які є залежними від диференціалів параметрів x^i — локальних координат на M.

Як відомо [16], форми ω^i і ω^i_j утворюють базис розшарування $H^1(M)$ кореперів першого порядку многовиду M, форми $\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}$ — базис розшарування $H^2(M)$ кореперів другого порядку та ін.

Аналогічно запишемо структурні рівняння многовиду X

$$\begin{aligned} d\vartheta^a =&\vartheta^b \wedge \vartheta^a_b, \\ d\vartheta^a_b =&\vartheta^c_b \wedge \vartheta^a_c + \vartheta^c \wedge \vartheta^a_{bc}, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Тут ϑ^a, $a, b, c, ... = 1, 2, \ldots m$, — базисні диференціальні форми многовиду X, що залежать від диференціалів параметрів u^a — локальних координат на X.

У локальних координатах рівняння субмерсії f набувають вигляду $u = f(x)$. Якщо ми продиференціюємо це рівняння та замінимо у ньому диференціали змінних на інваріантні форми ω^i, ϑ^a, то отримаємо диференціальні рівняння субмерсії f у інваріантному вигляді

$$\vartheta^a = \lambda^a_i\, \omega^i. \tag{3}$$

Функції $\lambda^a_i = \lambda^a_i(x, u)$ утворюють диференціально-геометричний об'єкт першого порядку відображення f [15].

Субмерсія f визначає у многовиді M шарування Φ із шарами корозмірності m, де базою шарування є многовид X. Шар у M визначається фіксацією точки многовиду X, тобто фіксацією локальних координат u^a (або, коротше, параметра u). Вважаючи $u = const$, отримуємо $\vartheta^a = 0$, внаслідок чого з (3) випливає

$$\lambda^a_i\, \omega^i = 0 \tag{4}$$

— диференціальні рівняння шарування Φ.

На многовиді M діє псевдогрупа локальних дифеоморфізмів, яку позначимо $\mathcal{P}$. Аналогічну групу, що діє на X, позначимо $\mathcal{Q}$. Якщо на многовидах M та X не зафіксовано жодних додаткових структур, то субмерсія f та шарування Φ розглядатимуться з точністю до перетворень псевдогрупи $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$.

Зовнішнє диференціювання рівнянь (3) з урахуванням структурних рівнянь призводить до появи квадратичних рівнянь

$$(d\lambda^a_i - \lambda^a_k\, \omega^k_i + \lambda^b_i\, \vartheta^a_b) \wedge \omega^i = 0.$$

Згідно з лемою Картана отримаємо

$$d\lambda_i^a - \lambda_k^a\,\omega_i^k + \lambda_i^b\,\vartheta_b^a = \lambda_{ik}^a\omega^k, \tag{5}$$

де $\lambda_{ik}^a = \lambda_{ki}^a$ — деякі нові функції, які разом з функціями λ_i^a становлять диференціально-геометричний об'єкт другого порядку відображення f [15].

Продовжуючи рівняння (5), тобто, диференціюючи їх зовнішнньо, та згодом розкриваючи за лемою Картана, отримуємо нову серію рівнянь, що містять нові функції $\lambda_{ik\ell}^a$, та ін. Рівняння (1), (2) разом з рівняннями (3), (5) називають *структурними рівняннями субмерсії f або шарування* Φ.

Звузимо родину кореперів $H^1(M)$, вибираючи форми $\lambda_i^a\,\omega^i$, які анулюються на шарах шарування Φ, як нові базисні форми ω^a многовиду M. У новому базисі рівняння (4) шару шарування Φ набудуть вигляду

$$\omega^a = 0. \tag{6}$$

Порівнюючи з (4), знаходимо, що у новому репері $\lambda_b^a = \delta_b^a$, $\lambda_u^a = 0$, де зазвичай через δ_b^a позначено символ Кронекера та $u = m+1, m+2, \dots, n$. Отримані корепери першого порядку назвемо адаптованими субмерсії f або шаруванню Φ. Звичайно, термін „адаптований корепер“ застосовують також до усього розшарування адаптованих кореперів, яке будемо позначати $\mathcal{R}_1$. Далі будемо вважати, що усі розрахунки виконують в адаптованому корепері $\mathcal{R}_1$. У ньому рівняння (3) мають простий вигляд

$$\vartheta^a = \omega^a. \tag{7}$$

Назвемо їх *канонічними рівняннями субмерсії f або шарування* Φ.

Внаслідок спеціалізації корепера ($\lambda_b^a = \delta_b^a$, $\lambda_u^a = 0$) рівняння (5) можна поділити на дві серії

$$\vartheta_b^a = \omega_b^a + \lambda_{bk}^a\omega^k \tag{8}$$

та

$$\omega_u^a = A_{uv}^a\omega^v + A_{ub}^a\omega^b, \tag{9}$$

де позначено $A_{uk}^a = -\lambda_{uk}^a$. Внаслідок симетрії величин λ_{jk}^a по нижніх індексах, величини A_{uv}^i також є симетричними $A_{uv}^i = A_{vu}^i$.

2.2. Канонічні структурні рівняння субмерсії. Якщо продиференціюємо рівняння (9) зовнішньо, то отримаємо

$$\triangledown A_{uv}^a \wedge \omega^v + \triangledown A_{ub}^a \wedge \omega^b + A_{ub}^a A_{vc}^b \omega^v \wedge \omega^c = 0, \tag{10}$$

де позначено

$$\begin{aligned} \triangledown A_{uv}^a &= dA_{uv}^a + A_{uv}^b\omega_b^a - A_{wv}^a\omega_u^w - A_{uw}^a\omega_v^w + \omega_{uv}^a, \\ \triangledown A_{ub}^a &= dA_{ub}^a + A_{ub}^c\omega_c^a - A_{vb}^a\omega_u^v - A_{uc}^a\omega_b^c - A_{uv}^a\omega_b^v + \omega_{ub}^a. \end{aligned} \tag{11}$$

Внаслідок симетрії величин A_{uv}^a можна вважати, що форми ω_{uv}^a також симетричні $\omega_{uv}^a = \omega_{uv}^a$.

Користуючись лемою Картана, з квадратичних рівнянь (10) отримаємо

$$\begin{aligned} \triangledown A_{uv}^a &= A_{uvb}^a\omega^b + A_{uvw}^a\omega^w, \\ \triangledown A_{ub}^a &= A_{ubc}^a\omega^c + A_{ubv}^a\omega^v, \end{aligned} \tag{12}$$

де виконуються співвідношення

$$A_{[uv]b}^a = 0, \quad A_{uvw}^a = A_{(uvw)}^a, \quad A_{u[bc]}^a = 0, \quad A_{ubv}^a - A_{uvb}^a = A_{uc}^a A_{ub}^c. \tag{13}$$

Якщо позначимо
$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a + \lambda_{bk}^a \omega^k, \tag{14}$$
то рівняння (8) набудуть вигляду
$$\vartheta_b^a = \tilde{\omega}_b^a, \tag{15}$$
а внаслідок (7), (15) і рівностей $A_{ub}^a = -\lambda_{ub}^a = -\lambda_{bu}^a$ перші серії структурних рівнянь (1) і (2) набудуть однакового вигляду
$$d\omega^a = \omega^b \wedge \tilde{\omega}_b^a. \tag{16}$$
На решту рівнянь першої серії (1) заміна (14) не впливає
$$d\omega^u = \omega^k \wedge \omega_k^u.$$

Знайдемо зображення (репрезентацію) псевдогрупи $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ у корепері $\mathcal{R}_1$. Довільне перетворення з $\mathcal{P}$ набуває вигляду $\tilde{\omega}^i = p_j^i \omega^j$, а довільне перетворення з $\mathcal{Q}$ — $\tilde{\vartheta}^a = q_b^a \vartheta^b$. Вважатимемо, що кобазиси $\tilde{\omega}^i$ і $\tilde{\vartheta}^a$ також з $\mathcal{R}_1$, тобто для них також виконуються рівняння (7): $\tilde{\vartheta}^a = \tilde{\omega}^a$. Тоді з попередніх рівнянь випливає, що $q_b^a = p_b^a$, $p_v^a = 0$, матриця (p_j^i) набуде вигляду
$$\begin{pmatrix} (p_b^a) & 0 \\ (p_b^u) & (p_v^u) \end{pmatrix}.$$
Отож, внаслідок редукції репера псевдогрупа $\mathcal{P}$ звузилася до псевдогрупи $\mathcal{P}'$, обмеженої умовами $p_v^a = 0$, а псевдогрупа $\mathcal{Q}$ вкладається у $\mathcal{P}'$, що є її розширенням.

Заміна (14) визначає перехід до нового адаптованого корепера, який позначимо $\mathcal{R}_2$. Далі будемо вважати, що усі рівняння записані у корепері $\mathcal{R}_2$. Порівнюючи рівняння (15) та (8), знаходимо, що у корепері $\mathcal{R}_2$ мають виконуватись співвідношення $\lambda_{bk}^a = 0$, звідки внаслідок симетрії цих величин за нижніми індексами матимемо $A_{ub}^a = 0$. Внаслідок цього рівняння (9) набудуть вигляду
$$\omega_u^a = A_{uv}^a \omega^v, \tag{17}$$
де, враховуючи попередні позначення, отримаємо
$$A_{uv}^a = A_{vu}^a. \tag{18}$$
З других рівностей рівнянь (11) та (12) внаслідок умови $A_{ub}^a = 0$ випливає
$$\omega_{ub}^a = A_{uv}^a \omega_b^v + A_{ubc}^a \omega^c + A_{ubv}^a \omega^v, \tag{19}$$
а співвідношення (13) тепер можна записати так:
$$A_{[uv]b}^a = 0, \quad A_{uvw}^a = A_{(uvw)}^a, \quad A_{u[bc]}^a = 0, \quad A_{ubv}^a = A_{uvb}^a. \tag{13$'$}$$

Диференціюємо (15), скориставшись структурними рівняннями (1) та (2), записаними у корепері $\mathcal{R}_2$. Одержимо
$$(\omega_{bc}^a - \vartheta_{bc}^a) \wedge \omega^c + (\omega_{bv}^a - A_{uv}^a \omega_b^u) \wedge \omega^v = 0.$$
Застосуємо лему Картана та отримаємо рівняння
$$\begin{aligned} \omega_{bc}^a - \vartheta_{bc}^a &= \mu_{bcd}^a \omega^d + \mu_{bcv}^a \omega^v, \\ \omega_{bv}^a - A_{uv}^a \omega_b^u &= \mu_{bvc}^a \omega^c + \mu_{bvw}^a \omega^w, \end{aligned} \tag{20}$$

де виконуються співвідношення

$$\mu^a_{b[cd]} = 0, \quad \mu^a_{bcv} = \mu^a_{bvc}, \quad \mu^a_{b[vw]} = 0. \tag{21}$$

За допомогою першого зі співвідношень (20) введемо такі позначення:

$$\tilde{\omega}^a_{bc} \equiv \omega^a_{bc} - \mu^a_{bcv}\omega^v = \vartheta^a_{bc} + \mu^a_{bcd}\omega^d \equiv \tilde{\vartheta}^a_{bc}. \tag{22}$$

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} d\omega^a_b &= \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^u_b \wedge \omega^a_u + \omega^c \wedge \omega^a_{bc} + \omega^v \wedge \omega^a_{bv} \\ &= \omega^c_b \wedge \omega^a_c + A^a_{uv}\omega^u_b \wedge \omega^v + \omega^c \wedge \omega^a_{bc} + \omega^v \wedge \omega^a_{bv} \\ &= \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^v(\omega^a_{bv} - A^a_{uv}\omega^u_b) + \omega^c \wedge \omega^a_{bc}. \end{aligned}$$

Замінюючи вираз у дужках за допомогою (20), та враховуючи співвідношення $\mu^a_{b[vw]} = 0$ (див. (21)), після перетворень з урахуванням позначень (22), остаточно одержуємо

$$d\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + \omega^c \wedge \tilde{\omega}^a_{bc}. \tag{23}$$

Можна перевірити простим обчисленням, що форма $d\tilde{\vartheta}^a_{bc}$ має саме такий вигляд, тобто, диференціювання співвідношення $\tilde{\omega}^a_{bc} = \tilde{\vartheta}^a_{bc}$, що випливає з (22), дає тотожність.

Заміни (22) визначають перехід до нових адаптованих корепeрів третього порядку на многовидах M і X, і ці корепери позначимо, відповідно, $\mathcal{R}_3$ і $\mathcal{R}'$. В них (див. (22)) вже $\tilde{\omega}^a_{bc} \equiv \tilde{\vartheta}^a_{bc}$, тому з рівнянь вигляду (20), записаних для корепера $\mathcal{R}_3$, випливає $\mu^a_{bcd} = \mu^a_{bcv} = 0$, тому друге рівняння (20) набуде вигляду

$$\omega^a_{bu} = A^a_{vu}\omega^v_b + \mu^a_{buv}\omega^v. \tag{20$'$}$$

Продовжуючи наведені міркування за індукцією, матимемо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $f : M \to X$ — гладка субмерсія та структурні рівняння многовидів M та X записані у вигляді (1), (2). Тоді базиси у розшаруваннях корепeрів першого, другого та інших порядків на многовидах M та X можна обрати так, щоб виконувалися рівняння*

$$\vartheta^a = \omega^a, \quad \vartheta^a_b = \omega^a_b, \quad \omega^a_{bc} = \vartheta^a_{bc}, \ldots \tag{24}$$

для будь-якої кількості нижніх індексів.

Якщо це зроблено, то вважатимемо, що *структури многовидів M та X є канонічно узгодженими стосовно субмерсії f*. У цьому випадку структурні рівняння (2) многовиду X становлять частину структурних рівнянь (1) многовиду M, які будемо називати *канонічними структурними рівняннями субмерсії f або шарування* Φ.

Якщо виконується лише перша серія співвідношень (24), то вважатимемо, що є канонічно узгодженими структури першого порядку, якщо перша та друга серії співвідношень — то канонічно узгодженими є структури другого порядку стосовно субмерсії f та ін.

Якщо канонічно узгодженими є структури другого порядку, то перші дві серії рівнянь (1) будемо називати структурними рівняннями субмерсії f.

2.3. G-структури, пов'язані з субмерсією.

Перші дві серії структурних рівнянь (1) многовиду M

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} \tag{25}$$

можна розглядати як структурні рівняння головного розшарування реперів (реперів першого порядку) над M, базою якого є M, а шаром — многовид R_p реперів першого порядку, віднесених до певної точки p, $p \in M$. Шар R_p виокремлюється цілком інтегровною системою $\omega^i = 0$, внаслідок якої рівняння (25) набувають вигляду

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k. \tag{26}$$

Тут зазвичай $\pi^i_j = \omega^i_j (\operatorname{mod} \omega^i = 0)$, а δ — символ диференціювання за вторинними параметрами, тобто за параметрами репера у R_p. Рівняння (26) є рівняннями повної лінійної групи $GL(n)$, що діє на многовиді R_p вільно та просто транзитивно.

Якщо на многовидах M та X канонічно узгоджені структури другого порядку, то з рівнянь (17) та (26) отримуємо $\pi^a_u = 0$, $\delta\pi^a_u = 0$. Цілком інтегровна система $\pi^a_u = 0$ виокремлює на групі $GL(n)$ підгрупу G, структурні рівняння якої отримаємо з (26), враховуючи $\pi^a_u = 0$

$$\delta\pi^a_b = \pi^c_b \wedge \pi^a_c, \, \delta\pi^u_b = \pi^c_b \wedge \pi^u_c + \pi^v_b \wedge \pi^u_v, \, \delta\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w. \tag{26$'$}$$

Група G є групою матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \tag{27}$$

де A, B, C — матриці $r \times r, (n-r) \times r, (n-r) \times (n-r)$, відповідно.

Цілком інтегровні системи $\pi^u_b = \pi^u_v = 0$, $\pi^u_v = \pi^a_b = 0$, $\pi^a_b = \pi^u_b = 0$ виокремлюють у групі G відповідно підгрупи $GL(r), A(r, n-r), GL(n-r)$, де через $A(r, n-r)$ позначено абелеву групу матриць $(n-r) \times r$ щодо додавання. Як видно з рівнянь (26'), підгрупи $GL(r)$ і $GL(n-r)$ є нормальними дільниками G.

Група G діє транзитивно на многовиді адаптованих реперів, який ми позначили як $\mathcal{R}_1$. Тому вона задає на многовиді M G-структуру [19], яку ми позначимо B_G.

Згідно з означенням група $GL(r)$ транзитивно діє на розшаруванні реперів многовиду X. Доведемо, що група $GL(n-r)$ транзитивно діє на розшаруванні реперів шару шарування Φ. Справді, шар фіксується рівнянням (9), внаслідок якого з рівнянь (1) (в адаптованому репері) отримуємо структурні рівняння шару

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega^u_v, \\ d\omega^u_v &= \omega^w_v \wedge \omega^u_w + \omega^b_v \wedge \omega^u_b + \omega^w \wedge \omega^u_{vw} = \omega^w_v \wedge \omega^u_w + A^b_{vw}\omega^w \wedge \omega^u_b + \omega^w \wedge \omega^u_{vw}. \end{aligned}$$

Фіксуючи точку шару ($\omega^u = 0$), одержуємо структурні рівняння групи $GL(n-r)$

$$d\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w.$$

Отже, ця група діє на розшаруванні реперів, базою якого є шар шарування Φ.

Далі розглянемо перші три серії структурних рівнянь (1). Їх можна розглядати як структурні рівняння головного розшарування реперів другого порядку над M, базою якого є M, а шаром — многовид R^2_p реперів другого порядку, віднесених до певної точки p, $p \in M$. Шар R_p^2 виокремлюється цілком інтегровною системою $\omega^i = 0$, внаслідок якої з (1) випливає

$$\begin{aligned} \delta\pi_j^i &= \pi_j^k \wedge \pi_k^i, \\ \delta\pi_{jk}^i &= \pi_{jk}^m \wedge \pi_m^i - \pi_{mk}^i \wedge \pi_j^m - \pi_{jm}^i \wedge \pi_k^m. \end{aligned} \tag{28}$$

Ці рівняння визначають групу Лі, яка має назву диференціальної групи другого порядку [15], позначимо її $\mathcal{D}^2$. Зазначимо, що диференціальні групи досліджували різні автори, наприклад, їх матричну репрезентацію подано у [18], див. також [4].

Якщо структури многовидів M та X узгоджені до другого порядку, то з третьої серії рівнянь (28) на підставі (17) знаходимо

$$\delta\pi_{uv}^a = \pi_{uv}^b \wedge \pi_b^a - \pi_{wv}^a \wedge \pi_u^w - \pi_{uw}^a \wedge \pi_v^w. \tag{28}$$

Звідси випливає, що система пфафових рівнянь $\pi_{uv}^a = 0$ на групі $\mathcal{D}^2$ є цілком інтегровною, отже, виокремлює деяку підгрупу, позначимо її $\mathcal{D}_0^2$.

Нехай у розшаруванні реперів другого порядку над M зафіксовано підрозшарування вигляду

$$\omega_{uv}^a = B_{uvk}^a \omega^k. \tag{29}$$

Позначимо його $\tilde{\mathcal{R}}$. У шарі R_p^2 цього підрозшарування будуть виконуватись рівняння $\pi_{uv}^a = 0$, тобто у R_p^2 діє група $\mathcal{D}_0^2$. Отже, на многовиді M визначено G-структуру другого порядку $B_{D_0^2}$ із структурною групою $\mathcal{D}_0^2$ [4]. Одночасно з (12) знаходимо, що на $\tilde{\mathcal{R}}$ форма $\bigtriangledown A_{uv}^a$ стає головною. Це означає, див. [15], що величини A_{uv}^a утворюють тензор на G-структурі B_G. Доведемо теорему.

Теорема 2. *Нехай $f : M \to X$ — субмерсія, і структури M та X канонічно узгоджені стосовно f, тобто виконуються рівняння (1), (16), (17), (19), (20'), (23) і та ін. Тоді на M визначено G-структуру B_G, де G — підгрупа вигляду (27) повної лінійної групи $GL(n)$, що діє на підрозшаруванні реперів, заданих рівняннями (17). Нехай на M зафіксований перетин вигляду (29). Тоді на M визначено G-структуру другого порядку $B_{D_0^2}$ із структурною групою $\mathcal{D}_0^2$ — підгрупою диференціальної групи другого порядку $\mathcal{D}^2$, виокремленою рівняннями $\pi_{uv}^a = 0$. У цьому випадку величини A_{uv}^a, визначені рівностями (10) та (12,1), утворюють тензор на G-структурі B_G.*

3. Інваріанти розшарування поверхонь у тривимірному евклідовому просторі.

3.1. Рівняння субмерсії $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$.

Нехай $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$, де $\mathbb{E}^3$ — тривимірний евклідовий простір. У $\mathbb{E}^3$ ми будемо використовувати ортонормовані репери. Тому попередні міркування доведеться дещо змінити, оскільки їх проводили для загального випадку, коли на многовиди реперів не накладається жодних умов.

Нехай p — довільна точка у $\mathbb{E}^3$, e_i — рухомий ортонормований репер, $i, j, k, ... = 1, 2, 3$. Вважаємо, як зазичай

$$dp = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j. \tag{30}$$

Форми ω^i та ω_i^j задовольняють структурні рівняння евклідового простору

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i, \tag{31}$$

та співвідношення

$$\omega^i_j = -\omega^j_i,\ \omega^i_i = 0, \tag{32}$$

які випливають з умови ортонормованості. Як відомо [4], форми ω^i та ω^i_j є інваріантними формами групи рухів D^3 простору $\mathbb{E}^3$.

В одновимірному випадку рівняння (2) набудуть вигляду

$$d\vartheta^1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_1,\ d\vartheta^1_1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_{11},\ d\vartheta^1_{11} = \vartheta^1_1 \wedge \vartheta^1_{11} + \vartheta^1 \wedge \vartheta^1_{111}, \dots \tag{33}$$

Зазначимо, що під час зміни кобазису $\tilde{\vartheta}^1 = \lambda\vartheta^1$ форми у рівняннях (33) перетворюються так:

$$\tilde{\vartheta}^1_1 = \vartheta^1_1 - dq/q,\ \tilde{\vartheta}^1_{11} = q^{-1}\vartheta^1_{11},\ \tilde{\vartheta}^1_{111} = q^{-2}\vartheta^1_{111}, \dots$$

Адаптувати родину ортонормованих реперів у $\mathbb{E}^3$ можна з двох міркувань: 1) щоб спростити рівняння шару; 2) щоб спростити рівняння субмерсії f. Шар V (двовимірна поверхня) у $\mathbb{E}^3$ звичайно визначається рівнянням $\omega^3 = 0$, у цьому випадку вектори e_1 і e_2 рухомого репера дотичні до поверхні V, а вектор e_3 спрямований у напрямі її нормалі. Можливі перетворення корепера в цьому випадку набувають вигляду

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3,\ \tilde{\omega}^a = p^a_b\omega^b,$$

де $a, b = 1, 2$, (p^a_b) — ортогональна матриця. Обираючи таку родину реперів, ми отримаємо рівняння субмерсії у вигляді $\vartheta^1 = \lambda\omega^3$. Зробимо на $\mathbb{R}$ заміну кобазису $\vartheta^1 \to \lambda\vartheta^1$, внаслідок чого рівняння субмерсії набуде вигляду

$$\vartheta^1 = \omega^3. \tag{34}$$

З іншого боку, довільний дифеоморфізм з $\mathcal{Q}$ має бути записаний у вигляді $\tilde{\vartheta}^1 = q\vartheta^1$ або на підставі (34), $\tilde{\omega}^3 = q\omega^3$. Порівнюючи зі згаданими допустимими перетвореннями, знаходимо, що $q = 1$, тобто будь-який дифеоморфізм з $\mathcal{Q}$ набуває вигляду

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3. \tag{35}$$

Його значення полягає в тому, що псевдогрупа так званих калібрувальних перетворень $\vartheta^1 \to q\vartheta^1$ на $\mathbb{R}$ є тривіальною, тобто калібрування — фіксоване. З наведених міркувань випливає, що нетривіальна псевдогрупа калібрувальних перетворень може виникнути лише у разі відмови від вимоги ортонормованості рухомого репера, тобто за умови, що у рухомому ортогональному репері вектор нормалі до щару V не обов'язково одиничний.

Далі ми розглянемо тільки випадок $q = 1$ (калібрування є фіксованим), коли виконуються рівняння (34) і (35).

3.2. Канонічний репер субмерсії $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$.

Диференціюючи (34) зовнішньо за допомогою (31)–(33), враховуючи (34), отримуємо рівняння

$$\omega^1 \wedge \omega^3_1 + \omega^2 \wedge \omega^3_2 = \omega^3 \wedge \vartheta^1_1.$$

Звідси за лемою Картана одержуємо

$$\omega^3_1 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 + a_1\omega^3,\ \omega^3_2 = a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2 + a_2\omega^3,\ a_{12} = a_{21}, \tag{36}$$

і

$$\vartheta^1_1 = -a_1\omega^1 - a_2\omega^2 + a_3\omega^3. \tag{37}$$

Зазначимо, що, підставивши цей вираз у перше рівняння системи (33), отримуємо вираз для форми $d\omega^3$, який випливає також з першої серії рівнянь (31) і рівнянь (36)

$$d\omega^3 = a_1\omega^1 \wedge \omega^3 + a_2\omega^2 \wedge \omega^3. \tag{38}$$

Диференціюючи зовнішньо рівняння (36), отримаємо

$$\begin{aligned} \bigtriangledown a_{11} \wedge \omega^1 + \bigtriangledown a_{12} \wedge \omega^2 + \bigtriangledown a_1 \wedge \omega^3 = 0, \\ \bigtriangledown a_{12} \wedge \omega^1 + \bigtriangledown a_{22} \wedge \omega^2 + \bigtriangledown a_2 \wedge \omega^3 = 0, \end{aligned}$$

де позначено

$$\begin{aligned} \bigtriangledown a_{11} &= da_{11} - 2a_{12}\omega_1^2, \\ \bigtriangledown a_{12} &= da_{12} - a_{11}\omega_2^1 - a_{22}\omega_1^2, \\ \bigtriangledown a_{22} &= da_{22} - 2a_{12}\omega_2^1, \\ \bigtriangledown a_1 &= da_1 - a_2\omega_1^2 + a_{11}\omega_1^3 + a_{12}\omega_2^3 + (a_1)^2\omega^1 + a_1a_2\omega^2, \\ \bigtriangledown a_2 &= da_2 - a_1\omega_2^1 + a_{12}\omega_1^3 + a_{22}\omega_2^3 + a_1a_2\omega^1 + (a_2)^2\omega^2. \end{aligned} \tag{39}$$

Звідси, на підставі леми Картана, випливають рівності

$$\begin{aligned} \bigtriangledown a_{11} &= a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2 + a_{113}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_{12} &= a_{112}\omega^1 + a_{122}\omega^2 + a_{123}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_{22} &= a_{122}\omega^1 + a_{222}\omega^2 + a_{223}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_1 &= a_{113}\omega^1 + a_{123}\omega^2 + b_{11}\omega^3, \\ \bigtriangledown a_2 &= a_{123}\omega^1 + a_{223}\omega^2 + b_{22}\omega^3. \end{aligned} \tag{40}$$

Диференціюючи зовнішньо рівняння (37), після перетворень та застосування леми Картана отримуємо

$$\begin{aligned} &da_3 + \vartheta_{11}^1 = a_{33}\omega^3 + \\ &(-b_{11} - a_1a_3 + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12})\omega^1 + (-b_{22} - a_2a_3 + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22})\omega^2, \end{aligned} \tag{41}$$

де a_{33} — деяка нова функція.

Фіксуємо точку p, тобто вважатимемо $\omega^i = 0$. Тоді з (41) випливає рівняння

$$\delta a_3 + \pi_{11}^1 = 0,$$

де, як і вище, символ δ означає диференціювання за вторинними параметрами. З останньої рівності ми бачимо, що завдяки фіксації змінної a_3 можна форму π_{11}^1 привести до нуля. Інакше кажучи, ми можемо звузити родину реперів, лишивши тільки ті, в яких форма ϑ_{11}^1 є головною. Вважатимемо, наприклад, $a_3 = 0$, тоді з (41) отримаємо вираз для форми ϑ_{11}^1

$$\vartheta_{11}^1 = a_{33}\omega^3 + (-b_{11} + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12})\omega^1 + (-b_{22} + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22})\omega^2. \tag{41$'$}$$

Рівняння (37) внаслідок проведеної канонізації набуває такого вигляду:

$$\vartheta_1^1 = -a_1\omega^1 - a_2\omega^2. \tag{37$'$}$$

Якщо продиференціювати рівняння (36') зовнішньо і скористатися другим рівнянням (33), рівнянням (41) (за умови $a_3 = 0$), останніми двома рівняннями (39) та структурними рівняннями (31), то отримуємо тотожності.

Подальші міркування аналогічні. Продиференціюємо рівняння (41'), застосовуємо лему Картана, та вважатимемо в отриманих рівняннях $\omega^i = 0$. Після обчислень отримаємо рівності

$$\delta a_{33} + \pi^1_{111} = 0,$$

з яких бачимо, що завдяки фіксації змінної a_{33} можна форму π^1_{111} звести до нуля. Вважаючи $a_{33} = 0$, ми зробимо форму ϑ^1_{111} головною, а формула (41') набуде вигляду

$$\vartheta^1_{11} = (-b_{11} + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12})\omega^1 + (-b_{22} + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22})\omega^2. \qquad (41'')$$

Продовжуючи міркування за індукцією, матимемо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай задано субмерсію $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$, де простір $\mathbb{E}^3$ віднесено до ортонормованого репера, а структурні псевдогрупи перетворень на $\mathbb{R}$ мають вигляд (33). Тоді псевдогрупа калібрувальних перетворень є тривіальною, а родина реперів у $\mathbb{E}^3$ та на $\mathbb{R}$ можна вибрати так, що форма ω^3 буде головною на $\mathbb{R}$, і на $\mathbb{R}$ існують репери першого, другого та інших порядків такі, що форми $\vartheta^1, \vartheta^1_1, \vartheta^1_{11}, \ldots$ можливо буде виразити за формулами (34), (37'), (41") та іншими, де ці рівняння є цілком інтегровними на многовиді $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$.*

Згаданий у теоремі репер назвемо *канонічним репером $\mathcal{R}_\infty$ субмерсії $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$*. Якщо виконано тільки рівняння (34), то вважатимемо, що проведено канонізацію першого порядку і позначати відповідні репери $\mathcal{R}_1$; якщо тільки (34) та $(37')$ — то проведено канонізацію другого порядку (репери $\mathcal{R}_2$) тощо.

З'ясуємо геометричний сенс канонізації. Нехай $\omega^1 = \omega^2 = 0$, тоді з першої серії рівнянь (30) отримуємо $dp = \omega^3 e_3$, а з (38) — $d\omega^3 = 0$, звідки $\omega^3 = ds$. Отже, точка p рухається уздовж кривої ℓ — ортогональної траєкторії двовимірного шару шарування Φ, а s — натуральний параметр на ℓ. З іншого боку, оскільки внаслідок $\omega^1 = \omega^2 = 0$ форми ϑ^1_1, $\vartheta^1_{11}, \ldots$ дорівнюють нулю, то рівняння (33) можна звести до одного рівняння $d\vartheta^1 = 0$ або $d\omega^3 = 0$. Отже, на $\mathbb{R}$ виникає структура одновимірного евклідового простору з канонічним параметром (декартовою координатою) s. *Отож, многовид $\mathbb{R}$ — база шарування Φ канонічно вкладається в $\mathbb{E}^3$ як ортогональна траєкторія цього шарування.*

3.3. Псевдогрупа перетворень у $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$.

Як вже було зазначено, субмерсію f або шарування Φ розглядають з точністю до перетворень псевдогрупи $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. У цьому випадку $\mathcal{P}$ є групою рухів D^3, її дія у термінах інваріантних форм ω^i і ω^i_j записують у вигляді (див. вище)

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3,\ \tilde{\omega}^a = p^a_b\omega^b,$$

де $a, b = 1, 2$ и (p^a_b) — ортогональна матриця. Ці рівняння можна спростити, якщо вибрати в кожній точці шару V єдиний (канонічний) репер, вектори e_1 і e_2 якого спрямовані по головних напрямах поверхні V. Тоді попередні рівняння набувають вигляду

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i. \qquad (43)$$

Диференціюючи ці рівняння за допомогою структурних рівнянь (31), на підставі (43) отримаємо $\omega^j \wedge (\omega^i_j - \tilde{\omega}^i_j) = 0$. Звідси $\omega^i_j - \tilde{\omega}^i_j = c^i_{jk}\omega^k$, $c^i_{jk} = c^i_{kj}$. З іншого боку, на підставі (32) отримуємо співвідношення $c^i_{jk} = -c^j_{ik}$. Одержимо $c^i_{jk} = -c^j_{ik} = -c^j_{ki} = c^k_{ji} = c^k_{ij} = -c^i_{kj} = -c^i_{jk}$, звідки $c^i_{jk} = 0$, і отже, $\omega^i_j = \tilde{\omega}^i_j$. Інтегруючи ці рівняння разом з рівняннями (43), отримуємо, як відомо [2], дію групи рухів D^3 на собі.

Довільний дифеоморфізм $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з $\mathcal{Q}$ набуває вигляду (35) або

$$\tilde{\vartheta}^1 = \vartheta^1. \tag{44}$$

Диференціюючи це рівняння за допомогою (33) та застосувавши лему Картана, на підставі (37') одержуємо $\tilde{\vartheta}^1_1 = \vartheta^1_1 + k\omega^3$ або

$$\tilde{a}_1\tilde{\omega}^1 + \tilde{a}_2\tilde{\omega}^2 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + k\omega^3.$$

Оскільки форми ω^1 і ω^2 допускають лише ортогональні перетворення вигляду $\tilde{\omega}^a = p^a_b\omega^b$ (див. п. 2.1), то $k = 0$ і ковектор $\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ отримуємо з ковектора $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ зворотним ортогональним перетворенням, запишемо це у вигляді

$$\tilde{\mathbf{a}} = \Pi(\mathbf{a}). \tag{45}$$

Ця рівність еквівалентна попереднім, якщо $k = 0$

$$\tilde{\vartheta}^1_1 = \vartheta^1_1. \tag{46}$$

Продовжуючи рівність (46) і враховуючи (41"), прийдемо до аналогічного результату

$$\tilde{\mathbf{B}}_{11} = \Pi(\mathbf{B}_{11}), \tag{47}$$

де $\mathbf{B}_{11}$ — ковектор з координатами

$$(-b_{11} + 2a_1a_{11} + 2a_2a_{12},\ -b_{22} + 2a_1a_{12} + 2a_2a_{22}),$$

а ковектор $\tilde{\mathbf{B}}_{11}$ має такі самі координати, але з хвилькою.

Продовжуючи за індукцією, отримуємо послідовність ковекторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{111} \ldots$, які перетворюються за допомогою оператора Π в аналогічні величини, але такі, що обчислені в іншій точці. Доведемо теорему.

Теорема 4. *Нехай субмерсія $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ з тривіальною псевдогрупою калібрувальних перетворень віднесена до канонічного репера $\mathcal{R}_\infty$. Тоді дія псевдогрупи перетворень на $\mathbb{R}$ є прямим добутком перетворення (35), що відображає шар V у шар $\tilde{V}$, та оператора Π, який відображає інваріантні ковектори з шару V на шар $\tilde{V}$ уздовж ортогональних траєкторій.*

3.4. Інваріанти шарування щодо дії групи D^3.

З рівняння (39) і (40) випливає, що, фіксуючи головні параметри ($\omega^i = 0$), величини a_{ab}, $a_a, a, b = 1, 2$, мають задовольняти рівняння

$$\delta a_{11} - 2a_{12}\pi^2_1 = 0,\ \delta a_{12} - a_{11}\pi^1_2 - a_{22}\pi^2_1 = 0,\ \delta a_{22} - 2a_{12}\pi^1_2 = 0, \tag{48}$$

де символи δ і π мають той самий сенс, що й вище (див. (26)). З рівнянь (48) випливають такі рівності:

$$\delta(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2) = 0, \quad \delta(a_{11} + a_{22}) = 0.$$

Їхній сенс полягає в тому, що величини $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$ та $a_{11} + a_{22}$ — інваріанти, тобто не змінюються під час допустимих перетворень репера (корепера).

Рівняння (48) можна записати у вигляді

$$\delta a_{ab} + a_{cb}\pi_a^c + a_{ac}\pi_b^c = 0,\ \delta a_a + a_b\pi_a^b = 0.$$

Такий вигляд рівнянь, які задовольняють величини a_{ab} і a_a, означає, що вони утворюють тензори стосовно допустимих перетворень репера. З'ясуємо їхній геометричний сенс.

Цілком інтегровне рівняння

$$\omega^3 = 0 \tag{49}$$

виокремлює шар шарування Φ — двовимірну поверхню V. На ній рівняння (36) набуде вигляду

$$\omega_1^3 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2,\ \omega_2^3 = a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2. \tag{36$'$}$$

З (30), користуючись (41) та (36'), знаходимо

$$dp = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \quad d^2p = (...)e_1 + (...)e_2 + (a_{11}(\omega^1)^2 + 2a_{12}\omega^1\omega^2 + a_{22}(\omega^2)^2)e_3.$$

Звідси ми бачимо, що тензор a_{uv} є асимптотичним тензором поверхні V, і її друга квадратична форма набуває вигляду $\varphi_2 = a_{11}(\omega^1)^2 + 2a_{12}\omega^1\omega^2 + a_{22}(\omega^2)^2$. У цьому випадку перша квадратична форма поверхні V набуде вигляду $(dp)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$. Звідси легко знаходимо повну та середню кривину поверхні V

$$K = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2, \quad 2H = a_{11} + a_{22}.$$

Розглянемо на поверхні V область неомбілічних точок та звузимо родину адаптованих реперів, вважаючи $a_{12} = 0$. Отримаємо так званий канонічний репер поверхні. Тоді з (42) знаходимо $\delta a_{11} = \delta a_{22} = 0$, тобто величини a_{11} і a_{22} стають інваріантами. Безпосередньо перевіряємо, що це — головні кривини поверхні V: $k_1 = a_{11}, k_2 = a_{22}$. Оскільки поверхня не є омбілічною, то $k_1 \neq k_2$, і з другого рівняння (40) можна знайти форму ω_1^2, тобто виразити її через головні форми ω^i. У цьому випадку координатні напрями, які визначені базисними векторами e_1 та e_2 на поверхні V, є головними напрямами в кожній точці цієї поверхні.

Щоб з'ясувати геометричний сенс інваріантного ковектора a_u, розглянемо шарування $\Phi^\perp$ кривих, ортогональне шаруванню Φ. Воно виокремлюється рівняннями

$$\omega^1 = \omega^2 = 0. \tag{50}$$

Нехай, як і вище, ℓ — довільна крива шарування $\Phi^\perp$, $p \in \ell$. На підставі (50) отримаємо $dp = \omega^3 e_3$, $\omega^3 = ds$, враховуючи (32) і (36),

$$\frac{dp}{ds} = e^3, \quad \frac{d^2p}{ds^2} = \frac{\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2}{\omega^3} = -a_1e_1 - a_2e_2.$$

Як бачимо, вектор $-a_1e_1 - a_2e_2$ є вектором кривини кривої ℓ. З ним пов'язані два інваріанти: кривина кривої $k = |-a_1e_1 - a_2e_2| = ((a_1)^2 + (a_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ та кут між цим вектором кривини та одним з головних напрямів поверхні V. У канонічному репері величини a_1 і a_2 є інваріантами — проекціями вектора кривини на головні напрями поверхні V.

Аналогічними міркуваннями можна з'ясувати геометричний сенс диференціальних інваріантів диференціальних околів третього, четвертого та вищих порядків, див. про це, наприклад, у [5].

3.5. Алгебра інваріантів шарування $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$.

Нехай репер у $\mathbb{E}^3$ є канонічним, тобто виконується рівність $a_{12} = 0$. Тоді усі функції, які входять до структурних рівнянь (36), (40) та наступні, отримані стандартним продовженням, будуть інваріантами стосовно дії групи $D^3 \times \mathcal{Q}$, де D^3 є групою рухів у $\mathbb{E}^3$, а $\mathcal{Q}$ — псевдогрупа локальних дифеоморфізмів прямої $\mathbb{R}$. У другому диференціальному околі існує чотири незалежних інваріанта a_{11}, a_{22}, a_1 і a_2.

Щоб знайти вигляд інваріантів третього диференціального околу, перепишемо рівняння (40), враховуючи (39) та умови канонізації $a_{12} = 0$. Після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}
da_{11} &= a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2 + a_{113}\omega^3,\\
da_{22} &= a_{122}\omega^1 + a_{222}\omega^2 + a_{223}\omega^3,\\
da_1 &= (aa_2a_{112} - (a_1)^2 - (a_{11})^2 + a_{113})\omega^1 +\\
&\quad (aa_2a_{122} - a_1a_2 + a_{123})\omega^2 + \tilde{b}_{11}\omega^3,\\
da_2 &= (-aa_1a_{112} - a_1a_2 + a_{123})\omega^1 +\\
&\quad (-aa_1a_{122} - (a_2)^2 - (a_{22})^2 + a_{223})\omega^2 + \tilde{b}_{22}\omega^3.
\end{aligned} \tag{51}$$

де позначено

$$a = (a_{11} - a_{22})^{-1},\ \tilde{b}_{11} = aa_2a_{123} - a_1a_{11} + b_{11},\ \tilde{b}_{22} = -aa_1a_{123} - a_2a_{22} + b_{22}.$$

Коефіцієнти біля базисних форм у правих частинах рівнянь (51) є інваріантами третього диференціального околу. Вони з'являються як похідні від інваріантів при диференціюванні за інваріантними напрямами — уздовж головних напрямів поверхні V і в напрямі кривої ℓ.

Як видно з рівнянь (40), у третьому околі отримуємо дванадцять інваріантів. З них є дев'ять незалежних: $a_{111}, a_{112}, a_{113}, a_{122}, a_{222}, a_{223}, a_{123}, \tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{22}$, а інші три можна виразити через них. Через згадані дев'ять незалежних інваріантів також можна виразити інваріанти — координати ковекторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{111}\ldots$,, див. п. 2.3.

Так само можна отримувати й усі подальші інваріанти: шляхом диференціювання інваріантів попереднього диференціального околу уздовж інваріантних напрямів. У таких випадках кажуть, що алгебра інваріантів породжена інваріантами a_{11}, a_{22}, a_1 та a_2.

Роль інваріантів a_{11}, a_{22}, a_1 та a_2 пояснюється у такому твердженні.

Теорема 3 (про еквівалентність шарувань). *Нехай існує два шарування:* $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$, *яке визначене структурними рівняннями (31), (32), (36), (40), та шарування* $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{E}}^3 \to \tilde{\mathbb{R}}$, *яке визначене структурними рівняннями такого самого вигляду, в яких форми* ω^i_j *та функції* a_{11}, a_{22}, a_1, a_2 *замінені на аналогічні з тильдою. Припустимо, що інваріанти другого диференціального околу у цих шарувань збігаються. Тоді шарування* f *і* $\tilde{f}$ *— еквівалентні, тобто існує рух, який шарування* f *переводить у шарування* $\tilde{f}$.

□ Для простоти обчислень вважатимемо, що структурні рівняння обох шарувань записані у канонічному репері ($a_{12} = \tilde{a}_{12} = 0$). Тоді умова рівності інваріантів набуває вигляду

$$a_{11} = \tilde{a}_{11}, a_{22} = \tilde{a}_{22}, a_1 = \tilde{a}_1, a_2 = \tilde{a}_2. \tag{52}$$

Розглянемо на прямому добутку $\tilde{\mathbb{E}}^3 \times \tilde{\mathbb{E}}^3$ рівняння

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i. \tag{53}$$

На підставі (52) і (53) з (36) отримуємо $\omega_1^3 = \tilde{\omega}_1^3, \omega_2^3 = \tilde{\omega}_2^3$, а з (40) — $a_{111} = \tilde{a}_{111}$, $a_{112} = \tilde{a}_{112}$ та ін. З цих рівностей випливає рівність $\omega_1^2 = \tilde{\omega}_1^2$.

Враховуючи ці рівності та попередні, знаходимо, що $d(\omega^i - \tilde{\omega}^i) = 0$. Отже, за теоремою Фробеніуса система (53) є цілком інтегровною. Її інтегральним многовидом буде графік відображення $\varphi : \tilde{\mathbb{E}}^3 \to \tilde{\mathbb{E}}^3$, яке визначається рівняннями (53), та при заданих початкових умовах однозначно визначене. Проте рівняння (53) збігається з рівнянням (43), яке, як було доведено у п. 2.3, визначає групу рухів. Як видно з рівнянь (53), φ відображає шари шарування Φ у шари шарування $\widetilde{\Phi}$. □

Література

1. *Алексеевский Д.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. / Д.В. Алексеевский, А.М. Виноградов, В.В. Лычагин // Современные проблемы математики. Фудаментальные направления. Геометрия-1. Т.28. — М., 1988. — 289 с.
2. *Васильева М.В.* Группы Ли преобразований. / М.В. Васильева — М.: МПГУ 1969. — 175 с.
3. *Виноградов А.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. /А.В. Виноградов, И.С. Красильщик, В.В. Лычагин — М.: Наука, 1986. — 336 с.
4. *Евтушик Л.Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы. /Л.Е. Евтушик // Труды геометрического семинара. Т.2. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1969 — С. 119–150.
5. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. /Э. Картан — М.: МГУ, 1962. — 237 с.
6. *Кузаконь В.М.* Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности. /В.М. Кузаконь, М.О. Рахула // Украинский геометрический сборник. — 1978. №21. — С. 44–50.
7. *Кузаконь В.М.* Інваріантні сім'ї поверхонь у евклідовому просторі / В.М. Кузаконь // Вісник Київського ун-ту. Математика і механіка. — 1979. — Вип. 21. — С. 58–61.
8. *Кузаконь В.М.* Тензорные инварианты сечний субмерсий с дополнительными структурами. / В.М. Кузаконь // Математичні Студії. — 2002. Т.17, №2. — С. 199–210.
9. *Кузаконь В.М.* Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств. / В.М. Кузаконь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. Т.48, №4. — С. 95–99.
10. *Кузаконь В.М.* Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости. / В.М. Кузаконь // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. Т.3, №3. — С. 201–212.
11. *Кузаконь В.М.* Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского. / В.М. Кузаконь, И.С. Стрельцова // Мат. методы та фіз.-мех. поля. — 2007. Т.43, №1. — С. 49–54.
12. *Кузаконь В.М.* Дифференциальные инварианты слоений. / В.М. Кузаконь // Докл. НАН Украины. — 2009. — №4. — С. 25–27.
13. *Кузаконь В.М.* Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Лобачевского. / В.М. Кузаконь // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — Т. 6, №2. — С. 82–90.

14. *Кузаконь В.М.* Диференціальні інварианті розшарування кривих на площині відносно $\mathbb{R}$-конформно-метричної групи. /В.М. Кузаконь // Прикл. проблеми мех. и мат. —- 2008. –– Вип. 6. -— С. 61—-65.
15. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. /Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. Т.1. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1966. — С. 139–189.
16. *Лаптев Г.Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. /Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. — Т.2. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1969. — С. 161–178.
17. *Лаптев Г.Ф.* Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений. Труды геометрического семинара. /Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. — Т.6. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1974. — С. 37–42.
18. *Лумисте Ю.Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-корепетров. /Ю.Г. Лумисте // Труды геометрического семинара. — Т.5. — М., ВИНИТИ АН СССР — 1974. — С. 239–257.
19. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. /С. Стернберг – М.: Мир, 1970.

Стаття: надійшла до редколегії 16.10.2013
прийнята до друку 11.11.2015

THE DIFFERENTIAL-GEOMETRIC STRUCTURE OF A SMOOTH SUBMERSION

Viktor KUZAKON[1], Alexander SHELEKHOV[2]

[1]*Odesa National Academy of Food Technologies,*
Kanatna str., 112, Odesa, 65039
e-mail: kuzakon_v@ukr.net
[2]*Tver State University*
Zhelyabova str., 33, Tver, 170100
e-mail: amshelekhov@rambler.ru

We study the geometry foliation generated by a smooth submersion. The canonical form of the structural equations of smooth submersion has been obtained. As an example, a foliation of two-dimensional surfaces in three-dimensional Euclidean space is researched in details. Its invariants are described.

Key words: smooth manifold, differential forms, orthogonal frame , smooth foliation, principal fibre bundle, invariants, smooth submersion.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 88–99
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 88–99

УДК 517.95

INVERSE PROBLEM TO FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH UNKNOWN YOUNG COEFFICIENT

Halyna LOPUSHANSKA, Vita RAPITA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000
e-mail: vrapita@gmail.com

We study the inverse problem for linear nonhomogeneous diffusion equation with regulating fractional derivative of order $\beta \in (0,2)$ with respect to time on a bounded cylindrical domain $\Omega_0 \times (0,T]$, the inverse problem on determination of a pair of functions: a classical solution u of the first boundary value problem to such an equation and unknown, depending on time variable, continuous coefficient in young term of the equation under the over-determination condition

$$\int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\varphi(x)dx = F(t), \quad t \in [0,T]$$

with some given functions φ and F. The unique solvability of the problem is established. The Green function method is used.

Key words: fractional derivative, inverse boundary value problem, the Green vector function, operator equation.

1. Introduction. The conditions of classical solvability of the first boundary value problem to the equation

$$D_t^\beta u(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F_0(x,t), \quad a^2 = \text{const} > 0$$

with regulating fractional derivative (see [1] – [3])

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta}\right], \quad \beta \in (0,1),$$

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau - \frac{u_t(x,0)}{(t-\tau)^{\beta-1}}\right], \text{ for } \beta \in (1,2)$$

were obtained in [4], [5]. In [6]–[11] there were proved the existence and uniqueness theorems and also the representations, by means of the Green functions, of classical solutions of fractional Cauchy problems to equations of such kind. In [12]–[14] the solvability of fractional Cauchy problems in spaces of generalizes functions was proved.

In this note we prove the existence and uniqueness of the solution (u, b) of the inverse boundary value problem

$$D_t^{\beta} u - \Delta u - b(t)u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_0 \times [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} u(x,t)\varphi_0(x)dx = F(t), \quad t \in [0,T] \tag{4}$$

where $\beta \in (0,2)$, Ω_0 is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, with the boundary $\Omega_1 = \partial\Omega$ of class C^{1+s}, $s \in (0,1)$, F_0, F_1, F_2, F, φ_0 are given functions. The second initial condition in (3) is absent in the case $\beta \in (0,1]$.

Note that for $\beta = 1$ (respectively, $\frac{\partial}{\partial t}$ in place of D_t^1) the inverse boundary value problems on determination of a pair of functions (u, b) were studied in [15] and other works, where existence and uniqueness theorems were proved. Some inverse boundary value problems to diffusion-wave equation with different unknown functions or parameters were investigated, for example, in [16]–[23].

We shall use the Green function method to prove the solvability of this problem.

2. Main notations and auxiliary results. We shall use the following notations $Q_i = \Omega_i \times (0,T]$, $i = 0,1$, $Q_2 = \Omega_0$,

$\mathfrak{D}(R^m)$ is the space of indefinitely differentiable functions with compact supports in R^m, $m = 1,2,\ldots$, $\quad \mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^{\infty}(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, \quad k = 0,1,\ldots\}$,

$\mathfrak{D}'(R^m)$ and $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ are the spaces of linear continuous functionals (generalized functions [24], p. 13-15) on $\mathfrak{D}(R^m)$ and $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$, respectively, (f, φ) is the value of $f \in \mathfrak{D}'(R^m)$ on the test function $\varphi \in \mathfrak{D}(R^m)$ and also the value of $f \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ onto $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$.

We denote by $*$ the operation of convolution of generalized functions f and g, use the function

$$f_\lambda(t) = \tfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ for } \lambda > 0 \quad \text{and} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ for } \lambda \leqslant 0,$$

where $\Gamma(z)$ is the Gamma-function, $\theta(t)$ the Heaviside function. The relation

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu} holds.$$

Note that Riemann-Lioville derivative $v_t^{(\beta)}(x,t)$ of order $\beta > 0$ is defined by

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t)$$

and $\quad D_t^{\beta} v(x,t) = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0)$ for $\beta \in (0,1)$,

$$D_t^{\beta} v(x,t) = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0) - f_{2-\beta}(t)v_t(x,0) \text{ for } \beta \in (1,2).$$

Let $C(Q_0)$, $C(\overline{Q}_0)$, $C[0,T]$ be the classes of continuous functions on Q_0, $\overline{Q}_0$ and $[0,T]$, respectively, $\quad C^{\gamma}(\Omega_0)$ $(C^{\gamma}(\bar{\Omega}_0))$ be the class of bounded continuous functions on Ω_0 $(\bar{\Omega}_0)$ satisfying the Hölder condition, $\quad C^{\gamma}(Q_i)$ $(C^{\gamma}(\bar{Q}_i))$ be the class of bounded continuous functions on Q_i $(\bar{Q}_i)$ which for all $t \in (0,T]$ satisfy the Hölder condition with respect to the space variables, $i = 0,1$, $\quad C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(Q_0) \,|\, \Delta v, D_t^{\beta} v \in C(Q_0)\}$,

$C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) = C_{2,\beta}(Q_0) \cap C(\bar{Q}_0)$ in the case $\beta \in (0,1]$, $\quad C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) = \{v \in C_{2,\beta}(Q_0) \mid v, v_t \in C(\bar{Q}_0)\}$ if $\beta \in (1,2)$.

Suppose that the following assumptions hold:

(F0) $\quad F_0 \in C^\gamma(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$,

(F1) $\quad F_1 \in C^\gamma(\bar{\Omega}_0)$, $\quad F_1|_{\Omega_1} = 0$,

(F2) $\quad F_2 \in C^\gamma(\bar{\Omega}_0)$,

(F) $\quad F, D^\beta F \in C[0,T]$, it exists $f := \inf\limits_{t\in[0,T]} |F(t)| > 0$,

(Φ) $\quad \varphi_0 \in C^2(\bar{\Omega}_0)$, $\quad \varphi_0|_{\Omega_1} = 0$.

Definition 1. *A pair of functions*

$$(u,b) \in \mathfrak{M}_\beta(Q_0) = \mathfrak{M}_\beta := C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) \times C[0,T]$$

satisfying equation (1) on Q_0 *and conditions (2)–(4) is called the solution of problem (1)–(4).*

It follows from (3) and (4) the necessary concordance conditions

$$\int\limits_{\Omega_0} F_1(x)\varphi_0(x)dx = F(0), \quad \int\limits_{\Omega_0} F_2(x)\varphi_0(x)dx = F'(0). \tag{5}$$

We introduce the operators

$$L: \quad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - \Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \qquad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0),$$

$$L^{reg}: \quad (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) - \Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0).$$

Definition 2. *The vector-function* $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y), G_2(x,t,y))$ *such that under rather regular* g_0, g_1, g_2 *the function*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) g_0(y,\tau)dy + \sum_{j=1}^2 \int\limits_{\Omega_0} G_j(x,t,y) g_j(y)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0 \tag{6}$$

is the classical (from $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$*) solution of the problem*

$$L^{reg} u(x,t) = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_0, \tag{7}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}_1, \tag{8}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in \bar{\Omega}_0 \tag{9}$$

is called the Green vector-function of this problem.

From Definition 2 it follows that

$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y, t-\tau)$, $\quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0$ where δ is the Dirac delta-function,

$(L^{reg}G_j)(x,t,y) = 0$, $\quad (x,t) \in Q_0$, $\; y \in \Omega_0$, $\; j = 1,2$, $\quad G_1(x,0,y) = \delta(x-y)$,

$\frac{\partial}{\partial t} G_1(x,0,y) = 0$, $\quad G_2(x,0,y) = 0$, $\quad \frac{\partial}{\partial t} G_2(x,0,y) = \delta(x-y)$, $\quad x,y \in \Omega_0$.

Lemma 1. *The following relations hold:*

$$G_j(x,t,y) = \int_0^t f_{j-\beta}(\tau) G_0(x,t,y,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \bar{Q}_0,\ y \in \Omega_0,\ j=1,2.$$

The lemma can be proved by using the scheme of the proof of the corresponding result in [12].

Lemma [23]**.** *The Green vector-function of the first boundary value problem (7)–(9) exists.*

Remark 1. From the maximum principle [4] and Lemma 1 it follows that

$G_0(x,t,y,\tau) > 0$ for $(x,t),(y,\tau) \in Q_0$, $\quad G_i(x,t,y) > 0$, $\quad (x,t) \in Q_0$, $\quad y \in \Omega_0$,

From the results of [6], [11] it follows that

$$G(x,t) = \frac{\pi^{N/2} t^{\beta-1}}{|x|^N} H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4t^\beta} \middle| \begin{matrix} (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (N/2,1) \end{matrix} \right), \tag{10}$$

is the fundamental function of the operator L where

$H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\gamma_1) & \dots & (a_p,\gamma_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) \end{matrix} \right)$ is the H-function of Fox ([25]).

Using the properties of the H-functions the following estimates are found (see, for example, [6], [14]):

$$|G(x,t)| \le \frac{C_0^*}{t|x|^{N-2}}, \quad |f_{j-\beta}(t) * G(x,t)| \le \frac{C_j^*}{t^{\beta-j+1}|x|^{N-2}}, \quad j=1,2, \quad |x|^2 < 4t^\beta,$$

$$|G(x,t)| \le \frac{\hat{C}_0 t^{\beta-1}}{|x|^N} \cdot \left(\frac{|x|^2}{4t^\beta}\right)^{1+\frac{N}{2(2-\beta)}} e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4a_0 t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{C_0}{t^{1-\beta}|x|^N},$$

$$|f_{j-\beta}(t) * G(x,t)| \le \frac{\hat{C}_j t^{j-1}}{|x|^N} \cdot \left(\frac{|x|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{N}{2(2-\beta)}} e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{C_j t^{j-1}}{|x|^N}, \quad j=1,2, \quad |x|^2 > 4t^\beta$$

where $c, C_i^*, C_i, \hat{C}_i \quad (i=0,1,2)$ are some positive constants.

Remark 2. According to Levy method we obtain the same kind of estimates for the functions $G_0(x,t,y,\tau)$, $G_j(x,t,y)$ as for $G(x-y,t-\tau)$, $\int_0^t f_{j-\beta}(\tau)G(x-y,t-\tau)d\tau$, $j=1,2$, respectively.

From the results of [7], [8] it follows that the estimates

$$|G_i(x+\Delta x, t+\Delta t, y,\tau) - G_i(x,t,y,\tau)| \le A_i(x,t,y,\tau)[|\Delta x| + |\Delta t|^{\beta/2}]^\gamma \tag{11}$$

$$\forall (x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t) \in \bar{Q}_0, (y,\tau) \in \bar{Q}_i, \quad i=0,1,2$$

hold with some $0<\gamma<1$ where non-negative functions $A_i(x,t,y,\tau)$ have the same kind of estimates as for $G_i(x,t,y,\tau)$, $i=0,1,2$, respectively, and $G_i(x,t,y,\tau) = G_i(x,t,y)$, $A_i(x,t,y,\tau) = A_i(x,t,y)$ for $i=1,2$. Note that for general parabolic boundary value problem the Hölder conditions for all components of the Green vector-function were obtained in [26], [27].

Theorem 1. *If $g_0 \in C^{\gamma}(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $g_j \in C^{\gamma}(\bar{\Omega}_0)$, $j=1,2$, $g_1|_{\Omega_1}=0$ then there exists the unique solution $u \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ of the problem (7), (8), (9), it is defined by*

$$u(x,t)=\big(\mathfrak{G}_0 g_0\big)(x,t)+\big(\mathfrak{G}_1 g_1\big)(x,t)+\big(\mathfrak{G}_2 g_2\big)(x,t), \quad (x,t)\in\bar{Q}_0 \tag{12}$$

where $(\mathfrak{G}_0 g_0)(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy$, $(\mathfrak{G}_j g_j)(x,t)=\int\limits_{\Omega_0} G_j(x,t,y)g_j(y)dy$, $j=1,2$.

Proof. Taking into account Lemma 1 and Remark 2, as in [8], [13], [26], we show that function (12) belongs to $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ and satisfies problem (1)–(3). Namely, we have

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy\Big|\\
&\quad\le \int\limits_0^t d\tau\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|<2(t-\tau)^{\beta/2}\}} G_0(x,t,y,\tau)|g_0(y,\tau)|dy\\
&\quad+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|>2(t-\tau)^{\beta/2}\}} G_0(x,t,y,\tau)|g_0(y,\tau)|dy\Big]\\
&\quad\le \int\limits_0^t d\tau\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|<2(t-\tau)^{\beta/2}\}} \tfrac{C^* dy}{(t-\tau)|y-x|^{N-2}}|g_0(y,\tau)|dy\\
&\quad+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|>2(t-\tau)^{\beta/2}\}} \tfrac{C^* dy}{(t-\tau)^{1-\beta}|y-x|^{N}}|g_0(y,\tau)|dy\Big]\\
&\quad\le C\int\limits_0^t\Big[\tfrac{1}{(t-\tau)}\int\limits_0^{2(t-\tau)^{\beta/2}} rdr+\tfrac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}}\int\limits_{2(t-\tau)^{\beta/2}}^{diam\Omega_0}\tfrac{dr}{r}\Big]d\tau\cdot\|g_0\|_{C(\bar{Q}_0)}\\
&\quad\le \hat{C}\int\limits_0^t\Big[(t-\tau)^{\beta-1}+(t-\tau)^{\beta-1}ln\tfrac{diam\Omega_0}{(t-\tau)^{\beta/2}}\Big]d\tau\cdot\|g_0\|_{C(\bar{Q}_0)}\\
&\quad\le k_0 t^{\beta_1}\cdot\|g_0\|_{C(\bar{Q}_0)}\quad \forall (x,t)\in\bar{Q}_0,
\end{aligned}$$

where $C^*, C, \hat{C}, \hat{k}, k_0$ are some positive constants, $\beta_1=\beta-\varrho$, ϱ is an arbitrary number from $(0,1)$, $||g_0||_{C(\bar{Q}_0)}:=\sup\limits_{(x,t)\in Q_0}|g_0(x,t)|$.

Similarly, we obtain the uniform convergence, and therefore continuity on $\bar{Q}_0$, of the other term in the right-hand side of (12):

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{\Omega_0} G_j(x,t,y)g_j(y)dy\Big|\le\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|<2t^{\beta/2}\}} G_j(x,t,y)dy+\\
&\quad\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|>2t^{\beta/2}\}} G_j(x,t,y)dy\Big]\cdot||g_j||_{C(\bar{\Omega}_0)}\\
&\quad\le c_0\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|<2t^{\beta/2}\}}\tfrac{t^{j-1-\beta}}{|x|^{N-2}}dy\\
&\quad+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x|>2t^{\beta/2}\}}\tfrac{t^{j-1}}{|y-x|^N}\cdot\big(\tfrac{|y-x|^2}{4t^\beta}\big)^{\frac{N}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|y-x|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}dy\Big]\cdot||g_j||_{C(\bar{\Omega}_0)}\\
&\quad\le \hat{k}_j t^{j-1}\Big[1+\int\limits_{2t^{\beta/2}}^{diam\Omega_0} r^{\frac{N}{2-\beta}-1}t^{-\frac{\beta N}{2(2-\beta)}}e^{-\hat{c}\left(\frac{r^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}dr\Big]\cdot||g_1||_{C(\bar{\Omega}_0)}\\
&\quad\le k_j t^{j-1}||g_j||_{C(\bar{\Omega}_0)},\quad (x,t)\in\bar{Q}_0,\quad j=1,2
\end{aligned}$$

where $c_0, \hat{c}, \hat{k}_j, k_j$ $(j=1,2)$ are positive constants.

As in [8], [27] we show that under conditions of the theorem function (12) belongs to the required space and satisfies the problem. The uniqueness of the solution follows from the maximum principle [4].

3. The existence and uniqueness theorems for inverse problem. We pass to proof of the existence of the solution of inverse problem (1)–(4).

From Theorem 1 it follows that under assumptions (F0), (F1), (F2) and known $b \in C[0,T]$ the solution $u \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ of the first boundary value problem (1)–(3) satisfies the integral equation

$$u(x,t) = \big(\mathfrak{G}_0\big(bu + F_0\big)\big)(x,t) + \big(\mathfrak{G}_1 F_1\big)(x,t) + \big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_0,$$

that is

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} \mathfrak{G}_0(x,t,y,\tau) b(\tau) u(y,\tau) dy + h(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_0 \tag{13}$$

where

$$h(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) F_0(y,\tau) dy + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega_0} G_j(x,t,y) F_j(y) dy, \quad (x,t) \in \bar{Q}_0. \tag{14}$$

Conversely, any solution $u \in C^{\gamma}(Q_0)$ of integral equation (13) (with known $b \in C[0,T]$) belongs to the space $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$ and is a solution of problem (1)–(3).

From equation (1) and conditions (2), (Φ) it follows that

$$\int\limits_{\Omega_0} D_t^{\beta} u(x,t) \varphi_0(x) dx = \int\limits_{\Omega_0} u(x,t) \Delta\varphi_0(x) dx + b(t) \int\limits_{\Omega_0} u(x,t) \varphi_0(x) dx + \int\limits_{\Omega_0} F_0(x,t) \varphi_0(x) dx,$$

$t \in (0,T]$. Using condition (4) we obtain

$$D_t^{\beta} F(t) = \int\limits_{\Omega_0} u(x,t) \Delta\varphi_0(x) dx + b(t) F(t) + \int\limits_{\Omega_0} F_0(x,t) \varphi_0(x) dx$$

and, using (F),

$$b(t) = \big[D_t^{\beta} F(t) - \int\limits_{\Omega_0} F_0(x,t) \varphi_0(x) dx - \int\limits_{\Omega_0} u(x,t) \Delta\varphi_0(x) dx\big] [F(t)]^{-1}, \quad t \in (0,T]. \tag{15}$$

Note that, according to (15), $b \in C[0,T]$ for $u \in C^{\gamma}(Q_0)$. By substituting the right-hand side of (15) into (13) in place of b we obtain the following nonlinear integral equation for unknown $u \in C^{\gamma}(\Omega_0)$

$$u(x,t) = \int\limits_0^t [F(\tau)]^{-1} d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) \big[D_t^{\beta} F(\tau) - \int\limits_{\Omega_0} F_0(z,\tau) \varphi_0(z) dz - \tag{16}$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} u(z,\tau) \Delta\varphi_0(z) dz\big] u(y,\tau) dy + h(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_0.$$

We have reduced problem (1)–(4) to system (15), (16). The converse conclusion holds and we obtain the following result.

Theorem 2. *Under assumptions (F0), (F1), (F2), (F), (Φ) and concordance condition (5) a pair of functions $(u,b) \in \mathfrak{M}_\beta(Q_0)$ is the solution of problem (1)–(4) if and only if the function $u \in C^\gamma(Q_0)$ is a solution of integral equation (16), $b \in C[0,T]$ is defined by (15).*

Theorem 3. *Under assumptions (F0), (F1), (F2), (F), (Φ) and concordance condition (5) there exists some $T^* \in (0,T]$ (respectively, $Q_0^* = \Omega_0 \times (0,T^*]$) and the solution $(u,b) \in \mathfrak{M}_\beta(Q_0^*) = C_{2,\beta}(\bar{Q}_0^*) \times [0,T^*]$ of problem (1)–(4): the function u is a solution of integral equation (16), b is defined by (15).*

Proof. Granting Theorem 2 it is enough to prove the solvability of equation (16) in the class $C^\gamma(Q_0)$. Let

$$||b||_{C[0,T]} = \max_{t\in[0,T]} |b(t)|,$$

$$||v||_{C^\gamma(Q_0)} = \max\{\sup_{(x,t)\in Q_0} |v(x,t)|, \sup_{(x,t)\in Q_0, |\Delta x|<1} \tfrac{|v(x+\Delta x,t)-v(x,t)|}{|\Delta x|^\gamma}\},$$

$M_R = M_R(Q_0) = \{v \in C^\gamma(Q_0) \mid \quad ||v||_{C^\gamma(Q_0)} \le R\}$ for some $R = const > 0$.

We shall use the Schauder principle. On M_R we consider the operator

$$(Pv)(x,t) := \int_0^t [F(\tau)]^{-1} d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)\big[D_\tau^\beta F(\tau) - \int_{\Omega_0} F_0(z,\tau)\varphi_0(z)dz$$

$$- \int_{\Omega_0} u(z,\tau)\Delta\varphi_0(z)dz\big] u(y,\tau)dy + h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0, \quad v \in M_R$$

where the function $h(x,t)$ is defined by (14).

At the beginning we show the existence of $R > 0$, $T^* \in (0,T]$, and therefore $M_R^* = M_R(Q_0^*)$ such that $P : M_R^* \to M_R^*$.

Using the proof of Theorem 1, for $v \in M_R$, $(x,t) \in \bar{Q}_0$, we obtain

$$|(Pv)(x,t)| \le \frac{k_0}{f} t^{\beta_1}(c_1 R + c_2 R^2) + |h(x,t)|,$$

$$|h(x,t)| \le k_0 t^{\beta_1} \|F_0\|_{C(Q_0)} + k_1 \|F_1\|_{C(\bar{\Omega}_0)} + k_2 t \|F_2\|_{C(\bar{\Omega}_0)}, \quad (x,t) \in \bar{Q}_0.$$

Thus, $\quad |(Pv)(x,t)| \le \frac{k_0}{f} t^{\beta_1}(c_1 R + c_2 R^2) + B_0(t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_0$

where $\quad c_1 = \|D^\beta F - \int_{\Omega_0} F_0(z,\cdot)\varphi_0(z)dz\|_{C[0,T]}, \quad c_2 = \int_{\Omega_0} |\Delta\varphi_0(z)|dz,$

$B_0(t) = k_0 t^{\beta_1} \|F_0\|_{C(Q_0)} + k_1 \|F_1\|_{C(\bar{\Omega}_0)} + k_2 t \|F_2\|_{C(\bar{\Omega}_0)}.$

Also, we have

$$\frac{|(Pv)(x+\Delta x,t) - (Pv)(x,t)|}{|\Delta x|^\gamma} \le$$

$$\le \frac{c_1 R + c_2 R^2}{f} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} \frac{|G_0(x+\Delta x,t,y,\tau) - G_0(x,t,y,\tau)|}{|\Delta x|^\gamma} dy + \frac{|h(x+\Delta x,t) - h(x,t)|}{|\Delta x|^\gamma}$$

$$\le \frac{c_1 R + c_2 R^2}{f} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} A_0(x,t,y,\tau)dy + \frac{|h(x+\Delta x,t) - h(x,t)|}{|\Delta x|^\gamma}, \quad (x,t) \in Q_0.$$

We used Remark 2. In just the same way we estimate the second term. As in the proof of Theorem 1 for $v \in C^{\gamma}(Q_0)$, $(x,t) \in Q_0$, $|\Delta x| < 1$, we obtain

$$\frac{|(Pv)(x+\Delta x,t)-(Pv)(x,t)|}{|\Delta x|^{\gamma}} \le c_3 t^{\beta_1}\frac{c_1R+c_2R^2}{f} + B_1(t), \quad (x,t) \in Q_0$$

where

$$B_1(t) = c_3 t^{\beta_1}\|F_0\|_{C(Q_0)} + c_4\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)} + c_5\|F_2\|_{C(\bar\Omega_0)},$$

$$c_3 = \sup_{(x,t)\in Q_0} t^{-\beta_1}\int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} A_0(x,t,y,\tau)dy,$$

$$c_4 = \sup_{x\in\Omega_0}\int_{\Omega_0} A_1(x,t,y)dy, \qquad c_5 = \sup_{x\in\Omega_0} t\int_{\Omega_0} A_2(x,t,y)dy.$$

As a result we obtain: $\|Pv\|_{C^{\gamma}(Q_0)} \le$
$\le \max\{\max_{t\in[0,T]}[\frac{k_0}{f}t^{\beta_1}(c_1R+c_2R^2)+B_0(t)], \max_{t\in[0,T]}[\frac{c_3}{f}t^{\beta_1}(c_1R+c_2R^2)+B_1(t)]\} \quad \forall v \in M_R.$

In order the inequality

$$\max\{d_0t^{\beta_1}R^2+B_0(t), d_1t^{\beta_1}R^2+B_1(t), 1\} \le R, \quad \forall t \in [0,T^*,] \tag{17}$$

holds for some $T^* \in (0,T]$, $R \ge 1$ with $d_0 = kk_0$, $d_1 = kc_3$ and $k = \frac{c_1+c_2}{f}$, consider the functions

$$f_j(s) = d_jt^{\beta_1}s^2 - s, \quad s \ge 0, \quad j = 0,1.$$

We find $f_j'(s) = 2d_jt^{\beta_1}s - 1$ and prove that $s_j = [2d_jt^{\beta_1}]^{-1}$ is the point of the minimum of $f_j(s)$, $j = 0,1$. Then the inequality $\|Pv\|_{C^{\gamma}(Q_0^*)} \le R$ for all $v \in M_R^*$ is fulfilled for some $R \ge 1$ if $d_jt^{\beta_1}s_j^2 - s_j \le -B_j(t)$ and $[2d_jt^{\beta_1}]^{-1} \ge 1$ for all $t \in [0,t_j^*]$, $j = 0,1$ and $T^* = \min\{t_0^*, t_1^*, T\}$.

We have $d_jt^{\beta_1}s_j^2 - s_j = -\frac{1}{4d_jt^{\beta_1}}$, $j = 0,1$. There exists $t_j^* > 0$ such that

$$-\frac{1}{4d_jt^{\beta_1}} \le -B_j(t)$$

(that is $4k(k_0t^{\beta_1})^2\|F_0\|_{C(Q_0)} + 4kk_1(k_0t^{\beta_1})\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)} - 1 \le 0$ for all $t \in [0,t_0^*]$ and $4k(c_3t^{\beta_1})^2\|F_0\|_{C(Q_0)} + 4kc_3c_4t^{\beta_1}\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)} - 1 \le 0$ for all $t \in [0,t_1^*]$) and also $[2d_jt^{\beta_1}]^{-1} \ge 1$ for all $t \in [0,t_j^*]$, $j = 0,1$. They are

$$t_0^* = \min\left\{\left[\frac{k_1\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)}}{2k_0\|F_0\|_{C(Q_0)}}\left(\sqrt{1+\frac{f\|F_0\|_{C(Q_0)}}{(c_1+c_2)k_1^2\|F_1\|^2_{C(\bar\Omega_0)}}}-1\right)\right]^{\frac{1}{\beta_1}}, \left[\frac{f}{2(c_1+c_2)k_0}\right]^{\frac{1}{\beta_1}}\right\},$$

$$t_1^* = \min\left\{\left[\frac{c_4\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)}}{2c_3\|F_0\|_{C(Q_0)}}\left(\sqrt{1+\frac{f\|F_0\|_{C(Q_0)}}{(c_1+c_2)c_4^2\|F_1\|^2_{C(\bar\Omega_0)}}}-1\right)\right]^{\frac{1}{\beta_1}}, \left[\frac{f}{2(c_1+c_2)c_3}\right]^{\frac{1}{\beta_1}}\right\}$$

if $\|F_0\|_{C(Q_0)} > 0$,

$$t_0^* = \min\left\{\left[\frac{f}{4(c_1+c_2)k_0k_1\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)}}\right]^{\frac{1}{\beta_1}}, \left[\frac{f}{2(c_1+c_2)k_0}\right]^{\frac{1}{\beta_1}}\right\} \quad \text{and}$$

$$t_1^* = \min\left\{\left[\frac{f}{4(c_1+c_2)c_3c_4\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)}}\right]^{\frac{1}{\beta_1}}, \left[\frac{f}{2(c_1+c_2)c_3}\right]^{\frac{1}{\beta_1}}\right\}$$

in the case $F_0(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in Q_0$.

Note that from (5) and (F) it follows that $\|F_1\|_{C(\bar\Omega_0)} > 0$. We have proven the existence of $R \ge 1$, $T^* > 0$ such that $P : M_R^* \to M_R^*$.

The operator P is continuous on $\tilde{M}_R^* = \{v \in C(Q_0^*) \mid ||v||_{C(Q_0^*)} \le R\}$ (thus, on M_R^*). Namely, for $v_1, v_2 \in \tilde{M}_R^*$

$$||Pv_1 - Pv_2||_{C(Q_0^*)} =$$

$$= \sup_{(x,t)\in Q_0^*} \Bigg| \int_0^t [F(\tau)]^{-1} d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau) \Bigg[\int_{\Omega_0} v_2(z,\tau)\Delta\varphi_0(z)dz[v_2(y,\tau) - v_1(z,\tau)]$$

$$- \int_{\Omega_0} [v_1(z,\tau) - v_2(z,\tau)]\Delta\varphi_0(z)dz \cdot v_1(y,\tau)\Bigg] dy \Bigg|$$

$$\le c_2 \sup_{(x,t)\in Q_0^*} \int_0^t [F(\tau)]^{-1} d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)dy \cdot \left[\|v_1\|_{C(Q_0^*)} + \|v_2\|_{C(Q_0^*)}\right] \|v_1 - v_2\|_{C(Q_0^*)}$$

$$\le \frac{2k_0 c_2 (T^*)^{\beta_1} R}{f} \|v_1 - v_2\|_{C(Q_0^*)}.$$

Similarly we obtain that the operator P is compact on $\tilde{M}_R^*$ (and thus on M_R^*): the uniform boundedness of the set

$$P\tilde{M}_R^* := \{(Pv)(x,t),\ (x,t) \in Q_0^* \mid \quad v \in \tilde{M}_R^*\},$$

was established earlier; in addition, from the properties of Green operators and Remark 2 it follows that for all $\varepsilon > 0$ there exists $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that for all $(x,t) \in Q_0^*$, $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta t| < \delta$ and for all $v \in \tilde{M}_R^*$

$$\sup_{(x,t)\in Q_0^*} |(Pv)(x+\Delta x, t+\Delta t) - (Pv)(x,t)|$$

$$\le \tfrac{c_1 R + c_2 R^2}{f} \sup_{(x,t)\in Q_0^*} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} |G_0(x+\Delta x, t+\Delta t, z, \tau) - G_0(x,t,z,\tau)|dz$$

$$+ \sup_{(x,t)\in Q_0^*} |h(x+\Delta x, t+\Delta t) - h(x,t)|$$

$$\le \left[\tfrac{(c_1 R + c_2 R^2) c_3 (T^*)^{\beta_1}}{f} + B_1(T^*)\right] \cdot \left[|\Delta x| + |\Delta t|^{\beta/2}\right]^{\gamma} < \varepsilon.$$

As a result, the operator P is equicontinuous on M_R^*. According to the Schauder principle, there exists the solution $u \in M_R^*$ of equation (16).

Theorem 4. *Under condition $F(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$, the solution $(u,b) \in \mathfrak{M}_\beta(Q_0)$ of problem (1)–(4) is unique.*

Proof. Take two solutions $(u_1,b_1), (u_2,b_2) \in \mathfrak{M}_\beta(Q_0)$ of problem (1)–(4) and substitute them into equation (1). We obtain

$$D_t^\beta (u_1 - u_2) = \Delta(u_1 - u_2) + b_1 u_1 - b_2 u_2,$$

$$D_t^\beta (u_1 - u_2) = \Delta(u_1 - u_2) + (b_1 - b_2)u_1 + b_2(u_1 - u_2)$$

and for $u = u_1 - u_2$, $b = b_1 - b_2$

$$D_t^\beta u = \Delta u + b_2 u + b u_1.$$

From the boundary condition it follows that

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_1, \quad t \in [0,T]$$

and from the initial condition

$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_0.$$

Then, by Theorem 1, the function $u(x,t)$ satisfies the equation

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)(b_2(\tau)u(y,\tau) + b(\tau)u_1(y,\tau))dx, \quad (x,t) \in \bar{Q}_0$$

and belongs to $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$.

From over-determination condition (4) and from (15) it follows that

$$\int_{\Omega_0} u(x,t)\Delta\varphi_0(x)dx = -b(t)F(t), \quad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Then $u(x,t)$ satisfies the integral equation

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)\left(b_2(\tau)u(y,\tau) - \frac{u_1(y,\tau)\int_{\Omega_0} u(z,\tau)\Delta\varphi_0(z)dz}{F(\tau)}\right)d\tau$$

that is

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} \Bigg[G_0(x,t,z,\tau)b_2(\tau)$$

$$-\frac{1}{F(\tau)}\left(\int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)u_1(y,\tau)dy\right)\Delta\varphi_0(z)\Bigg] u(z,\tau)dz, \quad (x,t) \in \bar{Q}_0.$$

By uniqueness of the solution of the second type linear Volterra integral equation with integrable kernel we obtain $u(x,t) = 0$, $(x,t) \in \bar{Q}_0$. Then from (18) it follows that $b(t)F(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Since $F(t) \neq 0$ on $[0,T]$ (under assumption of the theorem), $b(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$.

Remark 3. The obtained result is correct in the case $\beta \in (0,1]$ (without the second initial condition $u_t(x,0) = F_2(x)$, $x \in \bar{\Omega}_0$) if in all formulas we put $F_2(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}_0$.

A similar result holds for inverse problem on determination of a pair of functions: the solution u of the second boundary value problem for such an equation and unknown coefficient $b(t)$ in the young term under the same over-determination condition (4).

We may study the cases $N = 1, 2$ in just the same way.

References

1. *Caputo M.,* Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent, II // Geofis. J. R. Astr. Soc. **13** (1967), 529–539.

2. *Djrbashian M.M., Nersessyan A.B.,* Fractional derivatives and Cauchy problem for differentials of fractional order // Izv. AN Arm. SSR. Matamatika. **3** (1968), 3–29.
3. *Djrbashian M.M.,* Integral transformations and representations of functions in complex domain (in Russian). Nauka, Moskow, 1999.
4. *Luchko Yu.,* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fract. Calc. Appl. Anal. **12**, 4 (2009), 409–422.
5. *Meerschaert M.M., Nane Erkan, Vallaisamy P.,* Fractional Cauchy problems on bounded domains // Ann. Probab. **37** (2009), 979–1007.
6. *Kochubei A.N.,* Fractional-order diffusion // Differential Equations. **26** (1990), 485–492.
7. *Kochubei A.N., Eidelman S.D.,* Equations of one-dimentional fractional-order diffusion (in Russian) // Dop. NAS of Ukraine. 12 (2003), 11–16.
8. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.,* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.
9. *Voroshylov A.A., Kilbas A.A.,* Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative // Dokl. Ak. Nauk. **414**, 4 (2007), 1–4.
10. *Anh V.V. and Leonenko N.N.,* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. of Statistical Physics. 104(5/6) (2001), 1349–1387.
11. *Jun Sheng Duan,* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phis. (2005), 46 (013504).
12. *Lopushanska H., Lopushanskyj A., Pasichnyk E.,* The Cauchy problem in a space of generalized functions for the equations possessing the fractional time derivarive (in Russian) // Sib. Math. J. (2011), **52**, 6, 1288–1299.
13. *Lopushanska H.P., Lopushanskyj A.O.,* Space-time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions // Ukrainian Math. J. (2013) **64**, 8, 1215–1230. doi: 10.1007/s11253-013-0711-z (translated from Ukr. Mat. Zhurn. (2012) **64**, 8, 1067–1080)
14. *Lopushanskyj A.O.,* Solution of fractional Cauchy problem in apaces of generalized functions (in Ukrainian) // Visnyk of Lviv. Un-ty, Ser. mech.-mat. (2012) **77**, 132–144.
15. *Snitko G.,* Inverse problem for parabolic equation with unknown young coefficient on domain with free boundary (in Ukrainian) // Visnyk of Lviv. Un-ty, Ser. mech.-mat. **68** (2008).
16. *El-Borai Mahmoud M.,* On the solvability of an inverse fractional abstract Cauchy problem // LJRRAS **4** (201), 411–415.
17. *Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M. and Yamazaki T.,* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation // Inverse problems **25** (2000), 1–16.
18. *Ivanchov M.,* Inverse problems for equations of parabolic type. Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., **10** (2003).
19. *Nakagawa J., Sakamoto K. and Yamamoto M.,* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration // Journal of Math-for-Industry. **2A** (2010), 99–108.
20. *Zhang Y. and Xu X.,* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse problems. **27** (2011), 1–12.
21. *Rundell W., Xu X. and Zuo L.,* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation // Applicable Analysis. **1** (2012), 1–16.
22. *Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh. and Yamamoto M.,* Determination of order in fractional diffusion equation // Journal of Math-for-Industry. **5A** (2013), 51–57.
23. *Lopushanskyj A.O., Lopushanska H.P.* One inverse boundary value problem for diffusion-wave equation with fractional derivarive (in Ukrainian) // Ukr. math. J. **66**, 5 (2014), 655–667.

24. *Shilov G.E.,* Mathematical Analyses. Second special curse. (in Russian). Nauka, Moskow, 1965.
25. *Kilbas A.A., Sajgo M.,* H-Transforms. Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004.
26. *Ivasyshen S.D.,* Green matrix of parabolic boundary value problems. (in Russian). Vyshcha shkola, Kiev, 1990.
27. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Стаття: надійшла до редколегії 01.03.2015
прийнята до друку 11.11.2015

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ТА НЕВІДОМИМ МОЛОДШИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Галина ЛОПУШАНСЬКА, Віта РАПІТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: vrapita@gmail.com

Досліджено обернену задачу для лінійного неоднорідного рівняння дифузії з регуляризованою похідною дробового порядку $\beta \in (0,2)$ за часом в обмеженому циліндрі $\Omega_0 \times (0,T]$ — задачу про визначення пари функцій: класичного розв'язку u першої крайової задачі для такого рівняння та невідомого, залежного від часу, неперервного коефіцієнта в молодшому члені рівняння за умови перевизначення

$$\int_{\Omega_0} u(x,t)\varphi(x)dx = F(t), \quad t \in [0,T]$$

з деякими заданими функціями φ і F. Встановлено однозначну розв'язність задачі. Використовуємо метод функції Гріна.

Ключові слова: похідна дробового порядку, обернена крайова задача, вектор-функція Гріна, операторне рівняння.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 100–106
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 100–106

УДК 512.4

RADICAL FILTERS OF SEMISIMPLE MODULES WITH FINITE NUMBER OF HOMOGENEOUS COMPONENTS

Yuriy MATURIN

Institute of Physics, Mathematics, Economics and IT
Drohobych State Pedagogical University,
3 Stryjska Str., Drohobych, 82100
e-mail: yuriy_maturin@hotmail.com

Radical filters of semisimple modules with finite homogeneous components are described.

Key words: semisimple ring, module, radical filter.

All rings are assumed to be associative with unit 1≠0 and all modules are left unitary.

Let R be a ring. The category of left R-modules will be denoted by $R - Mod$. We shall write $N \leq M$ if N is a submodule of M. The set of all R-endomorphisms of M will be denoted by $End(M)$. Let $soc(M)$ denote the socle of M. Let $N \leq M$ and $f \in End(M)$. Put

$$(N : f)_M = \{x \in M \,|\, f(x) \in N\}\ , End(M)_N = \{f \in End(M) \,|\, f(M) \subseteq N\}\ .$$

Let E be some non-empty collection of submodules of a left R-module M.

Consider the following conditions:

$$L \in E, L \leq N \leq M \Rightarrow N \in E; \tag{1}$$

$$L \in E, f \in End(M) \Rightarrow (L : f)_M \in E; \tag{2}$$

$$N, L \in E \Rightarrow N \cap L \in E; \tag{3}$$

$$N \in E, N \in Gen(M), L \leq N \leq M \wedge \forall g \in End(M)_N : (L : g)_M \in E \Rightarrow L \in E; \tag{4}$$

Definition 1. *A non-empty collection E of submodules of a left R-module M satisfying* (1), (2), (3) *is called a preradical filter of M.*

Definition 2. *A non-empty collection E of submodules of a left R-module M satisfying* (1), (2), (4) *is called a radical filter of M.*

Definition 3. *A preradical (radical) filter E of a left R-module M is said to be trivial if either $E = \{L \,|\, L \leq M\}$ or $E = \{M\}$.*

Proposition 1. *Let M be a semisimple R-module with a unique homogeneous component and let $M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$, where M_i is simple for each $i \in I$. If $Card(I) < \infty$, then every preradical filter of M is trivial.*

Proof. Suppose that $Card(I) < \infty$. Let E be a preradical filter of M such that $E \neq \{M\}$. We claim that $E = \{L\,|L \leq M\}$. Indeed, consider the submodule $L = \bigcap_{H\in E} H$ of M. Since L is a submodule of M, L is semisimple (see Proposition 9.4 [1, p. 117]. Suppose that $L \neq 0$. Hence there exists a simple submodule T of L.

Let $f : T \to M$ be an arbitrary R-homomorphism. Since M is semisimple, there exists a submodule H such that $M = H \oplus T$. Consider the map $g : M \to M$ such that $\forall t \in T \forall h \in H : g(t + h) = f(t)$. It is obvious that g is an R-homomorphism. Then $g(T) = f(T)$. $T \subseteq L$ implies that $f(T) \subseteq g(L)$. It is easy to see that $g(L) \subseteq L$. Therefore $f(T) \subseteq L$. It follows from this that $\sum_{q\in Hom_R(T,M)} q(T) = Tr_M(T) \subseteq L$(see [p. 109, 1]). However, $Tr_M(T) = M$. Hence $M = L$. Now we obtain $E = \{M\}$. However, this contradicts the original assumption that $E \neq \{M\}$. Therefore, we must conclude that $L = 0$. By Proposition 10.6 [p.125,1], since $Card(I) < \infty$, M is a finitely cogenerated module. Taking into consideration this fact and $\bigcap_{H\in E} H = 0$, we see that there exist submodules $H_1, H_2, ..., H_n$ of M belonging to E such that $H_1 \bigcap H_2 \bigcap ... \bigcap H_n = 0$. Thus, by (3), $H_1 \bigcap H_2 \bigcap ... \bigcap H_n \in E$. Now we obtain $0 \in E$. Hence $E = \{L\,|L \leq M\}$.

Lemma 1. *If E is a radical filter of an R-module M, then E satisfies the following condition*

$$N, L \in E, N \in Gen(M) \Rightarrow N \bigcap L \in E. \quad (3')$$

Proof. Let E be a radical filter of an R-module M, $N \in Gen(M)$, and $N, L \in E$.

Consider an arbitrary g belonging to $End(M)_N$. Let x be an arbitrary element of $(L : g)_M$. Then $g(x) \in N$ and $g(x) \in L$. Therefore, $x \in (L \bigcap N : g)_M$. And now we obtain $(L : g)_M \subseteq (L \bigcap N : g)_M$. By (2), since E is a radical filter of an R-module M, $(L : g)_M \in E$. Taking into account $(L : g)_M \subseteq (L \bigcap N : g)_M$, by (1), $(L \bigcap N : g)_M \in E$. However, $N \in E$, $L \bigcap N \subseteq N$, and $N \in Gen(M)$. By (4), $N \bigcap L \in E$.

Corollary 1. *Let M be an R-module. If every submodule of M is generated by M, then every radical filter of M is a preradical filter.*

Example 1. Every radical filter of any ring is a preradical filter.

Proposition 2. *If M is a semisimple R-module, then every radical filter of M is a preradical filter.*

Proof. Let K be any submodule of M. By Lemma 9.2 [1, p. 116], $M = K \oplus H$, where K is a submodule of M. Consider the epimorphism $f : M \to K$ such that $f(k + h) = k$ for every $k \in K$ and $h \in H$. Hence $K \in Gen(M)$. Now apply Corollary 1.

Proposition 3. *Let M be a semisimple R-module with a unique homogeneous component and let $M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$, where M_i is simple for each $i \in I$. If $Card(I) < \infty$, then every radical filter of M is trivial.*

Proof. Apply Proposition 2 and Proposition 1.

Let M be a semisimple left R-module with a unique homogeneous component and let $M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$, where M_i is simple for each $i \in I$. If $N = \underset{i\in J}{\oplus} N_i$, where N_i is simple for each $i \in J$ and $M \cong N$, then $Card(I) = Card(J)$. Put

$$Card_s(M) := Card(I).$$

Proposition 4. *Let M be a semisimple R-module with a unique homogeneous component. If $Card_s(M)$ is infinite, then the collection*

$$E_p(M) := \{L\,|L \le M, Card_s(M/L) < p\}$$

is a non-trivial radical [preradical] filter of M for each infinite cardinal number $p \le Card_s(M)$.

Proof. Let $Card_s(M)$ be infinite and p be an infinite cardinal number such that $p \le Card_s(M)$. (1) Let $L \in E_p(M)$ and $L \le N \le M$.

Hence $Card_s(M/L) < p$. Since M, N are semisimple modules and $N \le M, L \le N$, there exist submodules $K \le M, H \le N$ such that

$$M = N \oplus K, N = L \oplus H.$$

This implies that $M = L \oplus H \oplus K$.

It is easily seen that $Card_s(M) = Card_s(L)+Card_s(H\oplus K)$. Since $H\oplus K \cong M/L$, $Card_s(H \oplus K) = Card_s(M/L) < p$. However, $Card_s(H \oplus K) = Card_s(H) + Card_s(K)$. Therefore $Card_s(H) + Card_s(K) < p$. Since $Card_s(K) \le Card_s(H) + Card_s(K)$, $Card_s(K) < p$. It is easy to see that $K \cong M/N$. Hence $Card_s(M/N) = Card_s(K) < p$. This means that $N \in E_p(M)$.

(2) Let $L \in E_p(M)$ and $f \in End(M)$.

Let $m_1, m_2 \in M$ such that $m_1 - m_2 \in (L : f)_M$. Hence $f(m_1) - f(m_2) = f(m_1 - m_2) \in L$. Therefore, we have a map

$$g : M/(L : f)_M \to M/L,$$

where $\forall m \in M : g(m + (L : f)_M) = f(m) + L$. It is obvious that g is monomorphism. This implies that $M/L = D \oplus U$, where $D \cong M/(L : f)_M, U \le M/L$. Thus $Card_s(D) + Card_s(U) = Card_s(M/L)$. But $Card_s(D) = Card_s(M/(L : f)_M)$. Hence, $Card_s(M/(L : f)_M) + Card_s(U) = Card_s(M/L) < p$. This implies that $Card_s(M/(L : f)_M) < p$. This means that $M/(L : f)_M \in E_p(M)$.

(4) Let $N \in E_p(M), N \in Gen(M), L \le N \le M$ and $(L : g)_M \in E_p(M)$ for every $g \in End(M)_N$.

As M is semisimple and $N \le M$ we see that there exists a submodule T of M such that $M = N \oplus T$. Consider the projection

$$g_N : M \to M, g_N(n + t) = n \text{ for every } n \in N, t \in T.$$

Let $m_1, m_2 \in M$ be such that $m_1 - m_2 \in (L : g_N)_M$. This implies that $g_N(m_1) - g_N(m_2) = g_N(m_1 - m_2) \in L$. Let n be an arbitrary element of N. Hence $g_N(n) = n$. If $g_N(m_1) - g_N(m_2) \in L$, then $m_1 - m_2 \in (L : g_N)_M$. From what has already been proved, we deduce that $q : M/(L : g_N)_M \to N/L$ is a bijection. It is easy to see that

q is an R-homomorphism. Therefore, $Card_s(M/(L:g_N)_M) = Card_s(N/L)$. Since $(L:g_N)_M \in E_p(M)$, $Card_s(M/(L:g_N)_M) < p$. Thus $Card_s(N/L) < p$. Taking into account that M/L is semisimple and $N/L \leq M/L$, we have that there exists a submodule D of M/L such that $M/L = N/L \oplus D$. Therefore $D \cong (M/L)/(N/L) \cong M/N$. Since $M/L = N/L \oplus D$, $Card_s(M/L) = Card_s(N/L) + Card_s(D) = Card_s(N/L) + Card_s(M/N)$. We have $Card_s(M/N) < p$, because $N \in E_p(M)$. Consider the following cases:

(i) $Card_s(N/L) < \infty$ and $Card_s(M/N) < \infty$;

(ii) $Card_s(N/L) = \infty$ or $Card_s(M/N) = \infty$.

(i) Assume $Card_s(N/L) < \infty$ and $Card_s(M/N) < \infty$. Hence

$$Card_s(M/L) = Card_s(N/L) + Card_s(M/N) < \infty.$$

Therefore $Card_s(M/L) = Card_s(N/L) + Card_s(M/N) < p$, because p is infinite.

(ii) Assume $Card_s(N/L) = \infty$ or $Card_s(M/N) = \infty$. Taking into account $Card_s(M/L) = Card_s(N/L) + Card_s(M/N)$, by (2.1) [2, p. 417],

$$Card_s(M/L) = \max\{Card_s(N/L), Card_s(M/N)\}.$$

But $Card_s(N/L) < p$, $Card_s(M/N) < p$. Thus we have $Card_s(M/L) < p$.

In both cases we obtain $Card_s(M/L) < p$. It means that $L \in E_p(M)$. Therefore $E_p(M)$ is a non-empty set satisfying (1), (2), (4). Now apply Proposition 2.

Since M is semisimple and $Card_s(M) \neq 0$, there exists a minimal submodule T of M. Hence $M = T \oplus W$for some submodule $W \neq M$ of M. Therefore $M/W \cong T$. Hence, $Card_s(M/W) = Card_s(T) = 1$. Thus, $W \in E_p(M)$ for each infinite cardinal number $p \leq Card_s(M)$. We obtain $E_p(M) \neq \{M\}$ for each infinite cardinal number $p \leq Card_s(M)$.

Since $Card_s(M/0) = Card_s(M)$, $0 \notin E_p(M)$ for each infinite cardinal number $p \leq Card_s(M)$.

Proposition 5. *(Theorem 1* [5]*). Let M be a semisimple R-module with a unique homogeneous component. If $Card_s(M)$ is infinite, then every non-trivial radical [preradical] filter of M is of the form $E_p(M)$ for some infinite cardinal number $p \leq Card_s(M)$.*

Corollary 2. *If M is a semisimple R-module with a unique homogeneous component, then:*

(i) The set of all radical filters of M and the set of all preradical filters of M are equal.

(ii) If $Card_s(M)$ is finite, then all radical [preradical] filters are trivial.

(iii) If $Card_s(M)$ is infinite, then $\{E_p(M)\,|p = \infty, p \leq Card_s(M)\}$ is the set of all non-trivial radical [preradical] filters of M.

Proof. Apply Propositions 1, 3, 4, 5.

Proposition 6. *If M is a left R-module such that $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$, where $M_i = Tr_M(M_i)$ for each $i \in \{1, 2, ..., n\}$ and $S \leq M \Rightarrow S \in Gen(M)$ for every S, then:*

(i) Every radical [preradical] filter E of M is of the form

$$E = \{J_1 + J_2 + ... + J_n\,|J_i \in E_i(i \in \{1, 2, ..., n\})\},$$

where E_i is a radical [preradical] filter of M_i for each $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

(ii) If E_i is a radical [preradical] filter of M_i for each $i \in \{1, 2, ..., n\}$, then $E = \{J_1 + J_2 + ... + J_n \,|J_i \in E_i(i \in \{1, 2, ..., n\})\}$ is a radical [preradical] filter of M.

Proof. (i) By Theorem 2 [5]. (ii) By Theorem 1 [6].

Theorem 1. *If M is a semisimple R-module with a finite number of homogeneous components $M_1, M_2, ..., M_n$, then:*

(i) The set of all radical filters of M and the set of all preradical filters of M are equal.

(ii) $\{\{J_1 + J_2 + ... + J_n \,|J_i \in E_i(i \in \{1, 2, ..., n\})\} \,|E_i \in \{E_{p_i}(M_i) \,|p_i = \infty, p_i \leq \leq Card_s(M_i)\} \bigcup\cdot \{\{M_i\}, \{L_i \,|L_i \leq M_i\}\}(i \in \{1, 2, ..., n\})\}$ is the set of all radical filters of M.

Proof. By Propositions 1, 6 and Corollary 2.

Corollary 3. *If M is a finitely generated semisimple R-module, then the set of all radical [preradical] filters of M is a 2^n-element set, where n is a number of homogeneous components of M.*

Remark 1. Let $M = \underset{\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha$ be a semisimple R-module, where $M_\alpha \neq 0$ is a homogeneous component of M for any ordinal number $\alpha < \xi$, ξ is a limit ordinal number, and σ is a limit ordinal number such that $\sigma \leq \xi$. Consider

$$F_\sigma := \{K \leq M \,\Big|\, \underset{\chi\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha \subseteq K, \chi < \sigma\}.$$

We see that $\bigcap F_\sigma = \underset{\sigma\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha \notin F_\sigma$ and F_σ is a radical filter of M.

Indeed, let $\sigma \leq \eta < \xi$. If $\chi < \sigma$, then $\chi < \eta < \xi$ and we have $M_\eta \subseteq \underset{\chi\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha$ for every $\chi < \sigma$. Thus $M_\eta \subseteq \bigcap_{\chi<\sigma} \underset{\chi\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha = \bigcap F_\sigma$ for $\sigma \leq \eta < \xi$.

Let $\eta < \sigma$. Since σ is a limit ordinal number, $\eta+1 < \sigma$. Since $(\underset{\eta+1\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha) \bigcap M_\eta = 0$, $\bigcap F_\sigma \bigcap M_\eta = 0$ for $\eta < \sigma$.

Put $D := \bigcap F_\sigma$. Let K_α be a minimal submodule of M_α for any $\alpha < \xi$. Taking into account Proposition 9.4 [1], we obtain $D \in Gen(\{K_\alpha \,|\alpha < \xi\})$. Hence $D = \underset{\alpha<\xi}{\oplus} tr_D(K_\alpha)$. Since $W \mapsto tr_W(K_\alpha), W \in R - Mod$ is a hereditary preradical [4], $tr_D(K_\alpha) = tr_M(K_\alpha) \bigcap D = M_\alpha \bigcap D$. Thus $\bigcap F_\sigma = D = \underset{\alpha<\xi}{\oplus}(M_\alpha \bigcap D) = \underset{\alpha<\sigma}{\oplus}(M_\alpha \bigcap D) \oplus \underset{\sigma\leq\alpha<\xi}{\oplus}(M_\alpha \bigcap D) = 0 \oplus \underset{\sigma\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha = \underset{\sigma\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha$.

Let $\chi < \sigma$. Hence $M_\chi \bigcap \bigcap F_\sigma = M_\chi \bigcap \underset{\sigma\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha = 0$. Thus $\underset{\chi\leq\alpha<\xi}{\oplus} M_\alpha$ is not contained in $\bigcap F_\sigma$ for any $\chi < \sigma$. Hence $\bigcap F_\sigma \notin F_\sigma$.

Consider conditions 1, 2, 4 for radical filters.

(1) This is clear.

(2) Let $\chi < \sigma$, $K \leq M$, $\bigoplus\limits_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha \subseteq K$, and $f \in End(M)$. Since M_α is a fully invariant submodule of M for any $\alpha < \xi$,$f(\bigoplus\limits_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha) \subseteq \bigoplus\limits_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha$. Hence $\bigoplus\limits_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha \subseteq (K : f)_M$. Therefore $(K : f)_M \in F_\sigma$.

(4) Let $N \in F_\sigma, L \leq N \leq M$ and $\forall g \in End(M)_N : (L : g)_M \in F_\sigma$. Hence there exists an ordinal number $\chi < \sigma$ such that $\bigoplus\limits_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha \subseteq N$. Consider

$$g : M \to M, g(m_1 + m_2) = m_1, (m_1 \in \bigoplus_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha, m_2 \in \bigoplus_{\alpha < \chi} M_\alpha).$$

It is easily seen that $g \in End(M)_N$. Thus $(L : g)_M \in F_\sigma$. Hence there exists $\beta < \sigma$ such that $\bigoplus\limits_{\beta \leq \alpha < \xi} M_\alpha \subseteq (L : g)_M$. Put $\gamma := \max(\chi, \beta)$. Hence

$$\bigoplus_{\gamma \leq \alpha < \xi} M_\alpha = g(\bigoplus_{\gamma \leq \alpha < \xi} M_\alpha) \subseteq L.$$

Therefore

$$L \in F_\sigma.$$

Let $f_\theta(\theta < \xi)$ be an element of $End(M)$ such that $f_\theta(m) = m$ for every $m \in M_\theta$ and $f_\theta(m) = 0$ for every $m \in M_\alpha$, where $\alpha < \xi$ and $\alpha \neq \theta$.

Put

$$F_{\sigma,\theta} = \{f_\theta(L) \,|L \in F_\sigma\}.$$

Let $\theta < \sigma$ and $S \leq M_\theta$. Then $\bigoplus\limits_{\theta+1 \leq \alpha < \xi} M_\alpha \subseteq \bigoplus\limits_{\theta+1 \leq \alpha < \xi} M_\alpha + S$, because $\theta + 1 < \sigma$. Hence $\bigoplus\limits_{\theta+1 \leq \alpha < \xi} M_\alpha + S \in F_\sigma$. Thus $S = f_\theta(\bigoplus\limits_{\theta+1 \leq \alpha < \xi} M_\alpha + S) \in F_{\sigma,\theta}$. We obtain $F_{\sigma,\theta} = \{S \,|S \leq M_\theta\}$ for any $\theta < \sigma$.

Let $\sigma \leq \theta < \xi$ and let H be an arbitrary element of $F_{\sigma,\theta}$. Then there exists $K \in F_\sigma$ such that $f_\theta(K) = H$. Hence $\bigoplus\limits_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha \subseteq K$ for some $\chi < \sigma$. Since $\sigma \leq \theta < \xi$ and $\chi < \sigma$, $\chi < \theta < \xi$. Therefore $M_\theta \subseteq \bigoplus\limits_{\chi \leq \alpha < \xi} M_\alpha \subseteq K$. Hence, $M_\theta = f_\theta(M_\theta) \subseteq f_\theta(K) \subseteq M_\theta$. We obtain $H = M_\theta$.

Therefore $\{\sum_{\alpha<\xi} H_\alpha \,|H_\alpha \in F_{\sigma,\alpha}\} = \{T \leq M \,|\bigcap F_\sigma \subseteq T\} \neq F_\sigma$ (see Proposition 6 (i)).

Acknowledgement. I would like to thank Professor M. Ya. Komarnytskyi for helpful discussions.

References

1. *Anderson F.W., Fuller K.R.* Rings and categories of modules // Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1973. 340p.
2. *Sierpinski W.* Cardinal and ordinal numbers // Warszawa: PWN, 2nd edition, 1965. 492 p.
3. *Hausdorff F.* Set theory // AMS Bookstore, 2005. 352 p.
4. *Kashu A.I.* Radicals and torsions in modules // Chisinau: Stiintca, 1983. 156 p.
5. *Maturin Yu.* Form of filters of semisimple modules and direct sums // Algebra and Discrete Mathematics. — Vol.16, №2. — 2013. — P.226–232.

6. *Maturin Yu.* Filters and their triviality // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech.-Math. — Issue 78. — 2013. — P.87–91.

Стаття: надійшла до редколегії 15.06.2015
доопрацьована 22.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

РАДИКАЛЬНІ ФІЛЬТРИ НАПІВПРОСТИХ МОДУЛІВ ЗІ СКІНЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ ОДНОРІДНИХ КОМПОНЕНТ

Юрій МАТУРІН

Інститут фізики, математики, економіки та інноваційних технологій
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка,
вул. Стрийська,3, Дрогобич
Львівська обл., Україна, 82100
e-mail: yuriy_maturin@hotmail.com

Описано радикальні фільтри напівпростих модулів зі скінченною кількістю однорідних компонент.

Ключові слова: напівпросте кільце, модуль, радикальний фільтр.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 107–111
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 107–111

УДК 511.3

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ІНВАРІАНТІВ, ПЕРІОДІВ ТА ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

Ольга МИЛЬО, Ярослав ХОЛЯВКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Нехай $\wp_i(z)$, $(i = 1, 2)$ — алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса. Отримано оцінку сумісного наближення інваріантів цих функцій, їхніх періодів, числа α та значень кожної з цих функцій у періодах іншої та в точці α.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Вейєрштрасса.

1. Вступ. Розглянемо алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса $\wp_1(z)$, $\wp_2(z)$ з інваріантами $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$, відповідно. Позначимо через (ω, ω_1) пару основних періодів функції $\wp_1(z)$, а через (ω, ω_2) – функції $\wp_2(z)$ [1]. Нехай α довільне число таке, що $m\omega + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \alpha$ не є полюсами $\wp_1(z)$ та $\wp_2(z)$ при усіх $m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Надалі будемо дотримуватись таких позначень [2]: через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь та довжину многочлена P з цілими коефіцієнтами; $\xi_1, \ldots \xi_{12}$ — наближаючі алгебричні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ — їхні степені та довжини, відповідно.

Теорема 1. *Для довільних алгебричних чисел* $\xi_1, \ldots \xi_{12}$ *справджується*

$$|\alpha-\xi_1|+|\omega-\xi_2|+|\omega_1-\xi_3|+|g_{1,2}-\xi_4|+|g_{1,3}-\xi_5|+|g_{2,2}-\xi_6|+|g_{2,3}-\xi_7|+|\wp_2(\omega_1)-\xi_8|$$
$$+|\wp_1(\alpha)-\xi_9|+|\wp_2(\alpha)-\xi_{10}|+|\omega_2-\xi_{11}|+|\wp_1(\omega_2)-\xi_{12}| > \exp\left(-\Lambda T^3\right), \qquad (1)$$

де $n_0 = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots \xi_{12})$, $T^2 = n_0\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \cdots + \frac{\ln L_{12}}{d_{12}} + \ln n_0\right)$, $\Lambda > 0$ *— константа, залежна лише від чисел* $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$ *та* α.

Подібні оцінки та формулювання задач можна знайти, наприклад, в [2], [3].

2. Доведення Теореми 1. Дотримуватимемось стандартних позначень в теорії еліптичних функцій [1]. Доведемо таку оцінку наближення.

Теорема 2. *Для довільних алгебричних чисел* $\xi_1, \ldots \xi_{10}$ *справджується така нерівність:* $|\alpha - \xi_1| + |\omega - \xi_2| + |\omega_1 - \xi_3| + |g_{1,2} - \xi_4| + |g_{1,3} - \xi_5| + |g_{2,2} - \xi_6| + |g_{2,3} - \xi_7| + |\wp_2(\omega_1) - \xi_8| + |\wp_1(\alpha) - \xi_9| + |\wp_2(\alpha) - \xi_{10}| > \exp\left(-\lambda^8 N^3\right)$, *де*

$N^2 = n\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \dots + \frac{\ln L_{10}}{d_{10}} + \ln n\right)$, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots \xi_{10})$, λ — *натуральне число, залежне лише від* $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$ *та* α.

Нехай $c_1, c_2, \dots$ — додатні константи, які не залежать від n, d_i, L_i та λ.

Лема 1. *Якщо* λ — *достатньо велике, то нерівність*

$$|\alpha - \xi_1| + |\omega - \xi_2| + |\omega_1 - \xi_3| + |g_{1,2} - \xi_4| + |g_{1,3} - \xi_5| + |g_{2,2} - \xi_6| + |g_{2,3} - \xi_7| +$$
$$|\wp_2(\omega_1) - \xi_8| + |\wp_1(\alpha) - \xi_9| + |\wp_2(\alpha) - \xi_{10}| < \exp\left(-\lambda^8 N^3\right) \qquad (2)$$

неможлива.

Доводити Лему 1 будемо від супротивного. Приймемо

$$M = [\lambda N], \quad K = L = S = [\lambda^2 N], \qquad (3)$$

$m, m_1, s \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant s \leqslant S$, межі зміни m та m_1 будуть зазначені в кожному випадку окремо. Позначимо через $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1}, \dots, \xi_{10}^{u_{10}}$, $u_i = 0, 1, \dots, d_i - 1$. Визначимо

$$f(z) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_1, l_2 = 1}^{L} C_{k,l_1,l_2} z^k \wp_1^{l_1}(z) \wp_2^{l_2}(z), \quad C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l_1,l_2,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{k,l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Як і в [4], позначимо $\phi(z) = \wp_2(z + \frac{\omega}{2})$. З формули додавання для $\wp(z)$ отримаємо

$$\wp_2(z+w) = \wp_2(z + \frac{\omega}{2} + w + \frac{\omega}{2}) = \left(\frac{\phi'(z) - \phi'(w)}{2(\phi(z) - \phi(w))}\right)^2 - \phi(z) - \phi(w) = \frac{\Lambda_1(z,w)}{\Lambda_2(z,w)}. \quad (5)$$

Існують многочлени [4] $G_{s,p,l}$ від $\wp_2(z), \wp_2'(z), \phi(z), \phi'(z)$ такі, що

$$G_{s,p,l} = \frac{d^s}{d\,w^s} (\Lambda_1^p(z,w) \Lambda_2^l(z,w))|_{w=0}, \qquad (6)$$

$\ln L(G_{s,p,l}) \leqslant s \ln(s(p+l) + c_1(s+p+l))$, $\deg G_{s,p,l} \leqslant 4(p+l)$.

Враховуючи, що $(\wp_i'(z))^2 = 4\wp_i^3(z) - g_{i,2}\wp_i(z) - g_{i,3}$ та $\wp_i''(z) = 6\wp_i^2(z) - g_{i,2}/2$, з (5), (6) подібно як у праці [4], отримаємо

$$f^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_2^{-L}(z,w)(f(z+w)\Lambda_2^L(z,w)))|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} \left(\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}} \Lambda_2^{-L}(z,w)\right)|_{w=0} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2} \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \left(\frac{d^{t-i}}{d\,w^{t-i}} (z+w)^k \wp_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \qquad (7)$$

Позначимо

$$f_{s,t}(z) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l_1,l_2=1}^{L} C_{k,l_1,l_2} \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \left(\frac{d^{t-i}}{dw^{t-i}} (z+w)^k \wp_1^{l_1}(z+w)\right)|_{w=0} G_{i,l_2,L-l_2}(z). \quad (8)$$

Нехай $\xi_{13}^2 = 4\xi_8^3 - \xi_6\xi_8 - \xi_7$, $\xi_{14}^2 = 4\xi_9^3 - \xi_4\xi_9 - \xi_5$, $\xi_{15}^2 = 4\xi_{10}^3 - \xi_6\xi_{10} - \xi_7$; $\overline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{10}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15})$; $f_{s,m,m_1}(\overline{\xi})$ та $f_{s,t,m,m_1}(\overline{\xi})$ — вирази, отримані з виразів $f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ та $f_{s,t}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ заміною α, ω, ω_1, $g_{1,2}$, $g_{1,3}$, $g_{2,2}$, $g_{2,3}$, $\wp_2(\omega_1)$, $\wp_1(\alpha)$, $\wp_2(\alpha)$, $\wp_2'(\omega_1)\,\wp_1'(\alpha)$, $\wp_2'(\alpha)$, на $\xi_1, \dots, \xi_{10}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15}$, відповідно.

Розглянемо $f_{s,t,m,m_1}(\overline{\xi})$, $1 \leqslant m, m_1 \leqslant M$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$, як M^2S лінійні форми від nKL^2 змінних $C_{k,l_1,l_2,\tau}$. Згідно з [5] лема 4.1 та (3), (8), виберемо числа $C_{k,l_1,l_2,\tau}$, які не всі дорівнюють нулю так, що для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant M$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$

$$f_{s,t,m,m_1}(\overline{\xi}) = 0, \quad 0 < \max |C_{k,l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^3\, n^{-1}N^3). \tag{9}$$

З (2), (3), (9) при $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$, $0 \leqslant s \leqslant S$ отримаємо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha) - f_{s,m,m_1}(\overline{\xi})| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 N^3). \tag{10}$$

З (7)–(10), якщо $1 \leqslant m, m_1 \leqslant M$, $0 \leqslant s \leqslant S$, то одержимо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^8 N^3). \tag{11}$$

Доведемо, що оцінка (11) також виконується і для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Лема 2. *Нехай нерівність (11) справджується для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^d M$, $2^d < \lambda$ при $0 \leqslant s \leqslant S$. Тоді вона справджується і для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1}M$ за тих самих s.*

Нехай $G(z) = f(z)\sigma_1^{2L}(z)\sigma_2^{2L}(z)$, де $\sigma_i(z)$ – σ-функція, що відповідає $\wp_i(z)$ [1]. Виберемо найменше ціле r таке, що $r > 4(2^d M + 1)(|\omega| + |\omega_1| + |\omega_2| + |\alpha| + 1)$. Позначимо $R = 4r$. Тоді з (3), (4) і (9) отримаємо $|G(z)|_{|z|\leqslant R} < \exp(-c_3 2^d \lambda^4 N^3)$, тому з леми 4.5 в [5] при $0 \leqslant s \leqslant S$ отримаємо $|G^{(s)}(z)|_{|z|\leqslant r} < \exp(-2^d\lambda^5 N^3)$. Для $\varepsilon = R^{-1}$ в ε-околах $V(\varepsilon, m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)$ точок $m\omega + m_1\omega_1 + \alpha$ функції $\sigma_1(z)$ та $\sigma_2(z)$ не мають нулів, тому при $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$ з леми 7.1 [3] та (3) отримаємо $|\sigma_i(z)|_{z\in V(\varepsilon, m\omega+m_1\omega_1+\alpha)} > \exp(-c_4\lambda^4 N^2)$, звідки при $1 \leqslant m, m_1 \leqslant \lambda M$ випливає $|f(z)|_{z\in V(\varepsilon, m\omega+m_1\omega_1+\alpha)} < \exp(-2^{2d-1}\lambda^5 N^3)$. Отже, для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1}M$, $0 \leqslant s \leqslant S$ отримаємо

$$|f^{(s)}(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{3}N^3). \tag{12}$$

Враховуючи (10), для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1}M$ та $0 \leqslant s \leqslant S$ з (12) випливає

$$|f_{s,m,m_1}(\overline{\xi})| < \exp(-\frac{2^d\lambda^5}{4}N^3). \tag{13}$$

Розглядаючи $f_{s,t,m,m_1}(\overline{\xi})$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$, $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1}M$ як значення відповідного многочлена в алгебричних точках, з леми 4.1 в [5] та (3) отримаємо для $f_{s,t,m,m_1}(\overline{\xi}) \neq 0$ оцінку

$$|f_{s,t,m,m_1}(\overline{\xi})| > \exp(-\lambda^{3,5}N^3). \tag{14}$$

З (8), (14) одержимо

$$|f_{s,m,m_1}(\overline{\xi})| > \exp(-\lambda^4 N^3). \tag{15}$$

Оцінки (13) і (15) суперечливі, тому для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant 2^{d+1}M$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$ отримаємо $f_{s,m,m_1}(\overline{\xi}) = 0$, що разом з (10) доводить Лему 2.

Оцінимо $|C_{k,l_1,l_2,\tau}|$ зверху. Приймемо

$$\alpha_\kappa = \left(1 - \frac{\kappa}{\lambda L}\right)\frac{\omega + \omega_1 + \alpha}{4}, \kappa = 1, ..., L. \tag{16}$$

З леми 4 [6] отримаємо твердження.

Лема 3. *Нехай* $\Delta = \det(\wp_1^{l_1}(\alpha_\kappa))_{l_1,\ \kappa=1,\dots,L}$, $\Delta(\kappa) = \det(\wp_2^{l_2}(m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)_{l_2,\ m_1=1,\dots,L}$, $\Delta(m_1,\ \kappa) = \det((m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)^k)_{m,\ k=1,\dots,L}$, $\Delta_{l_1,\ \kappa}$ *— алгебричне доповнення елемента* $\wp_1^{l_1}(\alpha_\kappa)$ *визначника* Δ, $\Delta_{l_2,\ m_1}(\kappa)$ *— елемента* $\wp_2^{l_2}(m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)$ *визначника* $\Delta(\kappa)$, $\Delta_{m,\ k}(m_1,\ \kappa)$ *— елемента* $(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)^k$ *визначника* $\Delta(m_1,\ \kappa)$*. Якщо* $\Delta \neq 0$, $\Delta(\kappa) \neq 0$ *та* $\Delta(m_1,\ \kappa) \neq 0$, *то*

$$C_{k,l_1,l_2} = \sum_{\kappa,\ m,\ m_1=1}^{L} \frac{\Delta_{l_1,\ \kappa}}{\Delta} \frac{\Delta_{l_2,\ m_1}(\kappa)}{\Delta(\kappa)} \frac{\Delta_{m,\ k}(m_1,\ \kappa)}{\Delta(m_1,\ \kappa)} f(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa). \tag{17}$$

З (16) випливає, що Δ, $\Delta(\kappa)$ і $\Delta(m_1,\ \kappa)$, які є визначниками Вандермонда, відмінні від нуля. З (3), (16) та леми 1.1 [3] для довільної $\wp(z)$ випливає $|\wp(\alpha_\kappa) - \wp(\alpha_j)| > \exp(-\lambda \ln N)$, $\kappa \neq j$. З цієї оцінки та (3) отримаємо

$$\left|\frac{\Delta_{l_1,\ \kappa}}{\Delta}\right|, \left|\frac{\Delta_{l_2,\ m_1}(\kappa)}{\Delta(\kappa)}\right|, \left|\frac{\Delta_{m,\ k}(m_1,\ \kappa)}{\Delta(m_1,\ \kappa)}\right| < \exp(c_5\lambda^3 N \ln N). \tag{18}$$

З леми 7.1 [3] для $1 \leqslant m, m_1 \leqslant L$, в точках $z = m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa$ отримаємо $\min|\sigma^{2L}(z)| > \exp(-c_6\lambda^6 N^3)$, тому за умови $(1/2)\lambda \leqslant 2^d \leqslant \lambda$ одержимо оцінку $|f(m\omega + m_1\omega_1 + \alpha_\kappa)| < \exp(-(1/4)\lambda^7 N^3)$. Звідси і з (17), (18) та Леми 3 випливає

$$|C_{k,l_1,l_2}| < \exp(-\lambda^6 N^3). \tag{19}$$

Розглядаючи C_{k,l_1,l_2} як значення відповідного многочлена (4) $A_{k,\ p,\ l}$ з цілими коефіцієнтами $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ в точці $\xi_1, \dots, \xi_{10}$ і використовуючи (3) та лему 4.1 [5], для $C_{k,l_1,l_2} \neq 0$ отримаємо $|C_{k,l_1,l_2}| > \exp(-\lambda^4 N^3)$, що суперечить оцінці (19). Тому всі C_{k,l_1,l_2} дорівнюють нулеві. Але тоді з (4) і всі $C_{k,l_1,l_2,\tau}$ дорівнюють нулеві, що суперечить (9). Останнє протиріччя засвідчує, що (2) не справджується, що доводить Лему 1 та Теорему 2. Якщо в (2) замінити ω_1 на ω_2 і $\wp_2(\omega_1)$ на $\wp_1(\omega_2)$ та взяти точки $m\omega + m_2\omega_2 + \alpha$, то такими ж міркуваннями отримаємо доведення твердження, яке подібне до Теореми 2 для так зміненої множини чисел. Отже, (1) виконується за досить великого Λ. Теорема 1 доведена.

Література

1. *Уиттекер Э.Е.,* Курс современного анализа/ Э.Е. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон// Т.2, М.: Физматгиз, 1963.
2. *Fel'dman N.I.,* Transcendental Numbers/ N.I. Fel'dman, Yu.V. Nesterenko// Springer-Verlag. Berlin, 1998.
3. *Masser D.* Elliptic functions and transcendence. Springer-Verlag. Berlin, 1975.
4. *Chudnovsky G.V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem // Inventiones Math. — Vol. 61. — 1980. — P.267–290.
5. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp.// Bull. Soc. Math. France. — 1980, 1, P.47–79.
6. *Фельдман Н.И.* Алгебраическая независимость некоторых чисел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1980, №4. — С.46–50.

Стаття: надійшла до редколегії 22.09.2014
доопрацьована 15.03.2015
прийнята до друку 11.11.2015

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF INVARIANTS, PERIOD AND VALUES OF TWO ELLIPTIC WEIERSTRASS FUNCTIONS

Yaroslav KHOLYAVKA, Olga MYLYO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetka Str. 1, Lviv, 79000
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua, olga.mylyo@gmail.com

Let $\wp_i(z)$, $i = 1, 2$, be algebraically independent Weierstrass elliptic functions. We estimate a simultaneous approximation of invariants of these functions, their periods, number α and values of each of these functions at the periods of the other one and at the point α.

Key words: simultaneous approximation, Weierstrass elliptic function.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 112–116
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 112–116

УДК 517.53

ЗВ'ЯЗОК МІЖ АСИМПТОТИКОЮ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ ТА КУТОВОЮ ЩІЛЬНІСТЮ НУЛІВ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

Мар'яна МОСТОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університецька, 1, Львів, 79000
e-mail: memyr23@gmail.com

Для довільної повільно зростаючої функції υ побудовано приклад цілої функції f нульового порядку, логарифмічна похідна якої зовні деякої C_0^2-множини еквівалентна лічильній функції нулів f і нулі f не мають кутової υ-щільності.

Ключові слова: ціла функція, логарифмічна похідна, нульовий порядок, кутова щільність.

1. Вступ і формулювання результатів. Нехай f — ціла функція скінченного додатного порядку ρ і цілком регулярного зростання [1]. Добре відомо, що цілком регулярне зростання цілої функції додатного нецілого порядку еквівалентне існуванню кутової щільності її нулів стосовно функції порівняння $r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ — уточнений порядок функції f.

Позначимо через $F(z) = zf'(z)/f(z)$ — логарифмічну похідну функції f. Асимптотичні формули $F(z)$ для цілої функції ц. р. зр. f зовні деяких виняткових множин знайдено в [2], а в [3] доведено, що з асимптотики $F(z)$ випливає цілком регулярне зростання функції f. Ми розглянемо аналогічні задачі для цілих функцій нульового порядку.

Через L позначатимемо клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій υ таких, що $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$ — лічильна функція нулів f, а через $H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, — клас цілих функцій f нульового порядку, для яких $0 < \Delta = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} n(r)/\upsilon(r) < +\infty$. Нехай $n(r, \alpha, \beta)$ — кількість нулів цілої функції в секторі $\{z\colon |z| \leqslant r, \alpha \leqslant arg\ z < \beta\}, 0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$.

Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають кутову υ-щільність, якщо існує границя

$$\Delta(\alpha, \beta) \colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)},$$

для всіх α і β, що не належать деякій не більше, ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$.

Нагадаємо, що множина $E \subset \mathbb{C}$ належить до класу C_0^2, якщо E — вимірна і $mes_2\,(E \cap C(r)) = o(r^2)$, $r \to +\infty$, де mes_2 — плоска міра Лебега, а $C(r) = \{z\colon |z| \leqslant r\}$.

Асимптотику логарифмічної похідної для $f \in H_0(\upsilon)$ знайдено в [4].

Теорема А. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і нулі f мають кутову υ-щільність. Тоді існує множина $E \in C_0^2$ така, що*

$$F(re^{i\varphi}) = \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)) = n(r) + o(\upsilon(r)), \quad z \to \infty, \quad z \notin E.$$

З теореми 1 випливає, що обернене твердження до теореми А неправильне.

Теорема 1. *Для довільної функції $\upsilon \in L$ існують функція $f \in H_0(\upsilon)$ і множина $E \in C_0^2$ такі, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(1), \quad z = re^{i\varphi} \to \infty, \quad z \notin E \tag{1}$$

і нулі f не мають кутової υ-щільності.

2. Доведення. Для доведення теореми 1 будемо використовувати такий наслідок з теореми Тепліца [[5], с. 326], який сформулюємо у вигляді леми.

Лема 1. *Нехай (x_n) і (y_n) нескінченно малі послідовності і для довільного $m \in \mathbb{N}$*

$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_m| \leqslant K \ (K = const).$$

Тоді

$$z_n = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1 \to 0, n \to +\infty.$$

Доведення теореми. Нехай υ — довільна функція з класу L. Виберемо послідовність дійсних чисел r_k таку, що $r_k \nearrow +\infty$ при $k \to +\infty$ і

$$\upsilon(r_1) = 1, r_{k+1} > 2r_k, \upsilon(r_k) \in \mathbb{N}.$$

Приймемо $m_1 = \upsilon(r_1) = 1, m_k = \upsilon(r_k) - \upsilon(r_{k-1}), k \geqslant 2,$

$$\upsilon(r_k) > (k+1)\upsilon(r_{k-1}). \tag{2}$$

Нехай

$$f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\frac{z}{r_k}\right)^{m_k}\right).$$

Оскільки $m_k = \upsilon(r_k) - \upsilon(r_{k-1}) > k\upsilon(r_{k-1}) > k$ і для довільного $R > 0$ $(R/r_k)^{m_k} < (1/2)^k$, $k \geqslant k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{r_k}\right)^{m_k}$ — абсолютно і рівномірно збіжний в крузі $\{z\colon |z| \leqslant R\}$, а отже, $f(z)$ — ціла функція.

Нехай $r_n \leqslant r < r_{n+1}$. Тоді

$$n(r) = \sum_{k=1}^{n} m_k = \upsilon(r_1) + \sum_{k=2}^{n}(\upsilon(r_k) - \upsilon(r_{k-1})) = \upsilon(r_n) \leqslant \upsilon(r)$$

і для всіх α і β, $0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$, отримаємо

$$n(r,\alpha,\beta) = (1+o(1))\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\sum_{r_k\leqslant r} m_k = (1+o(1))\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\upsilon(r_n),\ r\to+\infty.$$

Звідси, завдяки (2), отримуємо, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(r_n,\alpha,\beta)}{\upsilon(r_n)} = \frac{\beta-\alpha}{2\pi},$$

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(r_{n+1}-0,\alpha,\beta)}{\upsilon(r_{n+1})} = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\lim_{n\to+\infty}\frac{\upsilon(r_n)}{\upsilon(r_{n+1})} = 0.$$

Отже, нулі f не мають кутової υ-щільності.

Легко бачити, що

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-m_k)(z/r_k)^{m_k}}{1-(z/r_k)^{m_k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{1-(r_k/z)^{m_k}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k}-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k(r_k/z)^{m_k}}{1-(r_k/z)^{m_k}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k}-1}.$$

Звідси для $r_n \leqslant |z| = r < r_{n+1}$

$$|F(z)-n(r)| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k(r_k/z)^{m_k}}{1-(r_k/z)^{m_k}}\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k}-1}\right| = |\Sigma_1| + |\Sigma_2|. \tag{3}$$

Далі для $r_n\left(1+1/\sqrt{m_n}\right) \leqslant |z| \leqslant r_{n+1}\left(1-1/\sqrt{m_{n+1}}\right)$ отримаємо

$$\left(\frac{r_n}{|z|}\right)^{m_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)^{-m_n} \leqslant 2^{-\sqrt{m_n}},$$

$$\left(\frac{|z|}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}} \leqslant \left(1-\frac{1}{\sqrt{m_{n+1}}}\right)^{m_{n+1}} \leqslant 2^{-\sqrt{m_{n+1}}}.$$

Тоді

$$\left|\frac{1}{1-(r^n/|z|)^{m_n}}\right| < \frac{1}{1-2^{-\sqrt{m_n}}} < 2,$$

$$\left|\frac{1}{(|z|/r_{n+1})^{m_{n+1}}-1}\right| \leqslant \frac{1}{1-1/2^{-\sqrt{m_{n+1}}}} < 2.$$

Для $k \leqslant n-1$ правильні такі оцінки:

$$\left(\frac{r_k}{|z|}\right)^{m_k} \leqslant \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{m_k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{m_k} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\frac{r_k}{r_n} = \frac{r_k}{r_{k+1}}\cdot\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{r_{n-1}}{r_n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Отже,

$$|\Sigma_1| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{m_k(r_k/r)^{m_k}}{|1-(r_k/z)^{m_k}|} + m_n\left(\frac{r_n}{r}\right)^{m_n}\left|1-\left(\frac{r_n}{z}\right)^{m_n}\right|^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{m_k(r_k/r_n)^{m_k}}{1-(r_k/r_n)^{m_k}} +$$

$$+2m_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)^{-m_n} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n-1} m_k(r_k/r_n)^{m_k}+2\frac{m_n}{e^{\sqrt{m_n}}} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n-1} m_k 2^{(k-n)m_k}+o(1),\ n\to+\infty.$$

Прийнявши $x_l = m_k/2^{m_k},\ y_l = 1/2^{km_k}$, з леми 1 одержуємо

$$|\Sigma_1| = o(1),\ n\to+\infty. \tag{4}$$

Далі, аналогічно до оцінки $|\Sigma_1|$, отримуємо

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{m_k(r/r_k)^{m_k}}{|(z/r_k)^{m_k}-1|}+m_{n+1}\left(\frac{r}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}}\left|\left(\frac{z}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}}-1\right|^{-1} <$$

$$< \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{m_k(r_{n+1}/r_k)^{m_k}}{1-(r_{n+1}/r_k)^{m_k}}+2m_{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{m_{n+1}}}\right)^{m_{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{m_k}{2^{(k-n)m_k}}+2\frac{m_{n+1}}{e^{\sqrt{m_{n+1}}}} = o(1),\ n\to+\infty. \tag{5}$$

Отже, з (3)-(5) для $z\notin E=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(r_k-r_k/\sqrt{m_k},\ r_k+r_k/\sqrt{m_k}\right)$ виконується (1). Залишається довести, що $E\in C_0^2$. Справді, для $r_n\leqslant r\leqslant r_{n+1}/2$ матимемо

$$mes_2\ (E\cap C(r)) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(r_k^2(1+\frac{1}{\sqrt{m_k}})^2-r_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(2\frac{r_k^2}{\sqrt{m_k}}+\frac{r_k^2}{m_k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 3r_n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(r_k/r_n)^2}{\sqrt{m_k}} \leqslant 3r^2\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{(k-n)2}}{\sqrt{m_k}}.$$

Прийнявши $x_l = 1/\sqrt{m_l},\ y_l = 1/4^l$, за лемою 1 отримуємо

$$mes_2\ (E\cap C(r)) = o(r^2),\ r\to+\infty.$$

Аналогічно, для $r_{n+1}/2\leqslant r\leqslant r_{n+1}$

$$mes_2\ (E\cap C(r)) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\left(r_k^2(1+\frac{1}{\sqrt{m_k}})^2-r_k^2\right) \leqslant 3r_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(r_k/r_{n+1})^2}{\sqrt{m_k}} \leqslant$$

$$\leqslant 12r^2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^{(k-n-1)2}}{\sqrt{m_k}} = o(r^2),\ r\to+\infty.$$

Отже, з останніх двох співвідношень

$$mes_2\ (E\cap C(r)) = o(r^2),\ r\to+\infty,$$

що доводить теорему 1.

Література

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гос.-тех. изд-во, 1956. — 632с.
2. *Гольдберг А.А.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста / А.А. Гольдберг, Н.Е. Коренков // Сиб. мат.ж. — 1980. — Т.21., №3. — С.63–79.

3. *Гольдберг А.А.* Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных/ А.А. Гольдберг, Н.Н. Строчик // Сиб. мат. ж. — 1985. — Т.26., №6. — С.29–38.
4. *Заболоцький М.В.* Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку/ М.В. Заболоцький, М.Р. Мостова // Укр. матем. журн. — 2014. — Т.66., №4. — С.473–481.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 810с.

Стаття: надійшла до редколегії 23.02.2015.
доопрацьована 12.05.2015.
прийнята до друку 11.11.2015.

RELATIONSHIP BETWEEN THE ASYMPTOTIC OF LOGARITHMIC DERIVATIVE AND ANGULAR DENSITY OF ZEROS FOR AN ENTIRE FUNCTION OF SLOW GROWTH

Mariana MOSTOVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: memyr23@gmail.com

For any slowly increasing function υ we have constructed an example of a function f of zero order, the logarithmic derivative of which outside of some C_0^2-set is equivalent to the zero counting function of f and zeros of f do not have angular υ-density.

Key words: entire function, logarithmic derivative, zero order, angular density.

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 117–128
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 117–128

УДК 517.53

ПРО АДАМАРОВI КОМПОЗИЦIЇ ПОХIДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА АНАЛIТИЧНИХ ФУНКЦIЙ

Оксана МУЛЯВА, Степан ФЕДИНЯК

Львiвський нацiональний унiверситет iменi Iвана Франка,
вул. Унiверситетська, 1, Львiв, 79000,
e-mail: info@nuft.edu.ua, fedynyak@yahoo.com

Для цiлих i аналiтичних в одиничному крузi функцiй у термiнах узагальнених порядкiв дослiджено зростання адамарових композицiй їхнiх похiдних Гельфонда-Леонтьєва. Вивчено поводження максимальних членiв таких композицiй.

Ключовi слова: аналiтична функцiя, похiдна Гельфонда-Леонтьєва, композицiя Адамара, максимальний член.

Для степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

з радiусом збiжностi $R[f] = R \in [0, \infty]$ i степеневого ряду $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$ з $R[l] = R \in [0, \infty]$ i $l_k > 0$ для всiх $k \geq 0$ степеневий ряд

$$D_l^{(n)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k \tag{2}$$

називається [1] похiдною Гельфонда-Леонтьєва n-го порядку. Якщо $l(z) = e^z$, то $D_l^{(n)} f(z) = f^{(n)}(z)$ є звичайною похiдною n-го порядку.

Степеневий ряд

$$(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k \tag{3}$$

називається адамаровою композицiєю ряду (1) i ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k = g(z)$. Вiдомо [2], що $R[f * g] \geq R[f]R[g]$ i обернена нерiвнiсть може не виконуватись. Властивостi адамарових композицiй використовують для дослiдження аналiтичних продовжень функцiй (див., наприклад, [3], [4], с.31–57).

Зрозуміло, що не завжди радіус збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва ряду (1) збігається з радіусом збіжності цього ряду. Але правильна така лема [5].

Лема 1. *Для того, щоб для кожного ряду (1) рівності $R[f] = +\infty$ і $R[D_l^{(n)} f] = +\infty$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб*

$$0 < q = \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = Q < +\infty, \tag{4}$$

а для еквівалентності рівностей $R[f] = 1$ і $R[D_l^{(n)} f] = 1$ необхідною і достатньою є умова

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = 1. \tag{5}$$

Щодо одночасної аналітичності похідної Гельфонда-Леонтьєва адамарової композиції

$$D_l^{(n)}(f * g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} g_{k+n} z^k \tag{6}$$

функцій f і g та адамарової композиції

$$(D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+n}}\right)^2 f_{k+n} g_{k+n} z^k \tag{7}$$

їхні похідні Гельфонда-Леонтьєва в [5] доведено як лему.

Лема 2. *За умови (4) рівносильними є рівності $R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = +\infty$ і $R[D_l^{(n)}(f * g)] = +\infty$, а за умови (5) такими є рівності $R[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = 1$ і $R[D_l^{(n)}(f * g)] = 1$.*

Якщо $R[f] > 0$, то для $0 \leq r < R[f]$ нехай $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu(r, f) = \max\{|f_k| r^k : k \geq 0\}$ — максимальний член ряду (1), а $\nu(r, f) = \max\{n : |f_k| r^k = \mu(r, f)\}$ — його центральний індекс.

Найвживанішими характеристиками зростання цілої функції f є її порядок $\varrho[f]$ і нижній порядок $\lambda[f]$, означені формулами

$$\lambda[f] = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln r}, \quad \varrho[f] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln r}.$$

Для функцій, аналітичних в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, нижній порядок $\lambda^*[f]$ і порядок $\varrho^*[f]$ вводять за формулами

$$\lambda^*[f] = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \ln M(r, f)}{-\ln(1 - r)}, \quad \varrho^*[f] = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ \ln M(r, f)}{-\ln(1 - r)}.$$

Основними в [5] є такі теореми.

Теорема A. Нехай f і g — цілі функції. Якщо виконується умова (4) з $q > 1$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r} \ln\ln \frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f * g))} = \lambda[f * g],$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=\varrho[f*g],$$

якщо

$$0<\varliminf_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}\le\varlimsup_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}<+\infty, \tag{8}$$

то

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=n\lambda[f*g],$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}=n\varrho[f*g].$$

Умова (4) з $q>1$ в теоремі А є істотною [5].

Теорема B. Нехай f і g — аналітичні в $\mathbb{D}$ функції і $R[f*g]=1$. Тоді за умови (9)

$$n\lambda^*[f*g]\le\varliminf_{r\uparrow1}\frac{1}{-\ln(1-r)}\ln^+\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le n(\lambda^*[f*g]+1)$$

і

$$n\varrho^*[f*g]\le\varlimsup_{r\uparrow1}\frac{1}{-\ln(1-r)}\ln^+\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le n(\varrho^*[f*g]+1).$$

У [5] в термінах порядку та нижнього порядку також досліджено поводження відношень $\dfrac{\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}$ і $\dfrac{\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}$ з $n>m$.

Тут ми перенесемо результати з [5] на випадок узагальнених порядків, які ввів М.М. Шеремета.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty,+\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x)=\alpha(x_0)$ для $-\infty<x\le x_0$ і $\alpha(x)\uparrow+\infty$ при $x_0\le x\to+\infty$. Будемо говорити, що $\alpha\in L^0$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha((1+o(1))x)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$. Зрештою, $\alpha\in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha(cx)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$ для кожного $c\in(0,+\infty)$, тобто α — повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{пз}}\subset L^0$.

Для $\alpha\in L$ і $\beta\in L$ узагальненими порядком $\varrho_{\alpha\beta}[f]$ і нижнім порядком $\lambda_{\alpha\beta}[f]$ цілої функції f називаються [6] величини

$$\varrho_{\alpha\beta}[f]=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(\ln r)},\quad \lambda_{\alpha\beta}[f]=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(\ln r)}.$$

Для функцій, аналітичних в крузі $\mathbb{D}$, узагальнені нижній порядок $\lambda^*_{\alpha\beta}[f]$ і порядок $\varrho^*_{\alpha\beta}[f]$ вводяться [7] за формулами

$$\lambda^*_{\alpha\beta}[f]=\varliminf_{r\uparrow1}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(1/(1-r))},\quad \varrho^*_{\alpha\beta}[f]=\varlimsup_{r\uparrow1}\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(1/(1-r))}.$$

Якщо в означеннях узагальнених порядків функції (1) замість $\ln M(r,f)$ поставимо $\ln \mu(r,f)$ або $\nu(r,f)$, то отримаємо величини, які позначимо, відповідно, через $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\mu]$, $\varrho_{\alpha\beta}[\nu]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\nu]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]$, $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu]$, $\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu]$.

Лема 3. *Нехай $\alpha\in L_{nз}$, $\beta\in L^0$ і для кожного $c\in(0,+\infty)$*

$$\alpha(x\alpha^{-1}(c\beta(x)))=(1+o(1))c\beta(x),\quad x\to+\infty. \tag{9}$$

Тоді, якщо f — ціла функція, то $\varrho_{\alpha\beta}[f]=\varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu]=\varrho_{\alpha\beta}[\nu]=\varrho_{\alpha\beta}[f']$ і $\lambda_{\alpha\beta}[f]=\lambda_{\alpha\beta}[\ln\mu]=\lambda_{\alpha\beta}[\nu]=\lambda_{\alpha\beta}[f']$.

Якщо ж f — аналітична в $\mathbb{D}$ функція, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|f_k|=+\infty$ і $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to+\infty$, то $\varrho^*_{\alpha\beta}[f]=\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]=\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu]=\varrho^*_{\alpha\beta}[f']$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f]=\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]=\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu]=\lambda^*_{\alpha\beta}[f']$.

Доведення. З нерівності Коші $\mu(r,f)\le M(r,f)$ отримуємо $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu]\le\varrho_{\alpha\beta}[f]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\mu]\le\lambda_{\alpha\beta}[f]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]\le\varrho^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]\le\lambda^*_{\alpha\beta}[f]$. З іншого боку, нехай $0<\gamma(r)<R[f]-r$. Тоді

$$M(r,f)\le\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|(r+\gamma(r))^k\left(\frac{r}{r+\gamma(r)}\right)^k\le\mu(r+\gamma(r),f)\frac{r+\gamma(r)}{\gamma(r)}.$$

Якщо $R[f]=+\infty$, то виберемо $\gamma(r)=\varepsilon r$, де $0<\varepsilon<1$. Тоді $\ln M(r,f)\le$ $\le\ln\mu((1+\varepsilon)r,f)+\ln((1+\varepsilon)/\varepsilon)=(1+o(1))\ln\mu((1+\varepsilon)r,f)$ при $r\to+\infty$ і, якщо $\alpha\in L^0$ і $\beta\in L^0$, то легко отримуємо нерівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu]\ge\varrho_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\mu]\ge\lambda_{\alpha\beta}[f]$.

Якщо ж $R[f]=1$, то виберемо $\gamma(r)=\varepsilon(1-r)$, де $0<\varepsilon<1$. Тоді $\ln M(r,f)\le$ $\ln\mu(r+\varepsilon(1-r),f)+\ln(1/(\varepsilon(1-r))$, і отже,

$$\begin{aligned}\alpha(\ln M(r,f))&\le\alpha(2\max\{\ln\mu(r+\varepsilon(1-r),f),\,\ln(1/(\varepsilon(1-r)))\})=\\&=(1+o(1))\alpha(\max\{\ln\mu(r+\varepsilon(1-r),f),\,\ln(1/(\varepsilon(1-r)))\})\le\\&\le(1+o(1))(\alpha(\ln\mu(r+\varepsilon(1-r),f))+\alpha(\ln(1/(\varepsilon(1-r))))),\quad r\uparrow1.\end{aligned}$$

Оскільки $\alpha\in L^0$ і $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to+\infty$, то отримуємо

$$\frac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(1/(1-r))}\le\frac{\alpha(\ln\mu(r+\varepsilon(1-r),f))}{\beta(1/(1-r-\varepsilon(1-r)))}\frac{\beta(1/(1-r-\varepsilon(1-r)))}{\beta(1/(1-r))},$$

тобто

$$\varrho^*_{\alpha\beta}[f]\le\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]A(\varepsilon)\ \text{і}\ \lambda^*_{\alpha\beta}[f]\le\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]A(\varepsilon),$$

де $A(\varepsilon)=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\beta(x/(1-\varepsilon))}{\beta(x)}$.

В [8] доведено таку властивість класу L^0: *якщо $\beta\in L^0$ і $\varepsilon\in(0,1)$, то $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{\beta((1+\varepsilon)x)}{\beta(x)}\to1$ при $\varepsilon\to0$.* Тому $A(\varepsilon)\to1$ при $\varepsilon\to0$, і отже, з огляду на довільність ε правильні нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[f]\le\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f]\le\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]$. Рівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu]=\varrho_{\alpha\beta}[f]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\mu]=\lambda_{\alpha\beta}[f]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[f]=\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f]=\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu]$ доведено.

Добре відомо [9, с. 13], що за умови зростання функції $\ln\,\mu(r,f)$ для $0\le r_0<r<R[f]$

$$\ln\,\mu(r,f)-\ln\,\mu(r_0,f)=\int_{r_0}^{r}\nu(t,f)d\ln\,t.$$

Тому

$$\ln\,\mu(r,f)-\ln\,\mu(r_0,f)\le\nu(r,f)\ln\,(r/r_0)$$

і для $0<\gamma(r)<r-r_0$

$$\ln\,\mu(r,f)-\ln\,\mu(r_0,f)\ge\int_{r-\gamma(r)}^{r}\nu(t,f)d\ln\,t\ge\nu(r-\gamma(r),f)\ln\,\frac{r}{r-\gamma(r)}.$$

Якщо $R[f]=+\infty$, то виберемо $r_0=1$ і $\gamma(r)=\varepsilon r$, де $0<\varepsilon<1$. Тоді

$$\ln\,\mu(r,f)-\ln\,\mu(r_0,f)\ge\nu((1-\varepsilon)r,f)\ln\,(1/(1-\varepsilon)),$$

звідки з огляду на умови $\alpha\in L_{\text{пз}}$, $\beta\in L^0$ і наведену вище властивість функцій з класу L^0, як у доведенні нерівностей $\varrho^*_{\alpha\beta}[f]\le\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f]\le\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$, отримуємо нерівності $\varrho_{\alpha\beta}[\nu]\le\varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\nu]\le\lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$. З іншого боку,

$$\ln\,\mu(r,f)\le\ln\,\mu(r_0,f)+\nu(r,f)(\ln\,r-\ln\,r_0)=(1+o(1))\nu(r,f)\ln\,r \text{ при } r\to+\infty,$$

і, якщо $\nu(r_k,f)\le\alpha^{-1}(c\beta(\ln\,r_k))$, то з огляду на умову (9)

$$\alpha(\ln\,\mu(r_k,f))\le(1+o(1))\alpha(\ln\,r_k\alpha^{-1}(c\beta(\ln\,r_k)))=(1+o(1))c\beta(\ln\,r_k)$$

при $k\to\infty$. Звідси отримуємо нерівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]\le\varrho_{\alpha\beta}[\nu]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]\le\lambda_{\alpha\beta}[\nu]$.

Якщо $R[f]=1$, то виберемо $r_0=1/2$ і $\gamma(r)=\varepsilon(1-r)$, де $0<\varepsilon<1$. Тоді

$$\ln\,\mu(r,f)\le\ln\,\mu(1/2,f)+\nu(r,f)\ln\,2,$$

звідки випливають нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]\le\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]\le\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu]$. З іншого боку, оскільки з умови $\varlimsup\limits_{k\to\infty}|f_k|=+\infty$ випливає зростання функції $\ln\,\mu(r,f)$ до $+\infty$, то

$$\ln\,\mu(r,f)\ge\ln\mu(r_0,f)+\nu(r-\varepsilon(1-r),f)\ln\frac{r}{r-\varepsilon(1-r)}=$$
$$=(1+o(1))\varepsilon(1-r)\nu(r-\varepsilon(1-r),f),$$

тобто

$$\nu(r-\varepsilon(1-r),f)\le(1+o(1))\frac{\ln\,\mu(r,f)}{\varepsilon(1-r)},\quad r\uparrow 1.$$

Тому, якщо $\ln\,\mu(r_k,f)\le\alpha^{-1}(c\beta(1/(1-r_k)))$, то з огляду на умови (9) і $\alpha\in L_{\text{пз}}$

$$\alpha(\nu(r_k-\varepsilon(1-r_k),f))\le\alpha\left((1+o(1))\frac{1}{\varepsilon(1-r_k)}\alpha^{-1}\left(c\beta\left(\frac{1}{1-r_k}\right)\right)\right)=$$
$$=(1+o(1))c\beta\left(\frac{1}{1-r_k}\right)$$

при $k\to\infty$. Звідси випливає, що

$$\frac{\alpha(\nu(r_k-\varepsilon(1-r_k),f))}{\beta(1/(1-(r_k-\varepsilon(1-r_k)))}\le(1+o(1))c\frac{\beta(1/(1-r_k))}{\beta(1/(1+\varepsilon)(1-r_k))},\quad k\to\infty,$$

звідки з огляду на властивість функцій з класу L^0 і довільність ε отримуємо нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$. Рівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] = \varrho_{\alpha\beta}[\nu]$, $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu] = \lambda_{\alpha\beta}[\nu]$, $\varrho^*_{\alpha\beta}[\nu] = \varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[\nu] = \lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\,\mu]$ доведено.

Для $0 < \gamma(r) < R[f] - r$ з інтегральної формули Коші

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z| = \gamma(|z|)} \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau - z)^2}$$

отримуємо нерівність $M(r, f') \le M(r + \gamma(r), f)/\gamma(r)$, а з огляду на формулу Лейбніца-Ньютона $f(z) = \int\limits_0^z f'(\tau)d\tau + f(0)$ правильна нерівність $M(r, f) \le M(r, f') + |f(0)|$. Якщо $R[f] = +\infty$, то виберемо $\gamma(r) = 1$ і з останніх двох нерівностей одержимо рівності $\varrho_{\alpha\beta}[f'] = \varrho_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[f'] = \lambda_{\alpha\beta}[f]$. Якщо $R[f] = 1$, то виберемо $\gamma(r) = \varepsilon(1 - r)$, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді, як вище,

$$\begin{aligned}\alpha(\ln\,M(r, f')) &\le \alpha(\ln\,M(r + \varepsilon(1 - r), f) + \ln\,(1/(\varepsilon(1 - r))) \le \\ &\le (1 + o(1))(\alpha(\ln\,M(r + \varepsilon(1 - r), f) + \alpha(\ln\,(1/(1 - r))), \quad r \uparrow 1.\end{aligned}$$

Оскільки $\alpha(\ln\,x) = o(\beta(x))$ при $x \to +\infty$, то використовуючи властивість функцій з класу L^0 і довільність ε, отримуємо нерівності $\varrho^*_{\alpha\beta}[f'] \le \varrho^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\lambda^*_{\alpha\beta}[f'] \le \lambda^*_{\alpha\beta}[f]$. Протилежні нерівності випливають з нерівності $M(r, f) \le M(r, f') + |f(0)|$. Лему 3 доведено. □

Перейдемо до зростання похідних Гельфонда-Леонтьєва.

Лема 4. *Нехай $\alpha \in L_{nз}$, $\beta \in L^0$ і для кожного $c \in (0, +\infty)$ і виконується умова (9). Тоді, якщо f і g — цілі функції, а послідовність (l_k) задовольняє умову (4), то $\lambda_{\alpha\beta}[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \lambda_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f * g)] = \lambda[f * g]$ і $\varrho_{\alpha\beta}[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g] = \varrho_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f * g)] = \varrho[f * g]$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Спочатку доведемо, що $\lambda_{\alpha\beta}[D_l^{(n)} f] = \lambda_{\alpha\beta}[f]$ і $\varrho_{\alpha\beta}[D_l^{(n)} f] = \varrho_{\alpha\beta}[f]$. Достатньо розглянути випадок $n = 1$. З умови (4) випливає існування таких чисел $0 < q_1 \le q_2 < +\infty$, що $q_1^k \le l_k/l_{k+1} \le q_2^k$ для всіх $k \ge 0$. Тому, як доведено в [5], правильні асимптотичні нерівності

$$(1 + o(1))\ln\,\mu(q_1 r, f) \le \ln\,\mu(r, D_l^{(1)} f) \le (1 + o(1))\ln\,\mu(q_2 r, f), \quad r \to +\infty,$$

тобто за умов $\alpha \in L^0$, $\beta \in L^0$ отримуємо рівності $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu(\cdot, D_l^{(1)} f] = \varrho_{\alpha\beta}[\ln\,\mu(\cdot, f]$ і $\lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu(\cdot, D_l^{(1)} f] = \lambda_{\alpha\beta}[\ln\,\mu(\cdot, D_l(1) f]$, звідки з огляду на лему 3 випливають потрібні рівності. Отже, $\lambda_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f * g)] = \lambda[f * g]$ і $\varrho_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f * g)] = \varrho[f * g]$. Щоб довести рівності $\lambda[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \lambda[D_l^{(n)}(f * g)]$ і $\varrho[D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)] = \varrho[D_l^{(n)}(f * g)]$, треба зауважити, що [5], $q_1^n \mu(r, D_l^{(n)}(f * g)) \le \mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g) \le q_2^n \mu(r, D_l^{(n)}(f * g))$, і використати наведену вище аргументацію. Лему 4 доведено.

□

Лема 5. *Нехай $\alpha \in L_{nз}$, $\beta \in L^0$, для кожного $c \in (0, +\infty)$ виконується умова (9) і $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to +\infty$. Тоді, якщо f і g — аналітичні $\mathbb{D}$ функції, $\varlimsup\limits_{k \to \infty} |f_k||g_k| =$*

$+\infty$ *а послідовність* (l_k) *задовольняє умову (8), то* $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\lambda[f*g]$ *і* $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\varrho[f*g]$ *для кожного* $n\in\mathbb{N}$.

Доведення. Спочатку доведемо таке: якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|f_k|=+\infty$, то $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f]=\lambda^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f]=\varrho^*_{\alpha\beta}[f]$. Достатньо розглянути випадок $n=1$. З (8) випливає існування таких чисел $0<h_1\le h_2<+\infty$, що $h_1(k+1)\le l_k/l_{k+1}\le h_2(k+1)$ для всіх $k\ge 0$. Тому $\mu(r,D_l^{(1)}f)\le h_2\max\{(k+1)|f_{k+1}|r^k: k\ge 0\}=h_2\mu(r,f')$ і, аналогічно, $\mu(r,D_l^{(1)}f)\ge h_1\mu(r,f')$, звідки випливає, що $\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,D_l^{(1)}f)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,f')]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,D_l^{(1)}f)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[\ln\mu(\cdot,f')]$. Тому за лемою 3 $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(1)}f)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[f']=\lambda^*_{\alpha\beta}[f]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(1)}f)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[f']=\varrho^*_{\alpha\beta}[f]$. Отже, $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[f*g]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[f*g]$.

Щоб довести, що $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$, треба зауважити, що за умови (8) правильні [5] нерівності $h_1^n\mu(r,F^{(n)})\le\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)\le h_2^n\mu(r,F^{(n)})$, де

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_k}{l_{k+n}}f_{k+n}g_{k+n}z^{k+n}=z^nD_l^{(n)}(f*g)(z).$$

Звідси і леми 3 випливає, що $\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\lambda^*_{\alpha\beta}[F^{(n)}]=\lambda^*_{\alpha\beta}[F]=\lambda^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$ і $\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)]=\varrho^*_{\alpha\beta}[F^{(n)}]=\varrho^*_{\alpha\beta}[F]=\varrho^*_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$. Лему 5 доведено. □

Використовуючи леми 3 — 5, доведемо тепер теореми, які узагальнюють або доповнюють теореми А і Б. Почнемо з випадку, коли послідовність (l_k) задовольняє умову (4).

Теорема 1. *Нехай* $\alpha\in L_{n з}$, $\beta\in L^0$ *і для кожного* $c\in(0,+\infty)$ *виконується умова (9). Тоді, якщо* f *і* g *— цілі функції, а послідовність* (l_k) *задовольняє умову (4) з* $q>1$, *то для* $n<m$

$$\begin{aligned}\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)&=\\=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)&=\\=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)&=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]\end{aligned}\tag{10}$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=$$
$$=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)=$$
$$=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g]. \tag{11}$$

Доведення. Будемо використовувати доведені в [5] такі нерівності:

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*))}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n}}\le\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)+n}} \tag{12}$$

і

$$\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\le\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le\frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}}. \tag{13}$$

Доведемо спочатку останні рівності в (12) і (13). З (4) з $q>1$ ввипливає існування таких чисел $1<q_1\le q_2<+\infty$, що $q_1^{kn}\le l_k/l_{k+n}\le q_2^{kn}$ для всіх $k\ge k_0$. Тому з огляду на (12)

$$n\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\ln q_1\le\ln\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le n\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)\ln q_2, \tag{14}$$

для $r\ge r_0$. За лемою 3

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\alpha(\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}{\beta(\ln r)}=\lambda_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)],$$
$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\alpha(\nu(r,D_l^{(n)}(f*g)))}{\beta(\ln r)}=\varrho_{\alpha\beta}[D_l^{(n)}(f*g)]$$

і такі ж рівності правильні, якщо замість $D_l^{(n)}(f*g)$ поставити $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$, оскільки $\alpha\in L_{\text{пз}}$, то з (14) отримуємо потрібні рівності.

Далі, за виконання умови (4) з $q>1$ з (13) замість (14) тепер для всіх досить великих $r>0$ отримуємо

$$(m-n)\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\ln q_1\le\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le(m-n)\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))\ln q_2,$$

звідки, з огляду на лему 3, випливають рівності

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]$$

і
$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g].$$

Нарешті, враховуючи, що ряд (7) відрізняється від ряду (6) тільки тим, що замість l_k/l_{k+n} стоїть $(l_k/l_{k+n})^2$, з огляду на (13) матимемо

$$\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))+n-m}}{l_{\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)^2\le\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f^*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\le\left(\frac{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))}}{l_{\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))+m-n}}\right)^2 \qquad (15)$$

для всіх досить великих $r>0$, звідки, як і раніше, отримуємо рівності

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f^*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]$$

і

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\ln\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f^*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g]$$

Теорему 1 доведено.

□

Перейдемо до розляду випадку, коли послідовність (l_k) задовольняє умову (8).

Теорема 2. *Нехай $\alpha\in L_{пз}$, $\beta\in L^0$ і для кожного $c\in(0,+\infty)$ виконується умова (9). Тоді, якщо f і g — цілі функції, а послідовність (l_k) задовольняє умову (8) то:*

1) для $n\ge1$

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g]$$

і

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g];$$

2) для $m>n$

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(r\cdot\sqrt[m-n]{\frac{\mu(r,D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g],$$

і

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(r\cdot\sqrt[m-n]{\frac{\mu(r,D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g];$$

3) для $m>n$

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt{r}\cdot\sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[f*g],$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{1}{\beta(\ln r)}\alpha\left(\sqrt{r}\cdot\sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[f*g].$$

Доведення. З (8) випливає існування таких чисел $0<h_1\le h_2<+\infty$, що $h_1k^n\le l_k/l_{k+n}\le h_2k^n$ для всіх $k\ge 0$. Тому з (12) для всіх $r\ge r_0$ отримаємо

$$h_1\nu^n(r,D_l^{(n)}(f*g))\le\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le h_2\nu^n(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g),$$

тобто

$$\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\sqrt[n]{h_1}\le\sqrt[n]{\frac{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\le\nu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)\sqrt[n]{h_2},\tag{16}$$

звідки з огляду на умову $\alpha\in L_{\text{пз}}$ і лему 3 отримуємо твердження 1) теореми 2.

Далі, з (13) для всіх досить великих $r>0$ матимемо

$$h_1\nu^{m-n}(r,D_l^{(n)}(f*g))\le\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}\le h_2\nu^{m-n}(r,D_l^{(m)}(f*g)),$$

тобто

$$\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\sqrt[m-n]{h_1}\le\sqrt[m-n]{\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}(f*g)}{\mu(r,D_l^{(n)}(f*g))}}\le\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))\sqrt[m-n]{h_1},\tag{17}$$

звідки отримуємо твердження 2) теореми 2.

Нарешті, з (15) випливає, що

$$\nu(r,D_l^{(n)}(f*g))\sqrt[2(m-n)]{h_1}\le\sqrt[2(m-n)]{\frac{r^{m-n}\mu(r,D_l^{(m)}f*D_l^{(m)}g)}{\mu(r,D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g)}}\le$$
$$\le\nu(r,D_l^{(m)}(f*g))\sqrt[2(m-n)]{h_1},\tag{18}$$

звідки одержуємо твердження 3). Теорему 2 доведено.

□

Використовуючи (16) — (18) та леми 3 — 5, подібно доводиться теорема 3.

Теорема 3. *Нехай $\alpha\in L_{пз}$, $\beta\in L^0$, для кожного $c\in(0,+\infty)$ виконується умова (9) і $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to+\infty$. Тоді, якщо f і g — аналітичні в $\mathbb{D}$ функції, $\varliminf_{k\to\infty}|f_k||g_k|=+\infty$, а послідовність (l_k) задовольняє умову (8) то:*

1) для $n \geq 1$

$$\lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}}\right) = \lambda^*_{\alpha\beta}[f*g]$$

і

$$\overline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt[n]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}}\right) = \varrho^*_{\alpha\beta}[f*g];$$

2) для $m > n$

$$\lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(r \cdot \sqrt[m-n]{\frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}}\right) = \lambda^*_{\alpha\beta}[f*g],$$

і

$$\overline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(r \cdot \sqrt[m-n]{\frac{\mu(r, D_l^{(m)}(f*g))}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}}\right) = \varrho^*_{\alpha\beta}[f*g];$$

3) для $m > n$

$$\lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt{r} \cdot \sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}}\right) = \lambda^*_{\alpha\beta}[f*g],$$

і

$$\overline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \alpha\left(\sqrt{r} \cdot \sqrt[2(m-n)]{\frac{\mu(r, D_l^{(n)} f * D_l^{(n)} g)}{\mu(r, D_l^{(n)}(f*g))}}\right) = \varrho^*_{\alpha\beta}[f*g].$$

Зауважимо, що умови теорем 1 — 2 задовольняють, наприклад, функції $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$. Тому з теорем 1 і 2 випливає теорема А. Функції $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$ умову (9) не задовольняє, і видно, що теорема 3 не є узагальненням теореми Б, а її доповненням.

Література

1. *Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье// Матем. сб. — Т.23. N 3. — 1957. — С. 477–500.
2. *Hadamard J.* Theoreme sur le series entieres // Acta math. Bd. — 22. 1899. — S. 55–63.
3. *Hadamard J.* La serie de Taylor et son prolongement analytique // Scientia phys.-math. — N 12. — 1901. — P. 42–63.
4. *Л. Бибербах* Аналитическое продолжение — М.: Наука, 1967. — 239 с.
5. *Луговая Л.Л., Мулява О.М., Шеремета М.Н.* Свойства адамаровских композиций производных Гельфонда-Леонтьева аналитических функций // Уфимский матем. журн. — Т.2, N 2. — 2010. — С. 90–101.

6. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв.вузов. Матем. — 1967. — N2. — С. 100–108.
7. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом функции, аналитической в круге, и модулями коэффициентов ее ряда Тейлора // ДАН УССР. Сер. А. — 1966. — N6. — С. 729–732.
8. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entire functions // Matem. Studii. — 2003. — Vol. 19, N 1. — P. 73–82.
9. *Г. Полиа , Г. Сеге* Задачи и теоремы из анализа. II. — М.: Наука, 1978. — 432с.

Стаття: надійшла до редколегії 30.06.2015
прийнята до друку 11.11.2015

ON HADAMARD'S COMPOSITIONS OF GELFOND-LEONT'EV DERIVATIVES FOR ANALYTIC FUNCTIONS

Oksana MULYAVA, Stepan FEDYNYAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: info@nuft.edu.ua, fedynyak@yahoo.com

For entire and analytic functions in the unit disk, in the terms of generalized orders, the growth of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives is investigated. The behaviour of the maximal terms such compositions is studied.

Key words: analytic function, Hadamard's composition, Gelfond-Leont'ev derivative, maximal term.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 129–133
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 129–133

УДК 517.53+519.213

REMARK TO LOWER ESTIMATES FOR CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS

Marta PLATSYDEM

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: marta.platsydem@gmail.com

Let α be a slowly increasing function and φ be the characteristic function of probability law F that is analytic in $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}, 0 < R \leqslant +\infty$, $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$ and $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, $x \geqslant 0$. Conditions on W_F and α, under which $\alpha(\ln M(r, \varphi)) \geqslant (1+o(1))\varrho\alpha(1/(R-r))$ as $r \uparrow R$, are investigated.

Key words: analytic function, characteristic function, probability law.

A non-decreasing, left-continuous function F defined on $(-\infty, +\infty)$ is said [1, p. 10] to be a probability law if $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ and $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Given real z, the function $\varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dF(x)$ is called [1, p. 12] the characteristic function of this law. If φ has an analytic continuation on the disk $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, then we call φ an analytic in $\mathbb{D}_R$ characteristic function of the law F. In the sequel, we always assume that $\mathbb{D}_R$ is the maximal disk of analyticity of φ. It is known [1, p. 37-38], that φ is an analytic in $\mathbb{D}_R$ characteristic function of the law F if and only if $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx})$ as $x \to +\infty$ for every $r \in [0, R)$. Hence it follows that $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} = R$. If we put $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$ and $\mu(r, \varphi) = \sup\{W_F(x)e^{rx} : x \geqslant 0\}$ for $0 \leqslant r < R$, then [1, p. 54-55] $\mu(r, \varphi) \leqslant 2M(r, \varphi)$. Therefore, the lower estimates for $\ln \mu(r, \varphi)$ imply the corresponding estimates for $\ln M(r, \varphi)$. Further, we assume that $\ln \mu(r, \varphi) \uparrow +\infty$ as $r \uparrow R$. Hence

$$\varlimsup_{x\to+\infty} W_F(x)e^{Rx} = +\infty. \qquad (1)$$

By L_{si} we denote the class of positive, continuous functions α, defined on $(-\infty, +\infty)$, such that $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ for $x \leqslant x_0$, $\alpha(x) \uparrow +\infty$ and $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ as $x_0 \leqslant x \uparrow +\infty$ for every $c \in (0, +\infty)$. In [2] the following statements are proved.

Proposition 1. *Let $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L_{si}$, $\frac{d\ln\beta^{-1}(\alpha(x))}{d\ln x} \leqslant q < 1$ for all x large enough and $\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(\alpha(x))}\right) = (1+o(1))\alpha(x)$ as $x \to +\infty$, and φ be an analytic in $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, characteristic function of probability law F, for which $\beta\left(\frac{x_k}{\ln\left(W_F(x_k)e^{Rx_k}\right)}\right) \leqslant \alpha(x_k)$ for some sequence of positive numbers (x_k) increasing to $+\infty$ such that $\beta^{-1}(\alpha(x_{k+1})) = O(\beta^{-1}(\alpha(x_k)))$ as $k \to \infty$. Then*

$$\alpha(\ln\mu(r,\varphi)) \geqslant (1+o(1))\beta(1/(R-r)), \quad r \uparrow R. \tag{2}$$

Proposition 2. *Let $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L_{si}$, $\frac{d\ln\alpha^{-1}(\beta(x))}{d\ln x} \leqslant q < 1$ for all x large enough $\frac{d\alpha^{-1}(\beta(x))}{dx} = \frac{1}{f(x)} \downarrow 0$ and $\alpha^{-1}(\beta(f(x))) = O(\alpha^{-1}(\beta(x)))$ as $x \to +\infty$, and φ be an analytic in $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, characteristic function of probability law F, for which $\alpha\left(\ln\left(W_F(x_k)e^{Rx_k}\right)\right) \geqslant \beta(x_k)$ for some sequence of positive numbers (x_k), increasing to $+\infty$, such that $\varlimsup\limits_{k\to\infty}(f(x_{k+1})/f(x_k)) < 2$. Then asymptotic inequality (2) holds.*

The condition on α and β in Proposition 1 assume that the function α increases slower than the function β. In Proposition 2, α increases quicker than β.

Here we consider the case when $\beta(x) = \varrho\alpha(x)$ for all $x \geqslant x_0$, where $0 < \varrho < +\infty$, that is the functions β and α have the same growth. We use a result from [2].

Let $\Omega(R)$ be a class of positive, unbounded functions Φ, defined on $(0,R)$, such that the derivative Φ' is positive continuously differentiable and increasing to $+\infty$ on $(0,R)$. For $\Phi \in \Omega(R)$ we denote by ϕ the function inverse to Φ', and let $\Psi(r) = r - \frac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ be the function associated with Φ in the sense of Newton.

Lemma 1. *Let $\Phi \in \Omega(R)$, $0 < R < +\infty$, and φ be an analytic in $\mathbb{D}_R$ characteristic function of a probability law F for which (1) holds and*

$$\ln W_F(x_k) \geqslant -x_k\Psi(\phi(x_k)) \tag{3}$$

for some sequence of positive numbers (x_k) increasing to $+\infty$ such that $\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k) \leqslant h(x_{k+1})$, where h is a positive continuous and non-increasing function on $[x_0,+\infty)$ and $R > \phi(x) - h(x) \to R$ as $x \to +\infty$. Then

$$\ln\mu(r,f)) \geqslant \Phi(r - h(\Phi'(r))), \quad r_0 \leqslant r < R. \tag{4}$$

Using this lemma we prove the following theorem.

Theorem 1. *Let $\alpha \in L_{si}$ be a continuously differentiable function and φ be an analytic in $\mathbb{D}_R$ characteristic function of a probability law F. Suppose that one of the following conditions is fulfilled:*

1) $\varrho > 1$, $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{d\ln\alpha^{-1}(x)}{d\ln\alpha^{-1}(\varrho x)} = q(\varrho) < 1$, $\alpha\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right) = (1+o(1))\alpha(x)$ as $x \to +\infty$ and

$$\alpha\left(\frac{x_k}{\ln\left(W_F(x_k)e^{Rx_k}\right)}\right) \leqslant \frac{\alpha(x_k)}{\varrho} \tag{5}$$

for some sequence of positive numbers (x_k) increasing to $+\infty$ such that $\alpha^{-1}(\alpha(x_{k+1})/\varrho) = O(\alpha^{-1}(\alpha(x_k)/\varrho))$ as $k \to \infty$;

2) $0<\varrho<1$, $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{d\ln\alpha^{-1}(\varrho x)}{d\ln\alpha^{-1}(x)}=q(\varrho)<1$, $\frac{d\alpha^{-1}(\varrho\alpha(x))}{dx}=\frac{1}{f(x)}\downarrow 0$, $\alpha^{-1}(\varrho\alpha(f(x)))=$ $=O(\alpha^{-1}(\varrho\alpha(x)))$ *as* $x\to+\infty$ *and*

$$\alpha\left(\ln\left(W_F(x_k)e^{Rx_k}\right)\right)\geqslant\varrho\alpha(x_k)\tag{6}$$

for some sequence of positive numbers (x_k) *increasing to* $+\infty$ *such that* $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\frac{f(x_{k+1}}{f(x_k)}<2$.

Then

$$\alpha(\ln\mu(r,\varphi))\geqslant(1+o(1))\varrho\alpha\left(\frac{1}{R-r}\right),\quad r\uparrow R.\tag{7}$$

Proof. At first let $\varrho>1$. Then (5) implies the inequality $\ln W_F(x_k)\geqslant-Rx_k+\frac{x_k}{\alpha^{-1}(\alpha(x_k)/\varrho)}$. Since $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{d\ln\alpha^{-1}(x)}{d\ln\alpha^{-1}(\varrho x)}=q(\varrho)<1$, we have $\frac{d\ln\alpha^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}{d\ln x}\leqslant$ $\leqslant(1+o(1))q(\varrho)$ and $\frac{x}{\alpha^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}\uparrow+\infty$ as $x_0\leqslant x\to+\infty$. Therefore, using l'Hospital's rule we obtain

$$\frac{x}{\alpha^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}\geqslant(1+o(1))(1-q(\varrho))\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{\alpha^{-1}(\alpha(t)/\varrho)},\quad x\to+\infty,$$

and, thus,

$$\ln W_F(x_k)\geqslant-Rx_k+(1-q_1)\int\limits_{x_0}^{x_k}\frac{dt}{\alpha^{-1}(\alpha(t)/\varrho)}\tag{8}$$

for every $q_1\in(q(\varrho),1)$ and all k large enough. We put

$$\Phi(r)=\int\limits_{r_0}^{r}\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{R-x}\right)\right)dx,\quad q_1<q_2<1.\tag{9}$$

Then $\Phi'(r)=\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{R-x}\right)\right)$, $\phi(x)=R-\dfrac{1-q_2}{\alpha^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}$ and

$$x\Psi(\phi(x))=\int\limits_{x_0}^{x}\phi(t)dt+\mathrm{const}=Rx-(1-q_2)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{\alpha^{-1}(\alpha(t)/\varrho)}+\mathrm{const},$$

i. e. in view of (8) and of the inequality $q_1<q_2$ we obtain (3).

Since $\alpha^{-1}(\alpha(x_{k+1})/\varrho)\leqslant K\alpha^{-1}(\alpha(x_k)/\varrho)$, $K>1$, for all $k\geqslant k_0$, we have

$$\frac{1}{\alpha^{-1}(\alpha(x_k)/\varrho)}-\frac{1}{\alpha^{-1}(\alpha(x_{k+1})/\varrho)}\leqslant\frac{K-1}{\alpha^{-1}(\alpha(x_{k+1})/\varrho)}.$$

Therefore, putting $h(x)=\frac{(K-1)(1-q_2)}{\alpha^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}$, we obtain $\phi(x)-h(x)=R-\frac{K(1-q_2)}{\alpha^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}\to R$ as $x\to+\infty$, $h(\Phi'(r))=(K-1)(R-r)$ and $\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\leqslant h(x_{k+1})$ for $k\geqslant k_0$.

Finally, for every $\eta>0$ and all $r\in[r_0(\eta),R)$ from (9) it follows that

$$\Phi(r)=\int\limits_{r-\eta(R-r)}^{r}\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{R-x}\right)\right)dx\geqslant\eta(R-r)\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{(1+\eta)(R-r)}\right)\right).$$

Therefore, by Lemma 1

$$\ln\mu(r,\varphi)\geqslant\eta(R-r+h(\Phi'(r)))\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{(1+\eta)(R-r+h(\Phi'(r)))}\right)\right)=$$

$$=\eta K(R-r)\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{(1+\eta)K(R-r)}\right)\right),$$

whence in view of the condition $\alpha(x/\alpha(x))=(1+o(1))\alpha(x)$ as $x\to+\infty$ we have

$$\alpha(\ln\mu(r,\varphi))\geqslant\alpha\left(\eta K(R-r)\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{(1+\eta)K(R-r)}\right)\right)\right)=$$

$$=(1+o(1))\alpha\left(\frac{\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{(1+\eta)K(R-r)}\right)\right)}{\frac{1-q_2}{(1+\eta)K(R-r)}}\right)=$$

$$=(1+o(1))\varrho\alpha\left(\frac{1-q_2}{(1+\eta)K(R-r)}\right)=(1+o(1))\varrho\alpha\left(\frac{1}{R-r}\right),\ r\uparrow R,$$

thus we obtain (7).

Now let $0<\varrho<1$. If we put $x\Psi(\phi(x))=Rx-\alpha^{-1}(\varrho\alpha(x))$ then (6) implies (3), $\phi(x)=(x\Psi(\phi(x)))'=R-1/f(x)$, $\Phi'(r)=f^{-1}(1/(R-r))$ and since $\frac{d\ln\alpha^{-1}(\varrho\alpha(x))}{d\ln x}\leqslant q(\varrho)(1+o(1))$ as $x\to+\infty$ we have

$$\Phi(r)=\int\limits_{r_0}^{r}f^{-1}\left(\frac{1}{R-x}\right)dx=\int\limits_{f^{-1}(1/(R-r_0))}^{f^{-1}(1/(R-r))}td\left(\frac{-1}{f(t)}\right)=$$

$$=-(R-r)f^{-1}(1/(R-r))+\alpha^{-1}(\varrho\alpha(f^{-1}(1/(R-r))))+\text{const}=$$

$$=\alpha^{-1}(\varrho\alpha(f^{-1}(1/(R-r))))\left\{1-\frac{(R-r)f^{-1}(1/(R-r))}{\alpha^{-1}(\varrho\alpha(f^{-1}(1/(R-r))))}\right\}+\text{const}\geqslant$$

$$\geqslant(1-q)\alpha^{-1}(\varrho\alpha(f^{-1}(1/(R-r))))$$

for every $q\in(q(\varrho),1)$ and all $r\in[r_0(q),R)$. But the condition $\alpha^{-1}(\varrho\alpha(f(x)))=O(\alpha^{-1}(\varrho\alpha(x)))$ as $x\to+\infty$ implies that $\alpha^{-1}(\varrho\alpha(1/(R-r)))\leqslant K\alpha^{-1}(\varrho\alpha(f^{-1}(1/(R-r))))$, $K=\text{const}>0$. Therefore, $\Phi(r)\geqslant K_1\alpha^{-1}(\varrho\alpha(1/(R-r)))$, $K_1=\text{const}>0$, and if we put $h(x)=a(R-\phi(x)), 0<a<1$, then

$$\Phi(r-h(\Phi'(r))\geqslant K_1\alpha^{-1}\left(\varrho\alpha\left(\frac{1}{(1+a)(R-r)}\right)\right).\tag{10}$$

It is clear that, in view of the relation $\phi(x)=R-1/f(x)$, the condition $\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)\leqslant h(x_{k+1})$ is equivalent to the condition $f(x_{k+1})\leqslant(1+a)f(x_k)$ and the last one follows from the condition $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\frac{f(x_{k+1}}{f(x_k)}<2$. Therefore, by Lemma 1 we see that (4) and (10) implies (7). The proof of Theorem 1 is complete.

Since $\ln M(r,\varphi)\geqslant\ln\mu(r,\varphi)-\ln 2$, choosing $\alpha(x)=\ln x$ from Theorem 1 we obtain the following assertion.

Corollary 1. *Let φ be an analytic in $\mathbb{D}_R$ characteristic function of a probability law F. Suppose that one of the following conditions is fulfilled:*

1) $\varrho > 1$ and $\ln\big(W_F(x_k)e^{Rx_k}\big) \geqslant x_k^{(\varrho-1)/\varrho}$ for some sequence of positive numbers (x_k) increasing to $+\infty$ such that $x_{k+1} = O(x_k)$ as $k \to \infty$;

2) $0 < \varrho < 1$ and $\ln\big(W_F(x_k)e^{Rx_k}\big) \geqslant x^{\varrho}$ for some sequence of positive numbers (x_k) increasing to $+\infty$ such that $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^{1-\varrho} < 2$.

Then $\ln\ln M(r,\varphi)) \geqslant (1+o(1))\varrho\ln(1/(R-r))$ as $r \uparrow R$.

References

1. *Linnik Yu.V.,* Decomposition of random variables and vectors /Yu.V. Linnik, I.V. Ostrovskii // Moskow.: Nauka. — 1972. — 479p. (in Russian)
2. *Parolya M.I., Sheremeta M.M.* Estimates from below for characteristic functions of probability laws / M.I. Parolya, M.M. Sheremeta // Matem. studii. — 2013. — Vol.39, No 1. — P. 54–66

Стаття: надійшла до редколегії 12.12.2014.
доопрацьована 02.11.2015.
прийнята до друку 11.11.2015.

ЗАУВАЖЕННЯ ЩОДО ОЦІНОК ЗНИЗУ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ

Марта ПЛАЦИДЕМ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: marta.platsydem@gmail.com

Нехай α — повільно зростаюча функція, а φ — аналітична в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F, $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r < R\}$ і $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, $x \geqslant 0$. Досліджено умови на функції W_F і α, за яких правильна нерівність $\alpha(\ln M(r,\varphi)) \geqslant (1+o(1))\varrho\alpha(1/(R-r))$, $r \uparrow R$.

Ключові слова: аналітична функція, характеристична функція, ймовірнісний закон.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 134–139
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 134–139

УДК 512.624

НИЖНЯ МЕЖА ДЛЯ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОГО ПОРЯДКУ ЕЛЕМЕНТІВ У РОЗШИРЕННЯХ КУММЕРА СКІНЧЕННИХ ПОЛІВ

Роман ПОПОВИЧ

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Бандери, 12, Львів, 79013
e-mail: rombp07@gmail.com

Явно будуємо в розширеннях Куммера скінченних полів елементи великого мультиплікативного порядку.

Ключові слова: скінченне поле, мультиплікативний порядок, розширення Куммера.

Відомо, що мультиплікативна група скінченного поля — циклічна. Твірну цієї групи називають примітивним елементом. Задача ефективної побудови примітивного елемента заданого скінченого поля є важкою в обчислювальній теорії скінченних полів [7, 8]. Ось чому розглядають менш обмежуюче питання: знайти елемент великого мультиплікативного порядку. У цьому випадку достатньо отримати нижню оцінку для порядку. Елементи великого порядку потрібні для багатьох застосувань. Такі застосування, зокрема, охоплюють криптографію, теорію кодування, генератори псевдовипадкових чисел і комбінаторику. Елементи великого порядку також використовують в алгоритмі AKS доведення простоти чисел, яку запропонували Агравал, Кайал та Саксена [2].

У праці [6] Гао дав алгоритм побудови елементів великого порядку для багатьох (згідно з висловленою ним, проте не доведеною, гіпотезою для всіх) загальних розширень F_{q^m} скінченого поля F_q з нижньою межею для порядку $\exp(\Omega((\log m)^2/\log\log m))$. Волох [12] запропонував метод побудови елементів порядку принаймні $\exp(\Omega(\log m)^2))$.

Для часткових випадків скінченних полів можна збудувати елементи, які мають набагато більші порядки. Розширення, пов'язані з поняттям гауссового періоду, розглянуто в [3, 9]. Нижня оцінка для порядку дорівнює $\exp(\Omega(\sqrt{m}))$.

Розширення на підставі полінома Куммера набувають вигляду $F_q[x]/(x^m - a)$. Їх, зокрема, застосовують у криптографії, яка ґрунтується на спарюванні. У [5] показано, як будувати елементи великого порядку в таких розширеннях за умови $q \equiv 1(mod\ m)$, тобто для розширень Куммера. У цьому разі отримано нижню межу $\exp(\Omega(m))$. Проте зазначена нижня межа є наближеною, а не точною. Для прикладних застосувань (зокрема, криптології) суттєвою є точна оцінка знизу. У [10] збудовано елементи великого порядку для таких розширень без умови $q \equiv 1(mod\ m)$. Нижня межа для мультиплікативного порядку дорівнює $2^{\lfloor \sqrt[3]{2m} \rfloor}$. Розширення Артіна-Шраєра розглянуто в [1].

Скінченне поле з q елементів позначаємо F_q. Групу, породжену елементом v, позначатимемо $\langle v \rangle$. Кількість сполучень з n елементів по k елементів позначимо C_n^k. $|S|$ позначатиме кількість елементів множини S.

Будуємо елементи великого порядку в розширеннях Куммера скінченних полів та даємо точну нижню оцінку для їхнього мультиплікативного порядку. Для цього беремо лінійний двочлен від елемента, який задає розширення, та всі його спряжені, що також належать до підгрупи, породженої цим двочленом, і будуємо їхні різні добутки. Усі спряжені зазначеного лінійного двочлена також є лінійними двочленами. Ідею запропонував Берізбейтіа [4] як вдосконалення алгоритму AKS [2] та розвинув в [5] для розширень Куммера.

Поле L є розширенням Куммера [7] поля K, якщо для деякого заданого цілого числа $n > 1$ виконуються такі умови: K містить n різних коренів степеня n з одиниці (тобто, коренів полінома $x^n - 1$) та L/K має абелеву групу Галуа порядку n.

Зокрема, для випадку скінченних полів: розширення F_{q^m} поля F_q є розширенням Куммера тоді і лише тоді, коли m ділить $q-1$ [5, 7]. У цьому разі можна вважати, що $F_{q^m} = F_q[x]/(x^m - a)$. Позначимо $\theta = x(mod\ (x^m - a))$ — клас елемента x за модулем $x^m - a$. Зрозуміло, що $\theta^m = a$ та $\theta^{q-1} = (\theta^m)^{(q-1)/m} = a^{(q-1)/m}$. Наступне формулювання є очевидним.

Лема 1. *Якщо поліноми $g(x)$ та $h(x)$ з $F_q[x]$ степеня меншого за m різні, то класи цих поліномів в $F_q[x]/(x^m - a)$ також є різними.*

Лема 2. *Для будь-якого елемента b з поля F_q спряжені елемента $\theta + b$ над цим полем набувають вигляду $a^{i(q-1)/m}\theta + b$ $(i = 0, ..., m-1)$.*

Доведення. Розглянемо спряжені елемента $\theta + b$, тобто елементи, в які він переходить, коли діє автоморфізм Фробеніуса.

Доведемо, що

$$(\theta + b)^{q^i} = a^{i(q-1)/m}\theta + b \tag{1}$$

для будь-якого натурального i. Доведемо це індукцією по i.

Очевидно, що для $i = 0$ рівність (1) виконується. Припустимо, що вона виконується для деякого i. Тоді для $i+1$ отримаємо

$$(\theta + b)^{q^{i+1}} = [(\theta + b)^{q^i}]^q = (a^{i(q-1)/m}\theta + b)^q = a^{i(q-1)/m}\theta^q + b$$
$$= a^{i(q-1)/m}a^{(q-1)/m}\theta + b = a^{(i+1)(q-1)/m}\theta + b.$$

Отже, рівність (1) правильна для будь-якого натурального i. □

Зауважимо, що елементи $a^{i(q-1)/m}\theta + b$ у формулюванні леми 2 є різними для $i = 0, ..., m-1$, оскільки $a^{i(q-1)/m}\theta$ — різні.

Посилену нерівність для біноміальних коефіцієнтів отримали в [11, наслідок 2.9, нерівність (2.13)]. Зрештою, отримали такий результат.

Лема 3. *При $s > 1$ та $t \geq 2$ правильна така нерівність:*

$$C_{st}^{t} > 1,08444 \cdot e^{-\frac{1}{8t}} t^{-\frac{1}{2}} \frac{s^{s(t-1)+1}}{(s-1)^{(s-1)(t-1)}} \tag{2}$$

Зафіксуємо цілі числа $1 \leq k_- \leq k \leq m-1$. Нехай $S(m, k_-, k)$ множина таких відображень f з множини $\{0, ..., m-1\}$ в множину цілих чисел, що:

(V1) $|\{i|f(i) < 0\}| = k_-$;

(V2) $-\sum_{i,f(i)<0} f(i) \leq k$;

(V3) $\sum_{i,f(i)\geq 0} f(i) \leq m-1-k$.

Лема 4. *Кількість елементів множини $S(m, k_-, k)$дорівнює*

$$C_m^{k_-} C_k^{k_-} C_{2m-k_-k-1}^{m-k-1}.$$

Доведення. Щоб задати елемент множини $S(m, k_-, k)$, спочатку вибираємо місця, на яких значення відображення від'ємні — це враховує множник $C_m^{k_-}$. Далі вибираємо значення від'ємних елементів так, щоб сума їхніх абсолютних значень не перевищувала k — це враховує множник $C_k^{k_-}$. Нарешті вибираємо невід'ємні значення відображення f на $m - k_-$ місцях так, щоб їхня сума не перевищувала $m-1-k$ — це враховує множник $C_{2m-k_-k-1}^{m-k-1}$. □

Лема 5. *Кількість елементів множини $S(m, k_-, k)$ більше від 4^m для $m \geq 39$.*

Доведення. Приймемо $k_- = k = 2$. Тоді згідно з лемою 4

$$|S(m,\, k_-, k)| = C_m^2 C_{2m-5}^{m-3} > \frac{m(m-1)}{2} C_{2(m-3)}^{m-3}.$$

Використовуючи лему 3, нерівність (2) (беремо $s = 2$ та $t = m-3$), отримуємо

$$C_{2(m-3)}^{m-3} \geq 1,08444 \cdot e^{-\frac{1}{8(m-3)}} \cdot \frac{4^m}{128\sqrt{m-3}}.$$

Тоді $|S(m, k_-, k)| \geq 1,08444 \cdot m(m-1) \cdot e^{-\frac{1}{8(m-3)}} \cdot \frac{4^m}{256\sqrt{m-3}}$. Оскільки $1,08444 \cdot m(m-1) \cdot e^{-\frac{1}{8(m-3)}} \geq 256\sqrt{m-3}$ для $m \geq 39$, то матимемо $|S(m, k_-, k)| > 4^m$. □

Теорема 1. *Припустимо, що $m \geq 39$. Для будь-якого ненульового елемента b поля F_q елемент $\theta + b$ розширення Куммера F_{q^m} має порядок більший від 4^m.*

Доведення. Згідно з лемою 2 спряжені елемента $\theta + b$ (враховуючи сам елемент $\theta + b$) набувають вигляду $a^{i(q-1)/m}\theta + b$ *для* $i = 0, ..., m-1$. Зрозуміло, що всі вони належать до підгрупи $\langle\theta + b\rangle$.

Нехай $S(m,\, k_-, k)$ — множина відображень f з множини $\{0, ...,\, m-1\}$ в множину цілих чисел з описаними раніше властивостями V1, V2, V3. Для кожного елемента f

з множини $S(m, k_-, k)$ утворюємо добуток $\prod\limits_{0\le i\le m-1}(a^{i(q-1)/m}\theta+b)^{f(i)}$, який також належить до $\langle\theta+b\rangle$. Стверджуємо, що двом різним елементам f та g з множини $S(m, k_-, k)$ відповідають різні добутки.

Доведемо це методом від протилежного. Припустимо, що елементиf та g різні, але відповідні їм добутки однакові

$$\prod_{0\le i\le m-1}(a^{i(q-1)/m}\theta+b)^{f(i)}=\prod\nolimits_{0\le i\le m-1}(a^{i(q-1)/m}\theta+b)^{g(i)}. \tag{3}$$

Оскільки поліном x^m-a є характеристичним поліномом для θ , то можемо записати

$$\prod_{0\le i\le m-1}(a^{i(q-1)/m}\theta+b)^{f(i)}=\prod\nolimits_{0\le i\le m-1}(a^{i(q-1)/m}\theta+b)^{g(i)}(mod(x^m-a)).$$

Тоді

$$\prod_{0\le i\le m-1,\, f(i)\ge 0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{f(i)}\prod_{0\le i\le m-1,\, g(i)<0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{-g(i)}=$$

$$\prod_{0\le i\le m-1,\, f(i)<0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{-f(i)}\prod_{0\le i\le m-1,\, g(i)\ge 0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{g(i)}(mod(x^m-a)). \tag{4}$$

Позаяк отримали поліном степеня

$$\sum_{0\le i\le m-1,\, f(i)\ge 0}f(i)+\sum_{0\le i\le m-1,\, g(i)<0}(-g(i))\le m-1<\deg(x^m-a),$$

у лівій частині та поліном степеня

$$\sum_{0\le i\le m-1,\, f(i)<0}(-f(i))+\sum_{0\le i\le m-1,\, g(i)\ge 0}g(i)\le m-1<\deg(x^m-a)$$

у правій частині рівності (4), то за лемою 1 ці поліноми рівні як поліноми над F_q , тобто

$$\prod_{0\le i\le m-1,\, f(i)\ge 0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{f(i)}\prod_{0\le i\le m-1,\, g(i)<0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{-g(i)}=$$

$$\prod_{0\le i\le m-1,\, f(i)<0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{-f(i)}\prod_{0\le i\le m-1,\, g(i)\ge 0}(a^{i(q-1)/m}x+b)^{g(i)}. \tag{5}$$

У рівності (5) одержали нерозкладні та попарно різні множники $a^{i(q-1)/m}x+b,\ i=0,...,m-1$. Ця рівність суперечить однозначності розкладу поліномів над полем F_q, що робить рівність (3) неможливою. Отже, добутки, які відповідають різним елементам множини $S(m, k_-, k)$, не можуть бути однаковими.

Отож, кількість різних розглянутих добутків, які належать до підгрупи $\langle\theta + b\rangle$, дорівнює кількості елементів у множині $S(m, c_-, c)$. Згідно з лемою 4 кількість елементів у множині $S(m, c_-, c)$ дорівнює

$$C_m^{k_-} C_k^{k_-} C_{2m-k_-k-1}^{m-k-1}.$$

За лемою 5 матимемо, що $|S(m, k_-, k)| > 4^m$ для $m \geq 39$. У підсумку отримуємо твердження теореми. □

Зауважимо, що здебільшого розглядають розширення Куммера, для яких m набагато більше від q. Тому умова $m \geq 39$ не є надто обмежувальною. Якщо ж все-таки цікавим є випадок $m < 39$, то треба виконати окреме дослідження.

Література

1. *Попович Р.*, Елементи великого порядку в розширеннях Артіна-Шраєра скінченних полів, Мат. студії **39**:2 (2013), 115–118.
2. *Agrawal M., Kayal N., Saxena N.,* PRIMES is in P, Ann. of Math. **160**:2 (2004), 781–793.
3. *Ahmadi O., Shparlinski I.E., Voloch J.F.*, Multiplicative order of Gauss periods, Int. J. Number Theory **6**:4 (2010), 877–882.
4. *Berrizbeitia P.*, Sharpening Primes is in P for a large family of numbers, Math. Comp. **74**:252 (2005), 2043–2059.
5. *Cheng Q.*, On the construction of finite field elements of large order, Finite Fields Appl. **11**:3 (2005), 358–366.
6. *Gao S.*, Elements of provable high orders in finite fields, Proc. Amer. Math. Soc. **127**:6 (1999), 1615–1623.
7. *Lidl R., Niederreiter H.*, Finite Fields, CRC Press (2013), 755p.
8. *Mullen G.L., Panario D.*, Handbook of finite fields, Cambridge University Press (1997), 1068p.
9. *Popovych R.*, Elements of high order in finite fields of the form $F_q[x]/\Phi_r(x)$, Finite Fields Appl. **18**:4 (2012), 1615–1623.
10. *Popovych R.*, Elements of high order in finite fields of the form $F_q[x]/(x^m - a)$, Finite Fields Appl. **19**:1 (2013), 86–92.
11. *Stanica P.*, Good lower and upper bounds on binomial coefficients, J. Inequal. Pure Appl. Math., **2**:3 (2001), Art. 30.
12. *Voloch J.F.*, Elements of high order on finite fields from elliptic curves, Bull. Austral. Math. Soc. **81**:3 (2010), 425–429.

Стаття: надійшла до редколегії 30.04.2015
доопрацьована 10.09.2015
прийнята до друку 11.11.2015

LOWER BOUND FOR MULTIPLICATIVE ORDER OF ELEMENTS IN KUMMER EXTENSIONS OF FINITE FIELDS

Roman POPOVYCH

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str.,12, Lviv, 79013
e-mail: rombp07@gmail.coml

We construct explicitly elements with high multiplicative order in any Kummer extensions of finite fields.

Key words: finite field, multiplicative order, Kummer extension.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 140–144
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 140–144

УДК 512.552.13

КОМУТАТИВНІ E-АТОМНІ КІЛЬЦЯ

Андрій САГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: andrijsagan@gmail.com

Введено поняття e-атомного кільця. З'ясовано, що комутативне кільце Діріхле є e-атомним кільцем. Доведено, що комутативне e-атомне кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць, а також, що комутативне локальне e-атомне кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Ключові слова: евклідове кільце, кільце Діріхле, кільце Безу, елементарна редукція матриць, елементарно головне кільце.

1. Вступ. Досліджено комутативні кільця, над якими довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду (тобто вигляду, де кожен попередній діагональний елемент є повним дільником наступного) елементарними перетвореннями. Задачу знаходження необхідних і достатніх умов, які треба накласти на кільце, щоб довільна матриця над цим кільцем зводилась до канонічного діагонального вигляду домноженням на відповідні елементарні матриці (такі кільця назвали "кільця з елементарною редукцією матриць"), сформулював Б.В. Забавський у 1996 р. [5]. Ця проблема має своїм прототипом відому теорему Гауса (про еквівалентність довільної матриці над полем діагональній матриці з одиницями та нулями на головній діагоналі), результати Сміта (про зведення цілочисельних матриць до діагонального вигляду елементарними перетвореннями рядків і стовпців), дослідження Діксона, Веддербарна, ван дер Вердена, Джекобсона, Тейхмюллера та інших, які поширили результати Сміта на різні класи комутативних і некомутативних кілець (кільця Евкліда, області головних ідеалів і т.д.). Крім того, ця задача має тісний перетин із кільцями елементарних дільників (які у 1949 р. ввів до розгляду І. Капланський [3]), тобто кільцями, над якими довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду домноженням на відповідні оборотні матриці. Пізніше було знайдено приклади кілець елементарних дільників, які не є кільцями з елементарною редукцією матриць. Отож, задачу, яку ми розв'язуємо, можна сформулювати так: дослідження комутативних кілець елементарних дільників, над якими довільна оборотна матриця розкладається у добуток елементарних матриць.

2. Головні результати. Всі розглянуті в цій праці кільця є комутативними з відмінною від нуля одиницею.

Через $U(R)$ позначимо групу оборотних елементів кільця R, а через $GL_n(R)$ — групу всіх оборотних матриць порядку n з елементами кільця R.

Під елементарними матрицями з елементами кільця розуміємо квадратні матриці таких типів: 1) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; 2) матриці, відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю. Групу всіх елементарних матриць другого типу порядку n з елементами з кільця R позначатимемо $GE_n(R)$.

Кільце називають *елементарно головним* [1], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $d \in R$ і матриця $Q \in GE_2(R)$, що $(a, b)Q = (d, 0)$.

Кільцем Безу [2] називають кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним.

Під *атомом* [8] розуміємо елемент, який є необоротним і не зображується у вигляді добутку двох необоротних елементів.

Область R називатимемо *кільцем Діріхле* [4], якщо для елементів $a, b \in R$, таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$, що елемент $a + bt = q$, де q — атом кільця R.

Нехай R — кільце і $a, b \in R$. Пара (a, b) називається *e-атомною парою*, якщо існують матриця $Q \in GE_2(R)$ і атом $q \in R$, що $(a, b)Q = (q, m)$, де $m \in R$. Область R називається *e-атомним кільцем*, якщо для будь-яких $a, b \in R$ таких, що $aR+bR = R$ і $0 \neq c \in R$, існує $y \in R$, що $(a + by, c)$ є e-атомною парою.

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [5], якщо довільна матриця A над кільцем R *володіє елементарною редукцією*, тобто існують такі елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot P_2 \cdots P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_s = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Твердження 1. *Нехай R — кільце Діріхле, тоді R є e-атомним кільцем.*

Доведення. Нехай R — кільце Діріхле. Отримаємо $aR + bR = R$, де $a, b \in R$ і $0 \neq c \in R$. Зафіксуємо такий елемент $y \in R$, що $a + by = q$ — атом з R. Тоді маємо $(a + by, c)I_2 = (a + by, c)$, де I_2 — одинична матриця другого порядку над кільцем R. Це засвідчує, що пара $(a + by, c)$ є e-атомною. Тому R є e-атомним кільцем. □

Прикладами e-атомного кільця може слугувати кільце цілих чисел, кільце $R = \{z_0 + a_1x + \ldots + a_nx^x + \ldots | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}$ та ін.

Теорема 1. *Нехай R — кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) *R — e-атомне кільце;*
2) *для будь-яких $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ і $0 \neq c \in R$, існують $y \in R$ і скінченні набори g_i, r_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ елементів з R, що r_n є атомом, причому*

$$a + by = cg_1 + r_1,\ c = r_1g_2 + r_2,\ \ldots\ ,\ r_{n-2} = r_{n-1}g_n + r_n.$$

Доведення. (1) ⇒ (2) Нехай $aR+bR = R$, де $a, b \in R$ і $0 \neq c \in R$. Згідно з означенням e-атомного кільця існує $y \in R$, $Q \in GE_2(R)$ і атомний елемент $q \in R$ такі, що $(a + by, c)Q = (q, m)$, де $m \in R$. Оскільки матриця $Q \in GE_2(R)$, то згідно з [8] її можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_{n-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

де $u_1, u_2 \in U(R)$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(a+by, c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_{n-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (qu_1^{-1}, mu_2^{-1}).$$

Нехай $(a+by, c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 \end{pmatrix} = (r_1, c)$. Тоді $a+by = cg_1 + r_1$. Нехай $(r_1, c)\begin{pmatrix} 1 & -g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (r_1, r_2)$. За індукцією отримаємо

$$(r_{n-3}, r_{n-2})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = (qu_1^{-1}, r_{n-2}),$$

$$(qu_1^{-1}, r_{n-2})\begin{pmatrix} 1 & -g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (qu_1^{-1}, mu_2^{-1}).$$

Тоді $r_{n-3} = r_{n-2}g_{n-1} + qu_1^{-1}$ і $r_{n-2} = qu_1^{-1}g_{n-1} + mu_2^{-1}$. Нехай $qu_1^{-1} = r_{n-1}$ і $mu_2^{-1} = r_n$. Тому одержимо послідовність співвідношень

$$a+by = cg_1 + r_1,\ c = r_1g_2 + r_2,\ \ldots\ ,\ r_{n-2} = r_{n-1}g_n + r_n,$$

де $r_n \in R$ — атом.

(2) $\Rightarrow$ (1) За умовою для будь-яких $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ і $0 \neq c \in R$, існує $y \in R$ і скінченний ланцюг подільності

$$a+by = cg_1 + r_1,\ c = r_1g_2 + r_2,\ \ldots\ ,\ r_{n-2} = r_{n-1}g_n + r_n,$$

де $r_n \in R$ — атом. Тоді запишемо цей ланцюг у вигляді

$$(a+by, c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (r_n, r_{n-1}).$$

Нам залишилось довести, що матриця $F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ є елементарною. Отримали

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GE_2(R),$$

що й треба було довести. □

Твердження 2. *Будь-яке e-атомне кільце Безу є елементарно головним.*

Доведення. Нехай R — e-атомне кільце Безу. Розглянемо довільні елементи $a, b \in R$. Оскільки R — кільце Безу, то $aR + bR = dR$ для деякого елемента $d \in R$. Тоді існують такі елементи $a_0, b_0, u, v \in R$, що $a = da_0, b = db_0, au + bv = d$. Звідси отримуємо $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$. Нехай $c = a_0u + b_0v - 1$, тоді $a_0R + (b_0v - c)R = R$ і $dc = 0$. За умовою існує $x \in R$ і $Q \in GE_2(R)$, що $(a_0 + (b_0v - c)x, b_0)Q = (q, m)$, де q — атом з R і $m \in R$. Тоді за теоремою 6 [7] існує матриця $P \in GE_2(R)$, що $(q, m)P = (q, 0)$. Отже, отримаємо

$$(a + bvx, b)QP = d(a_0 + (b_0v - c)x, b_0)QP = d(q, 0) = (dq, 0).$$

Тоді
$$(a,b)\begin{pmatrix}1 & 0\\ vx & 1\end{pmatrix}GP=(dq,0).$$
Отже, R — елементарно головне кільце. □

Теорема 2. *Нехай R — е-атомне кільце. Тоді еквівалентні такі твердження:*
1) *R — кільце з елементарною редукцією матриць;*
2) *R — кільце Безу.*

Доведення. За твердженням 2 кільце R є елементарно головним, тому за твердженням 2 [6] для доведення достатньо розглянути матриці вигляду $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & o\end{pmatrix}\in M_2(R)$, де $aR+bR+cR=R$. Тоді існують $x,y,z\in R$, що $ax+by+cz=1$. Отже, $aR+(by+cz)R=R$. За умовою існує деяке $t\in R$, що $a+(by+cz)t=p$, де $p\in R$ і пара (p,b) є e-атомною. Тому
$$\begin{pmatrix}1 & zt\\ 0 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 0\\ yt & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & b\\ c & 0\end{pmatrix}.$$
Оскільки (p,b) — e-атомна пара, то існують $Q\in GE_2(R)$ і $d\in R$, що $(p,b)Q=(q,d)$, де q є атомом з R.

Отже,
$$\begin{pmatrix}p & b\\ c & 0\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}q & d\\ * & *\end{pmatrix}=C.$$
За теоремою 6 [7] матриця C, а отже, і матриця A володіє елементарною редукцією. Тому R — кільце з елементарною редукцією матриць.

Необхідність очевидна. □

Як наслідок отримаємо таку теорему.

Теорема 3. *Нехай R — кільце Діріхле. Тоді еквівалентними є такі твердження:*
1) *R — кільце з елементарною редукцією матриць;*
2) *R — кільце Безу.*

Комутативна область R називається *локальним е-атомним кільцем*, якщо для будь-яких $a,b\in R$, що $aR+bR=R$ і $0\neq c\in R$ хоча б одна з пар (a,c) або (b,c) є e-атомною парою.

Твердження 3. *Локально е-атомне кільце є е-атомним кільцем.*

Доведення. Нехай $aR+bR=R$ і $0\neq c\in R$. Тоді матимемо два випадки:
1) (a,c) є e-атомною парою. Тоді $(a+b\cdot 0,c)$ є e-атомною парою;
2) (a,c) не є e-атомною парою. Оскільки $aR+(a+b)R=R$ і (a,c) не є e-атомною парою, то $(a+b\cdot 1,c)$ — e-атомна пара. Отже, R є e-атомним кільцем.

□

Як наслідок отримаємо таку теорему.

Теорема 4. *Локально е-атомне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Література

1. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Euclidiens. / B. Bougaut — These de docteur troisieme cycle, 1976.
2. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings / M. Henriksen // Michigan Math. J. — 1955. — Vol. 156. — P. 159–163.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / I. Kaplansky // Trans. Amer. Mat. Sven. — 1949. — Vol. 66. — P. 464–491.
4. *Zabavsky B.V.* Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings / B.V. Zabavsky // Mat. Stud. — 2014. — Vol. 41 — P. 101–108.
5. *Zabavsky B.V.* Rings with elementary reduction matrix / B.V. Zabavsky – Ring Theory Conf., Miskolc, July 15-20, 1996.
6. *Zabavsky B.V.* Rings with elementary reduction of matrices / B.V. Zabavsky, O. M. Romaniv // Ukr. mat. journal — 2000. — Vol. 52, №12. — P. 1641–1649.
7. *Забавський Б. В.* О некоммутативних кольцах елементарних делителей / Б.В. Забавський // Укр. мат. журнал — 1987. — Vol. 39, №4. — P. 440–444.
8. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.

Стаття: надійшла до редколегії 23.09.2015
доопрацьована 27.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

COMMUTATIVE E-ATOMIC RINGS

Andrij SAGAN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: andrijsagan@gmail.com

A concept of e-atomic ring is introduced. It is shown that any commutative Dirichlet ring is an e-atomic ring. It is proved that any commutative e-atomic ring is a ring with elementary reduction of matrices, and that any commutative local e-atomic ring is a ring with elementary reduction of matrices.

Key words: Euclidean ring, Dirichlet ring, Bezout ring, elementary reduction of matrices, elementary principal ring.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 145–160
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 145–160

УДК 537.72

БАГАТОЧЛЕННА СТЕПЕНЕВА АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Юлія СТЕЦЬ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: vovylka@list.ru, m_m_sheremeta@list.ru

Знайдено умови на показники та коефіцієнти ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, при виконанні яких для логарифма максимального члена правильна асимптотична рівність $\ln\mu(\sigma) = T_1|\sigma|^{-\rho_1} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j|\sigma|^{-\rho_j} + (\tau + o(1))|\sigma|^{-\rho_n}, \quad \sigma \uparrow 0$, де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j = \overline{2, n-1}, \quad \tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad 0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1 \quad i \quad \dfrac{\rho_1+\rho_n}{2} > \rho_2$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, багаточленна асимптотика.

1. Вступ. Розглянемо ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

де (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$). Якщо абсциса абсолютної збіжності ряду (1) дорівнює $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$, то його зростання ототожнюють зі зростанням функції $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ при $\sigma \uparrow \sigma_a$. Важливу роль у дослідженні зв'язку між зростанням $M(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів відіграє максимальний член $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$. Дослідження зв'язків між зростанням $\ln\mu(\sigma, F)$ і поводженням у термінах двочленної асимтотики коефіцієнтів започатковано в [4], де зазначено необхідну та достатню умови на a_n, за якої у випадку цілих ($\sigma_a = +\infty$) рядів Діріхле $\ln\mu(\sigma, F)$ має двочленну показникову асимптотику вигляду $\ln\mu(\sigma, F) = T\exp\{\rho_1\sigma\} + (1 + o(1))\tau\exp\{\rho\sigma\}, \quad \sigma \to +\infty$, де $0 < \rho < \rho_1 < +\infty$, $T > 0$ і $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. О.М. Сумик подібну задачу розв'язала для двочленної степеневої асимптотики $\ln\mu(\sigma, F)$ для цілих рядів Діріхле і для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Загальну проблему про багаточленну показникову асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле розглянула О.М. Сумик [5]. Зокрема, було доведено, що для того, щоб $\ln\mu(\sigma, F) = \sum_{j=1}^{n-1} T_j\epsilon^{\rho_j\sigma} + (\tau + o(1))\epsilon^{\rho_n\sigma} \quad \sigma \to \infty$, де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R}, j = \overline{2, n-1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1$, $\dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leqslant -\frac{\lambda_n}{\rho_1} \ln \frac{\lambda_n}{\epsilon T_1 \rho_1} \sum_{j=1}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1}} + (\tau + \varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geqslant -\frac{\lambda_{n_k}}{\rho_1} \ln \frac{\lambda_{n_k}}{\epsilon T_1 \rho_1} + \sum_{j=1}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1}} + (\tau - \varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1}},$$

для всіх $k \geqslant k_0$ і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1 + \rho_n}{2\rho_1}}\right)$, $\quad k \to \infty$.

Мета нашої праці — дослідити, за яких умов на коефіцієнти a_n та показники λ_n ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності для його максимального члена правильна асимптотична рівність

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma \uparrow 0, \tag{2}$$

де $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = \overline{2, n-1}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1$, $\dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$.

Теорема 1. *Для того, щоб $\ln \mu(\sigma)$ мав багаточленну степеневу асимптотику вигляду (2) необхідно і достатньо, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leqslant T_1(\rho_1 + 1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 + 1}} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1 + 1}} + (\tau + \varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1 + 1}}; \tag{3}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geqslant k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geqslant T_1(\rho_1 + 1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 + 1}} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1 + 1}} + (\tau - \varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1 + 1}} \tag{4}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n + \rho_1 + 2}{2(\rho_1 + 1)}}\right) \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Для доведення теореми будемо використовувати такі допоміжні результати.

Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega(0)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді функція Ψ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Звідси випливає, що обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до 0 на $(-\infty, 0)$.

Лема 1 ([1-2]). *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$. Для того, щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant n_0$.*

Лема 2 ([2-3]). *Для додатних чисел $a < b$ правильна нерівність $G_1(a, b, \Phi) < G_2(a, b, \Phi)$, де*

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt, \quad G_2(a, b, \Phi) = \Phi\biggl(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt\biggr).$$

Лема 3 ([2]). *Нехай $\Phi_j \in \Omega(0)$ $(j = 1, 2)$ і*

$$\Phi_1(\sigma) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi_2(\sigma) \tag{6}$$

для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Тоді

$$\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) \tag{7}$$

для всіх $n \geqslant n_0$ та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geqslant -\lambda_{n_k} \Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) \tag{8}$$

і

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geqslant \Phi_1\biggl(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t) dt\biggr). \tag{9}$$

Лема 4 ([2]). *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$ і $\ln |a_{n_k}| \leqslant -\lambda_{n_k} \Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \geqslant k_0$ правильна нерівність*

$$\ln \mu(\sigma, F) \geqslant \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)). \tag{10}$$

2. Асимптотика функції φ.

Отже, нехай $\Phi \in \Omega(0)$ — така функція, що

$$\Phi(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \leqslant \sigma < 0, \tag{11}$$

де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = \overline{2, n-1}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \rho_n < \ldots < \rho_2 < \rho_1$ і $\dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$.

Для функції (11) асимптотику оберненої функції φ описує лема.

Лема 5. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що виконується (11), то для функції φ при $x \to +\infty$ правильна така асимптотична рівність:*

$$\varphi(x) = -\biggl(\frac{x}{T_1\rho_1}\biggr)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)} \biggl(\frac{x}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}} -$$

$$- \frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)} \biggl(\frac{x}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\Phi'(\sigma)=\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{|\sigma|^{\rho_j+1}}+\frac{\tau\rho_n}{|\sigma|^{\rho_n+1}},$$

то для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння

$$\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{|\sigma|^{\rho_j+1}}+\frac{\tau\rho_n}{|\sigma|^{\rho_n+1}}=x. \tag{12}$$

Легко побачити, що розв'язок $\sigma=\sigma(x)$ цього рівняння задовольняє умову

$$\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}(1+o(1))=x \quad (x\to+\infty),$$

тому будемо шукати його у вигляді

$$|\sigma|=\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x), \tag{13}$$

де

$$\alpha=\alpha(x)=o(x^{-\frac{1}{\rho_1+1}}) \quad (x\to+\infty).$$

Підставляючи (13) в (12), отримаємо

$$\frac{T_1\rho_1}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x)\right)^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x)\right)^{\rho_j+1}}+$$
$$\frac{\tau\rho_n}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x)\right)^{\rho_n+1}}=x,$$

тобто

$$\frac{x}{\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho_j+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_j+1}}+$$
$$+\frac{\tau\rho_n}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho_n+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_n+1}}=x,$$

звідки

$$\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_1+1)}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_j+1)}+$$
$$+\frac{\tau\rho_n}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_n+1)}=1.$$

Звідси при $x \to +\infty$ отримуємо

$$1-(\rho_1+1)\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^2 x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\right)+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1-(\rho_j+1)\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^2 x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\right)\right)+$$
$$+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}=1,$$

тобто

$$\alpha=\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\rho_j T_j(\rho_j+1)}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\alpha+\right.$$
$$\left.+O\left(\alpha^2 x^{\frac{\rho_j-\rho_1+1}{\rho_1+1}}\right)\right)+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^2 x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\right),$$
$$x\to+\infty. \quad (14)$$

Оскільки $\alpha(x)x^{\frac{1}{\rho_1+1}}\to 0 \quad (x\to+\infty)$, то звідси

$$\alpha=\frac{\rho_2 T_2(1+o(1))}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}=\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta, \quad (15)$$

де

$$\beta=\beta(x)=o(x^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}), \quad x\to+\infty,$$

і отже, з (14) отримуємо

$$\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta=$$
$$=\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\rho_j T_j(\rho_j+1)}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta\right)+O\left(x^{\frac{2\rho_2-3\rho_1+\rho_j-1}{\rho_1+1}}\right)\right)+$$
$$+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right), \quad x\to+\infty,$$

звідки легко випливає, що при $x\to+\infty$

$$\beta(x)=\sum_{j=3}^{n-1}\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$
$$-(1+o(1))\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_j T_j(\rho_j+1)}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j+\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{2\rho_2-3\rho_1+\rho_j-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right). \quad (16)$$

Оскільки $\rho_n > 2\rho_2-\rho_1$, то
$\rho_n-\rho_1-1 > 2(\rho_j-\rho_1)-1 > 3(\rho_j-\rho_1)-1 > ... > n(\rho_j-\rho_1)-1, \quad j=\overline{2,n-1}$
і з (16) отримуємо

$$\beta(x)=\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=3}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}, \quad x\to+\infty.$$

Тому з (13) і (15) випливає твердження леми 5. □

Використовуючи лему 5, знайдемо асимтотичні формули для $\Phi(\varphi(x))$ і $x\Psi(\varphi(x))$, де $\Psi(\sigma)=\sigma-\dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$.

Лема 6. *Якщо функція $\Phi\in\Omega(0)$ така, що виконується (11), то при $x\to+\infty$ правильні такі асимптотичні рівності*

$$x\Psi(\varphi(x))=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-$$
$$-(\tau+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \quad (17)$$

і

$$\Phi(\varphi(x))=T_1\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}. \quad (18)$$

Доведення. Оскільки $x\Psi(\varphi(x))=\displaystyle\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt+const$, то при $x\to+\infty$

$$x\Psi(\varphi(x))=-\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x}t^{-\frac{1}{\rho_1+1}}dt-$$
$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x}t^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}dt-$$
$$-\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x}t^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}dt+const=$$
$$=-\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_1}x^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_j}x^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_n}x^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+const=$$

$$=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-(\tau+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}},$$

тобто отримуємо асимптотичну рівність (17).

Використовуючи рівність $\Phi(\varphi(x))=x\varphi(x)-x\Psi(\varphi(x))$, отримуємо асимптотичну рівність (18).

3. Асимптотична поведінка $G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)$ і $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$.

Нехай $0<t_k\uparrow+\infty \quad (k\to\infty)$ з означення $G_1(a,b,\Phi)$ і з огляду на (18) отримаємо

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt=$$

$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(T_1\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right)\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left(T_1\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{-\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt+\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{\rho_j-2\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt+$$

$$\left.+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{\rho_n-2\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt\right)=$$

$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left\{T_1(\rho_1+1)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$\left.+(\tau+o(1))\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\right\},\quad k\to\infty.$$

Припустимо, що $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$. Тоді при $k\to\infty$ одержуємо

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{t_k(1+\theta_k)}{\theta_k}\left(T_1(\rho_1+1)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+(\tau+o(1))\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\Bigg)=$$

$$=\frac{(1+\theta_k)}{\theta_k}\Bigg(T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+(\tau+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\Bigg). \quad (19)$$

□

Звідси легко випливають дві леми.

Лема 7. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j}\to+\infty$ *при* $j\to\infty$, *то для цієї послідовності при* $j\to\infty$

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Лема 8. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j}\to\theta\in(0,+\infty)$ *при* $j\to\infty$, *то для цієї послідовності при* $j\to\infty$

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right).$$

Припустимо тепер, що $\theta_k\to 0\quad(k\to\infty)$. Тоді з огляду на (19)

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$

$$\times\left(1-\left(1-\frac{\theta_k}{\rho_1+1}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}-\frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3}+O(\theta_k^4)\right)\right)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$

$$\left(1-\left(1+\frac{(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k}{\rho_1+1}+\frac{(\rho_j-2\rho_1-2)(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)\right)\right)+$$

$$+(\tau+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1-\left(1+\frac{(\rho_n-\rho_1-1)\theta_k}{\rho_1+1}+O(\theta_k^2)\right)\right)\Bigg)=$$

$$=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\left(1-\frac{(\rho_1+2)\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)\right)-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\left(T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\left(\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}+\right.\right.$$

$$+\frac{(\rho_j-2\rho_1-2)(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^2)\Big)\Big)-$$
$$-\frac{(\tau+o(1))(\rho_n-\rho_1-1)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}},\quad k\to\infty.$$

Звідси випливає така лема.

Лема 9. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (11), *а* $\theta_k\to 0\quad (k\to\infty)$. *Тоді при* $k\to\infty$

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)}{6(\rho_1+1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j(\rho_1+1-\rho_j)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\theta_k+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1+1-\rho_n)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2).$$

Для того, щоб отримати асимптотичне поводження величини $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$ дослідимо спочатку поводження величини

$$\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt. \tag{20}$$

Як видно з доведення рівності (17), одержимо

$$|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}(T_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}+\frac{(\tau+o(1))}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}.$$

Якщо $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$, то при $k\to\infty$ отримуємо

$$|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{T_1\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+$$
$$+\frac{(\tau+o(1))}{T_1\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}. \tag{21}$$

Припустимо, що існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty \quad (j \to \infty)$. Для цієї послідовності з огляду на (21) при $j \to \infty$ одержимо

$$|\varkappa(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi)| = \frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} \theta_{k_j}^{-\frac{1}{\rho_1+1}}(1+o(1)),$$

оскільки

$$G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \Phi(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)) = \frac{T_1(1+o(1))}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)|^{\rho_1}}, \quad k \to \infty,$$

то звідси легко отримуємо таку лему.

Лема 10. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty$ при $j \to \infty$, то для цієї послідовності*

$$G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \quad (j \to \infty).$$

Подібно доводиться така лема.

Лема 11. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta \in (0, +\infty)$ при $j \to \infty$, то для цієї послідовності при $j \to \infty$*

$$G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) =$$
$$= (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{((1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta}\right)^{-\rho_1}.$$

Припустимо тепер, що $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$. Тоді з огляду на (19) отримаємо

$$|\varkappa(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi)| = \frac{\rho_1+1}{\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\theta_k - \frac{\rho_1\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho_1(\rho_1+2)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3}+O(\theta_k^4)-1\right)+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{T_1\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1+\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\theta_k-\right.$$
$$\left.-\frac{\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)-1\right)+\frac{(\tau+o(1))}{T_1\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\times$$
$$\times\left(1+\frac{\rho_n}{\rho_1+1}\theta_k+O(\theta_k^2)-1\right) = \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}+O(\theta_k^3 t_k^{-\frac{1}{\rho_1+1}})+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$
$$\left.+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}})\right)+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}} = \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}+\right.$$

$$+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\Bigg),\quad k\to\infty. \quad (22)$$

Через $B(t_k,\theta_k)$ позначимо таку величину:

$$B(t_k,\theta_k)=-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Тому при $k\to\infty$

$$|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1+B(t_k,\theta_k)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right).$$

Оскільки $B(t_k,\theta_k)\to 0 \quad (k\to\infty)$, то для $p>0$ з (22) отримуємо

$$\frac{1}{|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|^p}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1+B(t_k,\theta_k)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right\}^{-p}=$$

$$=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1-pB(t_k,\theta_k)+\frac{p(p+1)}{2}B^2(t_k,\theta_k)+O\Big(B^3(t_k,\theta_k)\Big)+O(\theta_k^3)+\right.$$

$$\left.+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right\}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1+\frac{p\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{p(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}-\right.$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{pT_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{pT_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{p(p+1)}{2}\frac{\theta_k^2}{4(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3)+$$

$$\left.+O(\theta_k t_k^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}})\right\},\quad k\to\infty,$$

а оскільки

$$G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))=$$

$$=\frac{T_1}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_j}}+\frac{\tau}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_n}}\quad(k\geqslant k_0),$$

то звідси одержуємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+\tau\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}-$$
$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{T_1\rho_1\theta_k^2}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\tau\rho_n}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty.$$

Отже, доведемо такий аналог леми 9.

Лема 12. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (11), *а* $\theta_k\to 0\quad (k\to\infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+5)}{24(\rho_1+1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j(\rho_1+1-\rho_j)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\theta_k+$$
$$+\frac{(\rho_1+1-\rho_n)(\tau+o(1))}{\rho_1+1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty,$$

З лем 9 і 12 отримуємо таку лему.

Лема 13. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (11), *а* $\theta_k\to 0\quad (k\to\infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)-G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2+$$
$$+O(\theta_k^2t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+o\left(t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right),\quad k\to\infty,$$

Використовуючи леми 7 – 13, доведемо ще таку лему.

Лема 14. *Нехай*

$$\Phi_1(\sigma)=\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}}+\frac{\tau-\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}},\quad \sigma_0\leqslant\sigma<0,$$

$$\Phi_2(\sigma)=\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}}+\frac{\tau+\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}},\quad \sigma_0\leqslant\sigma<0.$$

Припустимо, що $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$ *і для всіх* $k \geqslant k_0$

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geqslant \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)). \tag{23}$$

Тоді $\theta_k \to 0$ *і*

$$\theta_k^2 \leqslant \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\varepsilon + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}} + o\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Оскільки $\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma) - \dfrac{2\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}}$, $\Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)) =$ $= G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$, то з (23) отримаємо

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geqslant G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) - \frac{2\varepsilon}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n}}. \tag{24}$$

Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \theta_k = +\infty$. Тоді існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \infty \quad (j \to \infty)$, а для цієї послідовності за лемами 7 і 10 і з того, що $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n} = (1+o(1))\left(\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\right)^{\rho_n} \cdot \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \cdot \theta_k^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \quad (k \to \infty)$ одержимо

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \geqslant (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad j \to \infty,$$

що неможливо.

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta (j \to \infty)$, а для цієї послідовності з огляду на леми 8 і 11 і асимптотику $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n} = (1+o(1))\left(\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\right)^{\rho_n} \cdot \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \cdot \left(\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}{\theta}\right)^{\rho_n} \quad (k \to \infty)$ правильна асимптотична нерівність

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geqslant$$
$$(1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}, \quad j \to \infty,$$

звідки випливає, що

$$(\rho_1+1)\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geqslant \left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}.$$

Подібно, використовуючи нерівність $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) < G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$ і леми 7 та 10, отримаємо протилежну нерівність. Тому θ задовольняє рівняння

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}{\theta^{\rho_1+1}}\left((1+\theta)^{\frac{1}{\rho_1+1}}-1\right)\left((1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1\right)^{\rho_1} = \frac{\rho_1^{\rho_1}}{(\rho_1+1)^{\rho_1+1}}. \tag{25}$$

Легко перевірити, що $\theta = 0$ є розв'язком рівняння (25) і як зазначено в [6] це рівняння не має додатних коренів.

Отже, $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$ отримуємо, що $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n} = (1+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}$ $(k \to \infty)$, а у цьому випадку з огляду на (24)

$$\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 \leqslant \frac{2\varepsilon}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right) + \\ + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right)$$

при $k \to \infty$. Тому

$$\frac{T_1\rho_1\theta_k^2}{8(\rho_1+1)} \leqslant 2\varepsilon\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right) + \\ + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) \quad (k \to \infty),$$

звідки випливає твердження леми 14. □

4. Доведення теореми 1. Почнемо з необхідності. З (2) випливає, що для кожного $\varepsilon \in (0, |\tau|)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0)$ отримаємо

$$\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau-\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}} \leqslant \ln\mu(\sigma, F) \leqslant \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}},$$

тобто виконується умова (6) леми 3 з

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau-\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}}.$$

За цією лемою правильні нерівності (6)–(8). Але за лемою 6

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} - \\ - (\tau+\varepsilon+o(1))\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}, \quad n \to \infty,$$

$$\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} - \\ - (\tau-\varepsilon+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty,$$

а за лемою 14 з нерівності (5) випливає

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 = \theta_k^2 \leqslant \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\varepsilon+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty,$$

тобто

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} \leqslant 4\sqrt{\rho_1+1}(\sqrt{\varepsilon}+o(1))(T_1\rho_1)^{\frac{-\rho_n-1}{2(\rho_1+1)}}\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}, \quad k\to\infty.$$

Завдяки довільності ε з цих співвідношень випливають співвідношення (3) – (5).

Доведемо достатність умов (3) – (5). Використовуючи лему 1 і лему 6, неважко довести, що з огляду на довільність ε з умови (3) випливає асимптотична нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \leqslant \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma\uparrow 0. \tag{26}$$

Далі за лемою 4 і лемою 13 з нерівності (4) для всіх $\sigma\in[\varphi_1(\lambda_{n_k}),\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\geqslant k_0$ отримаємо

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi) - G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)) = \Phi_1(\sigma) -$$
$$-\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 + O(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + o(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}), \quad k\to\infty,$$

де з огляду на умову (5)

$$\theta_k = \frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n-\rho_1}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k\to\infty.$$

Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k})\leqslant\sigma\leqslant\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k}\leqslant\Phi_1'(\sigma)\leqslant\lambda_{n_{k+1}}$ і з (5) матимемо

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \Phi_1(\sigma) + o((\Phi_1'(\sigma))^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}) =$$
$$= \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_n}}\right), \quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки, завдяки довільності δ , отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma\uparrow 0. \tag{27}$$

З (26) і (27) випливає (2). Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Умова $\dfrac{\rho_1+\rho_n}{2} > \rho_2$ у теоремі 1 є істотною. Для випадку $n=3$ це доведено в [7].

Зауваження 2. В [8] доведено, що для того, щоб для кожного абсолютно збіжного у півплощині $\{s : Res < 0\}$ ряду Діріхле (1) зі заданою послідовністю показників (λ_n) співвідношення (2) було рівносильне співвідношенню

$$\ln M(\sigma,F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m}\frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho_n}}, \quad \sigma\uparrow 0, \tag{28}$$

необхідно і достатньо, щоб $\ln n = o(\lambda_n^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}})$ при $n\to\infty$. Об'єднуючи цей результат з теоремою 1, отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $\dfrac{\rho_1+\rho_n}{2} > \rho_2$, *а* $\ln n = o(\lambda_n^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}})$ *при* $n\to\infty$. *Тоді для того, щоб правильним було співвідношення* (28), *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконувались умови 1) і 2) теореми 1.*

Література

1. *Шеремета М.Н.,* О производной ряда Дирихле / М.Н. Шеремета, С.И. Федыняк // Сибирск. матем. журн. — 1998. — Т.39, N 1. — С. 206–223.
2. *Шеремета М.М.,* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / М.М. Шеремета, О.М. Сумик // Матем. студії. — 1999. — Т.11, N 1. — С. 41–47.
3. *Заболоцький М.В.,* Узагальнення теореми Ліндельофа / М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета // Укр. матем. журн. — 1998. — Т.50, N 9. — С. 1177–1192.
4. *Шеремета М.Н.* Двухчленная асимптотика целых рядов Дирихле / М.Н. Шеремета // Теория функцый, функц. анализ и их приложения — 1990. — Т.54. — С. 16–25.
5. *Sumyk O.M.* On n-member asymptotics for logarifm of the maximal term of entire Dirichlet series / O.M. Sumyk // Matem. Studii. — 2001. — Vol.15, N 2. — P. 200–208.
6. *Sumyk O.M.* A connection between the growth of Young conjugate functions / O.M. Sumyk // Nonlinear boundary problems. Sbornik nauch. trudov. — 2001. — Vol.11. — P. 197–201.
7. *Sheremeta M.M.,* On logarithm of maximal term of Dirichlet series converging in a half-plane: three term power asymptotics / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets // Matem. Studii. — 2014. — Vol.41, N 1. — P. 28–44.
8. *Sheremeta M.M. ,* Estimates of a sum of Dirichlet series / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // Ukrainian Matem. visnyk. — 2013. — Vol.10. — P. 234–253.

Стаття: надійшла до редколегії 01.04.2015
доопрацьована 29.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

MANY-TERM POWER ASYMPTOTICS FOR LOGARITHM OF THE MAXIMAL TERM OF A DIRICHLET SERIES ABSOLUTE CONVERGENT IN THE HALFPLANE

Yuliya STETS, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000
e-mail: vovylka@list.ru, m_m_sheremeta@list.ru

We have found conditions on exponents and coefficients of Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence, under which for logarithm of the maximal term the asymptotic equality $\ln\mu(\sigma) = T_1|\sigma|^{-\rho_1} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j|\sigma|^{-\rho_j} + (\tau+o(1))|\sigma|^{-\rho_n}$, $\sigma\uparrow 0$, where $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, j=\overline{2,n-1}$, $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $0<\rho_n<...<\rho_2<\rho_1$ and $\dfrac{\rho_1+\rho_n}{2} > \rho_2$ is true.

Key words: Dirichlet series, maximal term, many-term asymptotics.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 161–165
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 161–165

УДК 517.53

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ВИРОДЖЕНОЇ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Юрій ТРУХАН, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: yurik93@mail.ru, m m sheremeta@list.ru

Досліджено обмеженість l-індексу виродженої гіпергеометричної функції.

Ключові слова: ціла функція, обмеженість l-індексу, вироджена гіпергеометрична функція.

Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

— ціла функція, а l — додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція. Функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом функції f і позначається через $N(f,l)$.

Для $G \subset \mathbb{C}$ нехай $N(f,l;G)$ — l-індекс функції f в G, тобто найменше з таких чисел $N \in \mathbb{Z}_+$, що (2) виконується для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$.

Виродженою гіпергеометричною функцією називається [2] функція

$$F(z) = F(\alpha, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right) \frac{z^k}{k!}, \quad \gamma \ne 0, -1\ -2, \ldots. \tag{3}$$

В [3] доведено таке: якщо параметри функції (3) задовольняють умову $0 < \alpha \le \le \gamma$, то для кожної похідної $F^{(n)}$, $n \ge 0$ правильна нерівність $N(F^{(n)}, l_n) \le 1$, де $l_n(r) \equiv 4 \max\{\sqrt{e}/(2-\sqrt{e}), \gamma + n + 1\}$. Виникає природне запитання, яким буде l-індекс функції (3) у випадку, коли $0 < \gamma \le \alpha$.

Щоб відповісти на це питання, ми використаємо ту обставину, що вироджена гіпергеометрична функція є [2] розв'язком диференціальнго рівняння
$$zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0, \tag{4}$$
і доведену в [3] лему.

Лема 1. *Якщо функція (1) аналітична в* $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z : |z| \le R\}$, $f_0 = 1$ *і*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| R^n \le a(R) < 1, \tag{5}$$
то $N(f, l; \mathbb{D}_R) \le 1$ *з* $l(|z|) = \dfrac{1 + a(R)}{(1 - a(R))(R - |z|)}$.

Якщо $z \in \mathbb{D}_{\xi R}$, $0 < \xi < 1$, то $R - |z| \ge (1 - \xi)R$ і з леми 1 випливає, що $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) \le 1$ з $l(|z|) \equiv \dfrac{1 + a(R)}{(1 - \xi)R(1 - a(R))}$, бо якщо $N(f, l_*, G) \le N$ і $l_*(r) \le l^*(r)$, то неважко довести [1], що $N(f, l^*, G) \le N$. Тому правильна така лема.

Лема 2. *Якщо функція (1) ціла і* $f_0 = 1$, *то для кожних* $\xi \in (0, 1)$ *і* $R \in (0, +\infty)$ *за умови (5) правильна нерівність* $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) \le 1$ *з* $l(|z|) \equiv \dfrac{1 + a(R)}{(1 - \xi)R(1 - a(R))}$.

За умови $0 < \gamma \le \alpha$ отримаємо $\dfrac{j + \alpha}{j + \gamma} \le \dfrac{\alpha}{\gamma}$ для всіх $j \ge 0$. Тому для коефіцієнтів f_k функції (3) правильна оцінка $|f_k| \le \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^k$ для всіх $k \ge 1$, і отже, якщо $R = \dfrac{\gamma\eta}{\alpha}$, де $\eta \in (0, \ln 2)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k| R^k \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\eta^k}{k!} = e^{\eta} - 1 = a(R) < 1$. Якщо тепер $|z| \le \xi R = \xi\dfrac{\gamma\eta}{\alpha}$, де $\xi \in (0, 1)$, то звідси за лемою 2 отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову* $0 < \gamma \le \alpha$, *то для кожних* $\eta \in (0, \ln 2)$ *і* $\xi \in (0, 1)$ *правильна нерівність* $N(F, l; \mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha}) \le 1$ *з*
$$l(|z|) \equiv \frac{\alpha e^{\eta}}{(2 - e^{\eta})(1 - \xi)\gamma\eta}. \tag{6}$$

Позначимо
$$L = L(\alpha, \gamma, \xi, \eta) = \max\left\{1 + \frac{\alpha}{\xi\eta}, \frac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}\right\}.$$
Доведемо тепер, що функція F в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha}$ є обмеженого l-індексу з $l(|z|) \equiv L$. Для цього спочатку зауважимо, що для всіх $m \ge 0$
$$\frac{1 + (m + \gamma)\alpha/(\xi\gamma\eta)}{(m + 2)} \le \frac{1}{2}L. \tag{7}$$
Справді, функція у лівій частині нерівності (7) спадає за змінною m за умови $2\alpha - \xi\eta\gamma - \gamma\alpha < 0$, тому не перевищує $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\alpha}{\xi\eta}\right)$ і зростає у протилежному випадку, і отже, не перевищує $\dfrac{1}{2}\dfrac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}$.

Правильна також нерівність

$$\frac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma} \le L^2. \tag{8}$$

Справді, якщо $\gamma \le 1$, то $\dfrac{4\alpha^2}{(\xi\eta\gamma)^2} \ge \dfrac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma}$. Якщо ж $\gamma \ge 1$, то $\dfrac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma} \le \dfrac{\alpha^2}{\xi\eta} \le \dfrac{\alpha^2}{(\xi\eta)^2} \le$ $\le \left(1+\dfrac{\alpha}{\xi\eta}\right)^2$.

Доведемо, нарешті, що для всіх $m \ge 1$

$$\frac{2(m+\alpha)\alpha}{(m+2)(m+1)\xi\eta\gamma} \le L^2. \tag{9}$$

Якщо $\alpha \ge 1$, то вираз у лівій частині нерівності (9) спадає за змінною m і тому не перевищує $\dfrac{\alpha^2}{\xi\eta\gamma}$. Використовуючи (8), отримуємо (9). Якщо ж $\alpha \le 1$, то $\dfrac{2(m+\alpha)\alpha}{(m+2)(m+1)\xi\eta\gamma} \le \dfrac{2\alpha}{(m+2)\xi\eta\gamma} \le \dfrac{\alpha}{\xi\eta\gamma} \le \dfrac{4\alpha^2}{(\xi\eta\gamma)^2}$.

Підставляючи F у рівняння (4), для $|z| \ge \xi\gamma\eta/\alpha$ одержимо

$$|F''(z)| \le \left(1+\frac{\gamma}{|z|}\right)|F'(z)| + \frac{\alpha}{|z|}|F(z)| \le \left(1+\frac{\gamma\alpha}{\xi\gamma\eta}\right)|F'(z)| + \frac{\alpha^2}{\xi\gamma\eta}|F(z)|,$$

звідки, використовуючи (7) з $m=0$ та (8),

$$\frac{|F''(z)|}{2!L^2} \le \frac{1+\dfrac{\alpha}{\xi\eta}}{2L}\frac{|F'(z)|}{1!L} + \frac{\dfrac{\alpha^2}{\xi\gamma\eta}}{2L^2}|F(z)| \le \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!L}, |F(z)|\right\}. \tag{10}$$

Якщо підставимо F у (4) і продиференціюємо $m \ge 1$ раз, то отримаємо

$$zF^{(m+2)}(z) + (m+\gamma-z)F^{(m+1)}(z) - (m+\alpha)F^{(m)}(z) \equiv 0, \tag{11}$$

звідки, як вище, використовуючи (7) та (9),

$$\frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!L^{m+2}} \le \frac{1+\dfrac{(m+\gamma)\alpha}{\xi\gamma\eta}}{(m+2)L}\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!L^{m+1}} + \frac{\dfrac{(m+\alpha)\alpha}{\xi\gamma\eta}}{(m+2)(m+1)L^2}\frac{|F^{(m)}(z)|}{m!L^m} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!L^{m+1}}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!L^m}\right\}. \tag{12}$$

З (10) і (12) легко випливає, що для всіх $n \ge 0$

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!L^n} \le \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!L}, |F(z)|\right\},$$

тобто правильне таке твердження.

Твердження 2. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову $0 < \gamma \le \alpha$, то для кожних $\eta \in (0, \ln 2)$ і $\xi \in (0,1)$ правильна нерівність $N(F, l; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha}) \le 1$ з $l(|z|) \equiv \max\left\{1+\dfrac{\alpha}{\xi\eta}, \dfrac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}\right\}$.*

Використовуючи зауваження після леми 1, отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову $0 < \gamma \le \alpha$, то для кожних $\eta \in (0, \ln 2)$ і $\xi \in (0, 1)$ правильна нерівність $N(F, l) \le 1$ з*

$$l(|z|) \equiv \max\left\{\frac{\alpha e^{\eta}}{(2-e^{\eta})(1-\xi)\gamma\eta},\, 1+\frac{\alpha}{\xi\eta},\, \frac{2\alpha}{\xi\eta\gamma}\right\}. \tag{13}$$

Якщо виберемо $\xi = \dfrac{2(2-e^{\eta})}{4-e^{\eta}}$, то за умови $\eta \in (0, \ln 2)$ матимемо $\xi \in \left(0,\, \dfrac{2}{3}\right)$ і

$$\frac{\alpha e^{\eta}}{(2-e^{\eta})(1-\xi)\gamma\eta} = \frac{2\alpha}{\xi\eta\gamma} = \frac{\alpha(4-e^{\eta})}{\eta\gamma(2-e^{\eta})},$$

і отже, з (13) отримаємо

$$l(|z|) \equiv \max\left\{\frac{\alpha(4-e^{\eta})}{\eta\gamma(2-e^{\eta})},\, 1+\frac{\alpha}{\eta}\frac{4-e^{\eta}}{2(2-e^{\eta})}\right\}.$$

Можемо також довільно вибирати $\eta \in (0, \ln 2)$. Для $\eta = \ln(3/2)$ отримуємо $\dfrac{4-e^{\eta}}{\eta(2-e^{\eta})} = \dfrac{5}{\ln(3/2)} < \dfrac{25}{2}$. Тому з теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції задовольняють умову $0 < \gamma \le \alpha$, то правильна нерівність $N(F, l) \le 1$ з*

$$l(|z|) \equiv \max\left\{1+\frac{25\alpha}{4},\, \frac{25\alpha}{2\gamma}\right\}.$$

Зауважимо таке: оскільки [3] для функції (3) і $n \ge 1$ похідна $F^{(n)}$ має l-індекс такий, як і функція

$$F_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=n}^{k+n-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!},$$

а її коефіцієнти не перевищують $\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^k$ для всіх $k \ge 1$, то згідно з доведенням твердження 1 для будь-яких $\eta \in (0, \ln 2)$ і $\xi \in (0, 1)$ правильна нерівність $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}_{\xi\gamma\eta/\alpha}) \le 1$, де $l(|z|)$ набуває вигляду (6).

З іншого боку, для кожного фіксованого $n \ge 1$ і всіх $m \ge 0$ з тотожності (11) одержуємо

$$zF^{(m+n+2)}(z) + (m+n+\gamma-z)F^{(n+m+1)}(z) - (m+n+\alpha)F^{(n+j)}(z) \equiv 0. \tag{14}$$

Тотожність (14) відрізняється від (11) тим, що тепер замість γ стоїть $n+\gamma$, а замість α стоїть $n+\alpha$. Тому, як вище, для кожних $\eta \in (0, \ln 2)$ і $\xi \in (0, 1)$ отримуємо нерівність $N(F^{(n)}, l; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{(\xi\gamma\eta/\alpha)}) \le 1$ з $l(|z|) \equiv \max\left\{1+\dfrac{n+\alpha}{\xi\eta},\, \dfrac{2(n+\alpha)}{\xi\eta(n+\gamma)}\right\}$.

Отже, якщо $0 < \gamma \le \alpha$, то для кожних $\eta \in (0, \ln 2)$ і $\xi \in (0, 1)$ правильна нерівність $N(F^{(n)}, l) \le 1$ з

$$l(|z|) \equiv \max\left\{\frac{\alpha e^{\eta}}{(2-e^{\eta})(1-\xi)\gamma\eta},\, 1+\frac{n+\alpha}{\xi\eta},\, \frac{2(n+\alpha)}{\xi\eta(n+\gamma)}\right\}.$$

Література

1. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index / M.M. Sheremeta – Lviv: VNTL Publishers. — 1999. — 141 p.
2. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции / Д.С. Кузнецов — М.: Высш. школа. — 1965. — 423 с.
3. *Шеремета З.М.* Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами / З.М. Шеремета, М.М. Шеремета // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2006. — Вип. 66. — С. 208–213.

Стаття: надійшла до редколегії 10.02.2014
доопрацьована 27.05.2014
прийнята до друку 11.11.2015

ON THE l-INDEX BOUNDEDNESS OF CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION

Yuriy TRUKHAN, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: yurik93@mail.ru, m m sheremeta@list.ru

The boundedness of l-index of a confluent hypergeometric function is investigated.

Key words: entire function, l-index boundedness, confluent hypergeometric function.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 166–176
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 166–176

УДК 514.763.4

КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО-КЕЛЕРОВИХ МНОГОВИДІВ

Євген ЧЕРЕВКО

Одеський національний економічний університет,
вул. Преображенська, 8, Одеса, 65082
e-mail: cherevko@usa.com

Розглянуто конформні відображення локально конформно-келерових многовидів. Отримано інваріанти таких відображень. Також знайдено вирази тензора ріманової кривини та тензора Річчі конформно-плоских локально конформно-келерових многовидів.

Ключові слова: келерові многовиди, локально конформно-келерові многовиди, форма Лі(Lee form), конформні відображення, тензор ріманової кривини, тензор Річчі.

1. Вступ. Предметом вивчення у цій статті є локально конформно-келерові многовиди такі, що $dim(M) = n = 2m > 2$. Конформно-келеровим многовидам присвячено праці багатьох дослідників. Локально конформно-келерові многовиди розглядали [13], [2], [5]. Варто згадати енциклопедичну працю у цьому напрямі [11]. Геодезичні відображення локально конформно-келерових многовидів вивчали у [5], де виявили, що конформно-келерові многовиди не допускають нетривіальних геодезичних відображень на майже ермітові простори з умовою зберігання комплексної структури. З іншого боку, відомо, що конформна відповідність двох келерових многовидів, необхідно є гомотетією [14]. Мета нашої праці — дослідити проблеми конформних відображень локально конформно-келерових многовидів.

2. ЛКК-многовиди. Найперше подамо декілька необхідних означень [1].

Означення 1. *Майже комплексною структурою J називають такий афінор J^i_j, що:*

$$J^i_\alpha J^\alpha_j = -\delta^i_j. \tag{1}$$

Тут δ^i_j — символ Кронекера.

Означення 2. *Многовид, на якому задано майже комплексну структуру J, називають майже комплексним многовидом.*

Означення 3. *Майже комплексний многовид є майже ермітовим, якщо на ньому задана ермітова метрика*

$$J_i^\alpha J_j^\beta g_{\alpha\beta} = g_{ij}. \tag{2}$$

Майже ермітовий многовид позначаємо $\{M_n, J, g\}$.

Означення 4. *Майже ермітовий многовид* $\{M_n, J, g\}$ *є ермітовим, якщо майже комплексна структура є інтегровною* [1], [14].

Зауважимо таке: якщо майже комплексна структура J та многовид M_n будуть належати класу C^ω, достатньою умовою інтегровності майже комплексної структури є тотожна рівність нулю тензора Нейєнхейса

$$N_{ij}^k = J_i^\alpha \left(\partial_j J_\alpha^k - \partial_\alpha J_j^k\right) - J_j^\alpha \left(\partial_i J_\alpha^k - \partial_\alpha J_i^k\right) = 0, \tag{3}$$

або, що еквівалентно

$$J_{i,j}^k = J_i^\alpha J_j^\beta J_{\alpha,\beta}^k. \tag{4}$$

Комою ми позначаємо коваріантну похідну в зв'язності, узгодженій з рімановою метрикою g_{ij}.

Якщо ж на ермітовому многовиді $\{M_n, J, g\}$ справджується

$$J_{i,j}^k = 0, \tag{5}$$

то він є *келеровим.*

Означення 5. *Ермітовий многовид* M_n *має назву* локально конформно-келерового *(коротше, ЛКК-)* многовиду*, якщо існує відкрите покриття* $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ *многовиду* M *та система* $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ *гладких функцій таких, що* $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ *— келерова структура для будь якого* $\alpha \in A$*. Перехід від метрики* $g|_{U_\alpha}$ *до метрики* $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ *має назву* локально конформного перетворення структури*. Функція* σ *називається* визначальною функцією *конформного перетворення* [2].

Відомо, що на ЛКК-многовиді, форма Лі (Lee form), компоненти якої визначають формулою [3]

$$\omega = \frac{1}{m-1}\delta\Omega \circ J \quad \text{або} \quad \omega_i = -\frac{2}{n-2} J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta, \tag{6}$$

має бути замкненою

$$d\omega = 0.$$

Оскільки ми проводимо дослідження локально, якщо не обумовлено протилежне, то індекс, відповідний до карти многовиду, використовувати для зручності не будемо, як це і зроблено в останній формулі.

Означення 6. *Ріманові многовиди* $\{M_n, g\}$ *і* $\{\overline{M}_n, \overline{g}\}$ *перебувають у конформній відповідності, якщо їхні метрики пов'язані співвідношенням*

$$\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x), \tag{7}$$

де $\varphi(x)$ *— деякий інваріант.*

Для об'єктів зв'язності Γ^k_{ij} и $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ конформно відповідних просторів M_n, g та $\overline{M}_n, \overline{g}$ виконується

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i \varphi_j + \delta^k_j \varphi_i - \varphi^k g_{ij}, \tag{8}$$

де $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$.

3. Зв'зок форм Лі ЛКК-многовидів, які перебувають у конформній відповідності. Тепер з'ясуємо, як пов'язані між собою форми Лі двох ЛКК-многовидів $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$, якщо вони перебувають у конформній відповідності. Передусім згадаємо, що коваріантні похідні майже комплексної структури у зв'язностях $\overline{\Gamma}$ і Γ задовольняють співвідношення

$$J^k_{i|j} = J^k_{i,j} + J^\alpha_i P^k_{\alpha j} - J^k_\alpha P^\alpha_{ij}. \tag{9}$$

Тут вертикальною рискою "|"позначена коваріантна похідна у зв'язності $\overline{\Gamma}$, узгодженій з метрикою $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x)$ та

$$P^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij} = \delta^k_i \varphi_j + \delta^k_j \varphi_i - \varphi^k g_{ij}. \tag{10}$$

Підставимо (10) у (9)

$$\begin{aligned} J^k_{i|j} &= J^k_{i,j} + J^\alpha_i (\delta^k_\alpha \varphi_j + \delta^k_j \varphi_\alpha - \varphi^k g_{\alpha j}) - J^k_\alpha (\delta^\alpha_i \varphi_j + \delta^\alpha_j \varphi_i - \varphi^\alpha g_{ij}) = \\ &= J^k_{i,j} + \delta^k_j J^\alpha_i \varphi_\alpha - J_{ij} \varphi^k - J^k_j \varphi_i + J^k_\alpha \varphi^\alpha g_{ij}. \end{aligned} \tag{11}$$

Згортаючи (11) по індексах k та j, отримаємо

$$J^\alpha_{i|\alpha} = J^\alpha_{i,\alpha} + n J^\alpha_i \varphi_\alpha - J_{i\alpha} \varphi^\alpha + J_{\alpha i} \varphi^\alpha = J^\alpha_{i,\alpha} + (n-2) J^\alpha_i \varphi_\alpha.$$

Враховуючи (1),

$$J^\alpha_{\beta|\alpha} J^\beta_i - J^\alpha_{\beta,\alpha} J^\beta_i = -(n-2)\varphi_i,$$

або (6)

$$\overline{\omega}_i - \omega_i = 2\varphi_i, \tag{12}$$

де $\overline{\omega}$ і ω — форми Лі, відповідно, многовидів $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ і $\{M_n, J, g\}$. Отож, існує така теорема.

Теорема 1. *Якщо ЛКК-многовиди $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ пребувають у конформній відповідності так, що $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x)$, то їхні форми Лі пов'язані так:*

$$\overline{\omega} - \omega = 2d\varphi.$$

4. Інваріанти конформних відображень ЛКК-многовидів. Перепишемо (12) у вигляді

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\overline{\omega}_i - \frac{1}{2}\omega_i, \tag{13}$$

і продиференціюємо (13) коваріантно

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i,j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j}. \tag{14}$$

З іншого боку, враховуючи (13)

$$\overline{\omega}_{i|j} = \overline{\omega}_{i,j} - \overline{\omega}_\alpha P^\alpha_{ij}.$$

Тому

$$\overline{\omega}_{i,j} = \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_\alpha(\delta_i^\alpha \varphi_j + \delta_j^\alpha \varphi_i - \varphi^\alpha g_{ij}) = \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i \varphi_j + \overline{\omega}_j \varphi_i - \overline{\omega}_\alpha \varphi^\alpha g_{ij} = \\ = \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i \overline{\omega}_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \omega_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_j \omega_i - \overline{\omega}_\alpha \varphi^\alpha g_{ij}.$$

Водночас

$$\overline{\omega}_\alpha \varphi^\alpha g_{ij} = \overline{\omega}_\alpha g^{\alpha\beta}\varphi_\beta g_{ij} = \overline{\omega}_\alpha g^{\alpha\beta} e^{-2\varphi}\varphi_\beta e^{2\varphi} g_{ij} = \overline{\omega}_\alpha \overline{g}^{\alpha\beta}\varphi_\beta \overline{g}_{ij} = \overline{\omega}^\alpha \varphi_\alpha \overline{g}_{ij}.$$

Отримуємо

$$\overline{\omega}_{i,j} = \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i \overline{\omega}_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \omega_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_j \omega_i - \overline{\omega}^\alpha \varphi_\alpha \overline{g}_{ij} = \\ = \overline{\omega}_{i|j} + \overline{\omega}_i \overline{\omega}_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \omega_j - \frac{1}{2}\overline{\omega}_j \omega_i - \frac{1}{2}\overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}_\alpha \overline{g}_{ij} + \frac{1}{2}\overline{\omega}^\alpha \omega_\alpha \overline{g}_{ij}. \tag{15}$$

Підставляючи (15) у (14), одержимо

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_i \omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_j \omega_i - \frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}_\alpha \overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \omega_\alpha \overline{g}_{ij}. \tag{16}$$

Відомо [5], що при конформних відображеннях виконуються співвідношення

$$\varphi_{ij} + \frac{1}{2}\Delta_1 \varphi g_{ij} = \overline{L}_{ij} - L_{ij}, \tag{17}$$

де $\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \varphi_i \varphi_j$, далі $\Delta_1 \varphi = ||\varphi||^2 = \varphi_i \varphi_j g^{ij}$ (перший параметр Бельтрамі), а $\overline{L}_{ij}$ і L_{ij} тензори Брінкмана, відповідно, многовидів $\overline{M}_n$ і M_n [9]. Для M_n він набуває вигляду

$$L_{ij} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)} R g_{ij}\big).$$

Тут R_{ij} — тензор Річчі і $R = R_{ij} g^{ij}$ — скалярна кривина M_n. У випадку многовиду $\overline{M}_n$ ці величин обчислюють аналогічно.

Використовуючи (16) і (13), отримаємо

$$\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_i \omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}_j \omega_i - \\ -\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}_\alpha \overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \omega_\alpha \overline{g}_{ij} - \frac{1}{4}(\overline{\omega}_i - \omega_i)(\overline{\omega}_j - \omega_j) = \\ = \frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{\omega}_i \overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\omega_i \omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}_\alpha \overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \omega_\alpha \overline{g}_{ij}. \tag{18}$$

Тепер знаходимо перший параметр Бельтрамі

$$\Delta_1 \varphi = \varphi_i \varphi_j g^{ij} = \frac{1}{4}(\overline{\omega}_i - \omega_i)(\overline{\omega}_j - \omega_j) g^{ij} = \frac{1}{4}\overline{\omega}_i \overline{\omega}_j g^{ij} - \frac{1}{2}\overline{\omega}_i \omega^i + \frac{1}{4}\omega^i \omega_i. \tag{19}$$

Підставимо (18) і (19) у (17)

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{\omega}_i \overline{\omega}_j - \frac{1}{4}\omega_i \omega_j - \frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}_\alpha \overline{g}_{ij} + \frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha \omega_\alpha \overline{g}_{ij} + \\ + \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}\overline{\omega}_\alpha \overline{\omega}_\beta g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha \omega^\alpha + \frac{1}{4}\omega^\alpha \omega_\alpha\big) g_{ij} = \overline{L}_{ij} - L_{ij}.$$

Оскільки $g^{\alpha\beta}g_{ij}=\overline{g}^{\alpha\beta}\overline{g}_{ij}$ і $\overline{\omega}_\alpha\omega^\alpha g_{ij}=\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{ij}$, розкриваючи дужки і зводячи подібні, то отримуємо

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j}-\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j-\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{8}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{ij}+\frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij}=\overline{L}_{ij}-L_{ij}. \qquad (20)$$

З (20) випливає, що

$$\overline{P}_{ij}=P_{ij},$$

де

$$P_{ij}\overset{\text{def}}{=}L_{ij}-\frac{1}{2}\omega_{i,j}-\frac{1}{4}\omega_i\omega_j+\frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij}. \qquad (21)$$

Відомо також, що тензори кривини многовидів M_n і $\overline{M}_n$, що перебувають у конформній відповідності (7), пов'язані так:

$$\overline{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}+\delta^h_k\varphi_{ij}-\delta^h_j\varphi_{ik}+\varphi^h_k g_{ij}-\varphi^h_j g_{ik}+\big(\delta^h_k g_{ij}-\delta^h_j g_{ik}\big)\Delta_1\varphi, \qquad (22)$$

де $\varphi^h_k=g^{h\alpha}\varphi_{\alpha k}$. Підставимо тепер (18) и (19) в (22):

$$\begin{aligned}\overline{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}&+\delta^h_k(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|j}-\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j-\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{ij}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{ij})-\\&-\delta^h_j(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{i|k}-\frac{1}{2}\omega_{i,k}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k-\frac{1}{4}\omega_i\omega_k-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{ik}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{ik})+\\&+g^{h\beta}g_{ij}(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{\beta|k}-\frac{1}{2}\omega_{\beta,k}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_\beta\overline{\omega}_k-\frac{1}{4}\omega_\beta\omega_k-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{\beta k}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{\beta k})-\\&-g^{h\beta}g_{ik}(\frac{1}{2}\overline{\omega}_{\beta|j}-\frac{1}{2}\omega_{\beta,j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}_\beta\overline{\omega}_j-\frac{1}{4}\omega_\beta\omega_j-\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\overline{\omega}_\alpha\overline{g}_{\beta j}+\frac{1}{4}\overline{\omega}^\alpha\omega_\alpha\overline{g}_{\beta j})+\\&+\big(\delta^h_k g_{ij}-\delta^h_j g_{ik}\big)\big(\frac{1}{4}\overline{\omega}_\alpha\overline{\omega}_\beta g^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha\omega^\alpha+\frac{1}{4}\omega^\alpha\omega_\alpha\big).\end{aligned}$$

Розкриваючи дужки та групуючи, отримаємо

$$\overline{Q}^h_{ijk}=Q^h_{ijk},$$

де

$$\begin{aligned}Q^h_{ijk}\overset{\text{def}}{=}R^h_{ijk}&+\delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_k-\frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big)-\\&-\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)+\\&+\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}-\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij},\end{aligned} \qquad (23)$$

причому $\omega^h=\omega_\alpha g^{\alpha h}$, а також $\omega^h{}_{,j}=\omega_{\alpha,j}g^{\alpha h}$ і, нарешті, $||\omega||^2=\omega_\alpha\omega_\beta g^{\alpha\beta}$.

Отримаємо ще один простий інваріант, що не є тензором. Для цього підставимо (13) в (8)

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}+\delta^k_i\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_j-\frac{1}{2}\omega_j\big)+\delta^k_j\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_i-\frac{1}{2}\omega_i\big)-\big(\frac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha g^{k\alpha}-\frac{1}{2}\omega^k\big)g_{ij},$$

розкриємо дужки, скористаємось інваріантністю добутку $g_{ij}g^{\alpha\beta}$ та перегрупуємо

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}-\frac{1}{2}\delta^k_i\overline{\omega}_j-\frac{1}{2}\delta^k_j\overline{\omega}_i+\frac{1}{2}\overline{\omega}^k\overline{g}_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\frac{1}{2}\delta^k_i\omega_j-\frac{1}{2}\delta^k_j\omega_i+\frac{1}{2}\omega^k g_{ij}.$$

Отже, ми отримали інваріант

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\omega_j - \frac{1}{2}\delta_j^k\omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}, \tag{24}$$

що не є тензором. Ми не випадково позначили його як $\hat{\Gamma}_{ij}^k$, оскільки параметр, який заданий (24), очевидно є об'єктом ріманової зв'язності певного келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, конформного ЛКК-многовидам $\{M_n, J, g\}$ та $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$. Ми отримали теорему.

Теорема 2. *Якщо ЛКК-многовиди $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$ перебувають у конформній відповідності так, що $\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)}g_{ij}(x)$, то тензори*

$$P_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij};$$

$$\begin{aligned}Q_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_j^h\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big)-\\ -\delta_k^h\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)+\\ +\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij}\end{aligned}$$

будуть інваріантними. Крім того, існує інваріантний об'єкт, який не є тензором

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\omega_j - \frac{1}{2}\delta_j^k\omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}.$$

Це об'єкт ріманової зв'язності деякого келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, що є конформним обом ЛКК-многовидам — $\{M_n, J, g\}$ і $\{\overline{M}_n, J, \overline{g}\}$.

Отримаємо ще декілька інваріантних об'єктів. Для початку згорнемо (23) по індексах h та k

$$Q_{ij} = R_{ij} - \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)(n-2) - \frac{1}{2}\Delta_2\omega g_{ij}, \tag{25}$$

де $\Delta_2\omega = \omega_{\alpha,\beta}g^{\alpha\beta}$ (другий параметр Бельтрамі, [9]). Ми отримали ще один інваріантний тензор. Зрозуміло, що тензор $\frac{Q_{ij}}{n-2}$ — також є інваріантним. Віднімемо його з P_{ij}, який визначено у (21)

$$\begin{aligned}P_{ij} - \frac{Q_{ij}}{n-2} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\big) - \frac{1}{2}\omega_{i,j} - \frac{1}{4}\omega_i\omega_j + \frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij}-\\ -\frac{R_{ij}}{n-2} + \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij} + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2(n-2)} =\\ = -\frac{1}{2(n-1)(n-2)}Rg_{ij} - \frac{1}{8}||\omega||^2 g_{ij} + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2(n-2)}.\end{aligned}$$

Внаслідок цього ми отримали ще один тензор, який зберігається

$$S_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \big(\frac{R}{2(n-1)(n-2)} + \frac{1}{8}||\omega||^2 - \frac{\Delta_2\omega}{2(n-2)}\big)g_{ij}. \tag{26}$$

Віднімемо з Q_{ij}, який було визначено у (25) інваріант $\frac{2S_{ij}(n-1)(n-2)}{n}$

$$Q_{ij}-\frac{2S_{ij}(n-1)(n-2)}{n}=R_{ij}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)(n-2)-$$
$$-\frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}-\frac{Rg_{ij}}{n}-\frac{2(n-1)(n-2)}{8n}||\omega||^2 g_{ij}+\frac{(n-1)(n-2)\Delta_2\omega}{n(n-2)}g_{ij}=$$
$$=R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\big(\frac{1}{4n}||\omega||^2-\frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2).$$

Отриманий інваріант

$$H_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\big(\frac{1}{4n}||\omega||^2-\frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2) \qquad (27)$$

особливо цікавий у випадку, коли конформне відображення між ЛКК-многовидами $\{M_n,J,g\}$ і $\{\overline{M}_n,J,\overline{g}\}$ є конциркулярним, тобто, ковекторне градієнтне поле φ_i є конциркулярним.

5. Конциркулярні відображення ЛКК-многовидів.

Нагадаємо означення.

Означення 7. *Ковекторне поле ξ називають конциркулярним, якщо має слушність рівняння*

$$\xi_{i,j}=\rho g_{ij}+a_j\xi_i, \qquad (28)$$

причому, $a_{i,j}-a_{j,i}=0$, тобто ковектор a_i локально градієнтний, а $\rho(x)$ — деякий скаляр.

Іншими словами, ξ є конциркулярним, якщо існує такий скалярний множник λ, що поле $\zeta=\lambda\xi$ задовольнятиме рівняння

$$\zeta_{i,j}=\overline{\rho}g_{ij}. \qquad (29)$$

Очевидно, що у випадку, коли

$$\varphi_{i,j}=\varphi_i\varphi_j+\rho g_{ij},$$

поле φ_i також є конциркулярним ($\lambda=e^{-\varphi}$). Якщо конформне відображення конциркулярне, то тензор

$$E_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}$$

буде зберігатися, як ми бачимо з доведеної у [10] теореми.

Теорема 3. [10] *Для того, щоб під час конформного відображення $f:\{M_n,g\}\to\{\overline{M}_n,\overline{g}\}$ зберігався тензор $E_{ij}=R_{ij}-\frac{Rg_{ij}}{n}$, необхідно та достатньо, щоб це відображення було конциркулярним.*

Звідси випливає теорема.

Теорема 4. *Якщо ЛКК-многовиди $\{M_n,J,g\}$ і $\{\overline{M}_n,J,\overline{g}\}$ перебувають у конформній конциркулярній відповідності так, що $\overline{g}_{ij}(x)=e^{2\varphi(x)}g_{ij}(x)$, та $\varphi_{i,j}=\varphi_i\varphi_j+\rho g_{ij}$, то тензор*

$$\overset{*}{H}_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\big(\frac{1}{4n}||\omega||^2-\frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2)$$

буде інваріантним.

6. Конформно-плоскі ЛКК-многовиди та узагальнені многовиди Хопфа. Відомо, що конформно-плоский келеровий многовид є плоским [14]. Тоді, очевидно, для будь-якого ЛКК-многовиду, якщо він є многовидом сталої кривини, буде виконуватись рівняння

$$-\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\big(\frac{1}{4n}||\omega||^2-\frac{1}{2n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}\big)(n-2)=0. \tag{30}$$

Як видно з (30), у цьому випадку форма Лі ω є конциркулярним ковекторним полем ($\lambda=e^{\sigma}$, $\omega=2d\sigma$). Крім того, відомо, що будь-який ейнштейновий ($E_{ij}=0$) конформно-плоский многовид є многовидом сталої кривини. Звідси отримаємо таку теорему.

Теорема 5. [3] *Для того, щоб конформно-плоский ЛКК-многовид був многовидом сталої кривини, необхідно і достатньо, щоб його форма Лі була конциркулярним ковекторним полем, тобто задовольняла рівняння*

$$\omega_{i,j}=\big(\frac{1}{2n}||\omega||^2-\frac{1}{n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}-\frac{1}{2}\omega_i\omega_j. \tag{31}$$

Нагадаємо, що ЛКК-многовид має назву узагальненого многовиду Хопфа, якщо його форма Лі тотожно задовольняє умову

$$\omega_{i,j}=0. \tag{32}$$

З (31) легко випливає теорема.

Теорема 6. [3]*ЛКК-многовид сталої кривини не може бути узагальненим многовидом Хопфа.*

Доведення. Справді, для ЛКК-многовиду сталої кривини, якщо він є узагальненим многовидом Хопфа внаслідок (31) і (32) має виконуватись

$$\big(\frac{1}{n}||\omega||^2-\frac{2}{n}\Delta_2\omega\big)g_{ij}=\omega_i\omega_j. \tag{33}$$

Це неможливо при $\omega\neq 0$, оскільки ранг матриці g_{ij} дорівнює розмірності простору, а ранг $\omega_i\omega_j$ — тільки одиниці. □

Нехай $\{M_n,J,g\}$ — конформно-плоский ЛКК-многовид. Це означає, що існує келеровий многовид $\{\mathcal{K}_n,J,\hat{g}\}$, по-перше, локально конформний $\{M_n,J,g\}$, а по-друге, цей келеровий многовид $\{\mathcal{K}_n,J,\hat{g}\}$ буде також конформно-плоским. Як ми вже зазначали, конформно-плоский келеровий многовид є плоским, тобто, для тензора кривини та тензора Річчі многовиду $\{\mathcal{K}_n,J,\hat{g}\}$ справджується $\hat{R}^h_{ijk}=0$, $\hat{R}_{ij}=0$. Внаслідок келеровості $\{\mathcal{K}_n,J,\hat{g}\}$ його форма Лі буде тривіальною $\hat{\omega}=0$. З цих міркувань, (23), (25) отримаємо, що тензор кривини конформно-плоского ЛКК-многовиду набуває вигляду

$$\begin{aligned}R^h_{ijk}=\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}||\omega||^2g_{ij}\big)-\delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_k-\frac{1}{4}||\omega||^2g_{ik}\big)+\\+\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij}-\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}.\end{aligned} \tag{34}$$

Відповідно тензор Річчі

$$R_{ij}=\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}||\omega||^2g_{ij}\big)(n-2)+\frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}. \tag{35}$$

З (35) отримаємо значення скалярної кривини

$$R = R_{ij}g^{ij} = \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}g^{ij} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j g^{ij} - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}g^{ij}\big)(n-2) + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}g^{ij} = \\ = (n-1)\Delta_2\omega - \frac{(n-1)(n-2)}{2}||\omega||^2. \tag{36}$$

Зрештою, з (21) наведені міркування дають підстави отримати тензор Брінкмана конформно-плоского ЛКК-многовиду

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{8}\omega^\alpha\omega_\alpha g_{ij}. \tag{37}$$

Нагадаємо, що тензор Вейля конформної кривини визначають так:

$$C^h_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} R^h_{ijk} + \delta^h_j L_{ik} - \delta^h_k L_{ij} + L^h_j g_{ik} - L^h_k g_{ij}. \tag{38}$$

Підставивши (34) і (37) в (38), матимемо, що тензор Вейля конформно-плоского ЛКК-многовиду обертається тотожно у нуль

$$C^h_{ijk} \equiv 0.$$

Нарешті, якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ є многовидом сталої кривини, то можна, враховуючи (36), виписати його тензор кривини та тензор Річчі в простішому вигляді

$$R^h_{ijk} = \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big) = \frac{1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big). \tag{39}$$

$$R_{ij} = \frac{n-1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)g_{ij}. \tag{40}$$

Отримані результати можна підсумувати у вигляді такої теореми.

Теорема 7. *Якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ є конформно-плоским, то його тензор кривини, тензор Річчі та скалярна кривина задаються, відповідно, такими виразами*

$$R^h_{ijk} = \delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big) - \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big) + \\ + \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij} - \big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik},$$

$$R_{ij} = \big(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i\omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)(n-2) + \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2},$$

$$R = (n-1)\Delta_2\omega - \frac{(n-1)(n-2)}{2}||\omega||^2.$$

Зокрема, якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ є многовидом сталої кривини, то тензор кривини та тензор Річчі набувають вигляду

$$R^h_{ijk} = \frac{1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big).$$

$$R_{ij} = \frac{n-1}{n}\big(\Delta_2\omega - \frac{n-2}{2}||\omega||^2\big)g_{ij}.$$

Література

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко — М.: МПГУ, 2003. — 495 с.
2. *Кириченко В.Ф.* Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны / В.Ф. Кириченко // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, №3. — С. 354-–363.
3. *Кириченко В.Ф.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия / В.Ф. Кириченко // Матем. сб. — 1992. — Т. 51, №5. — С. 57—66.
4. *Кузаконь В.М.* Конформно-келерові простори та конформні перетворення тензору енергії-імпульсу /В.М. Кузаконь, Є.В. Черевко // Proc. Inter. Geom. Center. — 2011. — Vol.4, №3. — P. 23–39.
5. *Микеш Й.* Геодезические отображения конформно-келеровых пространств. /Й. Микеш, Ж. Радулович // Изв. вузов. Матем. — 1994. — №3. — С. 50-–52.
6. *Микеш Й.* О распределении порядков групп конформных преобразований римановых пространств /Й. Микеш, Д. Молдобаев// Изв. вузов. Матем. – 1991. – №12. – С. 24–29.
7. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности /А.З. Петров — М.: Наука, 1966. — 496 с.
8. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия /Л.П. Эйзенхарт — М.: ИЛ, 1948, — 316 с.
9. *Brinkmann H. W.* Riemann spaces conformal to Einstein spaces /H. W. Brinkmann // Mathematische Annalen. — 1924. — Vol. 91. — P. 269–278.
10. *Chepurna O.* Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor /O. Chepurna, V. Kiosak, J. Mikeš // J. Appl. Math. Aplimat. — 2010. — Vol. 3, №1. — P. 253-–258.
11. *Dragomir S.* Locally conformal Kähler geometry /S. Dragomir, L. Ornea –Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser — 1998. — 328 p.
12. *Mikeš J.* Geodesic mappings and some generalizations. /J. Mikeš, A. Vanžurovà, I. Hinterleitner –Olomouc: Palacky University Press, 2009. — 304 p.
13. *Vaisman I.* A geometric condition for an l.c.K. manifold to be Kähler /I. Vaisman // Geometriae Dedicata. — 1981. — №10. — C. 129–134.
14. *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces /K. Yano –New York: Pergamon Press Book — 1965.— 326p.

Стаття: надійшла до редколегії 16.10.2013
доопрацьована 11.12.2013
прийнята до друку 11.11.2015

CONFORMAL MAPPINGS OF LOCALLY CONFORMAL KÄHLER MANIFOLDS

Yevhen CHEREVKO

Odesa National Economics University,
Preobrazhenska Str., 8, Odesa, 65082
e-mail: cherevko@usa.com

In this paper we study conformal mappings which does not change a complex structure of locally conformal Kähler manifolds. We have found expression for a Riemann tensor for conformally-flat locally conformal Kähler manifolds and for ones of constant curvature. Also we have found objects which are the same for the manifolds in conformal correspondence.

Key words: Kähler manifold, reduced branching processes, locally conformal Kähler manifolds, Lee form, conformal mappings, Riemann tensor, Ricci tensor.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською, англійською та російською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме на CD-RW диску (редколегія повертає авторові диск; тексти можна надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською, англійською та російською мовами, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер УДК.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

1. *Кравчук О.М.* Назва / О.М. Кравчук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — С. 79–90.
2. *Aramis D.K.* Title / D.K. Aramis // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — Vol. 377. — P. 450–463.
3. *Класний О.М.* Назва / О.М. Класний, М.М. Потічний // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 2, №2. — С. 4–20.
4. *Грабович А.І.* Назва / А.І. Грабович. — К., 1985.
5. *Петренко О.Б.* Назва / О.Б. Петренко, М.М. Шинк. — Л., 2001.

6. *Михайленко Г.Д.* Назва / Г.Д. Михайленко. — Л.: ІППММ, 1993. — 9 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

7. *Михайленко Г.Д.* Назва / Г.Д. Михайленко, С.І. Степаняк. — Л.: ІППММ, 1993. — 9 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

8. *Колмаз Ю.А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / *Ю.А. Колмаз.* — К., 2008. — 20 с.

9. *Сеник С.М.* Назва / С.М. Сеник. — К., 1992. — 17 с. — Деп. в ДНТБ України, В2020–1995.

10. *Сеник С.М.* Назва / С.М. Сеник, І.Т. Мандрик. — К., 1992. — 17 с. — Деп. в ДНТБ України, В2020–1995.

11. *Муравський В.К.* Назва / В.К. Муравський // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня — 2 вересня 1994 р., Київ. — К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. — С. 540–551.

12. *Муравський В.К.* Назва / В.К. Муравський, С.В. Ліско // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня — 2 вересня 1994 р., Київ. — К.: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. — С. 540–551.