ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 81

Львівський національний університет імені Івана Франка
2016

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 81

Львівський національний університет імені Івана Франка
2016

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 81

Випуск 81

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2016

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка Протокол №28/11 від 30.11.2016 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №528 від 12.05.2015р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Відповідальний за випуск *Михайло Зарічний*

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-41-72

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70х100/16.
Умовн. друк. арк. 13,3
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 5–8
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 5–8

УДК 512.624.5

PERIODIC WORDS CONNECTED WITH THE TRIBONACCI WORDS

Galyna BARABASH, Yaroslav KHOLYAVKA, Iryna TYTAR

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mails: galynabarabash71@gmail.com,
ya_khol@franko.lviv.ua,
iratytar1217@gmail.com

We introduce two families of periodic words (TLP-words of type 1 and TLP-words of type 2) that are connected with the Tribonacci numbers and Tribonacci words, respectively.

Key words: Tribonacci numbers, Tribonacci words.

1. Introduction.

The Tribonacci numbers T_n are defined by the recurrence relation $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, for all integer $n > 2$, and with initial values $T_0 = 0$, $T_1 = 0$ and $T_2 = 1$ (see, e.g., [1, 2, 3]). Many properties of the Tribonacci numbers require the full ring structure of the integers. However, generalizations to the ring $\mathbb{Z}_m$ have been considered (see, e.g., [4]). The sequence $T_n \pmod m$ is periodic and repeats by returning to its starting values because there are only a finite number m^3 of triples of terms possible, and the recurrence of a triple results in recurrence of all the following terms.

In analogy to the definition of Tribonacci numbers, one defines the Tribonacci finite words as the contatenation of the three previous terms $t_n = t_{n-1}t_{n-2}t_{n-3}$, $n > 2$, with initial values $t_0 = 0$, $t_1 = 01$ and $t_2 = 0102$ and defines the infinite Tribonacci word t, $t = \lim t_n$ (see [5]). It is the archetype of an Arnoux-Rauzy word (see, e.g., [6, 7]).

Using Tribonacci words, in the present article we shall introduce some new kinds of the infinite words, mainly TLP words, and investigate some of their properties.

For any notations not explicitly defined in this article we refer to [1, 6].

2. Tribonacci sequence modulo m.

The letter p is reserved to designate a prime and m may be arbitrary integer, $m > 1$.

Let $T^*_n(m)$, $0 \leqslant T^*_n(m) < m$, denote the n-th member of the sequence of integers $T_n \equiv T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \pmod m$, for all integer $n > 2$, and with initial values $T_0 = 0$, $T_1 = 0$ and $T_2 = 1$ ($T^*_0(m) = 0$, $T^*_1(m) = 0$ and $T^*_2(m) = 1$). We reduce T_n modulo m taking the least nonnegative residues, and let $k(m)$ denote the length of the period of

---

the repeating sequence $T_n^*(m)$. A few properties of the function $k(m)$ are in the following theorem [4, 8]. Let p be an odd prime, $p \neq 11$, and $\left(\frac{p}{11}\right)$ denotes the Legendre symbol.

Theorem 1. *In $\mathbb{Z}_m$ the following hold:*

1) Any Tribonacci sequence modulo m is periodic.
2) If $\left(\frac{p}{11}\right) = 1$, then $k(p)|(p^2+p+1)$ if $x^3 - x^2 - x - 1$ is irreducible $\bmod p$, otherwise $k(p)|(p-1)$.
3) If $\left(\frac{p}{11}\right) = -1$, then $k(p)|(p^2-1)$.

The results in Theorem 8 give upper bounds for $k(p)$ but there are primes for which $k(p)$ is less than the given upper bound.

3. Tribonacci words.

Let $t_0 = 0$, $t_1 = 01$ and $t_2 = 0102$. Now $t_n = t_{n-1}t_{n-2}t_{n-3}$, $n > 2$, the contatenation of the three previous terms. The successive initial finite Tribonacci words are:

$$t_0 = 0,\ t_1 = 01,\ t_2 = 0102,\ t_3 = 0102010,\ t_4 = 0102010010201, \ldots \tag{1}$$

The infinite Tribonacci word t is the limit $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. It is referenced A080843 in the On-line Encyclopedia of Integer Sequences [9]. The properties of the Tribonacci infinite words are of great interest in some fields of mathematics and its application such as number theory, fractal geometry, formal language etc. See [5, 10, 11, 12, 13].

We denote as usual by $|t_n|$ the length (the number of symbols) of t_n. The following proposition summarizes basic properties of Tribonacci words [5].

Theorem 2. *The infinite Tribonacci word and the finite Tribonacci words satisfy the following properties:*

1) The words 11, 22 and 000 are not subwords of the infinite Tribonacci word.
2) For all $n \geqslant 0$ let a_n be the last symbol of t_n and $k \equiv n \pmod 3$, $k \in \{0,1,2\}$. Then we have $a_n = k$.
3) For all $n \geqslant 0$ $|t_n| = T_{n+3}$.

4. Periodic TLP words.

Let us start with the classical definition of periodicity of words over arbitrary alphabet $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ (see [14]).

Definition 1. *Let $w = a_0a_1a_2\ldots$ be an infinite word. We say that w is*

1) a periodic word if there exists a positive integer t such that $a_i = a_{i+t}$ for all $i \geqslant 0$. The smallest t satisfying the previous condition is called the period of w;
2) an eventually periodic word if there exist two positive integers t, s such that $a_i = a_{i+t}$, for all $i \geqslant s$;
3) an aperiodic word if it is not eventually periodic.

Theorem 3. *The infinite Tribonacci word is aperiodic.*

This statement is proved in [10].

We consider the finite Tribonacci words t_n (3) as numbers written in the ternary numeral system and denote them by b_n. Denote by d_n the value of the number b_n in usual decimal numeration system. We write $d_n = b_n$ meaning that d_n and b_n are writing of the same number in different numeral systems.

Example 1.

$$t_0 = 0,\ t_1 = 01,\ t_2 = 0102,\ t_3 = 0102010,\ t_4 = 0102010010201, \dots,$$
$$b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 102,\ b_3 = 102010,\ b_4 = 102010010201, \dots,$$
$$d_0 = 0,\ d_1 = 1,\ d_2 = 11,\ d_3 = 300,\ d_4 = 218800,\ d_5 = 38759787911, \dots.$$

Theorem 4. *For any finite Tribonacci word $t_n$we have*

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 11, \quad d_n = d_{n-1}3^{T_{n+1}+T_n} + d_{n-2}3^{T_n} + d_{n-3}\,(n > 2). \qquad (2)$$

Proof. One can easily verify (4) for the first few $n : d_3 = b_3 = 102010 = 102000+10+0 = b_2 3^3 + b_1 3^1 + b_0 = d_2 3^3 + d_1 3^1 + d_0$, $d_4 = b_4 = 102010010201 = 102010000000+10200+1 = d_3 3^6 + d_2 3^2 + d_1$. Equality (4) follows from Theorem 9 (statement 3)) and the equality $d_n = b_n = b_{n-1} \underbrace{0 \dots 0}_{T_{n+1}+T_n} + b_{n-2} \underbrace{0 \dots 0}_{T_n} + b_{n-3} = d_{n-1}3^{T_{n+1}+T_n} + d_{n-2}3^{T_n} + d_{n-3}$.

Let $w_0(m) = 0$ and for arbitrary integer n, $n \geqslant 1$, $d_n(m) = d_n \pmod m$, $0 \leqslant d_n(m) < m$, $b_n(m)$ is $d_n(m)$ in the ternary numeration system, $w_n(m) = w_{n-1}(m)b_n(m)$. Denote by $w(m)$ the limit $w(m) = \lim_{n\to\infty} w_n(m)$.

Definition 2. *We say that*
1) $w_n(m)$ is a finite TLP word type 1 modulo m;
2) $w(m)$ is an infinite TLP word type 1 modulo m.

Theorem 5. *The infinite TLP word of type 1 $w(p)$ is a periodic word.*

Proof. The statement follows from (4) because there are only a finite number of $d_n(p)$ and $3^{T_n} \pmod p$ possible, and the recurrence of the first few terms sequence $d_n(p)$ and $3^{T_n} \pmod p$ gives recurrence of all subsequent terms.

Using Tribonacci words (3) we define a periodic TLP word $w^*(m)$ (infinite TLP word type 2 by modulo m). As usual, we denote by ϵ the empty word. Let $v_n^*(m)$ be the last $T_{n+3}^*(m)$ symbols of the word t_n if $T_{n+3}^*(m) \neq 0$, otherwise $v_n^*(m) = \epsilon$.

Theorem 6. *The word length $|v_n^*(m)|$ coincides with $T_{n+3}^*(m)$.*

Proof. This is clear by construction of $v_n^*(m)$.

Since $T_n^*(m)$ is a periodic sequence with period $k(m)$, the sequence $|v_n^*(m)|$ is periodic with the same period. Let $w_0^*(m) = 0$ and for arbitrary integer n, $n \geqslant 1$, $w_n^*(m) = w_{n-1}^*(m)v_n^*(m)$. Denote by $w^*(m)$ the limit $w^*(m) = \lim_{n\to\infty} w_n^*(m)$.

Definition 3. *We say that*
1) $w_n^*(m)$ is a finite TLP word of type 2 modulo m;
2) $w^*(m)$ is an infinite TLP word of type 2 modulo m.

Theorem 7. *The infinite TLP word of type 2 $w^*(m)$ is a periodic word.*

The Theorem 14 is a direct corollary of Theorem 9 (statement 2)) and Theorem 13.

References

1. *Koshy T.* Fibonacci and Lucas Numbers with Applications // Wiley-Interscience, New York, 2001.

2. *Basu M.* Tribonacci matrices and a new coding theory/M. Basu, M. Das// Discrete Math. Algorithms Appl.— Vol. 6 (1), 1450008(17 pages)(1450008-1 – 1450008-17),DOI: 10.1142/S1793830914500086.
3. *Gerdes W.* Generalized tribonacci numbers and their convergent sequences // Fibonacci Quart.—Vol.16.— 1978.— P.269—275.
4. *Waddill M. E.* Some properties of a generalized Fibonacci sequence modulo m // The Fibonacci Quart.— Vol. 16.— 1978, №. 4.— P.344–353.
5. *Rosema S. W.* The Tribonacci substitution/S.W. Rosema, R. Tijdeman// Elect. J. of Combin. Number Theory.— Vol. 5(3).— 2005, №. A13 (electronic), http://www.integers-ejcnt.org/vol5-3.html.
6. *Glen A.* Episturmian words/A. Glen, J. Justin// RAIRO-Theor. Inform. Appl.— Vol. 43.— 2009.— P.403–442.
7. *Berstel J.* Sturmian and episturmian words (a survey of some recent results)// Lecture Notes in Computer Science. — Vol. 4728.— 2007.—P.23–47.
8. *Vince A.* Period of a linear recurrence// Acta Arithmetica.— Vol. 39(4).— 1981.— P.303–311.
9. *Sloane N. J. A.* The online Encyclopedia of Integer sequences// Published electronically at http://oeis.org/A080843.
10. *Mousavi H.* Mechanical Proofs of Properties of the Tribonacci Word/H. Mousavi, J. Shallit// arxiv:1407.5841.
11. *Duchene E.* A morphic approach to combinatorial games: the Tribonacci case /E. Duchene, M. Rigo// RAIRO-Theor. Inf. Appl.— Vol. 42 (2).— 2008).— P.375–393.
12. *Tan B.* Some properties of the Tribonacci sequence/B. Tan, Z.-Y. Wen// European J. Combin.— Vol. 28.— 2007.— P.1703–1719.
13. *Damanik D.* Arnoux-Rauzy Subshifts/D. Damanik, L.Q. Zamboni // Linear Recurrences, Powers and Palindromes, arxiv: math. CO/0208137v1.
14. *Duval J.P.* Recurrence and periodicity in infinite words from local periods/J.P. Duval, F. Mignosi, A. Restivo// Theoret. Comput. Sci. — Vol. 262(1-2).— 2001.— P.269–284. doi:10.1016/S0304-3975(00)00204-8

Стаття: надійшла до редколегії 29.03.2016
прийнята до друку 08.06.2016

ПЕРІОДИЧНІ СЛОВА, ПОВ'ЯЗАНІ ЗІ СЛОВАМИ ТРІБОНАЧЧІ

Галина БАРАБАШ, Ярослав ХОЛЯВКА, Ірина ТИТАР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: galynabarabash71@gmail.com,
ya_khol@franko.lviv.ua,
iratytar1217@gmail.com

Означено два види періодичних слів (TLP-слова типу 1 та TLP-слова типу 2), які пов'язані з числами Трібоначчі та словами Трібоначчі.

Ключові слова: числа Трібоначчі, слова Трібоначчі.

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 9–22
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 9–22

УДК 512.536

ON A SEMITOPOLOGICAL α-BICYCLIC MONOID

Serhii BARDYLA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: sbardyla@yahoo.com

We consider a semitopological α-bicyclic monoid $\mathcal{B}_\alpha$ and prove that it is algebraically isomorphic to the semigroup of all order isomorphisms between the principal upper sets of ordinal ω^α. We prove that for every ordinal α and every $(a,b)\in\mathcal{B}_\alpha$ if a or b is a non-limit ordinal, then (a,b) is an isolated point in $\mathcal{B}_\alpha$. We show that for every ordinal $\alpha<\omega+1$ every locally compact semigroup topology on $\mathcal{B}_\alpha$ is discrete. On the other hand, we construct an example of a non-discrete locally compact topology τ_{lc} on $\mathcal{B}_{\omega+1}$ such that $(\mathcal{B}_{\omega+1},\tau_{lc})$ is a topological inverse semigroup. This example shows that there is a gap in the proof of Theorem 2.9 [16] stating that for every ordinal α the semigroup $\mathcal{B}_\alpha$ does not admit non-discrete locally compact inverse semigroup topologies.

Key words: topological inverse semigroup, topological semigroup, semitopological semigroup, α-bicyclic semigroup.

In this paper all topological spaces are assumed to be Hausdorff. By $\mathbb{N}$ we shall denote the set of all positive integers. A semigroup S is called inverse if for every $x\in S$ there exists a unique $y\in S$ such that $xyx=x$ and $yxy=y$. Later such an element y will be denoted by x^{-1} and will be called the inverse of x. A map $inv: S\to S$ which assigns to every $s\in S$ its inverse is called inversion. By ω we denote the first infinite ordinal. A *topological* (*inverse*) *semigroup* is a topological space together with a continuous semigroup operation (and an inversion, respectively). Obviously, the inversion defined on a topological inverse semigroup is a homeomorphism. If S is a semigroup (an inverse semigroup) and τ is a topology on S such that (S,τ) is a topological (inverse) semigroup, then we shall call τ an (*inverse*) *semigroup topology* on S. A *semitopological semigroup* is a topological space together with a separately continuous semigroup operation. Let f be a map between two partial ordered sets $(A,\leqslant_A)$ and $(B,\leqslant_B)$, then we shall call f a monotone if for every $a,b\in A$ if $a\leqslant_A b$ then $f(a)\leqslant_B f(b)$. We shall call f an order isomorphism if f is monotone bijection and its inverse map f^{-1} is also monotone.

For a partially ordered set $(A,\leqslant)$, for an arbitrary $X\subset A$ and $x\in A$ we write:

1) $\downarrow X=\{y\in A: \text{there exists } x\in X \text{ such that } y\leqslant x\}$;
2) $\uparrow X=\{y\in A: \text{there exists } x\in X \text{ such that } x\leqslant y\}$;

3) ${\downarrow}x = {\downarrow}\{x\}$;
4) ${\uparrow}x = {\uparrow}\{x\}$;
5) X is a lower set if $X = {\downarrow}X$;
6) X is an upper set if $X = {\uparrow}X$;
7) X is a principal lower set if $X = {\downarrow}x$ for some $x \in X$;
7) X is a principal upper set if $X = {\uparrow}x$ for some $x \in X$.

The bicyclic monoid $\mathscr{B}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q subjected only to the condition $pq = 1$. The distinct elements of $\mathscr{B}(p,q)$ are exhibited in the following useful array

$$\begin{array}{ccccc}
1 & p & p^2 & p^3 & \cdots \\
q & qp & qp^2 & qp^3 & \cdots \\
q^2 & q^2p & q^2p^2 & q^2p^3 & \cdots \\
q^3 & q^3p & q^3p^2 & q^3p^3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

and the semigroup operation on $\mathscr{B}(p,q)$ is determined as follows:

$$q^kp^l \cdot q^mp^n = q^{k+m-\min\{l,m\}}p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

It is well known that the bicyclic monoid $\mathscr{B}(p,q)$ is a bisimple (and hence simple) combinatorial E-unitary inverse semigroup and every non-trivial congruence on $\mathscr{B}(p,q)$ is a group congruence [8]. Also classic Andersen Theorem states that *a simple semigroup S with an idempotent is completely simple if and only if S does not contains an isomorphic copy of the bicyclic semigroup* (see [1] and [8, Theorem 2.54]). Observe that the bicyclic monoid can be represented as a semigroup of isomorphisms between principal upper sets of partially ordered set $(\mathbb{N}, \leqslant)$ (see [21]). The bicyclic semigroup admits only the discrete semigroup topology and if a topological semigroup S contains it as a dense subsemigroup then $\mathscr{B}(p,q)$ is an open subset of S [9]. In [6] and [10] this result was extended for the case of semitopological semigroups and generalized bicyclic semigroup respectively. The problem of an embedding of the bicyclic monoid into compact-like topological semigroups was discussed in [2], [3], [12]. Also, in [9] was described the closure of the bicyclic monoid $\mathscr{B}(p,q)$ in a locally compact topological inverse semigroup. In [11] was proved that a Hausdorff locally compact semitopological bicyclic semigroup with adjoined zero 0 is either compact or discrete.

Among the other natural generalization of bicyclic semigroup polycyclic monoid and α-bicyclic monoid play the major role.

Polycyclic monoid was introduced in [23]. In [4] there was introduced a notion of the λ-polycyclic monoid, which is a generalization of the polycyclic monoid and there was proved that for every cardinal $\lambda > 1$ the λ-polycyclic monoid $\mathcal{P}_\lambda$ can be represented as a subsemigroup of the semigroup of all order isomorphisms between principal lower sets of the λ-ary tree with adjoined zero. In [18] and [19] were studied algebraic properties of the polycyclic monoid. In [22] were studied topological properties of the graph inverse semigroups which are the generalization of polycyclic monoids and proved that for every finite graph E every locally compact semigroup topology on the graph inverse semigroup over E is discrete, which implies that for every positive integer n every locally compact semigroup topology on the n-Polycyclic monoid is discrete. In [4] were studied algebraic and topological properties of the λ-polycyclic monoid and was proved that for every non-zero cardinal λ every locally compact semigroup topology on the λ-Polycyclic monoid is discrete. In [5] authors investigated the closure of λ-polycyclic monoid in topological inverse semigroups.

However in this paper we are mostly concerned on the α-bicyclic monoid. This monoid was introduced in [17]. Let α be an arbitrary ordinal and $<$ be the usual order on α such that $a < b$ iff $a \in b$ for every $a, b \in \alpha$. For every $a, b \in \alpha$ we write $a \leqslant b$ iff $a = b$ or $a \in b$. Clearly that $\leqslant$ is a partial order on α. By $+$ we will denote the usual ordinal addition. Ordinal α is said to be prime if it can't be represented as a sum of two ordinals which are contained in α. For every ordinals a, b such that $a > b$ we will put $c = a - b$ if $a = b + c$. Clearly that for every ordinals $a > b$ there exists a unique ordinal c such that $a = b + c$. For more about ordinals see [20], [25] or [26]. By the α-bicyclic monoid $\mathcal{B}_\alpha$ we mean the set $\omega^\alpha \times \omega^\alpha$ endowed with the following binary operation:

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a+(c-b),d), & \text{if } b \leqslant c; \\ (a, d+(b-c)), & \text{if } b > c; \end{cases}$$

Later on we will write $(a,b)(c,d)$ instead of $(a,b)\cdot(c,d)$.

In [17] were considered algebraic properties of bisimple semigroups with well-ordered idempotents. In [24] was built a non-discrete inverse semigroup topology on $\mathcal{B}_2$. In [15] were investigated inverse semigroup topologies on $\mathcal{B}_\alpha$.

Observe that every upper set of arbitrary ordinal α is principal.

By $\mathscr{I}_{\omega^\alpha}^{\nearrow}$ we shall denote the semigroup of all order isomorphisms between the principal upper sets of the ordinal ω^α endowed with multiplication of composition of partial maps.

Topological semigroups of partial monotone bijections of linearly ordered sets were investigated in [7], [13], [14]. In [13] it was proved that every locally compact topology on the semigroup of all partial cofinite monotone injective transformations of the set of positive integers is discrete. In [7] authors proved that every Baire topology on the semigroup of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of positive integers is discrete. In [14] was proved that every Baire topology on the semigroup of all monotone injective partial selfmaps of the set of integers having cofinite domain and image is discrete. We observe that in [7] and [14] there constructed non-discrete non-Baire inverse semigroup topologies on the corresponding semigroups.

In this paper we consider a semitopological α-bicyclic monoid $\mathcal{B}_\alpha$ and prove that it is algebraically isomorphic to a semigroup of all order isomorphisms between the principal upper sets of ordinal ω^α. We prove that for every ordinal α for every $(a,b) \in \mathcal{B}_\alpha$ if a or b is a non-limit ordinal then (a,b) is an isolated point in $\mathcal{B}_\alpha$. We show that for every ordinal $\alpha < \omega + 1$ every locally compact semigroup topology on $\mathcal{B}_\alpha$ is discrete. However we construct an example of a non-discrete locally compact topology τ_{lc} on $\mathcal{B}_{\omega+1}$ such that $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ is a topological inverse semigroup. This example shows that there is a gap in [16, Theorem 2.9], where is stated that for every ordinal α there is only discrete locally compact inverse semigroup topology on $\mathcal{B}_\alpha$.

Proposition 1. *For every ordinal α the semigroup $\mathscr{I}_{\omega^\alpha}^{\nearrow}$ of all order isomorphisms between principle upper sets of ordinal ω^α is isomorphic to the α-bicyclic monoid $\mathcal{B}_\alpha$.*

Proof. Observe that every principal upper set of ω^α is an interval $[a,\omega^\alpha)$ for some $a \in \omega^\alpha$. Define a map $h : \mathscr{I}^{\nearrow}_{\omega^\alpha} \to \mathcal{B}_\alpha$ in the following way: for an arbitrary order isomorphism $f : [a,\omega^\alpha) \to [b,\omega^\alpha)$ put $h(f) = (a,b)$. Clearly that if there exists an order isomorphism between two intervals $[a,\omega^\alpha)$ and $[b,\omega^\alpha)$ then it is unique. Thus the map h is injective. Since ω^α is a prime ordinal for every $a,b < \omega^\alpha$ upper sets $[a,\omega^\alpha)$ and $[b,\omega^\alpha)$ of ω^α are order isomorphic and hence the map h is surjective. Simple verifications show that the map h is a homomorphism.

Lemma 1. *Let $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ be a semitopological semigroup. Then for every ordinal $a \in \omega^\alpha$ the elements $(0,a)$ and $(a,0)$ are isolated points in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$.*

Proof. Observe that if e is an idempotent of semitopological semigroup S both eS and Se are retracts of the space S and hence are closed subsets of S. Since $\{(0,0)\} = \mathcal{B}_\alpha \setminus ((1,1)\mathcal{B}_\alpha \cup \mathcal{B}_\alpha(1,1))$, $(0,0)$ is an isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$.

Since $(0,a)(a,0) = (0,0)$ the separate continuity of multiplication implies that there exists an open neighborhood $V((0,a))$ such that $V((0,a))(a,0) = \{(0,0)\}$. Fix any point $(c,d) \in V((0,a))$. Then $(c,d)(a,0) = (0,0)$. Hence $d = a$ and $c = 0$ which implies that $V((0,a)) = \{(0,a)\}$. Thus $(0,a)$ is an isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$. Proof of the statement that $(a,0)$ is an isolated point is similar.

Lemma 2. *Let $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ be a semitopological semigroup. Then for every element $(a,b) \in \mathcal{B}_\alpha$ there exists a clopen neighborhood $V((a,b))$ of (a,b) such that the following conditions hold:*

1) *for every $(c,d) \in V((a,b))$ $c \leqslant a$ and $d \leqslant b$;*
2) *for every $(c,d) \in V((a,b))$ $a = c$ if and only if $b = d$.*

Proof. Put $V((a,b)) = \{x \in S : (0,a)x = (0,b)\}$. Observe that by Lemma 1 $(0,b)$ is an isolated point of the space $\mathcal{B}_\alpha$. Since $(0,a)(a,b) = (0,b)$ the separate continuity of the multiplication in $\mathcal{B}_\alpha$ implies that $V(a,b)$ is a clopen neighborhood of the point (a,b). Fix any element $(c,d) \in V((a,b))$. Then we have that $(0,a)(c,d) = (0,b)$. Clearly that above equality holds in the only case when $c \leqslant a$. Hence $(0,a)(c,d) = (0,d+(a-c)) = (0,b)$ and since $d+(a-c) = b$ we get that $d \leqslant b$. Moreover if $a = c$ then $(0,a)(c,d) = (0,d) = (0,b)$ and hence $b = d$.

Lemma 2 implies the following corollary:

Corollary 1. *Let $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ be a semitopological semigroup. Then for every finite ordinals n,m element (n,m) is an isolated point in the space $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$.*

Lemma 3. *Let $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ is a semitopological semigroup. For every distinct ordinals $a,b < \alpha$ (ω^a,ω^b) is an isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$.*

Proof. First we consider the case when $a < b$. Since $(0,\omega^a)(\omega^a,\omega^b) = (0,\omega^b)$, Lemma 1 and separate continuity of the semigroup operation in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ imply that there exists an open neighborhood $V((\omega^a,\omega^b))$ of (ω^a,ω^b) in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ such that $(0,\omega^a)V((\omega^a,\omega^b)) = \{(0,\omega^b)\}$ and for the neighborhood $V((\omega^a,\omega^b))$ conditions of Lemma 2 hold. Then $(0,\omega^a)(c,d) = (0,d+(\omega^a-c)) = (0,\omega^b)$ for every $(c,d) \in V((a,b))$. Hence $d+(\omega^a-c) = d+\omega^a = \omega^b$, but this equation is true only if $\omega^a = \omega^b$, a contradiction.

In the case when $a > b$ the proof is similar.

By [26, Theorem 17] each ordinal α has Cantor's normal form, that is $\alpha = n_1\omega^{\beta_1} + n_2\omega^{\beta_2} + ... + n_k\omega^{\beta_k}$, where n_i are positive integers and $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_3$ is a decreasing sequence of ordinals.

Lemma 4. *Let $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ be a semitopological semigroup, $a = n_1\omega^{\beta_1} + n_2\omega^{\beta_2} + ... + n_k\omega^{\beta_k}$, $b = m_1\omega^{\gamma_1} + m_2\omega^{\gamma_2} + ... + m_t\omega^{\gamma_t}$ be Cantor's normal forms of ordinals a and b respectively. If $(a, b) \in \mathcal{B}_\alpha$ and $(\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})$ is an isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ then (a, b) is an isolated point in the space $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$.*

Proof. Suppose $(\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})$ is an isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$. Put $a^* = n_1\omega^{\beta_1} + n_2\omega^{\beta_2} + ... + (n_k - 1)\omega^{\beta_k}$ and $b^* = m_1\omega^{\gamma_1} + n_2\omega^{\gamma_2} + ... + (n_t - 1)\omega^{\gamma_t}$. Here we agree that $a^* = 0 (b^* = 0)$ in the case when $n_k = 1 (n_t = 1)$. Then $(0, a^*)(a, b)(b^*, 0) = (\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})$. The separate continuity of multiplication in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ implies that there exists an open neighborhood $V((a, b))$ of (a, b) such that $(0, a^*)V((a, b))(b^*, 0) = \{(\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})\}$. Fix any element $(c, d) \in V((a, b))$. Obviously $(0, a^*)(c, d)(b^*, 0)$ can be equal to $(\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})$ only if $a^* \leqslant c$ and $b^* \leqslant d$. Then $(0, a^*)(c, d)(b^*, 0) = (c - a^*, d - b^*) = (\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})$, which implies that $c = a$ and $d = b$. Hence $V((a, b)) = \{(a, b)\}$.

Proposition 2. *Let $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ be a semitopological semigroup and a be a non-limit ordinal. Then for every ordinal $b \in \omega^\alpha$ both (a, b) and (b, a) are isolated points in the space $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$.*

Proof. Corollary 1 and Lemma 4 imply that both points (a, b) and (b, a) are isolated in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ if b is a non-limit ordinal. Hence it is sufficient to consider the case when b is a limit ordinal. Suppose to the contrary that (a, b) is a non-isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$. Since $(a, b)(b, 0) = (a, 0)$, the separate continuity of multiplication in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$, Lemmas 1 and 2 imply that there exists an open neighborhood $V((a, b))$ of (a, b) satisfying conditions of Lemma 2 such that $V((a, b))(b, 0) = \{(a, 0)\}$. Fix an arbitrary element $(c, d) \in V(a, b) \setminus \{(a, b)\}$. Then $(c, d)(b, 0) = (c + (b - d), 0) = (a, 0)$. Hence $a = c + (b - d)$, but since b is a limit ordinal we have that $b - d$ is also a limit ordinal. Then $c + (b - d)$ is a limit ordinal which contradicts to the assumption that a is a non-limit ordinal. Proof of the statement that (b, a) is an isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ is similar.

Theorem 1. *For each $\alpha < \omega + 1$ every locally compact topological α-bicyclic semigroup $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ is discrete.*

Proof. Lemmas 3 and 4 imply that if each idempotent (ω^a, ω^a) of the $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ is an isolated point then τ is discrete.

It is obvious that the subset $\{(n, m) : n, m < \omega\} \cup \{\omega, \omega\}$ with the semigroup operation induced from $\mathcal{B}_\alpha$ is isomorphic to the bicyclic semigroup with adjoined zero. Then by Lemma 2 and [11, Corollary 1], (ω, ω) is an isolated point in $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$.

Suppose $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ is a non-discrete semigroup. Let m be the smallest positive integer such that (ω^m, ω^m) is a non isolated idempotent of $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$. We remark that by the our assumption Lemmas 3 and 4 imply that $\{(a, b) : a, b < \omega^m\}$ is discrete subsemigroup of $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ which is algebraically isomorphic to $\mathcal{B}_m$. By Lemma 2 there exists a clopen compact neighborhood $W((\omega^m, \omega^m))$ of (ω^m, ω^m) such that $W((\omega^m, \omega^m)) \subset \mathcal{B}_m \cup \{(\omega^m, \omega^m)\}$. The continuity of the multiplication in the $(\mathcal{B}_\alpha, \tau)$ implies that there exists a compact open neighborhood $V((\omega^m,\omega^m)) \subseteq W((\omega^m,\omega^m))$ of (ω^m,ω^m) such that $(0,0) \notin V^2((\omega^m,\omega^m))$. Since $V((\omega^m,\omega^m))$ is compact and (ω^m,ω^m) is the only non-isolated point in $V((\omega^m,\omega^m))$, we have that (ω^m,ω^m) is a limit point of every infinite sequence $x_n \in V((\omega^m,\omega^m))$ consisting of mutually distinct elements.

For an arbitrary element $(y,0) \in \mathcal{B}_m$ put

$$X_{(y,0)} = \{(0,x) : (y,0)(0,x) = (y,x) \in V\}.$$

Suppose that there exists an element $(y,0) \in \mathcal{B}_m$ for which the set $X_{(y,0)}$ is infinite. Let $X_{(y,0)} = \{(0,x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ be an enumeration of the set $X_{(y,0)}$. Observe that

$$(\omega^m,\omega^m) = \lim_{k\to\infty}((y,0)(0,x_k)) = \lim_{k\to\infty}(y,x_k).$$

Then for every ordinal $z < \omega^m$

$$\lim_{k\to\infty}(z,x_k) = (\omega^m,\omega^m),$$

because

$$(\omega^m,\omega^m) = (z,y)(\omega^m,\omega^m) = (z,y)\lim_{k\to\infty}(y,x_k) = \lim_{k\to\infty}((z,y)(y,x_k)) = \lim_{k\to\infty}(z,x_k)$$

For every $k \in \mathbb{N}$ let c_k be the smallest ordinal such that $(x_k,c_k) \in V((\omega^m,\omega^m))$. Since $(0,0) \notin V^2((\omega^m,\omega^m))$ we have that there exists $k_0 \in \mathbb{N}$ such that for every $k > k_0$ $c_k \neq 0$. Observe that (ω^m,ω^m) is a zero of $\mathcal{B}_m$. The continuity of the multiplication in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ implies that there exists an open compact neighborhood $O((\omega^m,\omega^m)) \subseteq V((\omega^m,\omega^m))$ such that

$$O((\omega^m,\omega^m))(1,0) \cup O((\omega^m,\omega^m))(\omega,0) \cup .. \cup\ O((\omega^m,\omega^m))(\omega^{m-1},0) \subseteq V((\omega^m,\omega^m)).$$

But then an infinite discrete space $\{(x_k,c_k) : k \in \mathbb{N}\} \subset V((\omega^m,\omega^m)) \setminus O((\omega^m,\omega^m))$, which contradicts the compactness of $V((\omega^m,\omega^m))$. The obtained contradiction implies that $X_{(y,0)}$ is a finite set for every element $(y,0) \in \mathcal{B}_m$.

Since $V((\omega^m,\omega^m))$ is infinite there exist an infinite set $A = \{(y_n,0) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}_m$ such that $X_{(y_n,0)} \neq \emptyset$. For an arbitrary element $(y_n,0) \in A$ by $(0,z_{y_n})$ we denote an element of $X_{(y_n,0)}$ which has the greatest second coordinate. Clearly that $\{(y_n,0)(0,z_{y_n}) = (y_n,z_{y_n})\}$ is infinite sequence of $V((\omega^m,\omega^m))$. Then we have that

$$\lim_{n\to\infty}(y_n,z_{y_n}) = (\omega^m,\omega^m).$$

But

$$\begin{aligned}(\omega^m,\omega^m) &= (\omega^m,\omega^m)(0,\omega^{m-1}) = \lim_{n\to\infty}(y_n,z_{y_n})(0,\omega^{m-1}) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(y_n,\omega^{m-1}+z_{y_n}) \neq (\omega^m,\omega^m),\end{aligned}$$

because $\omega^{m-1} + z_{y_n} > z_{y_n}$ which contradicts the continuity of the multiplication in $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$. Hence $(\mathcal{B}_\alpha,\tau)$ is a discrete semigroup.

However the following example shows that there exists a non-discrete locally compact topology τ_{lc} on the $\mathcal{B}_{\omega+1}$ such that $(\mathcal{B}_{\omega+1},\tau_{lc})$ is a topological inverse semigroup.

Example 1. We define the topology τ_{lc} in the following way: all points distinct from $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$ for some positive integers n, m are isolated, and the family $\mathscr{B}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) = \{U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) : k \in \mathbb{N}\}$ forms a base of the topology τ_{lc} at the point $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, where

$$U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) = \{((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) : t > k\} \cup \{(n\omega^\omega, m\omega^\omega)\}.$$

Clearly that τ_{lc} is a Hausdorff topology on $\mathcal{B}_{\omega+1}$. Since every open basic neighborhood of an arbitrary non isolated point $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$ is compact we have that τ_{lc} is locally compact.

It is obvious that for every positive integer k

$$inv(U_k(n\omega^\omega, m\omega^\omega)) = U_k(m\omega^\omega, n\omega^\omega).$$

Hence the inversion is continuous in $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Let $a < \omega^{\omega+1}$ be an arbitrary ordinal. Below for us will be useful the following trivial modification of the Cantor's normal form of the ordinal a:

$$a = n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p},$$

where n_1 is a non negative integer, $n_2, .., n_p$ are positive integers and $\omega, t_2, t_3, .., t_p$ is a decreasing sequence of ordinals.

It is sufficient to check the continuity of the multiplication at a point $((a, b), (c, d)) \in \mathcal{B}_{\omega+1} \times \mathcal{B}_{\omega+1}$ when at least one of the points (a, b) or (c, d) is non-isolated in $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Hence there are three cases to consider:

(1) $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega)(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, where $n, m, n_1, m_1 \in \mathbb{N}$;
(2) $(a, b)(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, where (a, b) is an isolated point in $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$, $n, m \in \mathbb{N}$;
(3) $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)(a, b)$, where (a, b) is an isolated point in $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$, $n, m \in \mathbb{N}$;

Suppose the first case holds, then we have the multiplication of the form

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega)(n\omega^\omega, m\omega^\omega).$$

It has the following three subcases:

(1.1) if $m_1 < n$ then $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega)(n\omega^\omega, m\omega^\omega) = ((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)$;
(1.2) if $m_1 = n$ then $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega)(n\omega^\omega, m\omega^\omega) = (n_1\omega^\omega, m\omega^\omega)$;
(1.3) if $m_1 > n$ then $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega)(n\omega^\omega, m\omega^\omega) = (n_1\omega^\omega, (m + m_1 - n)\omega^\omega)$.

Let's consider the subcase (1.1). Let $U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega))$ be a basic open neighborhood of $((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)$. Then we state that

$$U_k((n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega))U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) \subseteq U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Indeed, fix any elements

$$((n_1 - 1)\omega^\omega + \omega^t, (m_1 - 1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_k((n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega))$$

and

$$((n - 1)\omega^\omega + \omega^p, (m - 1)\omega^\omega + \omega^p) \in U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Then

$$
\begin{aligned}
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+((n-1)\omega^\omega+\omega^p-((m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)),(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+((n-1-m_1+1)\omega^\omega+\omega^p),(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1+n-1-m_1+1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1+n-m_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega,m\omega^\omega)).
\end{aligned}
$$

Let's consider the subcase (1.2). We have that $m_1=n$. Let $U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega))$ be a basic open neighborhood of $(n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)$. Then we state that

$$U_k((n_1\omega^\omega,n\omega^\omega))U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega))\subseteq U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Indeed, fix any elements

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(n-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,n\omega^\omega))$$

and

$$((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

If $p>t$ then

$$
\begin{aligned}
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(n-1)\omega^\omega+\omega^t)((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+((n-1)\omega^\omega+\omega^p-((n-1)\omega^\omega+\omega^t)),(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+(\omega^p-\omega^t),(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).
\end{aligned}
$$

If $p=t$ then we have the following:

$$
\begin{aligned}
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(n-1)\omega^\omega+\omega^p)((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).
\end{aligned}
$$

If $p<t$ then

$$
\begin{aligned}
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(n-1)\omega^\omega+\omega^t)((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+((n-1)\omega^\omega+\omega^t-((n-1)\omega^\omega+\omega^p)))=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+(\omega^t-\omega^p))=\\
&((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).
\end{aligned}
$$

Let's consider the subcase (1.3). In this subcase we have that $m_1>n$.
Let $U_k((n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega))$ be a basic open neighborhood of $(n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega)$. Then we state that

$$U_k((n_1\omega^\omega,m_1\omega^\omega))U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega))\subseteq U_k((n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega)).$$

Indeed, fix any elements

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,m_1\omega^\omega))$$

and

$$((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Then

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=$$
$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+((m_1-1)\omega^\omega+\omega^t-((n-1)\omega^\omega+\omega^p)))=$$
$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+((m_1-1-n+1)\omega^\omega+\omega^t))=$$
$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m+m_1-n-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega)).$$

Hence the continuity of the multiplication in $(\mathcal{B}_{\omega+1},\tau_{lc})$ holds in the case (1).

Let's consider the case (2). It has the following three subcases:

(2.1) $a\neq n_1\omega^\omega$ and $b\neq m_1\omega^\omega$;
(2.2) $a\neq n_1\omega^\omega$ and $b=m_1\omega^\omega$;
(2.3) $a=n_1\omega^\omega$ and $b\neq m_1\omega^\omega$.

Let's consider the subcase (2.1) Let $a=n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}$ and $b=m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c}$, (note that n_1 and m_1 could be equal to 0). Then we have the following two subcases:

(2.1.1) if $m_1<n$ then

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p},m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})(n\omega^\omega,m\omega^\omega)=((n_1+n-m_1)\omega^\omega,m\omega^\omega);$$

(2.1.2) if $m_1\geqslant n$ then

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p},m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})(n\omega^\omega,m\omega^\omega)=$$
$$=(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p},(m+m_1-n)\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c});$$

Let's prove the continuity in the subcase (2.1.1). Let $U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega,m\omega^\omega))$ be a basic open neighborhood of $((n_1+n-m_1)\omega^\omega,m\omega^\omega)$. Note that

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p},m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})$$

is an isolated point in $(\mathcal{B}_{\omega+1},\tau_{lc})$. Then we state that

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p},m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})U_{r_2+t_2+k}((n\omega^\omega,m\omega^\omega))\subseteq$$
$$\subseteq U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Indeed, fix any element

$$((n-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_{r_2+t_2+k}((n\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Then

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p},m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})((n-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+$$
$$+\omega^t)=(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}+((n-1)\omega^\omega+\omega^t-(m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..$$
$$+m_c\omega^{r_c})),(m-1)\omega^\omega+\omega^t)=$$
$$=(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}+((n-1-m_1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^t)=$$
$$=((n_1+n-m_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Hence the continuity of the multiplication in the subcase (2.1.1) holds.

Let's consider the subcase (2.1.2). Note that both $(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})$ and $(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, (m+m_1-n)\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})$ are isolated points in the $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Then we state that

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) =$$
$$= \{(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, (m+m_1-n)\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})\}.$$

Indeed, fix any element

$$((n-1)\omega^\omega+\omega^t, (m-1)\omega^\omega+\omega^t) \in U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Then

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c})((n-1)\omega^\omega+\omega^t, (m-1)\omega^\omega+$$
$$+\omega^t) = (n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega+\omega^t+(m_1\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c}-$$
$$-((n-1)\omega^\omega+\omega^t))) =$$
$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega+\omega^t+((m_1-n+1)\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c}) =$$
$$= (n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, (m+m_1-n)\omega^\omega+m_2\omega^{r_2}+..+m_c\omega^{r_c}).$$

Hence the continuity of the multiplication in the subcase (2.1) holds.

Let's consider the subcase (2.2). Let $a = n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}$ and $b = m_1\omega^\omega$. Then we have the following two subcases:

(2.2.1) if $m_1 < n$ then

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)(n\omega^\omega, m\omega^\omega) = ((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega);$$

(2.2.2) if $m_1 \geqslant n$ then

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)(n\omega^\omega, m\omega^\omega) =$$
$$= (n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, (m+m_1-n)\omega^\omega);$$

Let's consider the subcase (2.2.1). Let $U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega))$ be a basic open neighborhood of $((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)$. Note that $(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)$ is an isolated point in the $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Then we state that

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)U_{t_2+k}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) \subseteq$$
$$\subseteq U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Indeed, fix any element

$$((n-1)\omega^\omega+\omega^t, (m-1)\omega^\omega+\omega^t) \in U_{t_2+k}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Then

$$(n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)((n-1)\omega^\omega+\omega^t, (m-1)\omega^\omega+\omega^t) =$$
$$= (n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}+((n-1)\omega^\omega+\omega^t-m_1\omega^\omega), (m-1)\omega^\omega+\omega^t) =$$
$$= (n_1\omega^\omega+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}+((n-1-m_1)\omega^\omega+\omega^t), (m-1)\omega^\omega+\omega^t) =$$
$$= ((n_1+n-m_1-1)\omega^\omega+\omega^t, (m-1)\omega^\omega+\omega^t) \in U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Hence the continuity of the multiplication in the subcase (2.2.1) holds.

Let's consider the subcase (2.2.2). Note that both $(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)$ and $(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^\omega)$ are isolated points in the $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Then we state that

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) =\\ &= \{(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^\omega)\}.\end{aligned}$$

Indeed, fix any element

$$((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Then

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =\\ &= (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + (m_1\omega^\omega - ((n-1)\omega^\omega + \omega^t))) =\\ &= (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + ((m_1 - n + 1)\omega^\omega) =\\ &= (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^\omega).\end{aligned}$$

Hence the continuity of the multiplication in the subcase (2.2) holds.

Let's consider the subcase (2.3). Let $a = n_1\omega^\omega$ and $b = m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c}$.

Then we have the following two subcases:

(2.3.1) if $m_1 < n$ then

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})(n\omega^\omega, m\omega^\omega) = ((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega);$$

(2.3.2) if $m_1 \geqslant n$ then

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})(n\omega^\omega, m\omega^\omega) =\\ &= (n_1\omega^\omega, (m + m_1 - n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c});\end{aligned}$$

Let's consider the subcase (2.3.1). Let $U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega))$ be a basic open neighborhood of $((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)$. Then we state that

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})U_{r_2+k}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) \subseteq\\ &\subseteq U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).\end{aligned}$$

Indeed, fix any element

$$((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_{r_2+k}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Then

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =\\ &= (n_1\omega^\omega + ((n-1)\omega^\omega + \omega^t - (m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})), (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =\\ &= (n_1\omega^\omega + ((n - 1 - m_1)\omega^\omega + \omega^t), (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =\\ &= ((n_1 + n - m_1 - 1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).\end{aligned}$$

Hence the continuity of the multiplication in the subcase (2.3.1) holds.

Now let's consider the subcase (2.3.2). Note that both $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})$ and $(n_1\omega^\omega, (m + m_1 - n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})$ are isolated points in the

$(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Then we state that

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) =$$
$$= \{(n_1\omega^\omega, (m + m_1 - n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})\}.$$

Indeed, fix any element

$$((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Then

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c})((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =$$
$$= (n_1\omega^\omega, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + (m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c} - ((n-1)\omega^\omega + \omega^t))) =$$
$$= (n_1\omega^\omega, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + ((m_1 - n + 1)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + ... + m_c\omega^{r_c}) =$$
$$= (n_1\omega^\omega, (m + m_1 - n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c}).$$

Hence the continuity of the multiplication holds in the case (2).

Since the inversion is continuous in $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ and

$$((a, b)(n\omega^\omega, m\omega^\omega))^{-1} = (m\omega^\omega, n\omega^\omega)(b, a)$$

the case (2) implies that the semigroup operation in the case (3) is continuous too.

Hence $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ is a topological inverse semigroup.

Acknowledgements

The author acknowledges Oleg Gutik for his comments and suggestions.

References

1. *Andersen O.*, Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen, PhD Thesis, Hamburg, — 1952.
2. *Banakh T., Dimitrova S., Gutik O.,* Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups, Topology Appl. — 157:18. — 2010. — P. 2803–2814.
3. *Banakh T., Dimitrova S. and Gutik O.,* The Rees-Suschkiewitsch Theorem for simple topological semigroups, Mat. Stud. — 31:2. — 2009. — P. 211–218.
4. *Bardyla S. and Gutik O.,* On a semitopological polycyclic monoid, Algebra Discr. Math. — 21, no. 2. — 2016. — P. 163–183.
5. *Bardyla S. and Gutik O.,* On a complete topological inverse polycyclic monoid, Carpathian Math. Publ. (submitted), arXiv:1603.08147.
6. *Bertman M. O. and West T. T.,* Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups, Proc. Roy. Irish Acad. — A76:21–23. — 1976. — P. 219–226.
7. *Chuchman I. and Gutik O.,* Topological monoids of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of positive integers, Carpathian Math. Publ. — 2:1. — 2011. — P. 119–132.
8. *Clifford A. H. and Preston G. B.,* The Algebraic Theory of Semigroups, Vols. I and II, Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961 and 1967.
9. *Eberhart C. and Selden J.,* On the closure of the bicyclic semigroup, Trans. Amer. Math. Soc. — 144. — 1969. — P. 115–126.
10. *Fihel I. R.and Gutik O. V.,* On the closure of the extended bicyclic semigroup. Carpathian Math. Publ. — 3:2. — 2011. — P. 131–157.
11. *Gutik O.*, On the dichotomy of the locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 80. — 2015. — P. 33–41.

12. *Gutik O. and Repovš D.,* On countably compact 0-simple topological inverse semigroups. Semigroup Forum. — 75:2. — 2007. — P. 464–469.
13. *Gutik O. and Repovš D.,* Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image, Stud. Sci. Math. Hungar. — 48:3. — 2011. — P. 342–353.
14. *Gutik O. and Repovš D.,* On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images, Georgian Math. J. — 19:3. — 2012. — P. 511–532.
15. *Hogan J. W.* Hausdorff topologies on the α-bicyclic semigroup, Semigroup forum. — 36:1. — 1987. — P. 189–209.
16. *Hogan J. W.,* The α-bicyclic semigroup as a topological semigroup, Semigroup forum. — 28. — 1984. — P. 265–271.
17. *Hogan J. W.,* Bisimple semigroup with idempotents well-ordered, Semigroup forum. — 6. — 1973. — P. 296–316.
18. *Jones D. G.,* Polycyclic monoids and their generalizations. — PhD Thesis, Heriot-Watt University, 2011.
19. *Jones D. G. and Lawson M. V.,* Graph inverse semigroups: Their characterization and completion, J. Algebra. — 409. — 2014. — P. 444–473.
20. *Kunen K.,* Set Theory, Mathematical Logic and Foundations. — Vol.34. — 2013.
21. *Lawson M.,* Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries, Singapore: World Scientific, 1998.
22. *Mesyan Z., Mitchell J.D., Morayne M. and Péresse Y. H.*, Topological graph inverse semigroups, Topology Appl. — 208. — 2016. — P. 106–126.
23. *Nivat M. and Perrot J.-F.,* Une généralisation du monoide bicyclique, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A. — 271. — 1970. — P. 824–827.
24. *Selden A. A.,* A nonlocally compact nondiscrete topology for the α-bicyclic semigroup, Semigroup forum. — 31. — 1985. — P. 372–374.
25. *Sierpinski W.,* Cardinal and Ordinal Numbers, Second Ed. Revised, PWN, Warszava, 1965.
26. *Weiss W.,* An introduction to set theory, www.math.toronto.edu/weiss/SetTheory.pdf, 2014.

Стаття: надійшла до редколегії 31.05.2016
прийнята до друку 08.06.2016

ПРО НАПІВТОПОЛОГІЧНИЙ α-БІЦИКЛІЧНИЙ МОНОЇД

Сергій БАРДИЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська,1, Львів, 79000
e-mail: sbardyla@yahoo.com

Досліджено напівтопологічний α-біциклічний моноїд $\mathcal{B}_\alpha$. Доведено, що $\mathcal{B}_\alpha$ — алгебрично ізоморфний напівгрупі усіх порядкових ізоморфізмів між верхніми множинами ординалу ω^α. Також доведено, що для довільного ординалу α, для довільного елемента $(a,b) \in \mathcal{B}_\alpha$ з того, що a або b не є граничним ординалом, випливає, що (a,b) є ізольованою точкою в $\mathcal{B}_\alpha$. З'ясовано, що для довільно ординалу $\alpha < \omega + 1$ кожна локально компактна напівгрупова топологія на $\mathcal{B}_\alpha$ є дискретною і побудований приклад недискретної локально компактної топології τ_{lc} на $\mathcal{B}_{\omega+1}$ такої, що $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою. Цей приклад засвідчує, що є помилка в [16, Теоремі 2.9], де стверджується, що для довільного ординалу α існує лише дискретна локально компактна топологія на $\mathcal{B}_\alpha$, яка перетворює $\mathcal{B}_\alpha$ в топологічну інверсну напівгрупу.

Ключові слова: топологічна інверсна напівгрупа, топологічна напівгрупа, напівтопологічна напівгрупа, α-біциклічний моноїд.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 23–38
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 23–38

УДК 517.9

UNIQUE SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH TIME DEPENDENT DELAY

Mykola BOKALO, Olga ILNYTSKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mails: mm.bokalo@gmail.com, ol.ilnytska@gmail.com

The existence and uniqueness of a weak solutions of the mixed problems for nonlinear parabolic equations with variable delay are investigated and its a priori estimate is obtained.

Key words: initial-boundary value problem, equation with delay, nonlinear parabolic equation.

1. Introduction.

The initial-boundary value problems for the nonlinear parabolic equations with time depended delay are considered. A typical example of the equations being studied here is

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{a}_i(x,t) u_{x_i} \Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t) u + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c_0(x,t,s) u(x,s)\, ds = f(x,t), \tag{1}$$

$(x,t) \in Q := \Omega \times (0,T)$, where $n \in \mathbb{N}$, Ω is a domain in $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_n$ are measurable positive functions on Q, τ is a nonnegative continuous function, c_0 is a measurable bounded function, f is an integrable function, u is an unknown function.

Equations with time delay arise in modelling population dynamics, in non-Newtonian filtration, heat flux, etc. ([5]). The equations of type (1) with constant delay were investigated in [1], [2], [3], [6], [7] and others. A good reference overview of such papers can be found in [3]. Note that in these papers the semigroup theory is used.

Partial differential equations with a variable delay are less studied, and we know only publications of Rezounenko and Chueshov (in particular, [4], [8]), where equations of type (1), with $\tau = \tau(u)$, are considered. In [4], a certain abstract parabolic problem with the state dependent delay term of a rather general structure is considered. In [8], the nonlinear partial functional differential equations with main linear elliptic operator and non-local nonlinear term is considered. For proving existence of solutions of problems considered in [4], [8] Galerkin's approximations are used.

To the best of our knowledge, the initial-boundary value problems for parabolic equations with time dependent delay is an untreated topic in the literature. These problems are considered in our paper. Existence and uniqueness of solution of the problem are proved. The methods of investigation as in [10] are used.

The paper is organized as follows. In Section 2, the main notations and functional spaces are introduced. The statement of the problem and formulation of the main result are given in Section 3. The main result is proved in Section 4.

2. Notations and auxiliary facts.

Let n be a natural number, $\mathbb{R}^n$ be the standard linear space of ordered collections $x=(x_1,...,x_n)$ of real numbers with the norm $|x|:=(|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2)^{1/2}$. Suppose that $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ is a bounded domain with a piecewise smooth boundary $\partial\Omega$, $\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1$, where Γ_0 is the closure of an open set on $\partial\Omega$ (in particular, either $\Gamma_0=\emptyset$ or $\Gamma_0=\partial\Omega$), $\Gamma_1:=\partial\Omega\setminus\Gamma_0$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ is a unit outward pointing normal vector on $\partial\Omega$. Let $T>0$ and $Q:=\Omega\times(0,T)$, $\Sigma_0:=\Gamma_0\times(0,T)$, $\Sigma_1:=\Gamma_1\times(0,T)$.

Now let us give the definitions of the following functional spaces. First, denote by $H^1(\Omega)$ the Sobolev space of the functions $v\in L_2(\Omega)$ such that $v_{x_i}\in L_2(\Omega)$ $(i=\overline{1,n})$, with the norm $||v||_{H^1(\Omega)}:=\Big(||v||^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n||v_{x_i}||^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$. Let $\widetilde{H}^1(\Omega)$ be the closure of the space $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}):=\{v\in C^1(\overline{\Omega})\mid v|_{\Gamma_0}=0\}$ in $H^1(\Omega)$.

Denote by $L_2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega))$ the space of measurable functions $w:(0,T)\to\widetilde{H}^1(\Omega)$ such that for a.e. $t\mapsto||w(t)||_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\in L_2(0,T)$.

Denote by $F(Q)$ the space of vector-functions $(f_0,f_1,\ldots,f_n)\in[L_2(Q)]^{1+n}$ such that $f_i\in L_2(Q)$, and for each $i\in\{1,...,n\}$, $f_i=0$ a.e. in some neighborhood of the surface Σ_1.

Finally, define $C^1_0(0,T)$ as the subset of the set $C^1(0,T)$ whose elements are of compact support in $(0,T)$. Also denote by $C([t_1,t_2];L_2(\Omega))$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R},\ t_1<t_2)$ the space of continuous functions $w:[t_1,t_2]\to L_2(\Omega)$.

3. Statement of the problem and main result.

In this paper we consider the problem of finding a function $u:\overline{\Omega}\times[-\tau_0,T]\to\mathbb{R}$ satisfying (in some sense) the equation

$$u_t-\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}\,a_i(x,t,u,\nabla u)+a_0(x,t,u,\nabla u)+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(x,t,s,u(x,s))ds$$

$$=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,t)+f_0(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u\Big|_{\Sigma_0}=0,\qquad \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i\Big|_{\Sigma_1}=0, \tag{3}$$

and the initial condition

$$u(x,t)=u_0(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[-\tau_0,0]. \tag{4}$$

Here $\tau : [0,T] \to \mathbb{R}$ is a continuous function such that $\tau(t) \geqslant 0$ for all $t \in [0,T]$, $\tau_0 := \max\{-\inf\limits_{t\in[0,T]}(t-\tau(t)), 0\}$ (assume $[-0,0] = \{0\}$), $\tau^+ := \max\limits_{t\in[0,T]}\tau(t)$, and $a_i : Q\times\mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : Q\times(-\tau_0,T)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, $u_0 : \overline{\Omega}\times[-\tau_0,0]\to\mathbb{R}$ are given real-valued functions from the corresponding classes of initial data.

We introduce the following classes of the initial data.

Define $\mathbb{A}$ to be the set of the collections $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ of the functions satisfying the following assumptions:

$(\mathcal{A}_1)$ for every $i \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$Q\times\mathbb{R}^{1+n} \ni (x,t,\rho,\xi) \mapsto a_i(x,t,\rho,\xi) \in \mathbb{R}$$

is a Caratheodory function, i.e., $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ is a continuous function for a.e. $(x,t) \in Q$, and $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ is a measurable function for every $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$;

$(\mathcal{A}_2)$ for every $i \in \{0,1,\dots,n\}$, for every $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$, and for a.e. $(x,t) \in Q$ the estimate

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \le C_1\big(|\rho| + \sum_{j=1}^{n}|\xi_j|\big) + h_i(x,t),$$

is valid, where C_1 is a positive constant (depending on $(a_0, a_1 \dots, a_n)$), and $h_i \in L_2(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ for every (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ and for a.e. $(x,t) \in Q$ the inequality

$$\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1-\xi_i^2) + \big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1-\rho_2)$$
$$\ge -K_0|\rho_1-\rho_2|^2,$$

holds, where $K_0 \geqslant 0$ is a constant;

$(\mathcal{A}_4)$ for every $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ and for a.e. $(x,t) \in Q$ we have

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\rho \ge K_1\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2 - K_2|\rho|^2 - g(x,t),$$

where K_1, K_2 are positive constants (depending on $(a_0, a_1 \dots, a_n)$), and $0 \leqslant g \in L_1(Q)$.

Define $\mathbb{C}$ to be the set of the functions $c(x,t,s,\rho)$, $(x,t,s,\rho) \in Q\times(-\tau_0,T)\times\mathbb{R}$, satisfying the following assumptions:

$(\mathcal{C}_1)$ c is a Caratheodory function, i.e., $c(x,t,s,\cdot) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a continuous function for a.e. $(x,t,s) \in Q\times(-\tau_0,T)$, and $c(\cdot,\cdot,\cdot,\rho) : Q\times(-\tau_0,T) \to \mathbb{R}$ is a measurable function for every $\rho \in \mathbb{R}$; in addition, $c(x,t,s,0) = 0$ for a.e. $(x,t,s) \in Q\times(-\tau_0,T)$;

$(\mathcal{C}_2)$ there exists a constant $L > 0$ (depending on c) such that for every ρ_1, $\rho_2 \in \mathbb{R}$ and for a.e. $(x,t,s) \in Q\times(-\tau_0,T)$ the inequality

$$\big|c(x,t,s,\rho_1) - c(x,t,s,\rho_2)\big| \le L|\rho_1-\rho_2| \tag{5}$$

holds.

Remark. From the condition $c(x,t,s,0) = 0$ and $(\mathcal{C}_2)$ it follows that for every $\rho \in \mathbb{R}$, and for a.e. $(x,t,s) \in Q\times(-\tau_0,T)$ the estimate

$$|c(x,t,s,\rho)| \le L|\rho| \tag{6}$$

is valid.

Now we can give a definition of a weak solution to problem (2)–(4).

Definition 1. *Let* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F(Q)$, $u_0 \in C([-\tau_0, 0]; L_2(\Omega))$. *The function* $u \in L_2(0,T; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C([-\tau_0, T]; L_2(\Omega))$ *is called a weak solution of problem (2)–(4) if* u *satisfies the initial condition*

$$||u(\cdot,t) - u_0(\cdot,t)||_{L_2(\Omega)} = 0 \qquad \forall t \in [-\tau_0, 0], \tag{7}$$

and the integral equality

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u) v_{x_i} \varphi + a_0(x,t,u,\nabla u) v\varphi + v\varphi \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))\, ds$$
$$-uv\varphi' \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i} \varphi + f_0 v \varphi \Big\}\, dxdt \tag{8}$$

holds for every $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ *and* $\varphi \in C_0^1(0,T)$.

Theorem 1. *If* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F(Q)$, $u_0 \in C([-\tau_0, 0]; L_2(\Omega))$, *then problem (2)–(4) has a unique weak solution. Moreover, the weak solution* u *of this problem satisfies the estimate*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big|u_{x_i}\big|^2 + |u|^2 \Big\}\, dxdt$$
$$\le C_2 \left(\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big|f_i\big|^2 + g \Big\}\, dxdt + \max_{t\in[-\tau_0,0]} \int\limits_\Omega |u_0(x,t)|^2\, dxdt \right), \tag{9}$$

where C_2 *is a positive constant depending only on* K_1, K_2, L, τ_0, T.

4. Proof of the main result.

The following auxiliary result, which had been proved in [10], will be used in the sequel.

Lemma 1. *Suppose that* $w \in L_2(0,T; \widetilde{H}^1(\Omega))$ *satisfies the following identity*

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n g_i v_{x_i} \varphi + g_0 v\varphi - wv\varphi' \Big\}\, dxdt = 0, \quad v \in \widetilde{H}^1(\Omega),\ \varphi \in C_0^1(0,T), \tag{10}$$

for some $g_j \in L_2(Q)$ $(j = \overline{0,n})$. *Then* $w \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ *and for every* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, *and* $t_1, t_2 \in [0,T]$ $(t_1 < t_2)$, *we have*

$$\theta(t_2) \int\limits_\Omega w(x,t_2) v(x)\, dx - \theta(t_1) \int\limits_\Omega w(x,t_1) v(x)\, dx$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n g_i v_{x_i} \theta + g_0 v\theta - wv\theta' \Big\}\, dxdt = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2) \int\limits_\Omega |w(x,t_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}\theta(t_1) \int\limits_\Omega |w(x,t_1)|^2\, dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|w|^2\theta'\,dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}g_iw_{x_i}+g_0w\Big\}\theta\,dxdt=0. \tag{12}$$

Proof of Theorem 1. For a function $w: Q\to\mathbb{R}$ we denote

$$a_j(w)(x,t):=a_j(x,t,w(x,t),\nabla w(x,t)),\quad (x,t)\in Q,\quad j=\overline{0,n},$$

$$c(w)(x,t,s):=c(x,t,s,w(x,s)),\quad (x,t,s)\in Q\times(-\tau_0,T).$$

Let us prove Theorem 1 in three steps: firstly we prove the uniqueness of solution of problem (2)–(4), later, its existence and, finally, we prove correctness of estimate (9).

First step (uniqueness of solution). Assume the opposite. Let u_1 and u_2 be two different weak solutions of problem (2)–(4). Consider the difference between (8) with $u=u_2$ and (8) with $u=u_1$. From the obtained integral identity by Lemma 1 with $w=u_1-u_2$, $\theta=e^{-\lambda t}$ ($\lambda=\text{const}>0$), $t_1=0$, $t_2=T$, we obtain (see (12))

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int_{\Omega}|w(x,T)|^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\iint_{Q}|w|^2e^{-\lambda t}dxdt+\iint_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_1)-a_i(u_2))(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})$$

$$+(a_0(u_1)-a_0(u_2))(u_1-u_2)+w(x,t)\int_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)]\,ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt=0. \tag{13}$$

From condition $(\mathcal{A}_3)$ we have

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_1)-a_i(u_2))(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})+(a_0(u_1)-a_0(u_2))(u_1-u_2)$$

$$\geqslant -K_0|u_1-u_2|^2. \tag{14}$$

Extend $w(x,t)$ by 0 for all $(x,t)\in\Omega\times\{(-\infty,-\tau_0)\cup(T,+\infty)\}$. Note that $w(x,t)=0$ for a.e. $(x,t)\in\Omega\times[-\tau_0,0]$. Using condition $(\mathcal{C}_2)$, the Fubini Theorem (see, e.g., [13, p.91]) and Hölder's inequality (see, e.g., [13, p.92]) we obtain

$$\Big|\iint_{Q}w(x,t)\Big(\int_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)]\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|$$

$$\leqslant\iint_{Q}|w(x,t)|\Big(\int_{t-\tau(t)}^{t}|c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)|\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt$$

$$\leqslant L\int_{\Omega}dx\int_{0}^{T}|w(x,t)|\Big(\int_{t-\tau(t)}^{t}|w(x,s)|ds\Big)e^{-\lambda t}dt$$

$$\leqslant L\int_{\Omega}dx\int_{0}^{T}|w(x,t)|e^{-\frac{\lambda t}{2}}\Big(e^{-\frac{\lambda t}{2}}\int_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|\,ds\Big)dt$$

$$\leqslant L\sqrt{\tau^+}\int\limits_{\Omega}\Big[\Big(\int\limits_0^T |w(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^T e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)^{1/2}\Big]dx. \qquad (15)$$

Now consider the second integral in the right side of inequality (15). Changing the order of integration, for a.e. $x \in \Omega$ we have

$$\int\limits_0^T e^{-\lambda t}dt \int\limits_{t-\tau^+}^{t} |w(x,s)|^2 ds \leqslant \int\limits_{-\tau^+}^{T} |w(x,s)|^2 ds \int\limits_{s}^{s+\tau^+} e^{-\lambda t}dt =$$

$$= \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\int\limits_0^T |w(x,s)|^2 e^{-\lambda s}ds.$$

Substituting in (15) the last term from the obtained above relations chain instead of the first one, we obtain

$$\Big|\iint\limits_Q w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} |c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)|\ ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|$$

$$\leqslant L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\iint\limits_Q |w(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dxdt. \qquad (16)$$

Using (14), (16), from (13) we obtain

$$\Big(\lambda/2 - K_0 - L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big)\iint\limits_Q |w(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dtdx \leqslant 0. \qquad (17)$$

Choosing λ big enough and such that $\lambda/2 - K_0 - L\sqrt{\lambda^{-1}\tau^+(1-e^{-\lambda\tau^+})} > 0$, from (17) we obtain $u_1 = u_2$ for a.e. $(x,t) \in Q$, i.e., a contradiction to our assumption. Therefore, a solution of problem (2)–(4) is unique.

Second step (existence of solution). For proving existence of a weak solution of problem (2)-(4) Galerkin's method is used. Let $\{w_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ be a full linear independent set of the functions from $\widetilde{H}^1(\Omega)$, which is an orthonormalized basis in $L_2(\Omega)$. For each $k \in \mathbb{N}$, set

$$\alpha_k(t) := \int\limits_{\Omega} u_0(x,t)w_k(x)dx, \quad t \in [-\tau_0, 0]. \qquad (18)$$

Obviously, $\alpha_k \in C([-\tau_0,0])$ $(k \in \mathbb{N})$.

For all $m \in \mathbb{N}$ we denote

$$u_{0,m}(x,t) := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(t)w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}\times[-\tau_0,0]. \qquad (19)$$

It is clear that

$$\max_{t\in[-\tau_0,0]} ||u_0(\cdot,t) - u_{0,m}(\cdot,t)||_{L_2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (20)$$

According to Galerkin's method, for every $m \in \mathbb{N}$ we put

$$u_m(x,t) := \sum_{k=1}^{m} c_{m,k}(t) w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, T], \tag{21}$$

where $c_{m,1}, \dots, c_{m,m}$ are continuous on $[-\tau_0, T]$ and absolutely continuous on $[0,T]$ functions, which are solutions of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations with delay

$$\int_\Omega u_{m,t} w_j \, dx + \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i(u_m) - f_i) w_{j,x_i} + (a_0(u_m) - f_0) w_j$$

$$+ w_j(x) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s) ds \Big\} \, dx = 0, \quad t \in [0,T], \quad j = \overline{1,m}, \tag{22}$$

$$c_{m,k}(t) = \alpha_k(t), \quad t \in [-\tau_0, 0], \; k = \overline{1,m}. \tag{23}$$

Note that from (19), (21) and (23) it follows that

$$u_m(x,t) = u_{0,m}(x,t) \quad \text{for a.e. } (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0]. \tag{24}$$

The linear independence of functions $w_1, \dots, w_m$ yields that the matrix $\Big(\int_\Omega w_k w_j dx \Big)_{k,j=1}^{m}$ is invertible. Thus the system of ordinary differential equations with delay (22) can be transformed to the normal form. Hence, according to the theorems of existence and extension of the solution to this problem (see [11, p. 54], [12, p. 31]), we obtain a global solution $c_{1,m}, \dots.., c_{m,m}$ of problem (22), (23). This solution is defined on the interval $[-\tau_0, T_m\rangle$, where $0 < T_m \le T$. Here the braces "$\rangle$" means either ")" or "]". Further we will obtain the estimates that imply the equality $[-\tau_0, T_m\rangle = [-\tau_0, T]$.

Now we shall obtain estimates of u_m for each $m \in \mathbb{N}$. Multiply the equation of system (22) with a number $j \in \{1, \dots, m\}$ by $c_{m,j} e^{-\lambda t}$, where $\lambda > 0$ is a positive number, and sum over $j \in \{1, \dots, m\}$. Integrating the obtained equality over $t \in [0, \sigma]$, where $\sigma \in [0, T_m\rangle$, and using the integration-by-parts formula and equality (24), we have

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda\sigma} \int_\Omega |u_m(x,\sigma)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |u_{0,m}(x,0)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^\sigma \int_\Omega |u_m(x,t)|^2 e^{-\lambda t} dx dt$$

$$+ \int_0^\sigma \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(u_m) u_{m,x_i} + a_0(u_m) u_m + u_m(x,t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s) ds \Big\} e^{-\lambda t} dx dt$$

$$= \int_0^\sigma \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i u_{m,x_i} + f_0 u_m \Big\} e^{-\lambda t} dx dt. \tag{25}$$

Further we need Cauchy inequality in the form

$$2ab \le \varepsilon |a|^2 + \varepsilon^{-1} |b|^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \tag{26}$$

Now, extend $u_m(x,t) = 0$ for all $(x,t) \in \Omega \times ((-\infty, -\tau_0) \cup (T, +\infty))$. Then, using (6) and Hölder's inequality we obtain

$$\Big|\int_0^\sigma\int_\Omega u_m(x,t)\Big(\int_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|$$

$$\leqslant \int_0^\sigma\int_\Omega |u_m(x,t)|\Big(\int_{t-\tau(t)}^t |c(u_m)(x,t,s)|\,\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt$$

$$\leqslant L\int_\Omega dx\int_0^\sigma |u_m(x,t)|e^{-\lambda t}\Big(\int_{t-\tau(t)}^t |u_m(x,s)|ds\Big)dt$$

$$\leqslant L\int_\Omega dx\int_0^\sigma |u_m(x,t)|e^{-\frac{\lambda t}{2}}\Big(e^{-\frac{\lambda t}{2}}\int_{t-\tau^+}^t |u_m(x,s)|\,ds\Big)dt$$

$$\leqslant L\sqrt{\tau^+}\int_\Omega \Bigg[\Big(\int_0^\sigma |u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\sigma e^{-\lambda t}dt\int_{t-\tau^+}^t |u_m(x,s)|^2ds\Big)^{1/2}\Bigg]dx. \qquad (27)$$

Now, let us estimate the second integral from the right side of the inequality above, for a.e. $x \in \Omega$,

$$\int_0^\sigma e^{-\lambda t}dt\int_{t-\tau^+}^t |u_m(x,s)|^2ds \leqslant \int_{-\tau^+}^\sigma |u_m(x,s)|^2ds\int_s^{s+\tau^+} e^{-\lambda t}dt$$

$$= \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\int_{-\tau_0}^\sigma |u_m(x,s)|^2e^{-\lambda s}ds$$

$$= \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\Big(\int_0^\sigma |u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt + \int_{-\tau_0}^0 |u_{0,m}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big).$$

Here changing order of integration for a.e. $x \in \Omega$, and (24) were used.

Substituting in the right side of (27) the last item from the obtained above chain of relations instead of the first one, and using Hölder's inequality we obtain

$$\Big|\int_0^\sigma\int_\Omega u_m(x,t)\Big(\int_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big(2\int_0^\sigma\int_\Omega |u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt + \int_{-\tau_0}^0\int_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt\Big). \qquad (28)$$

From condition $(\mathcal{A}_4)$ we have

$$\int_0^\sigma\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(u_m)u_{m,x_i}+a_0(u_m)u_m\Big\}\,dxdt\geq\int_0^\sigma\int_\Omega\Big\{K_1\sum_{i=1}^n|u_{m,x_i}|^2-K_2|u_m|^2-g(x,t)\Big\}\,dxdt. \tag{29}$$

Applying inequality (26), we obtain the estimate

$$\int_0^\sigma\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n f_iu_{m,x_i}+f_0u_m\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\sigma\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n|u_{m,x_i}(x,t)|^2$$

$$+|u_m(x,t)|^2\Big\}e^{-\lambda t}dxdt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\sigma\int_\Omega\sum_{i=0}^n|f_i(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt, \tag{30}$$

where $\varepsilon>0$ is arbitrary.

From (25), using (28) – (30), for each $\sigma\in(0,T_m\rangle$ we obtain

$$e^{-\lambda\sigma}\int_\Omega|u_m(x,\sigma)|^2\,dx+(2K_1-\varepsilon)\int_0^\sigma\int_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{m,x_i}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt$$

$$+\Big(\lambda-2K_2-\varepsilon-4L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big)\int_0^\sigma\int_\Omega|u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt$$

$$\leq\varepsilon^{-1}\int_0^\sigma\int_\Omega\sum_{i=0}^n|f_i(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt+2\int_0^\sigma\int_\Omega g(x,t)e^{-\lambda t}dxdt$$

$$+2L\tau_0\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int_\Omega|u_{0,m}(x,t)|^2dx. \tag{31}$$

Taking $\varepsilon=K_1$, $\lambda=\lambda_0$, where λ_0 is a solution of the inequality

$$\lambda-2K_2-K_1-4L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}>0, \tag{32}$$

from (31) we obtain

$$\max_{t\in[0,T]}\int_\Omega|u_m(x,t)|^2\,dx+C_3\iint_Q\Big\{\sum_{i=1}^n|u_{m,x_i}(x,t)|^2+|u_m(x,t)|^2\Big\}dxdt$$

$$\leq C_4\iint_Q\Big(\sum_{i=0}^n|f_i(x,t)|^2+g(x,t)\Big)dxdt+C_5\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int_\Omega|u_{0,m}(x,t)|^2dx, \tag{33}$$

where C_3,C_4,C_5 are positive constants depending only on K,L,τ_0,τ^+,T.

From (20) it follows that the sequence $\{\max\limits_{t\in[-\tau_0,0]}\int_\Omega|u_{0,m}(x,t)|^2dx\}_{m=1}^\infty$ is bounded. Hence from (33) we obtain for all $\sigma\in(0,T_m\rangle$ the estimates

$$\int_\Omega|u_m(x,\sigma)|^2\,dx\leq C_6, \tag{34}$$

$$\int_0^\sigma\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}(x,t)|^2 + |u_m(x,t)|^2\Big\}\, dxdt \le C_7, \tag{35}$$

where C_6, $C_7 > 0$ are independent of m, T_m, σ. Estimate (34) implies that there exists an independent of T_m constant that bounds the functions $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ on $[-\tau_0, T_m\rangle$. Thus $[-\tau_0, T_m\rangle = [-\tau_0, T]$.

Condition $(\mathcal{A}_2)$ and estimate (35) yield

$$\iint_Q |a_i(u_m)(x,t)|^2\, dxdt \le C_8, \quad i = \overline{0,n}, \tag{36}$$

where $C_8 > 0$ is independent of m.

Using (6), the Cauchy–Schwarz inequality, (20) and (34) we obtain

$$\iint_Q \Big| \int_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)\, ds\Big|^2 dxdt \le L^2(T+\tau_0) \iint_Q\int_{-\tau_0}^T |u_m(x,s)|^2\, dsdxdt$$

$$\le L^2 T(T+\tau_0)\Big(\iint_Q |u_m(x,t)|^2\, dxdt + \tau_0 \max_{t\in[-\tau_0,0]} \int_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2 dx\Big) \le C_9, \tag{37}$$

where $C_9 > 0$ is a constant independent of m.

Since the spaces $L_2(Q)$ is reflexive, and estimates (34)–(37) hold, we obtain the existence of a subsequence (we denote it $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ again), functions $v_* \in L_2(\Omega)$, $u \in L_2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega))$, $\chi_i \in L_2(Q)$ $(i=\overline{0,n})$, and $\zeta \in L_2(Q)$ such that

$$u_m(\cdot,T) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v_*(\cdot) \quad \text{weakly in} \quad L_2(\Omega), \tag{38}$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *-\text{weakly in} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{39}$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{weakly in} \quad L_2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega)), \tag{40}$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{weakly in} \quad L_2(Q) \quad (i=\overline{0,n}). \tag{41}$$

$$\int_{t-\tau(t)}^t c(u_m)ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{weakly in} \quad L_2(Q). \tag{42}$$

Let us prove that u is a weak solution of problem (2)–(4).

Fix the numbers $j, m \in \mathbb{N}$ such that $m \ge j$. Multiplying the equation of system (22) with number j by the function $\theta \in C^1([0,T])$ we integrate the obtained equality over $t \in [0,T]$. Letting $m \to \infty$, and taking into account (20), (24), (38)–(42), we obtain

$$\theta(T)\int_\Omega v_*(x) w_j(x)\, dx - \theta(0)\int_\Omega u_0(x,0) w_j(x)\, dx$$

$$-\iint_Q u w_j \theta'\, dxdt + \iint_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (\chi_i - f_i) w_{j,x_i} + (\chi_0 + \zeta - f_0) w_j \Big\}\theta\, dxdt = 0. \tag{43}$$

This equality yields that for every $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ and $\theta \in C^1([0,T])$ the equality

$$\theta(T)\int\limits_\Omega v_*(x)v(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_\Omega u_0(x,0)v(x)\,dx$$

$$-\iint\limits_Q uv\theta'\,dxdt + \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n(\chi_i - f_i)v_{x_i} + (\chi_0 - f_0 + \zeta)v\Big\}\theta\,dxdt = 0 \tag{44}$$

holds.

Notice that if we take $\theta = \varphi \in C_0^1(0,T)$ in (44) then we have the identity

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n(\chi_i - f_i)v_{x_i}\varphi + (\chi_0 - f_0 + \zeta)v\varphi - uv\varphi'\Big\}\,dxdt = 0 \;\; \forall\, v \in \widetilde{H}^1(\Omega),\;\; \forall \varphi \in C_0^1(0,T). \tag{45}$$

According to Lemma 1, (45) imply that

$$u \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \tag{46}$$

and for every $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ and $\theta \in C^1([0,T])$ the equality

$$\theta(T)\int\limits_\Omega u(x,T)v(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_\Omega u(x,0)v(x)\,dx$$

$$-\iint\limits_Q uv\theta'\,dxdt + \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n(\chi_i - f_i)v_{x_i} + (\chi_0 + \zeta - f_0)v\Big\}\theta\,dxdt = 0 \tag{47}$$

holds.

From (44) and (47) we get

$$u(x,0) = u_0(x,0), \quad u(x,T) = v_*(x) \quad \text{for a.e.} \quad x \in \Omega. \tag{48}$$

Extend u by u_0 on $\overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0)$. Let us show that this extended function belongs to the space $C([-\tau_0,T]; L_2(\Omega))$. Indeed, in view of (46) we conclude that the restriction u on $\overline{\Omega} \times [0,T]$ belongs to $C([0,T]; L_2(\Omega))$. From the conditions of the theorem we have $u_0 \in C([-\tau_0, 0]; L_2(\Omega))$. Also, $u(x,0) = u_0(x,0)$ (see (48)). These two facts imply (7). Hence, $u \in C([-\tau_0,T]; L_2(\Omega))$.

According to (45) to prove (8) it is enough to show that the equality

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n \chi_i v_{x_i} + (\chi_0 + \zeta)v\Big\}dx = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(u)v_{x_i} + \Big(a_0(u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u)\,ds\Big)v\Big\}dx \tag{49}$$

is valid for every $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ and for a.e. $t \in (0,T)$. For this we use the monotonicity method (see [15]).

Take a function $w_m \in L_2(0,T; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap L_2(-\tau_0,T; L_2(\Omega))$ such that $w_m(x,t) = u_{0,m}(x,t)$ for a.e. $(x,t) \in \Omega \times (-\tau_0, 0)$ and $w(x,t) = \widetilde{w}(x,t)$ for a.e. $(x,t) \in Q$, where

$\widetilde{w} \in L_2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega))$ is arbitrary. Denote for every $m \in \mathbb{N}$,

$$W_m := \iint_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (a_i(u_m) - a_i(w_m))(u_{m,x_i} - w_{m,x_i}) + (a_0(u_m) - a_0(w_m))(u_m - w_m)$$

$$+\frac{\lambda}{2}|u_m - w_m|^2 + (u_m - w_m) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} (c(u_m) - c(w_m))\, ds\Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt,$$

where $\lambda > 0$ such that the inequality $\lambda/2 - K_0 - L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})} > 0$ holds.

Using condition $(\mathcal{A}_3)$ for every $m \in \mathbb{N}$ we have

$$W_m \geq \iint_Q \Big\{ (\frac{\lambda}{2} - K_0)|u_m - w_m|^2 + (u_m - w_m) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} (c(u_m) - c(w_m))\, ds\Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt.$$

Since the inequality

$$\Big| \iint_Q (u_m - w_m)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} |c(u_m) - c(w_m)|\ ds\Big) e^{-\lambda t} dxdt\Big|$$

$$\leqslant L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})} \iint_Q |u_m - w_m|^2 e^{-\lambda t} dxdt$$

holds (see (16)), and because the choice of λ we obtain $W_m \geq 0$.

Hence, we have

$$W_m = \iint_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(u_m) u_{m,x_i} + a_0(u_m)u_m + \frac{\lambda}{2}|u_m|^2 + u_m \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)\, ds\Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt$$

$$-\iint_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big[a_i(u_m) w_{m,x_i} + a_i(w_m)(u_{m,x_i} - w_{m,x_i})\big] + a_0(u_m)w_m + a_0(w_m)(u_m - w_m)$$

$$+\lambda u_m w_m - \frac{\lambda}{2}|w_m|^2 + w_m \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)\, ds + (u_m - w_m) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w_m)\, ds\Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

From (50), using (25) with $\sigma = T$, we obtain

$$W_m = \iint_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i u_{m,x_i} + f_0 u_m\Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt - \frac{1}{2} e^{-\lambda T} \int_\Omega |u_m(x,T)|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |u_{0,m}(x,0)|^2\, dx$$

$$-\iint_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big[a_i(u_m) w_{m,x_i} + a_i(w_m)(u_{m,x_i} - w_{m,x_i})\big] + \lambda u_m w - \frac{\lambda}{2}|w_m|^2 + a_0(u_m)w_m$$

$$+a_0(w)(u_m-w_m)+w_m\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)\,ds+(u_m-w_m)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w_m)\,ds\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt\geq 0 \qquad (51)$$

for all $m\in\mathbb{N}$.

Taking into account (38) and the second equality of (48) we have

$$\lim_{m\to\infty}\inf ||u_m(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)}\geq ||u(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)}. \qquad (52)$$

Define $w(x,t):=u_0(x,t)$ for $(x,t)\in\Omega\times(-\tau_0,0)$, and $w(x,t):=\widetilde{w}(x,t)$ for $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$. Then,

$$w_m\to w \text{ strongly in } L_2(\Omega\times(-\tau_0,T)). \qquad (53)$$

Now, let us show that

$$\Big|\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w_m)ds-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w)ds\Big|\to 0\quad\text{in}\quad L_2(Q). \qquad (54)$$

Extend the functions w, w_m by 0 on $\Omega\times\{(-\infty,-\tau_0)\cup(T,+\infty)\}$. Using condition $(\mathcal{C}_2)$, Cauchy–Schwarz inequality and changing order of integration, we obtain

$$\iiint\limits_{Q}\Big|\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w_m)ds-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w)ds\Big|^2dxdt\leqslant\tau^+\iiint\limits_{Q}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|c(w_m)-c(w)|^2ds\Big)dxdt$$

$$\leqslant L^2\tau^+\iiint\limits_{Q}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w_m(x,s)-w(x,s)|^2ds\Big)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant L^2\tau^+\int\limits_{\Omega}dx\int\limits_{-\tau^+}^{T}|w_m(x,s)-w(x,s)|^2ds\int\limits_{s}^{s+\tau^+}dt$$

$$=L^2(\tau^+)^2\int\limits_{\Omega}\int\limits_{-\tau^+}^{0}|u_{0,m}(x,t)-u_0(x,t)|^2dxdt\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

By (20), (40), (41), (42), (52), (53) from (51) we obtain

$$0\leq\lim_{m\to\infty}\sup W_m\leq\iiint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_iu_{x_i}+f_0u\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_{\Omega}|u(x,T)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,0)|^2\,dx-\iiint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big[\chi_iw_{x_i}+a_i(w)(u_{x_i}-w_{x_i})\big]$$

$$+\chi_0w+a_0(w)(u-w)+w\zeta+\lambda uw-\frac{\lambda}{2}|w|^2+(u-w)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w)\,ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt. \qquad (55)$$

Using Lemma 1 with $\theta \equiv e^{-\lambda t}$ and the first equality of (48), from (45) we get

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i} + (\chi_0+\zeta)u + \lambda|u|^2\Big\} e^{-\lambda t}\,dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i u_{x_i} + f_0 u\Big\} e^{-\lambda t}\,dxdt$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_\Omega |u(x,T)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0(x,0)|^2\,dx. \tag{56}$$

Thus, (55) and (56) imply that

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(w))(u_{x_i} - w_{x_i}) + (\chi_0 - a_0(w))(u-w)$$

$$+\frac{\lambda}{2}|u-w|^2 + (u-w)\Big(\zeta - \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(w)\,ds\Big)\Big\} e^{-\lambda t}\,dxdt \ge 0. \tag{57}$$

Substituting $w = u - \mu v\varphi$ in the inequality above, where $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\mu > 0$, $\varphi \in C_0^1(-\tau_0, T)$, such that $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,T)$ and dividing the obtained inequality by μ we obtain

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(u-\mu v\varphi)) v_{x_i}\varphi + (\chi_0 - a_0(u-\mu v\varphi))v\varphi$$

$$+\lambda\mu|v\varphi|^2 + \Big(\zeta - \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u-\mu v\varphi)\,ds\Big)v\varphi\Big\} e^{-\lambda t}\,dxdt \ge 0. \tag{58}$$

Letting $\mu \to 0+$ in (58), using condition $(\mathcal{A}_3)$ and the Dominated Convergence Theorem (see [14, p. 648]), we have

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(u)) v_{x_i}\varphi + (\chi_0 - a_0(u))v\varphi + v\varphi\Big(\zeta - \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u)\,ds\Big)\Big\} e^{-\lambda t}\,dxdt = 0,$$

where $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^1(0,T)$ are arbitrary functions. Therefore we obtain (49). Thus, u is a weak solution of problem (2)–(4).

Third step. According to Lemma 1, with $w = u$, $t_1 = 0$, $t_2 = \sigma$, $\theta = e^{-\lambda t}$, $\lambda = \lambda_0$, where λ_0 is a solution of inequality (32), we obtain

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\sigma}\int\limits_\Omega |u(x,\sigma)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0(x,0)|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dxdt$$

$$+\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(u)u_{x_i} + a_0(u)u + u(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u)(x,t,s)ds\Big\} e^{-\lambda t}dxdt$$

$$= \int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i u_{x_i} + f_0 u\Big\} e^{-\lambda t}dxdt. \tag{59}$$

It is easy to show that inequalities similar to (28) – (30), with u instead of u_m, hold. Hence, the inequality, analogous to (33), can be obtained:

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega}|u(x,t)|^2\,dx+C_3\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x,t)|^2+|u(x,t)|^2\Big\}dxdt$$

$$\le C_4\iint\limits_{Q}\Big(\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^2+g(x,t)\Big)dxdt+C_5\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,t)|^2dx. \qquad (60)$$

Therefore, inequality (9) holds.

□

References

1. *Bátkai A.* Semigroups for delay equations / A. *Bátkai*, S. Piazzera // in Resarch Notes in Mathematics, 10, A.K. Peters: Wellesley MA., 2005.
2. *Bátkai A.* Asymptotic behaviour of parabolic problems with delays in the highest order derivatives / A. *Bátkai*, R. Schnaubelt // Semigroup Forum. — 2004. — Vol. 69. №3. — P. 369–399.
3. *Khusainov D.* Strong and Mild Extrapolated L^2 -Solutions to the Heat Equation with Constant Delay / D. Khusainov, M. Pokojovy, R. Racke // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2015. — Vol. 47, № 1. — P. 427–454 .
4. *Chueshov I.* Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay / I.Chueshov, A. Rezounenko // Commun. Pure Appl. Anal. — 2015. — Vol. 14. — P. 1685–1704.
5. *Jin Ch.* Traveling wavefronts for a time delayed non-Newtonian filtration equation / Ch. Jin, J. Yin // Physica D. — 2012. — Vol. 241. — P. 1789–1803.
6. *Ezzinbi K.* Periodic solutions of non-densely defined delay evolution equations / K. Ezzinbi, J. H. Liu // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 2002. — Vol. 15, №2. — P. 105–114.
7. *Di Blasio G.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives / G. Di Blasio, K. Kunisch, E. Sinestrari // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — Vol.102. — P. 38–57.
8. *Rezounenko A. V.* A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: Local theory and global attractors / A. V. Rezounenko, J. Wu // J. Comp. App. Math. — 2006. — Vol. 190. — P. 99—113.
9. *Bokalo M. M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations / M. M. Bokalo // J. Math. Sciences. — 2011. — Vol. 178, № 1. — P. 41–64 (Translated from Ukr. Matem. Visn. — 2011. — Vol. 8. № 1. — P. 55–86).
10. *Bokalo M.M.* Unique solvability of initial boundary value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / M.M. Bokalo, O.M. Buhrii, R. A. Mashiyev // Journal of nonlinear evolution equations and applications. – 2014. — Vol.2013, № 6. — P. 67-–87.
11. *Coddington E. A.* Theory of ordinary differential equations / E. A. Coddington, N. Levinson // McGraw-Hill book company, New York, Toronto, London, 1955.
12. *Elsholts L.E.* Introduction to the theory of differential equations with deviating argument / L.E. Elsholts, S.B. Norkin // Moscow: Nauka., 1971.

13. *Brezis H.* Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations / H. Brezis // Springer, 2011.
14. *Evans L. C.* Partial differential equations / L. C. Evans // Graduate Studies in Mathematics. 2nd ed. — Vol. 19. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2010.
15. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires / J.-L. Lions // Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
16. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory / M. Růžička // Lecture Notes in Mathematics, 1748. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Стаття: надійшла до редколегії 29.12.2015
прийнята до друку 08.06.2016

ОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Микола БОКАЛО, Ольга ІЛЬНИЦЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: mm.bokalo@gmail.com, ol.ilnytska@gmail.com

Досліджено питання існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням. Отримано апріорні оцінки розв'язків розглянутих задач.

Ключові слова: мішана задача, рівняння з запізненням, нелінійне параболічне рівняння.

ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 39–57*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 39–57

УДК 517.956.4; 517.977.5

OPTIMAL RESOURCE COEFFICIENT CONTROL IN A DYNAMIC POPULATION MODEL WITHOUT INITIAL CONDITIONS

Mykola BOKALO, Andrii TSEBENKO

Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, amtseb@gmail.com

An optimal control problem for systems described by Fourier problem (problem without initial conditions) for nonlinear parabolic equations is studied. The control function occurs in the coefficients of the state equations. The existence of the optimal control is proved.

Key words: optimal control, problem without initial conditions, evolution equation.

1. Introduction. Optimal control of determined systems governed by partial differential equations (PDEs) is currently of much interest [1, 4, 6, 7, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 29, 30, 31]. Optimal control problems for PDEs are most completely studied for the case in which the control functions occur either on the right-hand sides of the state equations, or the boundary or initial conditions (see for example, [14], [27], [31]). So far, problems in which control functions occur in the coefficients of the state equations are less studied (see for example, [1], [4], [26], [29], [30]). A simple model example of such type problem is the following (see [4]).

Consider the problem of allocating resources to maximize the net benefit in the conservation of the single species while the cost of the resource allocation is minimized. In this case a state of controlled system for given control $v \in U := L^\infty(\Omega \times (0,T))$ is defined by a weak solution $y = y(v) = y(x,t;v)$, $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, from the space $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^3(\Omega \times (0,T)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, of the following problem:

$$y_t - \Delta y + y^2 - vy = 0 \quad \text{in} \ \ \Omega \times (0,T),$$
$$y\Big|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \quad y\Big|_{t=0} = y_0 \in L^2(\Omega), \quad y \geqslant 0 \ \text{ a.e. on } \Omega \times (0,T).$$

Here Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with piecewise smooth boundary Γ, $T > 0$. The objective is to balance the two features of maximizing the population and minimizing the cost of the control, representing the resources. Therefore the cost functional has the form

$$J(v) := \int_0^T \int_\Omega \left[y(x,t;v) - \rho|v(x,t)|^2 \right] dxdt \quad \forall v \in U,$$

where y is the population density of a species, v is the resource function, and $\rho > 0$ is given constant. An optimal control problem is to find a function $u \in U_\partial := \{v \in U \ : \ 0 \leqslant v \leqslant M \ \text{ a. e. in } \Omega \times (0,T)\}$ (here $M = \text{const} > 0$ is given) such that

$$J(u) = \sup_{v \in U_\partial} J(v).$$

This problem is nonlinear, since the dependence between the state and the control is nonlinear.

Various generalizations of this problem were investigated in many papers, including [1], [4], [6], [7], [17]-[20], [21], [25], [26], [29], [30] where the state of controlled system is described by the initial-boundary value problems for parabolic equations.

In [1], [26], [29], [30] the state of controlled system is described by linear parabolic equations and systems, while in [1] and [26] control functions appears as coefficients at lower derivatives, and in [29], [30] the control functions are coefficients at higher derivatives. In [26] the existence and uniqueness of optimal control in the case of final observation was shown and a necessary optimality condition in the form of the generalized rule of Lagrange multipliers was obtained. In paper [1] authors proved the existence of at least one optimal control for system governed by a system of general parabolic equations with degenerate discontinuous parabolicity coefficienti. In papers [29], [30] the authors consider cost function in general form, and as special case it includes different kinds of specific practical optimization problems.

In papers [4], [17]-[20], [21], [25] authors investigate optimal control of systems governed by nonlinear PDEs. In particular, in [4] the problem of allocating resources to maximize the net benefit in the conservation of a single species is studied. The population model is an equation with density dependent growth and spatial-temporal resource control coefficient. Numerical simulations illustrate several cases with Dirichlet and Neumann boundary conditions. In [18] the optimal control problem is converted to an optimization problem which is solved using a penalty function technique. Paper [21] presents analytical and numerical solutions of an optimal control problem for quasilinear parabolic equations. In [22] the authors consider the optimal control of a degenerate parabolic equation governing a diffusive population with logistic growth terms. In paper [25] optimal control for semilinear parabolic equations without Cesari-type conditions is investigated.

In this paper, we study an optimal control problem for systems whose states are described by problems without initial conditions or, other words, Fourier problems for parabolic equations. The model example of considered optimal control problem is a problem which differs from the previous one (see beginning of this section) by the following facts: the initial moment is $-\infty$ and, correspondly, the state equation and control functions are considered in the domain $\Omega \times (-\infty, T)$, a boundary condition is given on the surface $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T)$, while the initial condition is replaced by the condition

$$\lim_{t \to -\infty} \|y(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

The problem without initial conditions for evolution equations describes processes that started a long time ago and initial conditions do not affect on them in the actual time moment. Such problem were investigated in the works of many mathematicians (see [5, 12, 28] and bibliography there).

As we know among works devoted to the optimal control problems for PDEs, only in papers [6], [7] the state of controlled system is described by the solution of Fourier problem for parabolic equations. In the current paper, unlike the above two, we consider optimal control problem in case when the control functions occur in the coefficients of the state equations. The main result of this paper is existence of the solution of this problem.

The outline of this paper is as follows. In Section 2, we give notations, definitions of function spaces and auxiliary results. In Section 3, we formulate the optimal control problem. In Section 4, we prove existence and uniqueness of the solutions for the state equations. Furthermore, we obtain estimates for the weak solutions of the state equations. Finally, the existence of the optimal control is presented in Section 5.

2. Preliminaries. Let n be a natural number, $\mathbb{R}^n$ be the linear space of ordered collections $x = (x_1, \ldots, x_n)$ of real numbers with the norm $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$. Suppose that Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with piecewise smooth boundary Γ. Set $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$, $\Omega_t := \Omega \times \{t\}$ for each $t \in \mathbb{R}$.

For any measurable set $G \subset \mathbb{R}^m$, where $m = n$ or $m = n + 1$, and arbitrary $q \in [1, \infty]$ we denote by $L^q(G)$ standard Lebesgue space with norm $\|\cdot\|_{L^q(G)}$. Under $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, where $q \in [1, \infty]$, we mean the linear space of measurable functions on Q such that their restrictions to any bounded measurable set $Q' \subset Q$ belong to the space $L^q(Q')$.

Let X be an arbitrary Banach space with the norm $\|\cdot\|_X$, $q \in [1, \infty]$. Denote by $L^q_{\mathrm{loc}}(S; X)$ the linear space of measurable functions defined on S with values in X, whose restrictions to any segment $[a, b] \subset S$ belong to the space $L^q(a, b; X)$.

Let $\nu \in \mathbb{R}, q \in [1, \infty)$ and let X be as above. Put by definition

$$L^q_\nu(S; X) := \Big\{ f \in L^q_{\mathrm{loc}}(S; X) \;\Big|\; \int\limits_S e^{-2\nu t} \|f(t)\|^q_X dt < \infty \Big\}.$$

This space is a Banach space with respect to the norm

$$\|f\|_{L^q_\nu(S;X)} := \Big(\int\limits_S e^{-2\nu t} \|f(t)\|^q_X \, dt \Big)^{1/q}.$$

If X is a Hilbert space with the scalar product $(\cdot, \cdot)_X$ then the space $L^2_\nu(S; X)$ is also a Hilbert space with the scalar product

$$(f, g)_{L^2_\nu(S;X)} = \int\limits_S e^{-2\nu t} (f(t), g(t))_X \, dt.$$

Denote by $C^1_c(I)$, where $I \subset \mathbb{R}$ is an interval, the linear space of continuously differentiable functions on I with compact supports (if $I = (t_1, t_2)$, then we will write $C^1_c(t_1, t_2)$ instead of $C^1_c((t_1, t_2))$). Under $C(I; X)$, where $I \subset \mathbb{R}$ is an interval and X is an arbitrary Banach space, we mean the linear space of continuous functions defined on I with values in X. If I is a bounded closed interval then $C(I; X)$ is Banach space with a norm $\|z\|_{C(I;X)} = \max_{t\in I}\|z(t)\|_X$. In case when I is an open interval we say that $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ in $C(I;X)$ if for each $\tau_1,\tau_2 \in I$ $(\tau_1<\tau_2)$ we have $\|z-z_m\|_{C([\tau_1,\tau_2];X)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Let $H^1(\Omega) := \{v \in L_2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L_2(\Omega)\ (i=\overline{1,n})\}$ be a Sobolev space, which is a Hilbert space with respect to the scalar product $(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \big\{\nabla v \nabla w + vw\big\}\,dx$ and the corresponding norm $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \big(\int\limits_\Omega \big\{|\nabla v|^2 + |v|^2\big\}\,dx\big)^{1/2}$, where $\nabla v := (v_{x_1},\dots,v_{x_n})$, $|\nabla v|^2 := \sum\limits_{i=1}^n |v_{x_i}|^2$. Under $H_0^1(\Omega)$ we mean the closure in $H^1(\Omega)$ of the space $C_c^\infty(\Omega)$ consisting of infinitely differentiable functions on Ω with compact supports. Denote

$$K := \inf_{v\in H_0^1(\Omega),\ v\neq 0} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int\limits_\Omega |v|^2\,dx}. \tag{1}$$

Taking into account inequality (1), we define a norm $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \Big(|\nabla v|^2\,dx\Big)^{1/2}$ on $H_0^1(\Omega)$, which is equivalent to the standard norm on $H^1(\Omega)$.

It is well known that the constant K is finite and coincides with the first eigenvalue of the following eigenvalue problem:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

From (1) it clearly follows the Friedrichs inequality

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geqslant K \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

Let $q>1$ be a real number and $q' := \frac{q}{q-1}$, that is, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. We denote

$$V^q(\Omega) := H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega).$$

It is well known that

$$\big(V^q(\Omega)\big)' := H^{-1}(\Omega) + L^{q'}(\Omega).$$

Also we denote $\int\limits_{\Omega_t} z\,dx := \int\limits_\Omega z(x,t)\,dx$ for each $z \in L^1_{\rm loc}(S;L^1(\Omega))$ and for a.e. $t\in S$.

Proposition 1. *(Aubin theorem, see* [2] *and* [3, p. 393]*). If $q>1, r>1$ are any real numbers, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ $(t_1<t_2)$, $\mathcal{W},\mathcal{L},\mathcal{B}$ are any Banach spaces such that $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$ (here $\overset{K}{\subset}$ means compact embedding and $\circlearrowleft$ means continuous embedding), then*

$$\{w \in L^q(t_1,t_2;\mathcal{W}) \mid w' \in L^r(t_1,t_2;\mathcal{B})\} \overset{K}{\subset} \Big(L^q(t_1,t_2;\mathcal{L}) \cap C([t_1,t_2];\mathcal{B})\Big),$$

that is, if sequence $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ is bounded in the space $L^q(t_1,t_2;\mathcal{W})$ and sequence $\{w_m'\}_{m\in\mathbb{N}}$ is bounded in the space $L^r(t_1,t_2;\mathcal{B})$, then there exists a subsequence $\{w_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ and function $w \in L^q(t_1,t_2;\mathcal{L})\cap C([t_1,t_2];\mathcal{B})$ such that $w_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ strongly in $L^q(t_1,t_2;\mathcal{L})$ and in $C([t_1,t_2];\mathcal{B})$.

3. Formulation of the main problem and results. Let U be a closed linear subspace of $L^\infty(Q)$, for example, $U := L^\infty(Q)$ or $U := \{u \in L^\infty(Q) \mid v(x,t) = 0$ for a.e. $(x,t) \in Q \setminus Q_{t^*,0}\}$, where $t^* < 0$ is arbitrary fixed. Assume that U is the space of controls and for given $M = \text{const} > 0$ the set $U_\partial := \Big\{v \in U \,\Big|\, 0 \leqslant v \leqslant M \quad \text{a.e. in} \quad Q\Big\}$ be the set of admissible controls.

We assume that the state of the investigated evolutionary system for a given control $v \in U_\partial$ is described by a weak solution of problem

$$y_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)y_{x_i})_{x_j} + c(x)|y|^{p-2}y - v(x,t)y = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{4}$$

$$y\big|_\Sigma = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\lambda t}\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{6}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is given.

Before defining the weak solution of problem (4)-(6), we make some assumptions:

($\mathcal{A}$)**:** $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = \overline{1,n})$, there exists $\mu =$const> 0 such that
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \mu \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^2$ for a.e. $x \in \Omega$ and for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, and

$$M - \mu K > 0;$$

($\mathcal{C}$)**:** $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geqslant c_0 = \text{const} > 0$ for a.e. $(x,t) \in Q$;
($\mathcal{F}$)**:** $f \in L^2_{\text{loc}}(S; L^2(\Omega))$;
($\mathcal{P}$)**:** $p > 2$.

Denote $p' = \frac{p}{p-1}$, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Definition 1. *The function $y \in L^2_{loc}(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_{loc}(S; L^p(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$ is called a weak solution of problem (4)–(6) if its derivative y_t belongs to $L^2_{loc}(S; L^2(\Omega))$, and the following integral equality holds*

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{y_t\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_{x_i}\psi_{x_j} + (c|y|^{p-2}y - vy)\psi\Big\}\, dx$$
$$= \int\limits_{\Omega_t} f\psi\, dx \quad \textit{for a.e. } t \in S \textit{ and for all } \psi \in V^p(\Omega). \tag{7}$$

A weak solution y of problem (4)–(6) will be denoted by y, or $y(v)$, or $y(x,t)$, $(x,t) \in Q$, or $y(x,t;v)$, $(x,t) \in Q$.

Remark 1. Research methodology of problems similar to problem (4)–(6) is quite well developed, in particular, in papers of one of the authors [9]-[11],[12]. But exactly the same problem as considered here, more precisely, Fourier problem for semilinear parabolic equation in bounded spatial variables domains, is not investigated in literature. Moreover, estimates of the weak solution are important for us. So, for a complete presentation of the material, in Section 3 we give full proof of existence and uniqueness of the weak solution of problem (4)–(6) (for a given $v \in U_\partial$) and its estimates.

Hereafter we assume that $\lambda > 0$ and the cost functional has the form

$$J(v) = \iint\limits_Q \left[\, |y(x,t;v)| - \rho(x,t)|v|^2 \,\right] dxdt, \quad v \in U, \tag{8}$$

where $\rho \in L^1(Q)$ is given.

Remark 2. If $\lambda > 0$ and (6) hold, then functional J is well defined. Indeed, (6) implies that $\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}e^{\lambda t}\ \forall t \in S$, where $\widetilde{C} = \text{const} > 0$. Hence, Cauchy-Schwarz inequality yields $\iint\limits_Q |y(x,t)|\,dxdt = \int\limits_S dt \int\limits_\Omega |y(x,t)|\,dx \leqslant (\text{mes}_n\Omega)^{1/2} \int\limits_S \|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt$ $\leqslant \widetilde{C}(\text{mes}_n\Omega)^{1/2} \int\limits_S e^{\lambda t}dt < \infty$. Hence, the first term of functional J is well defined. As well $\rho \in L^1(Q)$, $v \in L^\infty(Q)$, so the second term of functional J is also well defined.

We consider the following **optimal control problem**: find a control $u \in U_\partial$ such that

$$J(u) = \sup_{v \in U_\partial} J(v). \tag{9}$$

We briefly call this problem (9), and its solutions will be called *optimal controls.*

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 1. *Let conditions* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$, $\lambda > M - \mu K$ *hold and*

$$f \in L^2_\lambda(S; L^2(\Omega)). \tag{10}$$

Then problem (9) has a solution.

Remark 3. In real processes function y describes the density of population. In this cases the additional condition $y \geqslant 0$ is required. This condition is satisfied if $f \geqslant 0$ (see Lemma 2).

4. Well-posedness of the problem without initial conditions (Fourier problem) for nonlinear parabolic equations.

Lemma 1. *If conditions* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{P})$ *and* $\lambda \geqslant M - \mu K$ *hold, then problem* (4)–(6) *has at most one weak solution.*

Proof. Assume the opposite. Let y_1, y_2 be two weak solutions of problem (4)–(6). Substituting them one by one into integral identity (7) and subtracting the obtained equalities, for the difference $z = y_1 - y_2$ we obtain

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[z_t\psi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i}\psi_{x_j} + c(|y_1|^{p-2}y_1 - |y_2|^{p-2}y_2)\psi$$

$$-vz\psi \Big]\, dx = 0 \quad \text{for every } \psi \in V^p(\Omega) \text{ and for a.e. } t \in S. \tag{11}$$

From (6) it follows the following condition

$$e^{-2\lambda t}\int\limits_{\Omega_t}|z|^2\,dx\to 0 \quad \text{as} \quad t\to-\infty. \tag{12}$$

Taking in (11) $\psi(\cdot)=z(\cdot,t)$, we get

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[z_t z+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{x_i}z_{x_j} \tag{13}$$

$$+c(|y_1|^{p-2}y_1-|y_2|^{p-2}y_2)(y_1-y_2)-v|z|^2\Big]\,dx=0 \quad \text{and for a.e. } t\in S.$$

Let us take arbitrary numbers $\tau_1,\tau_2\in S$ $(\tau_1<\tau_2)$. Multiplying identity (13) by $2e^{-2\lambda t}$, integrating from τ_1 to τ_2 and using the integration-by-parts formula, we obtain

$$e^{-2\lambda t}\int\limits_{\Omega}|z(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}+2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{x_i}z_{x_j}$$

$$+c(|y_1|^{p-2}y_1-|y_2|^{p-2}y_2)(y_1-y_2)+(\lambda-v)|z|^2\Big]\,dxdt=0.$$

Thus, taking into account that $c\geqslant 0$, $(|s_1|^{p-2}s_1-|s_2|^{p-2}s_2)(s_1-s_2)\geqslant 0\ \forall s_1,s_2\in\mathbb{R}$, and using $(\mathcal{A})$ and (3), we obtain

$$e^{-\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_2)|^2\,dx \;-\; e^{-\lambda\tau_1}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_1)|^2\,dx$$

$$+\,2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}(\lambda+\mu K-M)|z|^2\,dxdt\leqslant 0. \tag{14}$$

Since $\lambda\geqslant M-\mu K$, from (14) we obtain

$$e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_2)|^2\,dx\leqslant e^{-2\lambda\tau_1}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_1)|^2\,dx. \tag{15}$$

In (15) we fix τ_2 and pass to the limit as $\tau_1\to-\infty$. According to condition (12) we obtain the equality $e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_2)|^2\,dx=0$. Since $\tau_2\in S$ is an arbitrary number, we have $z(x,t)=0$ for a. e. $(x,t)\in Q$, that is, $y_1(x,t)=y_2(x,t)=0$ for a. e. $(x,t)\in Q$. The resulting contradiction proves our statement. □

Remark 4. In case $M-\mu K\leqslant 0$, there is no need to require additional condition on solutions behavior on infinity (like condition (6)) to insure uniqueness of solution of problem (4)–(6) (see [13]).

Lemma 2. *Let conditions* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{P})$, $f\geqslant 0$ *and* $\lambda\geqslant M-\mu K$ *are satisfied. Then the weak solution of problem* (4)–(6) *is nonnegative.*

Proof. We denote $y^-(x,t) := \begin{cases} y(x,t), & \text{if } y(x,t) \leqslant 0, \\ 0, & \text{if } y(x,t) > 0, \end{cases}$ for a.e $(x,t) \in Q$. Let us consider integral identity (7). In this identity for a.e. $t \in S$ we take $\psi(\cdot) = y^-(\cdot,t)$. Then

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ (y^-)_t y^- + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y^-)_{x_i}(y^-)_{x_j} + c|y^-|^p - v|y^-|^2 \Big\}\, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} f y^-\, dx \quad \text{for a.e. } t \in S. \tag{16}$$

Multiplying identity (16) by $e^{-2\lambda t}$, integrating from τ_1 to τ_2 ($\tau_1, \tau_2 \in S$ arbitrary numbers, $\tau_1 < \tau_2$) and using the integration-by-parts formula, we obtain

$$\frac{1}{2}e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}e^{-2\lambda\tau_1}\int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_1)|^2\, dx + \lambda \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t}|y^-|^2\, dxdt$$

$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t}\big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y^-)_{x_i}(y^-)_{x_j} + c|y^-|^p - v|y^-|^2 \big]\, dxdt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} f y^- e^{-2\lambda t}\, dxdt. \tag{17}$$

Since $f \geqslant 0$ and condition $(\mathcal{A})$ hold, we obtain

$$\frac{1}{2}e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}e^{-2\lambda\tau_1}\int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_1)|^2\, dx$$

$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t}\big[(\lambda + \mu K - M)|y^-|^2\big]\, dxdt \leqslant 0.$$

Since $\lambda \geqslant M - \mu K$, then from previous inequality we obtain

$$e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2\, dx \leqslant e^{-2\lambda\tau_1}\int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_1)|^2\, dx. \tag{18}$$

We pass to the limit when $\tau_1 \to -\infty$ in (18). Taking into account that $\tau_2 \in S$ is arbitrary in (18) we have $e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2\, dx \leqslant 0$, we conclude that $|y^-(x,t)|_{L^2(\Omega)} = 0$ for a.e. $t \in S$, what yields that $y^-(x,t) = 0$ a.e. in Q. □

Theorem 2. *Suppose that conditions $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$, (10) and $\lambda > M - \mu K$ hold. Then problem (4)–(6) has a unique weak solution y, and $y \in L^2_\lambda(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_\lambda(S; L^p(\Omega))$, $y_t \in L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))$. Moreover, the following estimates hold:*

$$e^{-2\lambda t}\|y(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda s}\|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds, \;\; t \in S, \tag{19}$$

$$\|y\|^2_{L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega))} + \|y_t\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))} + \|y\|^p_{L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))} \leqslant C_2\|f\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))}, \tag{20}$$

where C_1, C_2 are positive constants depending on M, K, μ and λ only.

Proof of Theorem 2. First, for each $m \in N$ we define $Q_m := \Omega \times (-m, 0]$, $\Sigma_m := \Gamma \times (-m, 0]$, $f_m(\cdot, t) := f(\cdot, t)$, if $-m < t \leqslant 0$, and $f_m(\cdot, t) := 0$, if $t \leqslant -m$.

Consider the problem of finding a function y_m satisfying (in some sense) the equation

$$y_{m,t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) y_{m,x_i})_{x_j} + c(x)|y_m|^{p-2} y_m - v(x,t) y_m = f_m(x,t), \quad (x,t) \in Q_m, \tag{21}$$

boundary condition

$$y\big|_{\Sigma_m} = 0, \tag{22}$$

and initial condition

$$y_m(x, -m) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{23}$$

A *weak solution of problem* (21)–(23) is a function $y_m \in L^2(-m, 0; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(-m, 0; L^p(\Omega)) \cap C([-m, 0]; L^2(\Omega))$, whose derivative $y_{m,t} \in L^2(-m, 0; L^2(\Omega))$, and which satisfies condition (23) and the following integral identity

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ y_{m,t}\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_{m,x_i} \psi_{x_j} + (c|y_m|^{p-2} y_m - v y_m)\psi \Big\}\, dx$$
$$= \int\limits_{\Omega_t} f_m \psi \, dxdt \quad \text{for a.e. } t \in [-m, 0] \text{ and for all } \psi \in V^p(\Omega)\ . \tag{24}$$

Lemma 3. *Let conditions* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$ *and* $(\mathcal{P})$ *hold. Then problem* (21)–(23) *has unique weak solution* y_m. *Moreover, for any* $\lambda > M - \mu K$ *this solution satisfies following estimates:*

$$e^{-2\lambda t} \int\limits_{\Omega_t} |y_m|^2 \, dx \leqslant C_1 \int\limits_{-m}^{t} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda s} |f(x,s)|^2 \, dxds, \quad t \in [-m, 0], \tag{25}$$

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t} \Big[|\nabla y_m|^2 + |y_{m,t}|^2 + |y_m|^p \Big] \, dxdt \leqslant C_2 \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t} |f_m|^2 \, dxdt, \tag{26}$$

where C_1, C_2 *are positive constants depending on* M, K, μ *and* λ *only.*

The proof of Lemma 3 is given later in this section.

For every $m \in \mathbb{N}$ we extend y_m by zero for the entire set Q and keep the same notation y_m for this extension. Note that for each $m \in N$, the function y_m belongs to $L^2(S; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(S; L^p(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$, its derivative $y_{m,t}$ belongs to $L^2(-m, 0; L^2(\Omega))$, and y_m satisfies integral identity (7) with f_m substituted for f, i.e.,

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ y_{m,t}\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_{x_i} \psi_{x_j} + (c|y_m|^{p-2} y_m - v y_m)\psi \Big\}\, dx = \int\limits_{\Omega_t} f_m \psi \, dx$$
$$\text{for a.e. } t \in S \text{ and for all } \psi \in V^p(\Omega). \tag{27}$$

Thus, y_m is a weak solution of problem (4)–(6) with f_m substituted for f, and according to Lemma 3 and condition (10), for y_m we obtain estimates

$$e^{-2\lambda t}\|y_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda s}\|f(\cdot,s\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds, \quad t\in S, \tag{28}$$

$$\|y_m\|^2_{L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega))} + \|y_{m,t}\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))} + \|y_m\|^p_{L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))} \leqslant C_2\|f\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))}. \tag{29}$$

According to Proposition 1 and the compactness of the embedding $H^1_0(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, estimate (29), we obtain that there exist a subsequence of the sequence $\{y_m\}$ (still denoted by $\{y_m\}$ for simplicity) and the function $y\in L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega))\cap L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$ such that $y_t\in L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))$ and

$$y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \qquad \text{weakly in} \quad L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega)), \tag{30}$$

$$y_{m,t} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_t \qquad \text{weakly in} \quad L^2_\lambda(S;L^2(\Omega)), \tag{31}$$

$$y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \qquad \text{weakly in} \quad L^p_\lambda(S;L^p(\Omega)), \tag{32}$$

$$y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{in} \quad C(S;L^2(\Omega)), \tag{33}$$

$$y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{a.e. in} \quad Q, \tag{34}$$

$$|y_m|^{p-2}y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |y|^{p-2}y \quad \text{weakly in} \quad L^{p'}_\lambda(Q). \tag{35}$$

From (35) we obtain

$$\iint\limits_Q c|y_m|^{p-2}y_m\psi\varphi\,dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q c|y|^{p-2}y\psi\varphi\,dxdt \quad \forall\,\psi\in V^p(\Omega),\ \forall\,\varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{36}$$

Let us show that the function y is a weak solution of problem (4)–(6). To do this, we multiply identity (24) by arbitrary $\varphi\in C^1_c(-\infty,0)$ and integrate over $t\in S$

$$\iint\limits_Q \Big\{y_{m,t}\psi\varphi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_{x_i}\psi_{x_j}\varphi + (c|y_m|^{p-2}y_m - vy_m)\psi\varphi\Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q f_m\psi\varphi\,dxdt,$$
$$\psi\in V^p(\Omega), \quad \varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{37}$$

Now we let $m\to\infty$ in identity (37), taking into account (30), (31), (36) and the definition of the function f_m. From the obtained integral identity, taking into account Du Bois-Reymond lemma, we get identity (7). Next, taking into account (33), we let $m\to+\infty$ in (28). From the resulting inequality and condition (10), we obtain condition (6). Hence, we have proven that y is a weak solution of problem (4)–(6). And from estimate (29) and convergence (30)–(32) we obtain estimate (20). Estimate (19) easily follows from (28) and (33). □

Proof of Lemma 3. We fix arbitrary $m\in\mathbb{N}$ and, for simplicity, for the weak solution y_m of problem (21)–(23) we use notation z.

To prove our statement we use Galerkin's method. Let $\{w_l\,|\,l\in\mathbb{N}\}$ be a linear independent set of functions from $V^p(\Omega)$, which is complete in $V^p(\Omega)$, that is, the set of all its finite linear combinations is dense in $V^p(\Omega)$. According to Galerkin's method, for every $r \in \mathbb{N}$ we put

$$z_r(x,t) = \sum_{k=1}^{r} c_{r,k}(t) w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{Q_m},$$

where $c_{r,1}, \dots, c_{r,r}$ are absolutely continuous functions, which are solutions of the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations

$$\int\limits_{\Omega_t} z_{r,t} w_l \, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{r,x_i} w_{l,x_j} + c|z_r|^{p-2} z_r w_l - v z_r w_l \Big\} \, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} f w_l \, dx, \quad t \in [-m, 0], \quad l = \overline{1,r}, \tag{38}$$

$$c_{r,l}(-m) = 0, \quad l = \overline{1,r}. \tag{39}$$

The linear independence of functions $w_1, \dots, w_r$ yields that the matrix $(b^r_{k,l})^r_{k,l=1}$ is positive-definite, where $b^r_{k,l} = \int_\Omega w_k w_l \, dx$ $(k, l = \overline{1,r})$. Thus the system of ordinary differential equations (38) can be transformed to the normal form. Hence, according to the theorems of existence and extension of the solution to this problem (see [16]), there exists the global solution $c_{r,1}, \dots.., c_{r,r}$ of problem (38), (39), defined on $[-m, \bar{t} >$, where $\bar{t} \in (-m, 0]$, ">" means either ")" or "]". Later we will show that $[-m, \bar{t} >= [-m, 0]$.

Multiply the equation of system (38) with number $l \in \{1, \dots, r\}$ by $e^{-2\lambda t} c_{r,l}$ and sum over $l \in \{1, \dots, r\}$. Integrating the obtained equality over $t \in [-m, \tau] \subset [-m, \bar{t} >$, we have

$$\int\limits_{-m}^{\tau} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} z_{r,t} z_r \, dxdt + \int\limits_{-m}^{\tau} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{r,x_i} z_{r,x_j}$$

$$+ c|z_r|^p - v|z_r|^2 \Big] \, dxdt = \int\limits_{-m}^{\tau} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} f z_r \, dxdt. \tag{40}$$

From (40), using (39), Cauchy inequality and the integration-by-parts formula, we obtain

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda \tau} |z_r(x,\tau)|^2 \, dx + \lambda \int\limits_{-m}^{\tau} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} |z_r|^2 \, dxdt$$

$$+ \int\limits_{-m}^{\tau} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{r,x_i} z_{r,x_j} + c|z_r|^p - v|z_r|^2 \Big] \, dxdt \tag{41}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} \int\limits_{-m}^{\tau} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} |z_r|^2 \, dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int\limits_{-m}^{\tau} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} |f|^2 \, dxdt, \quad \tau \in [-m, \bar{t} >,$$

where $\varepsilon_1 > 0$ is arbitrary number.

Since $v(x,t) \leqslant M$ for a.e. $(x,t) \in Q$, using (3) and condition $(\mathcal{A})$, from (41), we have

$$\frac{1}{2}\int_\Omega e^{-2\lambda\tau}|z_r(x,\tau)|^2\,dx + (\lambda - M + \mu K(1-\varepsilon_2) - \frac{\varepsilon_1}{2})\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}|z_r|^2\,dxdt$$
$$+\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}\big[\varepsilon_2\mu|\nabla z_r|^2 + c_0|z_r|^p\big]\,dxdt \leqslant \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad \tau\in[-m,\bar t>. \tag{42}$$

Since $\lambda \geqslant M-\mu K$, then one can easily choose $\varepsilon_1>0$ and $\varepsilon_2>0$ such that $\lambda - M + \mu K(1-\varepsilon_2) - \frac{\varepsilon_1}{2} > 0$ (for example, $\varepsilon_2 = \frac{\lambda - M+\mu K}{4\mu K}>0$ and $\varepsilon_1 = \frac{\lambda-M+\mu K}{2}>0$). This implies the following inequality

$$\int_\Omega e^{-2\lambda\tau}|z_r(x,\tau)|^2\,dx + C_3\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}\big[|\nabla z_r|^2 + |z_r|^2 + |z_r|^p\big]\,dxdt \tag{43}$$
$$\leqslant C_4\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad \tau\in[-m,\bar t>,$$

where positive constants C_3, C_4 do not depend on m and r.

From (43) we get the following estimates

$$e^{-2\lambda\tau}\int_\Omega |z_r(x,\tau)|^2\,dx \leqslant C_1\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad \tau\in[-m,\bar t>, \tag{44}$$

$$\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}\big[|\nabla z_r|^2 + |z_r|^2 + |z_r|^p\big]\,dxdt \leqslant C_2\int_{-m}^{\tau}\int_\Omega e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad \tau\in[-m,\bar t>. \tag{45}$$

Estimate (44) yields that the sequence $\Big\{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[-m,\bar t>}\|z_r(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big\}$ is bounded by a constant, which is independent on $\bar t$. This yields that $[-m,\bar t>=[-m,0]$.

Multiply the equation of system (38) with number $l\in\{1,\dots,r\}$ by $e^{-2\lambda t}c'_{r,l}(t)$ and sum over $l\in\{1,\dots,r\}$. Integrating the obtained equality over $t\in[-m,0]$, we obtain

$$\iint_{Q_m} e^{-2\lambda\tau}|z_{r,t}|^2\,dxdt + \iint_{Q_m} e^{-2\lambda t}\big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_{r,x_i}z_{r,x_j,t}$$
$$+c|z_r|^{p-2}z_rz_{r,t} - vz_rz_{r,t}\big]\,dxdt = \iint_{Q_m} e^{-2\lambda t}fz_{r,t}\,dxdt. \tag{46}$$

From (46), using (39) and the integration-by-parts formula and the fact that in our case

$$|z_r|^{p-2}z_rz_{r,t} = \frac{1}{p}(|z_r|^p)_t,$$

we obtain

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{r,x_i}(x,0)z_{r,x_j}(x,0)\,dx$$
$$+\lambda\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{r,x_i}z_{r,x_j}\,dxdt+\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}c(x)|z_r(x,0)|^p\,dx$$
$$+\frac{2\lambda}{p}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}c|z_r|^p\,dxdt=\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}fz_{r,t}\,dxdt+\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}vz_rz_{r,t}\,dxdt. \quad (47)$$

Using conditions $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$ and Cauchy inequality from (47) we obtain

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt+\lambda\mu\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|\nabla z_r|^2\,dxdt$$
$$+\frac{2\lambda c_0}{p}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_r|^p\,dxdt\leqslant\frac{1}{2\varepsilon_2}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt$$
$$+\frac{M}{2\varepsilon_1}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_r|^2\,dxdt+\Big(\frac{\varepsilon_1 M}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2}\Big)\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt. \quad (48)$$

From (48), using (45) and taking $\varepsilon_1>0$ and $\varepsilon_2>0$ such that $1-\frac{\varepsilon_1 M}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2}>0$, we get the following estimate

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt\leqslant C_5\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad (49)$$

where constant $C_5>0$ is independent on m and r.

Estimates (44), (45), (49) yield that sequence $\{z_r\}_{r=1}^{\infty}$ is bounded in the spaces $L^2(-m,0;H_0^1(\Omega))$, $L^\infty(-m,0;L^2(\Omega))$ and $L^p(-m,0;L^p(\Omega))$, and $z_{r,t}$ is bounded in $L^2(-m,0;L^2(\Omega))$. Consequently, taking into account Proposition 1, we obtain existence of the subsequence of $\{z_r\}_{r=1}^{\infty}$ and the function $z\in L^2(-m,0;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(-m,0;L^2(\Omega))\cap L^p(-m,0;L^p(\Omega))$ such that $z_t\in L^2(-m,0;L^2(\Omega))$ and

$$z_r\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}z \quad \text{weakly in} \quad L^2(-m,0;H_0^1(\Omega)), \quad (50)$$
$$z_{r,t}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}z_t \quad \text{weakly in} \quad L^2(-m,0;L^2(\Omega)), \quad (51)$$
$$z_r\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}z \quad \text{weakly in} \quad L^p(-m,0;L^p(\Omega)), \quad (52)$$
$$z_r\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}z \quad \text{strongly in} \quad L^2(Q_m),\ \text{and in}\ C([-m,0];L^2(\Omega)), \quad (53)$$
$$z_r\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}z \quad \text{a.e. in} \quad Q, \quad (54)$$
$$|z_r|^{p-2}z_r\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}|z|^{p-2}z \quad \text{weakly in} \quad L_\lambda^{p'}(Q). \quad (55)$$

From (54), (55), similar to the convergence (36), we have convergence

$$\iint\limits_{Q_m} c|z_r|^{p-2}z_r\psi\varphi\,dxdt \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_{Q_m} c|z|^{p-2}z\psi\varphi\,dxdt. \tag{56}$$

Let $\nu_1, ..., \nu_k$ ($k \in \mathbb{N}$) are any real numbers and $\varphi \in C_c^1(-m,0)$ is arbitrary function. For every $j \in \{1, ..., k\}$ we multiply the equation of system (38) with number $j \in \{1, \ldots, r\}$ by ν_j, summarizing obtained equations and pass to the limit as $r \to \infty$, denoting $\psi = \sum\limits_{j=1}^{k} \nu_j w_j$ and integrating resulting equality over $t \in [-m, 0]$, we get

$$\iint\limits_{Q_m} z_t\psi\varphi\;dxdt + \iint\limits_{Q_m} \{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_{x_i}\psi_{x_j} + c|z|^{p-2}z\psi - vz\psi\}\varphi\,dxdt$$

$$= \iint\limits_{Q_m} f\psi\varphi\;dxdt \quad \forall\,\varphi \in C_c^1(-m,0). \tag{57}$$

Since the set $\{\nu_1 w_1 + ... + \nu_k w_k \mid k \in \mathbb{N}, \nu_1, ..., \nu_k \in \mathbb{R}\}$ is dense in $V^p(\Omega)$, then (57) yields the equality

$$\iint\limits_{Q_m} z_t\psi\varphi\;dxdt + \iint\limits_{Q_m} \{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_{x_i}\psi_{x_j} + c|z|^{p-2}z\psi - vz\psi\}\varphi\,dxdt$$

$$= \iint\limits_{Q_m} f\psi\varphi\;dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega), \quad \varphi \in C_c^1(-m,0). \tag{58}$$

Using Du Bois-Reymond lemma we obtain identity (24). Thus, we have shown that problem (21)–(23) has a solution $z = y_m$. From (44), (45) and (49), taking into account (50) – (53), we obtain that function y_m satisfies estimates (25), (26). □

5. Proof of the main result.

Proof of Theorem 3. Existence of the solution. Since the cost functional J is bounded above, there exists a maximizing sequence $\{v_k\}$ in U_∂: $J(v_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sup\limits_{v\in U_\partial} J(v)$. The sequence $\{v_k\}$ is bounded in the space $L^\infty(Q)$, that is

$$0 \leqslant v_k(x,t) \leqslant M \quad \text{for a.e.} \quad (x,t) \in Q. \tag{59}$$

Since for each $k \in \mathbb{N}$ the function $y_k := y(v_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) is a weak solution of problem (4)–(6) for $v = v_k$, then the following identity holds:

$$\iint\limits_{Q} \Big\{y_{k,t}\psi\varphi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_{k,x_i}\psi_{x_j}\varphi + (c|y_k|^{p-2}y_k - v_k y_k)\psi\varphi\Big\}\,dxdt$$

$$= \iint\limits_{Q} f\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega),\; \varphi \in C_c^1(-\infty,0). \tag{60}$$

According to Theorem 2 we have the estimates

$$e^{-2\lambda t}\|y_k(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda s}\|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds,\ t\in S, \tag{61}$$

$$\|y_k\|^2_{L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega))} + \|y_{k,t}\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))} + \|y_k\|^p_{L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))} \leqslant C_2\|f\|^2_{L^2_\lambda(S;L^p(\Omega))}. \tag{62}$$

Taking into account estimate (62) for arbitrary $\tau_1,\tau_2\in S$ $(\tau_1<\tau_2)$ we obtain

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|y_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega_t)}\,dt \leqslant C_6, \tag{63}$$

where $C_6>0$ is a constant which depends on τ_1 and τ_2, but does not depend on k.

Since $\rho\in L^1(Q)$, using (59), we get that sequence $\{\sqrt{\rho}v_k\}_{k=1}^{\infty}$ is bounded in $L^2(Q)$. Since $V^p(\Omega) \circlearrowleft H^1_0(\Omega) \overset{K}{\subset} L^2(\Omega)$ (see [23] c. 245), then $V^p(\Omega) \overset{K}{\subset} L^2(\Omega)$. According to Theorem 1 with $\mathcal{W}=V^p(\Omega)$, $\mathcal{L}=L^2(\Omega)$, $\mathcal{B}=L^2(\Omega)$, $q=2$, $r=2$, estimates (59), (62), (63) yield that there exists a subsequence of the sequence $\{v_k,y_k\}$ (still denoted by $\{v_k,y_k\}$) and functions $u\in U_\partial$, $\zeta\in L^2(Q)$, $y\in L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega))\cap L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))$, $y_t\in L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))$ such that

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-weakly in} \quad L^\infty(Q), \tag{64}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{weakly in} \quad L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega)), \tag{65}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{weakly in} \quad L^p_\lambda(S;L^p(\Omega)), \tag{66}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{in} \quad C(S;L^2(\Omega)),\ \text{and strongly in}\ L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)), \tag{67}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{a.e. on} \quad Q, \tag{68}$$

$$y_{k,t} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_t \quad \text{weakly in} \quad L^2_\lambda(S;L^2(\Omega)) \tag{69}$$

$$|y_k| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |y| \quad \text{weakly in} \quad L^2_\lambda(S;L^2(\Omega)). \tag{70}$$

Note that (65) implies the following

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y, \quad y_{k,x_i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_{x_i}\ (i=\overline{1,n}) \quad \text{weakly in} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)). \tag{71}$$

As in (56), from (62), (67) and [**?**, Lemma 2.2], we obtain

$$c|y_k|^{p-2}y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c|y|^{p-2}y \quad \text{weakly in} \quad L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}). \tag{72}$$

Let us show that (64) and (67) yield

$$\iint_Q y_k v_k \psi\varphi\,dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint_Q yu\psi\varphi\,dxdt \quad \forall\ \psi\in V^p(\Omega), \forall\ \varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{73}$$

Indeed, let $g:=\psi\varphi$, $t_1,t_2\in S$ be such that $\operatorname{supp}\varphi\subset[t_1,t_2]$. Then we have

$$\iint_Q y_k v_k g\,dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (y_k v_k - y v_k + y v_k)g\,dxdt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} y v_k g\, dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} (y_k - y) v_k g\, dxdt. \tag{74}$$

From (59) and (67) it follows

$$\Big|\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} (y_k - y) v_k g\, dxdt\Big| \leqslant \Big(\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |v_k g|^2\, dxdt\Big)^{1/2} \Big(\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |y_k - y|^2\, dxdt\Big)^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{75}$$

Thus, using (64) and (75), (74) implies (73).

Using (71) and (73), and letting $k \to \infty$ in (60), we obtain

$$\iint_Q \Big\{ y_t \psi\varphi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_{x_i} \psi_{x_j} \varphi + (c|y|^{p-2} y - uy)\psi\varphi \Big\}\, dxdt$$

$$= \iint_Q f\psi\varphi\, dxdt \quad \forall\, \psi \in V^p(\Omega) \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{76}$$

According to Du Bois-Reymond lemma, identity (76) implies that the function $y = y(u)$ satisfies integral identity (7). Let us show that y satisfies condition (6).

Taking into account (67), we pass to the limit in (61) as $k \to \infty$. The resulting inequality, according to condition (10), implies

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-2\lambda t} \int_{\Omega} |y(x,t)|^2\, dx = 0. \tag{77}$$

Hence, we have shown that $y = y(u) = y(x,t;u)$, $(x,t) \in Q$, is the state of the controlled system for the control u.

It remains to prove that u is a maximizing element of the functional J. Indeed, from (64) we get

$$\sqrt{\rho} v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\rho} u \quad \text{weakly in} \quad L^2(Q). \tag{78}$$

According to [15, p. 58, Proposition 3.5] we obtain

$$\lim_{k\to\infty} \inf \|\sqrt{\rho} v_k\|^2_{L^2(Q)} \geqslant \|\sqrt{\rho} u\|^2_{L^2(Q)}. \tag{79}$$

One can check that the functional $w \mapsto \iint_Q w\, dxdt \,:\, L^2_\lambda(S; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ is well defined. Indeed,

$$\Big|\iint_Q w\, dxdt\Big| \leqslant \iint_Q |w|\, dxdt = \iint_Q e^{-\lambda t} e^{\lambda t} |w|\, dxdt$$

$$\leqslant \Big(\iint_Q e^{-2\lambda t} |w|\, dxdt\Big)^{1/2} \Big(\iint_Q e^{2\lambda t}\, dxdt\Big)^{1/2} = C_7 \|w\|_{L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))}, \tag{80}$$

where $C_7 > 0$ is some constant.

We denote this functional by $\mathbb{I}$. It belongs to $\big(L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))\big)'$. Actually, the linearity of $\mathbb{I}$ is trivial. And estimate (80) implies that $\mathbb{I}$ is bounded. Hence, according to (70) we have

$$\iint\limits_Q |y_k|\,dxdt =< \mathbb{I}, |y_k| > \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} < \mathbb{I}, |y| >= \iint\limits_Q |y|\,dxdt. \tag{81}$$

It follows easily from (8), (79) and (81) that

$$\lim_{k\to\infty} J(v_k) = \lim_{k\to\infty}\Big[\iint\limits_Q |y_k|\,dxdt - \iint\limits_Q \rho|v_k|^2\,dxdt\Big]$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\iint\limits_Q |y_k|\,dxdt - \liminf_{k\to\infty}\|\sqrt{\rho}v_k\|^2_{L^2(Q)} \leqslant \iint\limits_Q |y|\,dxdt - \|\sqrt{\rho}u\|^2_{L^2(Q)} = J(u).$$

Thus, we have shown that u is a solution of problem (9). □

References

1. *Akimenko V.V.* An optimal control model for a system of degenerate parabolic integro-differential equations / V.V. Akimenko, A.G. Nakonechnyi, O.Yu. Trofimchuk // Cybernetics and Systems Analysis — 2007. — Vol. 43, No. 6. — P. 838–847.
2. *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite / J.-P. Aubin // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences — 2007. — Vol. 256, No. 24. — P. 5042–5044.
3. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains / F. Bernis // Math. Ann. — 1988. — Vol. 279. — P. 373–394.
4. *Bintz J.* Optimal control of resourse coefficient in a parabolic population model / J. Bintz, H. Finotti, and S. Lenhart // Biomat 2013: Proceedings of the International Symposium on Mathematical and Computational Biology – Singapure, 2013. — P. 121–136.
5. *Bokalo M.M.* Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains / M.M. Bokalo // Electron. J. Differential Equations — 2010. — Vol. 2010, No. 178. — P. 1–24.
6. *Bokalo M.M.* Optimal control of evolution systems without initial conditions / M.M. Bokalo // Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics — 2010. — Vol. 73. — P. 85–113.
7. *Bokalo M.M.* Optimal control problem for evolution systems without initial conditions / M.M. Bokalo // Nonlinear boundary problem — 2010. — Vol. 20. — P. 14–27.
8. *Bokalo M.M.* Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / M.M. Bokalo, O.M. Buhrii, R.A. Mashiyev // Journal of nonlinear evolution equations and applications — 2014. — Vol. 2013, No. 6. — P. 67–87.
9. *Bokalo M.M.* Problem without initial conditions for classes of nonlinear parabolic equations / M.M. Bokalo // J. Sov. Math. — 1990. — Vol. 51, No. 3. — P. 2291–2322.
10. *Bokalo M.M.* On the well-posedness of the Fourier problem for higher-order nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / M.M. Bokalo, I.B. Pauchok // Mat. Stud. — 2006. — Vol. 26, No. 1. — P. 25–48.
11. *Bokalo M.M.* Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations / M.M. Bokalo, Y.B. Dmytryshyn // Electronic Journal of Differential Equations — 2008. — Vol. 2008, No. 4. — P. 1–16.

12. *Bokalo M.* Linear evolution first-order problems without initial conditions / M. Bokalo, A. Lorenzi // Milan Journal of Mathematics — 2009. — Vol. 77. — P. 437–494.
13. *Bokalo M.* Existence of optimal control in the coefficients for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations / M. Bokalo, A. Tsebenko // Matematchni Studii — 2016. — Vol. 45, No. 1. — P. 40–56.
14. *Boltyanskiy V.G.* Mathematical methods of optimal control / V.G. Boltyanskiy — M., 1969.
15. *Brezis H.* Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations / H. Brezis — Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.
16. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations / E.A. Coddington, N. Levinson — McGraw-Hill book company, New York, Toronto, London, 1955.
17. *Farag M.H.* Computing optimal control with a quasilinear parabolic partial differential equation / M.H. Farag // Surveys in mathematics and its applications — 2009. — Vol. 4. — P. 139–153.
18. *Farag M.H.* On an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation / M.H. Farag, S.H. Farag // Applicationes mathematicae — 2000. — Vol. 27, No. 2. — P. 239–250.
19. *Fattorini H.O.* Optimal control problems for distributed parameter systems governed by semilinear parabolic equations in L^1 and L^∞ spaces / H.O. Fattorini // Optimal Control of Partial Differential Equations. Lecture Notes in Control and Information Sciences — 1991. — Vol. 149. — P. 68–80.
20. *Feiyue He* Periodic Optimal Control for Parabolic Volterra-Lotka Type Equations / He Feiyue, A. Leung, S. Stojanovic // Mathematical Methods in the Applied Sciences — 1995. — Vol. 18. — P. 127–146.
21. *Khater A.H.* Analytical and numerical solutions of a quasilinear parabolic optimal control problem / A.H. Khater, A.B. Shamardanb, M.H. Farag, A.H. Abel-Hamida // Journal of Computational and Applied Mathematics — 1998. — Vol. 95, No. 1-2. — P. 29–43.
22. *Lenhart S.M.* Optimal Control for Degenerate Parabolic Equations with Logistic Growth / S.M. Lenhart, J. Yong // Retrieved from the University of Minnesota Digital Conservancy — 1992. — http://purl.umn.edu/2294.
23. *Lions J.-L.* Optimal Control of Systems Gocerned by Partial Differentiul Equations / J.-L. Lions — Springer, Berlin, 1971.
24. *Lions J.-L.* Operational differential equations and boundary value problems, 2 ed J.-L. Lions — Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
25. *Hongwei Lou* Optimality conditions for semilinear parabolic equations with controls in leading term / Hongwei Lou // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations — 2011. — Vol. 17, No. 4. — P. 975–994.
26. *Zuliang Lu* Optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and with state constraints / Zuliang Lu // Lobachevskii Journal of mathematics — 2011. — Vol. 32, No. 4. — P. 320–327.
27. *Pukalskyi I.D.* Nonlocal boundary-value problem with degeneration and optimal control problem for linear parabolic equations / I.D. Pukalskyi // Journal of Mathematical Sciences — 2012. — Vol. 184, No. 1. — P. 19–35.
28. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations / R.E. Showalter // Amer. Math. Soc., Vol. **49**, Providence, 1997.
29. *Tagiev R.K.* Existance and uniquiness of second order parabolic bilinear optimal control problems / R.K. Tagiev // Differential Equations — 2013. — Vol. 49, No. 3. — P. 369–381.
30. *Hashimov S.A.* On optimal control of the coefficients of a parabolic equation involing phase constraints / S.A. Hashimov, R.K. Tagiyev // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan — 2013. — Vol. 38. — P. 131–146.

31. *Samoilenko A.M.* Optimal control with impulsive component for systems described by implicit parabolic operator differential equations / A.M. Samoilenko, L.A. Vlasenko // Ukrainian Mathematical Journal — 2009. — Vol. 61, No. 8. — P. 1250–1263.

Стаття: надійшла до редколегії 11.05.2016
доопрацьована 01.06.2016
прийнята до друку 08.06.2016

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РЕСУРСНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ МОДЕЛІ, ЩО ОПИСУЄТЬСЯ ЗАДАЧЕЮ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Микола БОКАЛО, Андрій ЦЕБЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, amtseb@gmail.com

Вивчено задачу оптимального керування системами, що описуються задачею Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь. Керування є коефіцієнтом рівняння стану. Доведено існування оптимального управління.

Ключові слова: оптимальне керування, задачі без початкових умов, еволюційні рівняння.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 58–60
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 58–60

УДК 512.552.13

BEZOUT DOMAINS WHOSE FINITE HOMOMORPHIC IMAGES ARE SEMIPOTENT RINGS

Vasylyna BOKHONKO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: linabokhonko@gmail.com

We establish that finite homomorphic images of a commutative Bezout domain are semipotent rings.

Key words: Bezout domain, semipotent ring.

The concept of semipotent ring is important and is of particular interest in the modern research [2, 3]

Let R be a commutative Bezout domain, then for $a \in R \setminus \{0\}$ the factor-ring R/aR is *an exchange ring* if and only if a is an avoidable element i.e. if for any $b, c \in R$ such that $aR + bR + cR = R$ there exist elements $r, s \in R$ such that $a = r \cdot s$, where $rR + bR = R$, $sR + bR = R$ and $rR + sR = R$ (see [1]).

In this paper we establish that for a commutative Bezout domain R and $a \in R \setminus \{0\}$ the factor-ring R/aR is *a semipotent ring* if and only if a is a semipotent element i.e. if for any $b \in R$ there exist elements $r, s \in R$ such that $a = r \cdot s$, where $rR + bR = R$ and $rR + sR = R$.

All rings considered are commutative and have the identity, $1 \neq 0$. A ring is *a Bezout ring* if every its finite generated ideal is principal.

We denote by $U = U(R)$ the group of units of R and by $J(R)$ the Jacobson radical of R. Recall that a ring R is a semipotent ring, also called J_0-ring by Nicholson [2], if every its principal ideal not contained in $J(R)$ contains a nonzero idempotent. The exampels of such rings include the exchange rings and can be found in [2]. A ring R is *an exchange ring* if for every $a \in R$ there exists an idempotent $e \in aR$ such that $(1 - e) \in (1 - a)R$.

Definition 1. *Let R be a commutative Bezout domain. An element $a \in R \setminus \{0\}$ is said to be semipotent if for any $b \in R$ we have $a = r \cdot s$, where $rR + bR = R$ and $rR + sR = R$.*

Theorem 1. *Let R be a commutative Bezout domain. Then a is a semipotent element if and only if R/aR is a semipotent ring.*

Proof. The equality $rR + sR = R$ implies $ru + sv = 1$ for some elements u, v, $\overline{r}^2\overline{u} = \overline{r}$, $\overline{s}^2\overline{v} = \overline{s}$ for $\overline{r} = r + aR$ and $\overline{s} = s + aR$. Obviously, $\overline{ru} = \overline{e}$, $\overline{e}^2 = \overline{e}$ and $\overline{1} - \overline{e} = \overline{s}\ \overline{v}$. The equality $rR+bR=R$ implies $\overline{1}-\overline{e}\in\overline{b}\,\overline{R}$ where $\overline{b}=b+aR$. Since $\overline{1}-\overline{e}$ is an indempotent, $\overline{R}$ is a semipotent ring. Note that if $\overline{b}\notin J(aR)$ then $\overline{1}-\overline{e}$ is a proper indempotent. If for $\overline{b}=b+aR$ we have that there exist an idempotent $\overline{e}^2=\overline{e}$ such that $\overline{e}\in\overline{b}\,\overline{R}$. Since $\overline{e}^2=\overline{e}$, we have $e(1-e)=a\alpha$ for some $\alpha\in R$. And since $\overline{e}\in\overline{b}\,\overline{R}$, we have $e-bt=as$ for some elements $t,s\in R$. Let $eR+aR=dR$, then $e=de_0$, $a=da_0$ and $a_0R+e_0R=R$. The equality $e(1-e)=a\alpha$ implies $e_0(1-e)=a_0\alpha$. Since $a_0R+e_0R=R$, we have $a_0R+eR=R$. Let $r=a_o$, $s=d$, then we have $rR+bR=R$. Since $e-bt=as$, then $rR+sR=R$. Theorem is proved.

Since an exchange ring is a semipotent ring, we have that avoidable element is obviously a semipotent element.

The following result connects the concept of adequate element and the concept of semipotent ring.

Definition 2. *Let R be a commutative Bezout domain. An element $a\in R$ is called adequate for an element b if we can find elements $r,s\in R$ such that*

1) $a=r\cdot s$;
2) $rR+bR=R$;
3) *for any nonunit divisor s' of s we have $s'R+bR\neq R$.* [3]

That a is adequate for b will be denoted by ${}_aA_b$.

Theorem 2. *Let R be commutative Bezout domain. If element $a\in R$ is semipotent than for any element $b\notin J(aR)$ there exists some element $u\in R$ that ${}_aA_{bu}$.*

Proof. Let $\overline{R}=R/aR$ be a semipotent ring and $b\notin J(aR)$. Then there exists a nonzero idempotent $\overline{e}$ such that $\overline{e}\in\overline{b}\,\overline{R}$. Hence, there exist some elements $u,t\in R$ such that $e-bu=at$. Moreover, since $\overline{e}^2=\overline{e}$, we have $(1-e)=as$ for some element $s\in R$.

Let $eR+aR=dR$, where $e=de_0$, $a=da_0$ and $a_0R+e_0R=R$. Then

$$e_0(1-e)=a_0s \quad\text{and}\quad e+a_0j=1$$

for some element $j\in R$. Taking $r=a_0$, $s=d$ we obtain a decomposition

$$a=r\cdot s$$

where $rR+eR=R$ and $s'R+eR\neq R$, for some nonunit divisor s' of s. Thus, ${}_aA_e$ and hence from $bu=e+at$ we obviously conclude ${}_aA_{bu}$. Theorem is proved.

As a corollary of previous theorem we obtain the following.

Theorem 3. *Let R be a commutative Bezout domain and $a\in R\setminus\{0\}$. The factor-ring R/aR is semipotent if and only if for any element $b\notin J(aR)$ there exists an element $u\in R$ such that ${}_aA_{bu}$ and $bu\notin aR$.*

References

1. *Kuznitska B. M., Zabavsky B. V.* Azoidable rings / Kuznitska B. M., Zabavsky B. V. // Mat. Stud. — 2015. — Vol. 43. — P. 153–155.
2. *Nickolson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings / Nickolson W. K. // Tran. Amer. Math. Soc. — Vol. 229, 1977. — P. 269–278.

3. *Zabavsky B. V.* Diagonal reduction of matrices over rings / Zabavsky B.V. // Mat. Studies Monograph Series — Vol. 16. — 2012. — P. 251.

Стаття: надійшла до редколегії 12.03.2016
прийнята до друку 08.06.2016

КОМУТАТИВНІ ОБЛАСТІ БЕЗУ, СКІНЧЕННІ ГОМОМОРФНІ ОБРАЗИ ЯКИХ Є НАПІВПОТУЖНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Василина БОХОНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: linabokhonko@gmail.com

Визначено умови, коли скінченно гомоморфні образи комутативної області Безу є напівпотужними кільцями.

Ключові слова: область Безу, напівпотужні кільця.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 61–84
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 61–84

УДК 517.95

ПРО ІСНУВАННЯ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ЄВРОПЕЙСЬКИМ ОПЦІОНОМ

Олег БУГРІЙ, Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Розглянуто нелінійні вироджені рівняння конвекції-дифузії, збурені стрибкоподібним дифузійним оператором, які пов'язані з теорією ціноутворення опціонів європейського стилю виконання. Досліджено мішані задачі для таких рівнянь. Доведено теорему існування їхніх розв'язків.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, стрибкоподібний процес Леві, європейський опціон.

1. Вступ. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ – деякі числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область класу $C^{0,1}$ (див. [1, с. 48]) з межею $\partial\Omega$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\Sigma_{t_1,t_2} = \partial\Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x, t) \mid x \in \Omega,\ t = \tau\}$, $\tau \in [0, T]$. Розглянемо таку задачу:

$$u_t - a\,\Delta(|u|^{\gamma-2}u) + Gu + \phi(Eu) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{3}$$

де $a > 0$, $\gamma \in [2, 3)$ – деякі числа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа,

$$(Gu)(x, t) = g(x, t)|u(x, t)|^{q(x)-2}u(x, t), \tag{4}$$

$$(Eu)(x, t) = \int\limits_\Omega \epsilon(x, t, z)\Big(u(x + z, t) - u(z, t)\Big)\, dz, \tag{5}$$

$g, q, \phi, \epsilon, f, u_0$ – деякі функції. В (5) вважаємо функцію u продовженою нулем при $x \notin \Omega$, $t \in [0, T]$.

Задачу Коші для рівняння типу (1) з $q(x) \equiv 2$ досліджено у [2] при $\gamma = 2$, і у [3] при $\gamma = 3$. Як ми доведемо, ці задачі мають прикладне значення в фінансовій математиці. Вибираючи функцію ϵ в (5), отримаємо, що лінійний аналог (1) виникає в моделях Мертона [4], Коу [5] та інших (див. [6]), які описують біржові коливання вартості опціонів. Відповідні до (1) півлінійні інтегро-диференціальні параболічні варіаційні нерівності розглянуто у [7], [8]. Нелінійні рівняння типу

$$-u_t + H(x, t, u, \nabla u, \Delta u, Eu) = 0,$$

з ліпшиць-неперервною функцією $(u, v, w) \mapsto H(x, t, u, v, w, z)$ вивчено у [9]-[11].

Задачі для параболічних рівнянь зі сталими показниками нелінійності й інтегральним доданком іншого, ніж (5), вигляду вивчали в [12]-[16].

В [17] розглянуто мішану задачу для рівняння

$$u_t - \Delta u - |u|^{\alpha(x)} = \int\limits_{\Omega} |u(z, t)|^{\beta(z)}\, dz \tag{6}$$

зі змінними показниками нелінійності $\alpha = \alpha(x) > 1$, $\beta = \beta(x) > 1$. Доведено існування локального та неіснування глобального розв'язку.

Мішану задачу для нелінійного рівняння (1) з інтегральним доданком вигляду (5) і змінним показником нелінійності ($q(x) \not\equiv \mathrm{const}$) розглянуто вперше.

Структура праці така. У другому пункті сформульовано розглядувану задачу і основний результат – теорему існування її розв'язку. Третя частина статті містить економічну модель обчислення вартості опціону європейського стилю виконання, в якій виникає лінійний аналог нашого рівняння. У четвертому пункті наведено основні позначення та допоміжні факти, які використано у п'ятому пункті статті для доведення основної теореми. Статтю завершує список літератури.

2. Формулювання задачі. Нехай $G \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, – деяка область (наприклад, $G = \Omega$, $G = Q_{0,T}$ і т.д.), $\mathcal{L}(G)$ – множина всіх вимірних за Лебегом підмножин G, $\mathcal{ML}(G)$ – множина всіх функцій $v : G \to \mathbb{R}^1$, вимірних стосовно $\mathcal{L}(G)$,

$$\mathcal{MLB}_+(G) = \{p \in \mathcal{ML}(G) \;\mid\; \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} p(y) > 0,\;\; \operatorname*{ess\,sup}_{y\in G} p(y) < +\infty\}.$$

Далі для кожної функції $p \in \mathcal{MLB}_+(G)$ через p_0, p^0 позначатимемо такі числа, а через S_p – таку функцію:

$$p_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} p(y), \quad p^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in G} p(y), \qquad S_p(s) := \max\{s^{p_0},\, s^{p^0}\}, \quad s \geq 0. \tag{7}$$

Нехай $\mathrm{Lip}\,(G)$ – множина функцій $\phi \in \mathcal{ML}(G)$, які задовольняють на області G умову Ліпшиця; $L^r(G)$, де $r \geq 1$, – простір Лебега; $L^r(0, T; B)$, де B – нормований простір, – простір з [1, с. 155]; $W^{m,r}(G)$, $W_0^{m,r}(G)$, де $m \in \mathbb{N}$, – простори Соболєва, $H^m(G) = W^{m,2}(G)$, $H_0^m(G) = W_0^{m,2}(G)$.

Нехай $L_+^\infty(G) = \{p \in L^\infty(G) \mid \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} p(y) > 1\}$. Зрозуміло, що виконується вкладення $L_+^\infty(G) \subset \mathcal{MLB}_+(G)$. Крім позначень p_0, p^0, S_p, для кожного $p \in L_+^\infty(G)$ означимо функцію $p' \in L_+^\infty(G)$ так: $\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1$ майже для всіх $y \in G$.

Нехай $p \in L_+^\infty(G)$. Визначимо функціонал $\rho_p(\cdot; G)$ за допомогою рівності $\rho_p(v; G) := \int_G |v(y)|^{p(y)}\, dy$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{p(y)}(G)$ називають множину таких функцій $v \in \mathcal{ML}(G)$, для яких $\rho_p(v; G) < +\infty$. В [18, с. 599, 600] доведено, що $L^{p(y)}(G)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою Люксембурга $||v; L^{p(y)}(G)|| := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_p(v/\lambda; G) \leq 1\}$.

Нехай $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, $V = H^1_0(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$,

$$U(Q_{0,T}) = \{u \in L^{q(x)}(Q_{0,T}) \ | \ |u|^{\gamma-2}u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\}.$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A): $a > 0$, $2 \le \gamma < 3$;
(E): $\epsilon \in \mathcal{ML}(Q_{0,T} \times \Omega)$, $|\epsilon(x,t,y)| \le \epsilon^0$ майже для всіх $(x,t,y) \in Q_{0,T} \times \Omega$, де $\epsilon^0 > 0$ – деяке число;
(Φ): $\phi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R})$, $|\phi(\xi)| \le \phi^0|\xi|$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де $\phi^0 > 0$ – деяке число;
(Q): $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, $q^0 \le \gamma$;
(G): $g \in \mathcal{MLB}_{+}(Q_{0,T})$, $g_t \in \mathcal{ML}(Q_{0,T})$, $|g_t(x,t)| \le g^1 < +\infty$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(F): $f \in L^{\gamma}(Q_{0,T})$;
(U): $u_0 \in L^{\gamma}(\Omega)$, $|u_0|^{\gamma-2}u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Подамо означення узагальненого розв'язку нашої задачі.

Означення 1. *Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), якщо u задовольняє умову (3) і рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-uv_t + a(\nabla(|u|^{\gamma-2}u), \nabla v) + G(u)v + \phi(Eu)v\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} fv\, dxdt \qquad (8)$$

для всіх $v \in H^1_0(Q_{0,T})$.

Тут і далі $\nabla v = (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$ – градієнт функції v, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо таке: якщо $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, то $u \in L^2(Q_{0,T})$ і ми доведемо, що тоді $Eu, Gu \in L^2(Q_{0,T})$. Отже, в (8) інтеграли мають сенс. Зауважимо таке: якщо $\gamma \ge 2$, то правильні нерівності $1 < \frac{4(\gamma-1)}{3\gamma-4} \le 2$.

Основний результат статті – така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\partial\Omega \in C^4$, виконуються умови **(A)-(U)**. Тоді задача (1)-(3) має узагальнений розв'язок u і, крім того, правильні такі включення:*
$u \in C\big([0,T];L^{\frac{4(\gamma-1)^2}{3\gamma-4}}(\Omega)\big)$, $|u|^{\gamma-2}u \in W^{1,\frac{4(\gamma-1)}{3\gamma-4}}(Q_{0,T})$.

3. Узагальнення моделі Блека-Шоулса обчислення премії опціонів європейського стилю виконання. Нагадаємо результати з [4]. Розглянемо стандартизований біржовий контракт, який надає право його власнику в деякий момент часу $T > 0$ в майбутньому (термін виконання контракту) купити за договірною ціною $K > 0$ (strike-ціна базового активу контракту на момент виконання контракту) обумовлений об'єм цього базового активу. Поточна ринкова ціна базового активу (spot-ціна) постійно змінюється. Залежно від співвідношення між strike і spot цінами базового активу виконання контракту може бути вигідним або збитковим.

Сьогодні на фондових біржах активно торгують трьома основними видами фінансових контрактів: форвардами – "твердими" контрактами, обов'язковими до виконання; ф'ючерсами – контрактами "майже обов'язковими" до виконання (якщо базовий актив купувати невигідно, то ф'ючерсна позиція закривається офсетною угодою); опціонами – "необов'язковими" до виконання контрактами. Оскільки в основу контрактів лежить певний фінансовий актив, то вони природно мають ринкову вартість і є предметом торгів на біржі. Особливо привабливими на біржах є опціони американського та європейського стилів виконання. Опціон американського стилю виконання передбачає можливість виконання контракту в будь-який момент часу $\tau \in [0, T]$, а європейського – лише в час $\tau = T$.

Мета цього пункту – в рамках моделі Блека-Шоулса обговорити деякі узагальнення класичної методики обчислення ринкової вартості (премії) опціону купівлі (call-option) європейського стилю виконання на акції.

Класична теорія Блека-Шоулса оцінки опціонних контрактів передбачає, що операції з контрактами проводять на (B, S) ринку, який складається з безризикового активу B (банківський рахунок, банківські облігації) і ризикового активу S (акції). Відсоткова ставка μ банківського рахунку, а також волатильність (мінливість) акції σ є відомими сталими параметрами. Математична модель цього ринку описує еволюцію активів на скінченному інтервалі часу $[0, T]$. Банківський рахунок змінюється за законом $B(\tau) = B(0)e^{\mu\tau}$, $\tau \in [0, T]$, з невипадковим диференціалом

$$dB(\tau) = \mu B(\tau)\, d\tau, \quad B(0) > 0.$$

Ціна базового активу опціону мінлива, вона залежить від багатьох чинників, є випадковим процесом $\{S(\tau)\}_{\tau\in[0,T]}$ і справджує стохастичне диференціальне рівняння

$$dS(\tau) = \mu\, S(\tau)\, d\tau + \sigma\, S(\tau)\, dW_\tau, \tag{9}$$

де $\{W_\tau\}_{\tau\in[0,T]}$ – стандартний вінерівський процес, тобто процес броунівського руху (див. [19]). Використовуючи методику праці [20], розв'язуємо рівняння (9) і отримуємо, що формула

$$S(\tau) = S(0)\, e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W_\tau} = \frac{S(0)}{B(0)}\, B(\tau)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau+\sigma W_\tau}, \quad \tau \in [0, T], \tag{10}$$

визначає значення spot-ціни акції в довільний момент часу $\tau \in [0, T]$.

Випадкова величина

$$H(S_T) = (S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}$$

називається функцією виплат call-опціону європейського стилю виконання, вона визначає внутрішню вартість опціону в момент його експірації: чим більше значення $H(S_T)$, тим більшу вигоду матимемо від реалізації опціону в час $\tau = T$. В момент $\tau = T$ значення $H(S_T)$ є максимально можливою ринковою ціною call-опціону європейського стилю виконання. Оскільки $H(S_T)$ є випадковою величиною, то для характеристики поточного значення ринкової ціни цього опціону природно прийняти "теперішню" вартість опціону в будь-який момент часу $\tau \in [0, T]$ за умови, що spot-ціна акції дорівнює S

$$v(S, \tau) = e^{-\mu(T-\tau)}\mathbb{M}\{H(S_T)\,|S(\tau) = S\}, \quad S \in [0, +\infty), \quad \tau \in [0, T]. \tag{11}$$

Тут $\mathbb{M}$ – умовне математичне сподівання випадкової величини $H(S_T)$, а терміни "теперішня" і "майбутня" вартість вживаються у класичному з погляду фінансової математики сенсі (див., наприклад, [21], [22]). Зокрема, $v(S_T, 0) = e^{-\mu T}\mathbb{M}\{H(S_T)\}$ – вартість опціону на момент його підписання, а $v(S_T, T) = \mathbb{M}\{H(S_T)\}$ – найочікуваніше значення функції виплат у час виконання опціону.

У рамках моделі (B, S) ринку значення $v(S_T, 0)$ має бути таким, щоб подальше інвестування цієї суми в фондовий портфель, який складається з акцій і облігацій, на момент часу $\tau = T$ дало прибуток, не менший за значення $H(S_T)$. Вибір оптимальної стратегії інвестування (хедж-стратегії) продавцем опціону передбачає, що детермінована величина $v(S,\tau)$ за умови, що за акцією не виплачуються дивіденти та інші платежі, ціна акції є неперервною випадковою величиною та деяких інших додаткових умовах (див. [23], [2]), повинна бути розв'язком крайової задачі для рівняння Блека-Шоулса

$$v_\tau + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\, v_{SS} + \mu S\, v_S - \mu v = 0, \quad S \in [0,+\infty), \quad \tau \in [0,T], \tag{12}$$

$$v(0,\tau) = 0, \quad v(S,T) = H(S_T), \tag{13}$$

де $v_\tau = \frac{\partial v}{\partial \tau}$, $v_S = \frac{\partial v}{\partial S}$, $v_{SS} = \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}$.

Однак модель Блека-Шоулса не враховує миттєві стрибкоподібні зміни ціни акції. Вони відбуваються, наприклад, під час неочікуваної терористичної атаки, стихійного лиха, отримання компанією великого державного замовлення тощо. Логарифмічна ціна активу у цьому випадку описується (див., наприклад, [24], [25], [26]) процесом Леві зі стрибкоподібною дифузією (Levy jump-diffusion). Цей процес має три незалежні складові: невипадкову – лінійний зсув (linear drift); випадкову неперервну – броунівський рух (Brownian motion); випадкову стрибкоподібну – складений пуассонівський процес (compound Poisson process), тобто

$$\ln\frac{S(\tau)}{S(0)} = \widetilde{a}\,\tau + \widetilde{b}\,W_\tau + \widetilde{c}\,Q_\tau. \tag{14}$$

де $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$ – деякі сталі. У випадку (14) рівняння (12) набуде вигляду (див. [4, с. 132])

$$u_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2\, u_{xx} - (\mu - \lambda k)x\, u_x + g(x,t)u - \lambda\mathbb{M}[u(xY,t) - u(x,t)] = 0, \tag{15}$$

де $u(x,t) = v(S,\tau)$ – премія європейського опціону, $x = S$ – spot-ціна акції, $t = T - \tau$ – час до виконання опціону, $(Y-1)$ – випадкова величина, яка продукує стрибкоподібну зміну ціни акції з x до xY, $k = \mathbb{M}[Y-1]$ – математичне сподівання $(Y-1)$, $g(x,t)$ – дохідність опціону, λ – середня кількість стрибків за одиницю часу.

Перетворимо останній доданок зліва в (15). Якщо D – щільність розподілу випадкової величини Y, то

$$\mathbb{M}[u(xY,t)-u(x,t)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(u(xy,t)-u(x,t)\Big)D(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(u(x+z,t)-u(x,t)\Big)\frac{D(\frac{z}{x}+1)}{x}dz.$$

Доповнивши рівняння крайовими умовами, після перепозначень отримаємо задачу

$$u_t - a(x)\,u_{xx} + b(x,\lambda)\,u_x + g(x,t)u + \lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x,z)\Big(u(x+z,t) - u(x,t)\Big)\,dz = 0, \tag{16}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{17}$$

Після процедури "обрізання" рівняння (див. у одновимірному випадку, наприклад, [27, с. 39], у багатовимірному – [28, с. 14]), матимемо задачу в обмеженій області.

Розглядуване в цій праці рівняння (1) є певним нелінійним аналогом (16).

4. Допоміжні позначення і твердження. Норму банахового простору B позначимо $||\cdot;B||$, а спряжений до B простір – B^*. Скалярний добуток між B^* і B позначатимемо $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. Символ $\circlearrowleft$ означає неперервне, $\overline{\circlearrowleft}$ – неперервне та щільне, а $\overset{K}{\subset}$ – компактне вкладення одного банахового простору в інший.

Нехай $\alpha \in \mathcal{ML}(\Omega)$

$$\phi_{\alpha(x)}(s) := \begin{cases} s^{\alpha(x)}, & s > 0, \\ 0, & s \le 0, \end{cases} \quad x \in \Omega. \tag{18}$$

Легко переконатися, що для будь-яких $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ виконуються (див., наприклад, [29, с. 82]) нерівності (тут $u^+ = \max\{u, 0\}$)

$$s^+ \le |s|, \qquad |s_1^+ - s_2^+| \le |s_1 - s_2|. \tag{19}$$

Нехай X – деякий простір. Розглянемо простір

$$W^{1,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X) \mid u_t \in L^p(0,T;X)\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

зі стандартно введеною нормою (див., наприклад, [30, с. 286]). Зрозуміло, що $C^1([0,T];X) \circlearrowleft W^{1,p}(0,T;X)$.

Твердження 1. *(Теорема 2* [30, с. 286]*). Якщо X – банахів простір, $1 \le p \le \infty$, то $W^{1,p}(0,T;X) \circlearrowleft C([0,T];X)$ і виконується формула інтегрування частинами*

$$\int\limits_s^\tau u_t(t)\,dt = u(\tau) - u(s), \qquad 0 \le s < \tau \le T, \quad u \in W^{1,p}(0,T;X). \tag{20}$$

Як і в теоремі А.1 [31, с. 47] матимемо таке: якщо $v \in W^{1,p}(0,T;L^p(\Omega))$, де $1 \le p \le \infty$, то $v^+ \in W^{1,p}(0,T;L^p(\Omega))$ та $(v^+)_t = \widetilde{\chi}(v)v_t$ майже скрізь в $Q_{0,T}$, де

$$\widetilde{\chi}(s) := \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \le 0. \end{cases} \tag{21}$$

Аналогічне твердження правильне і для $v^- = \max\{-v, 0\}$.

Далі користуватимемося такими твердженнями.

Лема 1. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область класу $C^{0,1}$. Тоді формула*

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} w_t\, z\, dxdt = \int\limits_{\Omega_t} w\, z\, dx\Big|_{t=s}^{t=\tau} - \int\limits_{Q_{s,\tau}} w\, z_t\, dxdt, \quad 0 \le s < \tau \le T, \tag{22}$$

виконується для всіх функцій w та z, які задовольняють одну з таких умов:

(i) $w \in L^{q(x)}(Q_{0,T})$, де $q \in L_+^\infty(\Omega)$, $w_t \in L^1(Q_{0,T})$,
$z \in L^\infty(Q_{0,T})$, $z_t \in L^{q'(x)}(Q_{0,T})$;

(ii) $w, w_t \in L^1(Q_{0,T})$, $z, z_t \in L^\infty(Q_{0,T})$.

Доведення. Доведемо пункт *(i)*. Нехай $W = \{w \in L^{q(x)}(Q_{0,T}) \mid w_t \in L^1(Q_{0,T})\}$, $Z = \{z \in L^\infty(Q_{0,T}) \mid z_t \in L^{q'(x)}(Q_{0,T})\}$. Для $\varphi \in C^1([0,T])$ та $z \in Z$ маємо включення $\varphi z \in W^{1,1}(0,T;L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(\Omega))$. Тому з формули (20) для $u = \varphi(t)z(x,t)$ випливає, що

$$\int\limits_s^\tau \varphi_t(t)z(x,t)\,dt = \varphi(\tau)z(x,\tau) - \varphi(s)z(x,s) - \int\limits_s^\tau \varphi(t)z_t(x,t)\,dt, \quad x \in \Omega. \tag{23}$$

Нехай $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Тоді з (23) отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} \varphi_t v\, z\, dxdt = \int\limits_{\Omega_t} \varphi v\, z\, dx\Big|_{t=s}^{t=\tau} - \int\limits_{Q_{s,\tau}} \varphi v\, z_t\, dxdt. \tag{24}$$

Зрозуміло, що $C^1([0,T];C^1(\overline{\Omega})) \circlearrowleft W \circlearrowleft W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega))$. Тому множина функцій $\Big\{\sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(t)v_i(x) \;\Big|\; m \in \mathbb{N},\ \varphi_1,\dots,\varphi_m \in C^1([0,T]),\ v_1,\dots,v_m \in C^1(\overline{\Omega})\Big\}$ є всюди щільна в просторі W і з (24) випливає (22).

Доведення *(ii)* цілком аналогічне до доведення *(i)*. $\square$

Твердження 2. *Нехай $q \in L_+^\infty(G)$. Тоді (див.* [32, с. 168]*) для кожного $v \in \mathcal{ML}(G)$ виконуються такі нерівності:*

1) $||v;L^{q(x)}(G)|| \le S_{1/q}(\rho_q(v;G))$ при $\rho_q(v;G) < +\infty$;

2) $\rho_q(v;G) \le S_q(||v;L^{q(x)}(G)||)$ при $||v;L^{q(x)}(G)|| < +\infty$.

Лема 2. *Нехай $\alpha \in \mathcal{MLB}_+(G)$ та $p,q \in L_+^\infty(G)$ – такі функції, що $p(y) \ge \alpha(y)$ і $q(y) \le \frac{p(y)}{\alpha(y)}$ майже для всіх $y \in G$; $\phi_{\alpha(y)}$ – функція, визначена в (18) з $\alpha(y)$ замість $\alpha(x)$. Тоді, якщо $u \in L^{p(y)}(G)$, то $\phi_{\alpha(y)}(u) \in L^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}(G)$ і правильні такі твердження:*

1) виконуються оцінки

$$\rho_{p/\alpha}(\phi_{\alpha(y)}(u);G) \le \rho_p(u;G); \tag{25}$$

$$||\phi_{\alpha(y)}(u);L^{q(y)}(G)|| \le C_1 S_{\alpha/p}\big(\rho_p(u;G)\big), \tag{26}$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від u;

2) для всіх $v \in L^{p(y)}(G)$ виконується оцінка

$$\rho_{p/\alpha}\big(\phi_{\alpha(y)}(u) - \phi_{\alpha(y)}(v);G\big) \le C_2\Big(\rho_p(u-v;G_0) +$$

$$+ S_{1/\alpha'}\big(\rho_p(u;G_1) + \rho_p(v;G_1)\big) \cdot S_{1/\alpha}\big(\rho_p(u-v;G_1)\big)\Big), \tag{27}$$

де $G_0 = \{y \in G \mid 0 < \alpha(y) \le 1\}$, $G_1 = \{y \in G \mid 1 < \alpha(y)\}$, $C_2 > 0$ – стала, яка не залежить від u;

3) якщо $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^{p(y)}(G)$, то

$$\phi_{\alpha(y)}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(y)}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{q(y)}(G). \tag{28}$$

Доведення. 1) Зрозуміло, що $\frac{p(y)}{\alpha(y)} \ge 1$ майже для всіх $y \in G$. З оцінок (19) випливає таке: $|\phi_{\alpha(y)}(u)|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}} = |u^+|^{p(y)} \le |u|^{p(y)} \in L^1(G)$. Тому з [33, с. 297] отримаємо включення $\phi_{\alpha(y)}(u) \in L^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}(G)$, а з отриманої нерівності – оцінка (25). Крім того,

$$||\phi_{\alpha(y)}(u);L^{q(y)}(G)|| \le C_3||\phi_{\alpha(y)}(u);L^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}(G)|| \le C_3 S_{\alpha/p}\Big(\rho_{p/\alpha}(\phi_{\alpha(y)}(u);G)\Big).$$

Звідси і з (25) випливає нерівність (26).

2) Використовуючи теорему 2.1 [34, с. 2], доводимо, що для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\big|\,|\eta_1|^{r(y)-2}\eta_1 - |\eta_2|^{r(y)-2}\eta_2\big| \le C_4(r_0, r^0)(|\eta_1| + |\eta_2|)^{r(y)-1-\beta(y)}|\eta_1 - \eta_2|^{\beta(y)}, \qquad (29)$$

де $r \in L^\infty_+(G)$, $0 \le \beta(y) \le \min\{1, r(y)-1\}$ майже для всіх $y \in G$, $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від y, η_1, η_2. Нехай тут $r = \alpha + 1$, $\eta_1 = s_1^+$, $\eta_2 = s_2^+$, де $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Отримаємо таке:

$$|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5(s_1^+ + s_2^+)^{\alpha(y)-\beta(y)}|s_1^+ - s_2^+|^{\beta(y)},$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка не залежить від y, s_1, s_2. Використавши оцінки (19), одержимо

$$|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5(|s_1| + |s_2|)^{\alpha(y)-\beta(y)}|s_1 - s_2|^{\beta(y)}, \qquad (30)$$

де $0 \le \beta(y) \le \min\{1, \alpha(y)\}$, $y \in G$.

Нехай спершу $y \in G_0$. Тоді з (30) при $\beta = \alpha$ матимемо виконання такої нерівності: $|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5|s_1 - s_2|^{\alpha(y)}$. Звідси випливає оцінка

$$\rho_{p/\alpha}\big(\phi_{\alpha(y)}(u) - \phi_{\alpha(y)}(v); G_0\big) \le C_6\rho_p(u - v; G_0). \qquad (31)$$

Якщо $y \in G_1$, то з оцінки (30) при $\beta \equiv 1$ випливає правильність такої нерівності: $|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5(|s_1| + |s_2|)^{\alpha(y)-1}|s_1 - s_2|$. Тому

$$\begin{aligned}
\rho_{p/\alpha}\big(\phi_{\alpha(y)}(u) - \phi_{\alpha(y)}(v); G_1\big) &\le C_7\int\limits_{G_1}(|u| + |v|)^{\frac{(\alpha(y)-1)p(y)}{\alpha(y)}}|u - v|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}\,dy \le \\
&\le C_8||\,(|u| + |v|)^{\frac{p(y)}{\alpha'(y)}}; L^{\alpha'(y)}(G_1)|| \cdot ||\,|u - v|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}; L^{\alpha(y)}(G_1)|| \le \\
&\le C_8S_{1/\alpha'}\Big(\rho_{\alpha'}\big((|u| + |v|)^{\frac{p(y)}{\alpha'(y)}}; G_1\big)\Big) \cdot S_{1/\alpha}\Big(\rho_\alpha\big(\,|u - v|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}; G_1\big)\Big) \le \\
&\le C_9S_{1/\alpha'}\big(\rho_p(u; G_1) + \rho_p(v; G_1)\big) \cdot S_{1/\alpha}\big(\rho_p(u - v; G_1)\big). \qquad (32)
\end{aligned}$$

де $\alpha'(y) = \frac{\alpha(y)}{\alpha(y)-1}$, $y \in G_1$. Додавши (32) до (31), отримаємо (27).

3) Збіжність (28) відразу випливає з оцінки (27). □

Лема 3. *Нехай $p \in L^\infty_+(\Omega)$ та $\theta \in \mathcal{ML}(\Omega \times \mathbb{R})$; майже для всіх $x \in \Omega$ функція $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \theta(x, \xi) \in \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною; існує таке число $M > 0$, що майже для всіх $x \in \Omega$ і для всіх $\zeta, \eta, \xi \in \mathbb{R}$ виконуються оцінки*

$$|\theta(x, \zeta) - \theta(x, \eta)| \le M|\zeta - \eta|, \qquad |\theta_\xi(x, \xi)| \le M. \qquad (33)$$

Тоді, якщо $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то $\theta(x, u), \big(\theta(x, u)\big)_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і, крім того,

$$\big(\theta(x, u)\big)_t = \theta_\xi(x, u)\, u_t\,. \qquad (34)$$

Доведення. Оскільки $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то існує послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{Q_{0,T}})$ така, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ та $u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_t$ сильно в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і майже скрізь в $Q_{0,T}$. Зрозуміло, що для $(x, t) \in Q_{0,T}$ і $m \in \mathbb{N}$ правильна рівність

$$\begin{aligned}
\big(\theta(x, u^m(x, t))\big)_t = \lim_{h\to 0}\frac{\theta(x, u^m(x, t+h)) - \theta(x, u^m(x, t))}{u^m(x, t+h) - u^m(x, t)}\,\frac{u^m(x, t+h) - u^m(x, t)}{h} = \\
= \theta_\xi(x, u^m(x, t))\, u_t^m(x, t).
\end{aligned}$$

Крім того, $|\theta(x,u^m) - \theta(x,u)| \le M|u^m - u|$, а тому $\theta(x,u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta(x,u)$ сильно в просторі $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, зокрема, $\theta(x,u) \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$.

Розглянемо вираз $\theta_\xi(x,u^m)u_t^m - \theta_\xi(x,u)u_t = A_m + B_m$, де

$$A_m = \theta_\xi(x,u^m)(u_t^m - u_t), \quad B_m = (\theta_\xi(x,u^m) - \theta_\xi(x,u))u_t.$$

Зрозуміло, що $|A_m|^{p(x)} \le M^{p(x)}|u_t^m - u_t|^{p(x)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^1(Q_{0,T})$. Тому $A_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$. Крім того, $|B_m|^{p(x)} \le (2M|u_t|)^{p(x)} \in L^1(Q_{0,T})$ і $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. Тому $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$. Отже, $\theta_\xi(x,u^m)u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta_\xi(x,u)u_t$ сильно в просторі $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, зокрема $\theta_\xi(x,u)u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$.

Доведемо тепер (34). Нехай $\varphi \in C_0^\infty(Q_{0,T})$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \theta_\xi(x,u)u_t\,\varphi\,dxdt = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \theta_\xi(x,u^m)u_t^m\,\varphi\,dxdt = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \big(\theta(x,u^m)\big)_t\,\varphi\,dxdt =$$

$$= -\lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \theta(x,u^m)\,\varphi_t\,dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \theta(x,u)\,\varphi_t\,dxdt.$$

Отже, в сенсі простору розподілів $\mathcal{D}^*(Q_{0,T})$ матимемо (34). □

Зауважимо, що лема 3 узагальнює результати леми 3 [35, с. 18], де було розглянуто випадок функції θ, яка не залежала від x.

Наслідок 1. *Нехай $I = [a,b]$, або $I = [a,+\infty)$, або $I = (-\infty,b]$, де виконується умова $-\infty < a < b < +\infty$. Припустимо також, що $p \in L_+^\infty(\Omega)$; $\theta \in \mathcal{ML}(\Omega \times I)$; майже для всіх $x \in \Omega$ функція $I \ni \xi \mapsto \theta(x,\xi) \in \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною; існує таке число $M > 0$, що майже для всіх $x \in \Omega$ і для всіх $\zeta,\eta,\xi \in I$ виконуються оцінки (33). Тоді, якщо $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $u(x,t) \in I$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, то $\theta(x,u), \big(\theta(x,u)\big)_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і правильна формула (34).*

Доведення. Розглянемо лише випадок $I = (-\infty,b]$. Ідею доведення запозичимо з [36, с. 98]. Продовжимо функцію θ поза I так:

$$\Theta(x,\xi) = \begin{cases} \theta(x,\xi), & \xi \le b, \\ \theta_\xi(x,b)\xi + \theta(x,b) - \theta_\xi(x,b)b, & \xi > b, \end{cases} \qquad x \in \Omega.$$

Тоді Θ задовольняє всі умови леми 3 і, крім того, $\Theta(x,u(x,t)) = \theta(x,u(x,t))$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$. Звідси і випливає доведення твердження нашого наслідку. □

Лема 4. *Нехай $p \in L_+^\infty(\Omega)$, $\theta \in \mathcal{ML}(\Omega \times \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, $\xi_1,\dots,\xi_N \in \mathbb{R}$; майже для всіх $x \in \Omega$ функція $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \theta(x,\xi) \in \mathbb{R}$ є неперервною, а функція $\mathbb{R} \setminus \{\xi_1,\dots,\xi_N\} \ni \xi \mapsto \theta(x,\xi) \in \mathbb{R}$ є диференційовною; майже для всіх $x \in \Omega$, для всіх $\zeta,\eta \in \mathbb{R}$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_1,\dots,\xi_N\}$ виконуються (33). Тоді, якщо $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то $\theta(x,u), \big(\theta(x,u)\big)_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і правильна формула (34).*

Доведення. Розглянемо лише випадок $N = 1$, $\xi_1 = 0$. Ідею доведення запозичимо з [36, с. 100]. Зрозуміло, що правильна формула

$$\theta(x,u) = \theta(x,u^+) + \theta(x,-u^-) - \theta(x,0). \tag{35}$$

Оскільки $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T}) \subset L^{p_0}(Q_{0,T})$, то ми зазначали, що $(u^{\pm})_t \in L^{p_0}(Q_{0,T})$ і виконується формула $(u^{\pm})_t = \pm\widetilde{\chi}(u)u_t$, де $\widetilde{\chi}$ взято з (21). Тому з наслідку 1 матимемо виконання формули типу (34) для кожного доданка в (35). Тому (34) правильна в сенсі розподілів. Включення $\big(\theta(x,u)\big)_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ випливає з (33_2), (34). □

Лема 5. *Нехай $\beta \in \mathcal{MLB}_+(\Omega)$, $\phi_{\beta(x)}$ – функція, визначена в (18) з β замість α,*

$$\chi_k(s) = \begin{cases} 1, & s > \dfrac{1}{k}, \\ 0, & s \le \dfrac{1}{k}, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Тоді, якщо $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$ та $v, v_t \in L^1(Q_{0,T})$, то виконується рівність

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \chi_k(u)\,\beta(x)\,\phi_{\beta(x)-1}(u)u_t\,v\,dxdt =$$
$$= \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\beta(x)}(u)\,v\,dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\beta(x)}(u)\,v_t\,dxdt. \tag{37}$$

Доведення. Нехай

$$\phi_{\beta(x),k}(s) = \begin{cases} k^{\beta(x)}, & s \ge k, \\ s^{\beta(x)}, & \dfrac{1}{k} < s < k, \\ \dfrac{1}{k^{\beta(x)}}, & s \le \dfrac{1}{k}, \end{cases} \quad \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(s) = \begin{cases} \beta(x)\,s^{\beta(x)-1}, & \dfrac{1}{k} < s < k, \\ 0, & s \le \dfrac{1}{k} \text{ або } s \ge k, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}_2$, $x \in \Omega$. Зрозуміло, що $\phi_{\beta(x),k}(s) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\beta(x)}(s)$ для $s \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Крім того, для $k \in \mathbb{N}_2$ та $x \in \Omega$ функція $s \mapsto \phi_{\beta(x),k}(s)$ задовольняє умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$ і є недиференційовною лише в точках $s = \frac{1}{k}$ і $s = k$, де $\frac{\partial}{\partial s}\phi_{\beta(x),k}(s) = \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(s)$ при $s \ne \frac{1}{k}$ і $s \ne k$. Тому з леми 4 випливає, що

$$\big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t = \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(u)u_t \quad \text{майже всюди на} \quad Q_{0,T}. \tag{38}$$

Отже, $\phi_{\beta(x),k}(u), \big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$. Тоді з пункту *(ii)* леми 1 з $z = \phi_{\beta(x),k}(u)$, $w = v$ матимемо рівність (22) у вигляді

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t\,v\,dxdt = \int\limits_{\Omega} \phi_{\beta(x),k}(u)\,v\,dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\beta(x),k}(u)\,v_t\,dxdt. \tag{39}$$

Нехай $M = \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_{0,T}}} |u(x,t)|$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \ge \max\{2, M\}$. Оскільки $|u| \le M \le k_0 \le k$, то з (38) отримаємо $\big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t = \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(u)u_t = \chi_k(u)\,\beta(x)\,\phi_{\beta(x)-1}(u)u_t$ при $k \ge k_0$. З оцінки $|\phi_{\beta(x),k}(u(x,t))| \le M^{\beta(x)}$ $\forall\ (x,t) \in \overline{Q_{0,T}}$ і теореми Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла (теорема 6 [33, c. 302]) випливає, що

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\beta(x),k}(u)\,v\,dx = \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\beta(x)}(u)\,v\,dx \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{і} \quad t = T,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{Q_{0,T}}\phi_{\beta(x),k}(u)\,v_t\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}}\phi_{\beta(x)}(u)\,v_t\,dxdt.$$

Звідси випливає існування границі справа в (39) при $k\to\infty$, а тому і границі зліва в (39). Отже, виконується (37) і лему доведено. □

Твердження 3. *(Теорема Обена, див.* [37] *і* [38, с. 393]*). Якщо $s,h>1$ – деякі числа, $\mathcal{W},\mathcal{L},\mathcal{B}$ – банахові простори, $\mathcal{W}\overset{K}{\subset}\mathcal{L}\circlearrowleft\mathcal{B}$, то*

$$\{u\in L^s(0,T;\mathcal{W})\ \mid\ u_t\in L^h(0,T;\mathcal{B})\}\overset{K}{\subset}L^s(0,T;\mathcal{L})\cap C([0,T];\mathcal{B}).$$

Лема 6. *Якщо $p\in\mathcal{ML}(\Omega)$, $1\le p_0\le p(x)\le p^0<+\infty$ майже для всіх $x\in\Omega$, $z,z_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то виконується оцінка*

$$\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau)|^{p(x)}\,dx\le C_{10}\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[|z(x,t)|^{p(x)}+|z_t(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt,\quad \tau\in[0,T],\tag{40}$$

де $C_{10}>0$ – стала, яка не залежить від z, τ.

Доведення. Доведемо (40) лише при $p_0>1,\tau>0$. Оскільки $z\in W^{1,p_0}(0,T;L^{p_0}(\Omega))$, то з твердження 1 випливає, що $z(\tau)-z(s)=\int_s^\tau z_t(t)\,dt$, $0\le s<\tau\le T$. Тому

$$\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau)|^{p(x)}\,dx=\int\limits_{\Omega}\Big|z(x,s)+\int\limits_{s}^{\tau}z_t(x,t)\,dt\Big|^{p(x)}\,dx\le C_{11}(p)\Big(\int\limits_{\Omega}|z(s)|^{p(x)}\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_{s}^{\tau}z_t(t)\,dt\Big|^{p(x)}dx\Big)\le C_{11}(p)\Big(\int\limits_{\Omega}|z(s)|^{p(x)}dx+\int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_{s}^{\tau}dt\Big|^{p(x)-1}\times$$
$$\times\Big|\int\limits_{s}^{\tau}|z_t(t)|^{p(x)}dt\Big|dx\Big)=C_{12}(p,T)\Big(\int\limits_{\Omega}|z(s)|^{p(x)}\,dx+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{s}^{\tau}|z_t(t)|^{p(x)}\,dtdx\Big).\tag{41}$$

Зінтегрувавши (41) за s після нескладних перетворень, отримаємо (40). □

Використаємо ці твердження для доведення таких теорем.

Теорема 2. *Нехай $\alpha\in L^\infty_+(\Omega)$, $\phi_{\alpha(x)}$ – функція з (18). Тоді правильні твердження:*

1) якщо $u\in C^1(\overline{Q_{0,T}})$, то $\phi_{\alpha(x)}(u),\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\in L^\infty(Q_{0,T})$ і

$$\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t=\alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)\,u_t;\tag{42}$$

2) якщо $u,u_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, де $p\in L^\infty_+(\Omega)$ і $p(x)\ge\alpha(x)$ майже для всіх $x\in\Omega$, то $\phi_{\alpha(x)}(u),\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\in L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T})$, виконується рівність (42) і оцінка

$$\rho_{p/\alpha}\Big(\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t;Q_{0,T}\Big)\le C_{13}S_{1/\alpha'}\Big(\rho_p(u;Q_{0,T})\Big)S_{1/\alpha}\Big(\rho_p(u_t;Q_{0,T})\Big),\tag{43}$$

де $C_{13}>0$ – стала, яка не залежить від u.

Доведення. Доведемо пункт 1. Нехай $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$. Якщо $v, v_t \in C(\overline{Q_{0,T}})$, функцію χ_k взято з (36), $k \in \mathbb{N}$, то $|\chi_k(u)\,\alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v| \leq C_{14}$, де $C_{14} > 0$ – стала, яка не залежить від k, x, t. Тому з теореми Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла випливає, що

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \chi_k(u)\,\alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\,dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\,dxdt.$$

Тоді з рівності (37), записаної для $\beta = \alpha > 1$, отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\,dxdt = \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\alpha(x)}(u)\,v\,dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\alpha(x)}(u)\,v_t\,dxdt. \qquad (44)$$

Приймаючи в (44) $v \in C_0^\infty(Q_{0,T})$, одержимо (тут $\alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, бо $\alpha_0 > 1$)

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\,dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\alpha(x)}(u)\,v_t\,dxdt.$$

Отже, згідно з означенням похідної функції в сенсі Соболєва маємо виконання (42).

Оскільки $\alpha_0 > 1$, то з (18) матимемо включення $\phi_{\alpha(x)} \in L^\infty(Q_{0,T})$, а з (42) – включення $\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$.

Доведемо пункт 2. Нехай $u \in U := \{u \in L^{p(x)}(Q_{0,T}) \mid u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})\}$. Зрозуміло, що $C^1([0,T]; C^1(\overline{\Omega})) \circledcirc W^{1,p^0}(0,T; L^{p(x)}(\Omega)) \circledcirc U \circledcirc W^{1,p_0}(0,T; L^{p(x)}(\Omega))$, а тому існує послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{Q_{0,T}})$ така, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$, $u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_t$ сильно в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $C([0,T]; L^{p(x)}(\Omega))$.

Нехай $v, v_t \in C(\overline{Q_{0,T}})$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (44) отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u^m)u_t^m\,v\,dxdt = \int\limits_{\Omega} \phi_{\alpha(x)}(u^m)\,v\,dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\alpha(x)}(u^m)\,v_t\,dxdt. \quad (45)$$

Оскільки $1 < \alpha(x) \leq p(x)$, то $\frac{p(x)}{\alpha(x)-1} > 1$, $x \in \Omega$. Тоді на підставі пункту 3 леми 2 для $G = Q_{0,T}$ і з $\alpha - 1$ замість α та $q = \frac{p}{\alpha-1}$ матимемо, що

$$\phi_{\alpha(x)-1}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)-1}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)-1}}(Q_{0,T}).$$

Зрозуміло, що $[L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)-1}}(Q_{0,T})]^* \cong L^{\frac{p(x)}{p(x)-(\alpha(x)-1)}}(Q_{0,T})$. Оскільки $p(x) \geq (\alpha(x)-1)+1$, то $p(x) \geq \frac{p(x)}{p(x)-(\alpha(x)-1)}$, $x \in \Omega$. Тому з вибору $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ випливає, що

$$u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_t \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{p(x)-(\alpha(x)-1)}}(Q_{0,T}).$$

Тоді з леми 5.2 [1, с. 19] матимемо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u^m)u_t^m\,v\,dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\,dxdt \qquad (46)$$

і $\alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \in L^1(Q_{0,T})$. На підставі пункту 3 леми 2 для $q = \frac{p}{\alpha}$ та $G = \Omega$, $G = Q_{0,T}$, відповідно, отримаємо, що

$$\phi_{\alpha(x)}(u^m(t)) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)}(u(t)) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(\Omega) \quad \text{для} \quad t=0 \quad \text{та} \quad t=T, \tag{47}$$

$$\phi_{\alpha(x)}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T}). \tag{48}$$

Спрямувавши в (45) $m \to \infty$ і використавши (46)-(48), одержимо рівність (44). Далі як і для доведення першого пункту цієї теореми доводимо правильність (42).

З леми 2 матимемо, що $\phi_{\alpha(x)}(u) \in L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T})$. З (42), (19) і нерівності Юнга для $\alpha'(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}, \alpha(x) > 1$ одержимо, що

$$\left|\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\right|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} \le \alpha(x)^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}|u|^{\frac{p(x)}{\alpha'(x)}}|u_t|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} \le C_{15}(|u|^{p(x)} + |u_t|^{p(x)}) \in L^1(Q_{0,T}).$$

Тому $\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t \in L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T})$.

З (42) і узагальненої нерівності Гельдера для $\alpha'(x), \alpha(x)$ матимемо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\right|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} dxdt \le \int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}|u|^{\frac{p(x)}{\alpha'(x)}}|u_t|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} dxdt \le$$

$$\le C_{16}\big|\big|\,|u|^{\frac{p(x)}{\alpha'(x)}}; L^{\alpha'(x)}(Q_{0,T})\big|\big| \cdot \big|\big|\,|u_t|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}; L^{\alpha(x)}(Q_{0,T})\big|\big| \le$$

$$\le C_{17}S_{1/\alpha'}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u|^{p(x)}\,dxdt\Big)S_{1/\alpha}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u_t|^{p(x)}\,dxdt\Big),$$

звідки і випливає (43) та доведення пункту 2 нашої теореми. Теорему 2 доведено. □

Теорема 3. *Нехай $r \in \mathcal{MLB}_+(\Omega)$, $\phi_{r(x)-2}$ – функція, визначена в (18) з $r-2$ замість α. Тоді правильні такі твердження.*

1) Якщо $r_0 > 1$, то формула

$$\big(|u|^{r(x)}\big)_t = r(x)\phi_{r(x)-2}(u)u\,u_t \tag{49}$$

правильна при виконанні однієї з таких умов:
i) $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$, і тоді $|u|^{r(x)}, \big(|u|^{r(x)}\big)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$;
ii) $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $p(x) \ge r(x)$ для $x \in \Omega$, і тоді $|u|^{r(x)}, \big(|u|^{r(x)}\big)_t \in L^{\frac{p(x)}{r(x)}}(Q_{0,T})$.

2) Якщо $r_0 > 2$, то формула

$$\big(|u|^{r(x)-2}u\big)_t = (r(x)-1)\phi_{r(x)-2}(u)\,u_t \tag{50}$$

правильна при виконанні однієї з таких умов:
i) $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$, і тоді $|u|^{r(x)-2}u, \big(|u|^{r(x)-2}u\big)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$;
ii) $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $p(x) \ge r(x)-1$ для $x \in \Omega$, і тоді виконуються включення $|u|^{r(x)-2}u, \big(|u|^{r(x)-2}u\big)_t \in L^{\frac{p(x)}{r(x)-1}}(Q_{0,T})$.

Доведення. цієї теореми відразу ж випливає з теореми 2 і таких рівностей:

$$|s|^{r(x)}=\phi_{r(x)}(s)+\phi_{r(x)}(-s),\quad |s|^{r(x)-2}s=\phi_{r(x)-1}(s)-\phi_{r(x)-1}(-s),\quad x\in\Omega,\quad s\in\mathbb{R}.\ \square$$

$\square$

Зауваження 1. Оскільки $\phi_{r(x)-2}(u)=|u|^{r(x)-2}$ при $u>0$, то часто (щоб не вводити додаткових позначень) формули (49) і (50) використовують у такому вигляді:

$$\big(|u|^{r(x)}\big)_t=r(x)|u|^{r(x)-2}u\,u_t\,,\qquad \big(|u|^{r(x)-2}u\big)_t=(r(x)-1)|u|^{r(x)-2}u_t\,. \tag{51}$$

У цьому випадку вважають праві частини цих рівностей такими, що дорівнюють нулю на множині
$E=\{(x,t)\in Q_{0,T}\mid u(x,t)=0\}$.

Теорема 4. *Нехай $\alpha\in\mathcal{ML}(\Omega)$, $\frac12<\alpha_0\le\alpha(x)\le\alpha^0\le1$ майже для всіх $x\in\Omega$, $\phi_{\alpha(x)}$ – функція з (18). Тоді правильні такі твердження.*

1. *Якщо $u\in C^2(\overline{Q_{0,T}})$, то $\phi_{\alpha(x)}(u)\in L^\infty(Q_{0,T})$, $\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\in L^2(Q_{0,T})$. Крім того, виконується (42).*
2. *Якщо $u,u_t,u_{tt}\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, де $p\in L^\infty_+(\Omega)$ та $p(x)\ge2\alpha(x)$ майже для всіх $x\in\Omega$, то $\phi_{\alpha(x)}(u)\in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$. Крім того, виконується (42) і оцінки*

$$||\phi_{\alpha(x)}(u);L^2(Q_{0,T})||\le C_{18}S_{\alpha/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T})\big), \tag{52}$$

$$||\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t;L^2(Q_{0,T})||\le C_{19}S_{\alpha/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T})+\rho_p(u_t;Q_{0,T})+\rho_p(u_{tt};Q_{0,T})\big), \tag{53}$$

де $C_{18},C_{19}>0$ – сталі, які не залежать від u.

Доведення. Доведемо пункт 1. Нехай $u\in C^2(\overline{Q_{0,T}})$. Взявши в рівності (37) $\beta=2\alpha-1>0$ і $v=u_t$, що законно, бо $u_t,u_{tt}\in L^1(Q_{0,T})$, отримаємо, що

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{Q_{0,T}}f_k\,dxdt=\int\limits_{\Omega_t}\phi_{2\alpha(x)-1}(u)u_t\,dx\Big|_{t=0}^{t=T}-\int\limits_{Q_{0,T}}\phi_{2\alpha(x)-1}(u)u_{tt}\,dxdt, \tag{54}$$

де $f_k=\chi_k(u)(2\alpha(x)-1)\phi_{2\alpha(x)-2}(u)|u_t|^2$, χ_k взято з (36), $k\in\mathbb{N}$. Зрозуміло, що

$$f_k(x,t)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}f(x,t)\quad\text{для}\quad(x,t)\in Q_{0,T}, \tag{55}$$

де $f=(2\alpha(x)-1)\phi_{2\alpha(x)-2}(u)|u_t|^2=(2\alpha(x)-1)|\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t|^2$. З існування границі (54) випливає, що існує стала $C_{20}>0$ така, що для всіх $k\in\mathbb{N}$ правильна оцінка $\int_{Q_{0,T}}f_k\,dxdt\le C_{20}$. Очевидно, що $f_{k_1}\le f_{k_2}$ при $k_1\le k_2$. Тому з теореми Леві про монотонну збіжність (теорема 7 [33, с. 303]) та збіжності (55) матимемо, що $f\in L^1(Q_{0,T})$ (а тому $\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\in L^2(Q_{0,T})$) і

$$\int\limits_{Q_{0,T}}f_k\,dxdt\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{Q_{0,T}}f\,dxdt. \tag{56}$$

Тоді з (54) отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}}(2\alpha(x)-1)|\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t|^2\,dxdt=\int\limits_{\Omega_t}\phi_{2\alpha(x)-1}(u)u_t\,dx\Big|_{t=0}^{t=T}-$$

$$-\int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)u_{tt}\, dxdt. \tag{57}$$

З (56) також одержимо збіжність

$$||\chi_k(u)\sqrt{2\alpha-1}\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t; L^2(Q_{0,T})|| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} ||\sqrt{2\alpha-1}\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t; L^2(Q_{0,T})||. \tag{58}$$

Тому, використавши (55), можна довести, що

$$\chi_k(u)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_{0,T}). \tag{59}$$

Нехай в (37) $\beta = \alpha$, $v \in L^2(Q_{0,T})$, $v_t \in L^1(Q_{0,T})$. Використавши (59), отримаємо (44). Далі як і при доведенні теореми 2 одержимо (42). Тому матимемо включення $(\phi_{\alpha(x)}(u))_t \in L^2(Q_{0,T})$, а з вигляду $\phi_{\alpha(x)}$ – включення $\phi_{\alpha(x)}(u) \in L^\infty(Q_{0,T})$. Пункт 1 доведено.

Доведемо пункт 2. Перш за все доведемо (52) і (53) для $u \in C^2(\overline{Q_{0,T}})$. Оскільки $p \geq 2\alpha$, то $2 \leq \frac{p}{\alpha}$ і з оцінки (26) для $G = Q_{0,T}$ і $q \equiv 2$ одержимо (52). Використавши рівність (42), яка виконується згідно з вже доведеним, з (57) одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|\left(\phi_{\alpha(x)}(u)\right)_t\right|^2 dxdt \leq \frac{|\alpha^0|^2}{2\alpha_0-1}\Big(\int\limits_{\Omega_0} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_t|\, dx + \int\limits_{\Omega_T} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_t|\, dx + \\ + \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_{tt}|\, dxdt\Big). \tag{60}$$

Оцінимо наявні тут вирази. Для всіх $r \in L^\infty_+(\Omega)$ матимемо, що

$$J_1 = \int\limits_{\Omega_0} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_t|\, dx \leq ||\phi_{2\alpha(x)-1}(u(0)); L^{r'(x)}(\Omega)|| \cdot ||u_t(0); L^{r(x)}(\Omega)||.$$

Оскільки $p \geq 2\alpha > 1$, то при $r = 2\alpha$ маємо такі оцінки: $1 < r \leq p$, $2\alpha - 1 < p$ та $1 < r' = \frac{r}{r-1} = \frac{r}{2\alpha-1} \leq \frac{p}{2\alpha-1}$. Тому з оцінки (26) при $G = \Omega$ і $q = r'$ одержимо, що $||\phi_{2\alpha(x)-1}(u(0)); L^{r'(x)}(\Omega)|| \leq C_{21}S_{(2\alpha-1)/p}(\rho_p(u(0);\Omega))$. Крім того, з твердження 2 отримаємо таке: $||u_t(0); L^{r(x)}(\Omega)|| \leq C_{22}||u_t(0); L^{p(x)}(\Omega)|| \leq C_{22}S_{1/p}(\rho_p(u_t(0);\Omega))$. Тому з (40) і очевидної рівності $S_a(z)S_b(z) = S_{a+b}(z)$, $a, b, z \geq 0$ отримаємо, що

$$J_1 \leq C_{23}S_{(2\alpha-1)/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u(0)|^{p(x)}\, dx\Big)S_{1/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_t(0)|^{p(x)}\, dx\Big) \leq \\ \leq C_{24}S_{2\alpha/p}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|u(x,t)|^{p(x)} + |u_t(x,t)|^{p(x)} + |u_{tt}(x,t)|^{p(x)}\Big]\, dxdt\Big),$$

де $C_{24} > 0$ – стала, яка не залежить від u. Аналогічну оцінку зробимо для другого і третього інтегралів у правій частині нерівності (60) і з (60) отримаємо (53).

Нехай тепер $u, u_t, u_{tt} \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, $p \geq 2\alpha$, $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C^2(\overline{Q_{0,T}})$ – послідовність така, що $u^\ell \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u$, $u_t^\ell \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u_t$ $u_{tt}^\ell \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u_{tt}$ сильно в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$. З (52), (53) одержимо обмеженість послідовності $\{\phi_{\alpha(x)}(u^\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ в просторі $W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$. Тому існує підпослідовність $\{u^{\ell_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ така, що

$$\phi_{\alpha(x)}(u^{\ell_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi \quad \text{слабко в} \quad W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Тоді, зокрема,

$$\alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u^{\ell_k})u_t^{\ell_k} = \big(\phi_{\alpha(x)}(u^{\ell_k})\big)_t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}).$$

Також з вибору послідовності $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ матимемо (можливо у разі переходу до нової підпослідовності) збіжності

$$u^{\ell_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad u_t^{\ell_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_t, \quad \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u^{\ell_k})u_t^{\ell_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t$$

майже скрізь в $Q_{0,T}$. Тому $\chi = \phi_{\alpha(x)}(u)$ і $\zeta = \alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t$. Отже, виконується (44) з $v \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, а тому правильна рівність (42). Використовуючи лему 5.3 [1, с. 20], з (52), (53), записаних для u^{ℓ_k}, одержимо (52), (53) для нашого u. □

Використавши теорему 4, аналогічно як теорему 3 (див. також зауваження 1) доводимо таке твердження.

Теорема 5. *Нехай $r \in \mathcal{MLB}_+(\Omega)$. Тоді правильні такі твердження.*

1. Якщо $\frac{1}{2} < r_0 \le r^0 \le 1$, то формула (49) правильна у разі виконання однієї з таких умов:

i) $u \in C^2(\overline{Q_{0,T}})$, і тоді $|u|^{r(x)} \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\big(|u|^{r(x)}\big)_t \in L^2(Q_{0,T})$;

ii) $u, u_t, u_{tt} \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $p(x) \ge 2r(x)$ майже для всіх $x \in \Omega$, і тоді правильні включення $|u|^{r(x)} \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ та оцінка

$$||\,|u|^{r(x)};W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))|| \le C_{25}S_{r/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T})+\rho_p(u_t;Q_{0,T})+\rho_p(u_{tt};Q_{0,T})\big), \quad (61)$$

де $C_{25} > 0$ – стала, яка не залежить від u.

2. Якщо $\frac{3}{2} < r_0 \le r^0 \le 2$, то формула (50) правильна у разі виконання однієї з таких умов:

i) $u \in C^2(\overline{Q_{0,T}})$, і тоді $|u|^{r(x)-2}u \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\big(|u|^{r(x)-2}u\big)_t \in L^2(Q_{0,T})$;

ii) $u, u_t, u_{tt} \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $p(x) \ge 2(r(x)-1)$ майже для всіх $x \in \Omega$, і тоді правильні включення $|u|^{r(x)-2}u \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ та оцінка

$$||\,|u|^{r(x)-2}u;W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))|| \le$$

$$\le C_{26}S_{(r-1)/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T})+\rho_p(u_t;Q_{0,T})+\rho_p(u_{tt};Q_{0,T})\big), \quad (62)$$

де $C_{26} > 0$ – стала, яка не залежить від u.

Зауваження 2. Як і в зауваженні 1 зазначимо, що за умов теореми 5 формули (49) і (50) вживатимемо у вигляді (51).

Лема 7. *Якщо $a > 0$, то визначений рівністю*

$$\langle Av, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega a(\nabla v(x), \nabla w(x))\,dx, \quad v, w \in H_0^1(\Omega), \quad (63)$$

оператор $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ є лінійним обмеженим неперервним і монотонним.

Доведення леми 7 опустимо.

Лема 8. *Якщо виконуються умови **(Q)** і **(G)**, то визначений в (4) оператор Немицького $G : L^{q(x)}(Q_{0,T}) \to L^{q'(x)}(Q_{0,T})$ є обмеженим неперервним і монотонним.*

Доведення. Обмеженість і неперервність G випливає з [40]. Монотонність оператора G випливає з такої числової нерівності (див. теорему 2.2 [34, с. 3]):

$$\forall\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}: \quad (|\xi_1|^{r-2}\xi_1 - |\xi_2|^{r-2}\xi_2)(\xi_1 - \xi_2) \geq C_{27}(r)(|\xi_1| + |\xi_2|)^{r-\beta}|\xi_1 - \xi_2|^{\beta}, \quad (64)$$

де $r > 1$, $\max\{r, 2\} \leq \beta < \infty$, $C_{27}(r) = \min\{2^{2-r}, (r-1)2^{2-r}\} > 0$. Лему доведено. □

Лема 9. *Якщо виконується умова **(E)**, то визначений в (5) інтегральний оператор $E : L^r(Q_{0,T}) \to L^r(Q_{0,T})$, де $r > 1$, є лінійним обмеженим неперервним оператором і задовольняє оцінку*

$$||Eu; L^r(Q_{0,\tau})|| \leq C_{28}||u; L^r(Q_{0,\tau})||, \quad u \in L^r(Q_{0,T}), \quad \tau \in (0, T], \qquad (65)$$

де $C_{28} > 0$ – стала, яка не залежить від u, τ.

Доведення. Лінійність нашого оператора очевидна. Доведемо оцінку (65), з якої і випливатимуть інші твердження леми. Продовжимо кожну функцію $u \in L^r(Q_{0,T})$ нулем поза $Q_{0,T}$. Використавши нерівність Гельдера, одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} |(Eu)(x,t)|^r \,dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big|\int\limits_{\Omega} \epsilon(x,t,y)\Big(u(x+y,t) - u(x,t)\Big)\,dy\Big|^r \,dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(\int\limits_{\Omega} |\epsilon(x,t,y)|^{r'}\,dy\Big)^{\frac{r}{r'}} \int\limits_{\Omega} |u(x+y,t) - u(x,t)|^r \,dy\,dxdt \leq$$

$$\leq C_{29} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \int\limits_{\Omega} (|u(x+y,t)|^r + |u(x,t)|^r)\,dy\,dxdt = 2C_{29}|\Omega| \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u(x,t)|^r \,dxdt,$$

де $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $|\Omega|$ – міра Лебега Ω. З цієї оцінки і випливає (65). □

5. Доведення теореми 1. Нехай $\gamma \in [2, 3)$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1$. Тоді $\gamma' \in (\frac{3}{2}, 2]$. У випадку $\gamma = 2$ задача (1)–(3) значно спрощується. Тому нехай далі $\gamma > 2$.

Крок 1. Зробимо заміну $u \rightsquigarrow \mathsf{u}$, де $\mathsf{u} = |u|^{\gamma-2}u$. Тоді $u = |\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}$. Тому (1)–(3) еквівалентна такій задачі:

$$(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})_t - a\,\Delta\mathsf{u} + G(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}) + \phi\big(E(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})\big) = f(x,t), \qquad (66)$$

$$\mathsf{u}|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad \mathsf{u}|_{t=0} = |u_0|^{\gamma-2}u_0. \qquad (67)$$

Для доведення існування розв'язку задачі (66), (67) використаємо метод еліптичної регуляризації. Для кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо задачу Діріхле-Неймана

$$-\varepsilon\,\mathsf{u}^{\varepsilon}_{tt} + \big(|\mathsf{u}^{\varepsilon}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon}\big)_t - a\,\Delta\mathsf{u}^{\varepsilon} + G(|\mathsf{u}^{\varepsilon}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon}) + \phi\big(E(|\mathsf{u}^{\varepsilon}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon})\big) = f(x,t), \qquad (68)$$

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad \mathsf{u}^{\varepsilon}|_{t=0} = |u_0|^{\gamma-2}u_0, \qquad \mathsf{u}^{\varepsilon}_t|_{t=T} = 0. \qquad (69)$$

Нехай $U_0(Q_{0,T}) = \{v \in H^1(Q_{0,T}) \ \mid\ v|_{\Sigma_{0,T}} = 0,\ \ v|_{t=0} = 0\}$. Використовуючи умови $\partial\Omega \in C^4$, $2 \leq \gamma < 3$ і $q^0 \leq \gamma$ вибираємо в просторі V досить гладку базу. Тоді для виконання умов теореми 1 методом Гальоркіна доводимо, що існує розв'язок

$\mathsf{u}^\varepsilon \in H^2(Q_{0,T}) \cap W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))$ крайової задачі (68), (69) такий, що $|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, $G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon) \in L^2(Q_{0,T})$, $\phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big) \in L^2(Q_{0,T})$,

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\varepsilon \mathsf{u}_t^\varepsilon v_t - |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon v_t + a(\nabla \mathsf{u}^\varepsilon, \nabla v) + G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)v + \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)v\Big]\,dxdt +$$

$$+ \int\limits_\Omega |\mathsf{u}^\varepsilon(T)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(T)v(T)\,dx = \int\limits_{Q_{0,T}} fv\,dxdt \qquad \forall\, v \in U_0(Q_{0,T}). \tag{70}$$

Крок 2. Зауважимо таке: оскільки $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$ і $1 < \gamma' \le 2$, то з пункту 1.ii теореми 3 для $p(x) \equiv 2$, $r(x) \equiv \gamma'$ і з зауваження 1 матимемо таке:

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'} \in W^{1,\frac{2}{\gamma'}}(0,T;L^{\frac{2}{\gamma'}}(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\big)_t = \gamma'\,|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\,\mathsf{u}_t^\varepsilon. \tag{71}$$

Аналогічно з включення $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$ і пункту 1.ii теореми 3 одержимо, що

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^2\big)_t = 2\,\mathsf{u}^\varepsilon\,\mathsf{u}_t^\varepsilon. \tag{72}$$

Крім того, з нерівності Гельдера для показників $\gamma, \gamma' > 1$, умови **(Φ)** та оцінки (65) випливає таке:

$$\Big|\int\limits_{Q_{0,T}} \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)\mathsf{u}^\varepsilon\,dxdt\Big| \le \phi^0\Big|\Big|E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big);L^\gamma(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot ||\mathsf{u}^\varepsilon;L^{\gamma'}(Q_{0,T})|| \le$$

$$\le C_{30}||\mathsf{u}^\varepsilon;L^{\gamma'}(Q_{0,T})||^{\frac{1}{\gamma-1}+1} = C_{30}\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\,dxdt, \tag{73}$$

де $C_{30} > 0$ – стала, яка не залежить від ε. Нехай в (70) $v = \mathsf{u}^\varepsilon$. Використавши (71), (73), після нескладних перетворень одержимо оцінку

$$\varepsilon\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\,dxdt + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|\nabla \mathsf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathsf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'} + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big]\,dxdt \le C_{31}. \tag{74}$$

Тому

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big||\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\Big|^{2(\gamma-1)}\,dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^2\,dxdt \le C_{32}. \tag{75}$$

З умови **(Φ)**, (65) і (75) випливає, що

$$||\phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big);L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T})|| \le C_{33}||\,|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon;L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T})|| \le C_{34}. \tag{76}$$

Якщо $q^0 \le \gamma$, то майже для всіх $x \in \Omega$ одержимо таке:

$$\frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1} \ge 2, \qquad \frac{q(x)-1}{q(x)+\gamma-2} + \frac{\gamma-1}{q(x)+\gamma-2} = 1, \qquad 2 \ge \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1} > 1. \tag{77}$$

Тому з оцінок (74) матимемо, що

$$\Big|\Big|G\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big);L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1}}(Q_{0,T})\Big|\Big| \le C_{35}S_{1/\widehat{q}}\Big(S_{\widehat{\widehat{q}}}\Big(\Big|\Big|\mathsf{u}^\varepsilon;L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}(Q_{0,T})\Big|\Big|\Big)\Big) \le C_{36}, \tag{78}$$

де $\widehat{q}(x) = \frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1}$, $\widehat{\widehat{q}}(x) = \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}$, $x \in \Omega$. Тут $C_{31} - C_{36} > 0$ не залежать від ε.

Оцінки (74)–(78) дадуть існування послідовності $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ такої, що $\varepsilon_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\varepsilon_j > 0$ для всіх $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{\gamma'}(Q_{0,T}) \cap L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}(Q_{0,T}), \tag{79}$$

$$|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1 \quad \text{слабко в} \quad L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T}), \tag{80}$$

$$G\big(|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon_j}\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_2 \quad \text{слабко в} \quad L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1}}(Q_{0,T}), \tag{81}$$

$$\phi\big(E(|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon_j})\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_3 \quad \text{слабко в} \quad L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T}), \tag{82}$$

$$\sqrt{\varepsilon_j}\, \mathsf{u}_t^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_4 \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}). \tag{83}$$

Крок 3. Отримаємо додаткові оцінки. Зауважимо таке: оскільки $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^2(Q_{0,T})$ і $\frac{3}{2} < \gamma' \le 2$, то з пункту 2.ii теореми 5 для $r(x) \equiv \frac{\gamma'}{2} + 1$ і $p(x) \equiv 2$ випливає, що

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon\big)_t = \frac{\gamma'}{2}\,|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}_t^\varepsilon, \tag{84}$$

а з пункту 2.ii теореми 5 для $r(x) \equiv \gamma'$ і $p(x) \equiv 2$ маємо, що

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big)_t = \frac{1}{\gamma-1}\,|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}_t^\varepsilon. \tag{85}$$

Крім того, оскільки $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$, то з пункту 1.ii теореми 3 для $r(x) = \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}$, $p(x) \equiv 2$ (згідно з (77) $p(x) \ge r(x) > 1$ для $x \in \Omega$) матимемо таке:

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}, \Big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big)_t \in L^{\frac{2(\gamma-1)}{q(x)+\gamma-2}}(Q_{0,T}),$$

$$\Big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big)_t = \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)-\gamma}{\gamma-1}}\,\mathsf{u}^\varepsilon\mathsf{u}_t^\varepsilon. \tag{86}$$

Аналогічно ($\mathsf{u}_t^\varepsilon, \mathsf{u}_{x_1}^\varepsilon, \dots, \mathsf{u}_{x_n}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$) з пункту 1.ii теореми 3 одержимо, що

$$|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\big)_t = 2\,\mathsf{u}_t^\varepsilon\,\mathsf{u}_{tt}^\varepsilon, \tag{87}$$

$$|\nabla\mathsf{u}^\varepsilon|^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)), \qquad \big(|\nabla\mathsf{u}^\varepsilon|^2\big)_t = 2\,(\nabla\mathsf{u}^\varepsilon, \nabla\mathsf{u}_t^\varepsilon). \tag{88}$$

Зінтегрувавши частинами, що законно згідно з (85), з (70), отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\varepsilon\mathsf{u}_{tt}^\varepsilon v + \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big)_t v + a(\nabla\mathsf{u}^\varepsilon, \nabla v) +$$

$$+ G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)v + \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)v - fv\Big]\,dxdt = 0, \tag{89}$$

де $v \in U_0(Q_{0,T})$. Звідси одержимо таку рівність в просторі $H^{-1}(\Omega)$:

$$-\varepsilon\mathsf{u}_{tt}^\varepsilon(t) + \big(|\mathsf{u}^\varepsilon(t)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(t)\big)_t + A\mathsf{u}^\varepsilon(t) +$$

$$+ G\big(|\mathsf{u}^\varepsilon(t)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(t)\big) + \phi\big(E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon(t)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(t)\big)\big) = f(t), \quad t \in (0,T). \tag{90}$$

Оскільки $\mathsf{u}_t^\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, то можна подіяти рівністю (90) на $\mathsf{u}_t^\varepsilon(t)$. Використавши (85) і зінтегрувавши отриману рівність за $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$, матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[-\varepsilon \mathsf{u}_{tt}^\varepsilon \mathsf{u}_t^\varepsilon + \frac{1}{\gamma-1}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 + a(\nabla \mathsf{u}^\varepsilon, \nabla \mathsf{u}_t^\varepsilon) +$$

$$+ G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\mathsf{u}_t^\varepsilon + \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)\mathsf{u}_t^\varepsilon \Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f\mathsf{u}_t^\varepsilon\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{91}$$

Перетворимо наявні тут вирази. Зінтегрувавши частинами (див. (87)) і використавши (69_3), одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} -\varepsilon \mathsf{u}_{tt}^\varepsilon \mathsf{u}_t^\varepsilon\, dxdt = -\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega |\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dx\Big|_{t=0}^{t=T} = -0 + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega |\mathsf{u}_t^\varepsilon(0)|^2\, dx \ge 0.$$

З умови **(Φ)**, нерівностей Гельдера (тут $\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-2}{2\gamma} + \frac{1}{2} = 1$), Юнга і (74) маємо:

$$\Big| - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)\mathsf{u}_t^\varepsilon\, dxdt \Big| \le \phi^0 \int\limits_{Q_{0,T}} \Big| E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big)\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{1-\frac{\gamma'}{2}}\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\, |\mathsf{u}_t^\varepsilon|\, dxdt \le$$

$$\le \phi^0 \Big|\Big| E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big); L^\gamma(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{1-\frac{\gamma'}{2}}; L^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}_t^\varepsilon; L^2(Q_{0,T})\Big|\Big| \le$$

$$\le C_{37}||\mathsf{u}^\varepsilon; L^{\gamma'}(Q_{0,T})||^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}}; L^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}_t^\varepsilon; L^2(Q_{0,T})\Big|\Big| =$$

$$= C_{37}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \le \varkappa_1 \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dxdt + C_{38}(\varkappa_1),$$

де $\varkappa_1 > 0$, $C_{38}(\varkappa_1) > 0$ – стала, яка не залежить від ε. З нерівності Юнга (тут знову $\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-2}{2\gamma} + \frac{1}{2} = 1$), отримаємо оцінку

$$|f\mathsf{u}_t^\varepsilon| = |f|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{1-\frac{\gamma'}{2}}\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\, |\mathsf{u}_t^\varepsilon| \le C_{39}(\varkappa_2)(|f|^\gamma + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{(1-\frac{\gamma'}{2})\,\frac{2\gamma}{\gamma-2}}) + \varkappa_2|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 =$$

$$= \varkappa_2|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 + C_{39}(\varkappa_2)(|f|^\gamma + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}),$$

де $\varkappa_2 > 0$, $C_{39}(\varkappa_2) > 0$ – стала, яка не залежить від ε.

Врахувавши ці перетворення і використавши (86) та (88), з (91) матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\Big(\frac{1}{\gamma-1} - \varkappa_1 - \varkappa_2\Big)|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon|^2 + \frac{a}{2}\big(|\nabla \mathsf{u}^\varepsilon|^2\big)_t + \frac{g(x,t)(\gamma-1)}{q(x)+\gamma-2}\Big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big)_t\Big]\, dxdt \le$$

$$\le C_{38}(\varkappa_1,\varkappa_2)\Big(1 + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|f|^\gamma + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\Big]\, dxdt\Big). \tag{92}$$

Вибравши $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$ малими і зінтегрувавши частинами, звідси отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dxdt \le C_{40}. \tag{93}$$

Тому з (84) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|\left(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon\right)_t\right|^2 dxdt = \frac{|\gamma'|^2}{4}\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^2\, dxdt \le C_{41}. \tag{94}$$

Крім того,

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left||\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon\right|^2 dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\, dxdt \le C_{42}, \tag{95}$$

Нехай $\widehat{\gamma} = \frac{4(\gamma-1)}{3\gamma-4}$. Тоді з припущення $\gamma > 2$ матимемо, що $\widehat{\gamma} \in (1,2)$. Тому з нерівності Юнга для параметрів $\frac{2}{2-\widehat{\gamma}}, \frac{2}{\widehat{\gamma}} > 1$ отримаємо оцінку

$$|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^{\widehat{\gamma}} = |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\widehat{\gamma}(2-\gamma')}{2}}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\widehat{\gamma}(\gamma'-2)}{2}}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^{\widehat{\gamma}} \le C_{43}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\varkappa} + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^2,$$

де $\varkappa = \frac{\widehat{\gamma}(2-\gamma')}{2}\,\frac{2}{2-\widehat{\gamma}} = 2$. Звідси, з (93) і (74) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon_t|^{\widehat{\gamma}}\, dxdt \le \int\limits_{Q_{0,T}} \left[C_{43}|\mathsf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^2\right] dxdt \le C_{44}. \tag{96}$$

Тут $C_{40} - C_{44} > 0$ – сталі, які не залежать від ε.

З оцінок (74), (93)–(96) випливає, що

$$|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_5 \quad \text{слабко в} \quad W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{97}$$

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{слабко в} \quad W^{1,\widehat{\gamma}}(Q_{0,T}). \tag{98}$$

Тому з теореми Релліха-Кондрашова (див. лему 1.28 [1, с. 47]) і з леми 1.18 [1, с. 39] отримаємо, що

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{сильно в} \quad L^{\widehat{\gamma}}(Q_{0,T}) \quad \text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}. \tag{99}$$

Тому $\chi_1 = |\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}$, $\chi_2 = G(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})$, $\chi_5 = |\mathsf{u}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}$.

З (98) і теореми Обена (твердження 3) матимемо збіжність

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{в просторі} \quad C([0,T];L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)). \tag{100}$$

Оскільки $\widehat{\gamma} \in (1,2)$, то $\widehat{\gamma} > 1 \ge \gamma' - 1$, тобто $\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1} = \frac{4(\gamma-1)^2}{3\gamma-4} > 1$. Отож, використавши (29), отримаємо оцінку

$$||\,|z_1|^{\gamma'-2}z_1 - |z_2|^{\gamma'-2}z_2; L^{\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1}}(\Omega)|| \le C_{45}||z_1 - z_2; L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)||^{\gamma'-1}, \tag{101}$$

де $C_{45} > 0$ – стала, яка не залежить від $z_1, z_2 \in L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)$. Враховуючи умову **(Φ)**, (100) і (101), доводимо рівність $\chi_3 = \phi\big(E(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})\big)$.

Крок 4. Нехай в (70) $\varepsilon = \varepsilon_j$, $v \in H^1_0(Q_{0,T})$ і спрямуємо $j \to \infty$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left[-|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}\, v_t + a(\nabla\mathsf{u}, \nabla w) + G(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})v + \phi\big(E(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})\big)v - fv\right] dxdt = 0. \tag{102}$$

Зі збіжності (98) і умов (69) випливає, що функція u задовольняє умови (67). Отже, u – розв'язок (66), (67), причому $\mathsf{u} \in W^{1,\widehat{\gamma}}(Q_{0,T}) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C\big([0,T];L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)\big) \cap L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}(Q_{0,T})$, $|\mathsf{u}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u} \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, $|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u} \in L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T})$. Оскільки $\mathsf{u} = |u|^{\gamma-2}u$, то $|\mathsf{u}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u} = |u|^{\frac{\gamma}{2}-1}u$. Отже,

$$|u|^{\frac{\gamma}{2}-1}u \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)).$$

З оцінки (101) випливає вкладення

$$u \in C\big([0,T];L^{\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1}}(\Omega)\big) \subset C([0,T];L^2(\Omega)),$$

бо $\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1} = 2 + \frac{4(\gamma-2)(\gamma-\frac{3}{2})}{3\gamma-4} > 2$. Крім того, рівність (102) при нашій заміні відразу перейде в (8). Теорему 1 доведено. $\square$

Список використаної літератури

1. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения — М.: Мир. — 1978. — 336 с.
2. *Briani M., Natalini R., and Russo G.* Implicit-explicit numerical schemes for jump-diffusion processes // Calcolo. — 2007. — Vol. 44, №1. — P. 33–57.
3. *Cifani S., Jakobsen E.R., and Karlsen K.H.* The discontinuous Galerkin method for fractional degenerate convection-diffusion equations // BIT. — 2011. — Vol. 51, №4. — P. 809–844.
4. *Merton R.C.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // J. of Financial Economics. — 1976. — Vol. 3. — P. 125–144.
5. *Kou S.G.* A jump-diffusion model for option pricing // Management Science. — 2002. — Vol. 48. — P. 1086-–1101.
6. *Carr P., Wu L.* Time-changed Levy processes and option pricing // J. of Financial Economics. — 2004. — Vol. 71. — P. 113—141.
7. *Mastroeni L., Matzeu M.* Nonlinear variational inequalities for jump-diffusion processes and irregular obstacles with a financial application // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. — 1998. — Vol. 34, №6. — P. 889–905.
8. *Sun Yu., Shi Yi., and Wu M.* Second order integro-differential parabolic variational inequalities arising from the valuation of American option // J. of Inequal. and Appl. — 2014. — Vol. 2014, №8. — P. 1–14.
9. *Alvarez O., Tourin A.* Viscosity solutions of nonlinear integro-differential equations // Annales de l'I. H. P., Section C. — 1996. — Vol. 13, №3. — P. 293–317.
10. *la Chioma C.* Integro-differential problems arising in pricing derivatives in jump-diffusion markets. — Ph. D. Thesis. — Roma, 2003–2004. — 206 p.
11. *Amadori A.L., Karlsen K.H., la Chioma C.* Nonlinear degenerated integro-partial differential evolution equations related to geometric Levy processes and applications to backward stochastic differential equations // Pure Mathematics. — 2004. — №14. — P. 1–27.
12. *Chipot M., Rougirel A.* On some class of problems with nonlocal source and boundary flux // Adv. Differential Equations. — 2001. — Vol. 6, №9. — P. 1025—1048.
13. *Chipot M., Chang N.-H.* On some model diffusion problems with a nonlocal lower order term // Chin. Ann. Math. — 2003. — Vol. 24, №2. — P. 147–166.
14. *Chipot M., Chang N.-H.* Nonlinear nonlocal evolution problems // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. — 2003. — Vol. 97, №3. — P. 423—445.
15. *Souplet Ph.* Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source // J. Diff. Equations. — 1999. — Vol. 153. — P. 374–406.

16. *Rougirel A.* Blow-up rate for parabolic problems with nonlocal source and boundary flux // Electronic J. of Diff. Eq. — Vol. 2003, No. 98. — P. 1—18.
17. *Pinasco J.P.* Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents // Nonlinear Analysis. — 2009. — Vol. 71. — P. 1094–1099.
18. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. — 1991. — 41 (116). — P. 592–618.
19. *Evans L.C.* An introduction to stochastic differential equations. Lecture Notes, Department of Math, UC Berkeley. — 139 p.
20. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — К.: Наукова думка, 1968. — 354 с.
21. *Бугрій М.І.* Основи фінансово-кредитного аналізу: Текст лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2006. — 375 с.
22. *Нікбахт Е., Гроппеллі А.* Фінанси. — К.: Основи, 1993. — 383 с.
23. *Black F., Scholes M.* The pricing of option and corporate liabilities // J. Political Econom. — 1973. — Vol. 72. — P. 637-659.
24. *Papapantoleon A.* An introduction to Levy processes with applications to finance. – Lecture notes. University of Leipzig. — 2005. — 50 p.
25. *Ковтун С.* Узагальнення моделі Блека-Шоулса // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2006. — Вип. 66. — С. 75-87.
26. *Гончар М.С.* Фондовий ринок і економічний ріст. — К., 2001. — 826 с.
27. *Timsina T.P.* Sensitivities in option pricing models // PhD thesis in Mathematics. — Blacksberg, Virginia, USA, 2007. — 109 p.
28. *Clift S.S.* Linear and non-linear monotone methods for valuing financial options under two-factor, jump-diffusion models // PhD thesis in Computer Science. — Waterloo, Ontario, Canada, 2007. — 144 p.
29. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа: Изд. 2-е. — М., 1973. — 576 с.
30. *Evans L.C.* Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. — Vol. 19. — 662 p.
31. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введения в вариационные неравенства и их приложения — М.: Мир, 1983. — 256 с.
32. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності // Мат. студії. — 2005. — Т. 24, №2. — С. 167–172.
33. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
34. *Byström J.* Sharp Constants for Some Inequalities Connected to the p-Laplace Operator // Jour. of Ineq. in Pure and Appl. Math. — 2005. – Vol. 6, Issue 2. — Article 56.
35. *Бокало Т., Бугрій О.* Деякі формули інтегрування частинами в просторах функцій зі змінним показником нелінійності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2009. — Вип. 71. — С. 13–26.
36. *Михайлов В.П., Гущин А.К.* Дополнительные главы курса "Уравнения математической физики" — М., 2007. — 144 с.
37. *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. — 1963. — Vol. 256, №24 — P. 5042–5044.
38. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. — 1988. — Vol. 279. — P. 373–394.
39. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976. — 391 с.

40. *Galewski M.* On the continuity of the Nemytskij operator between the spaces $L^{p_1(x)}$ and $L^{p_2(x)}$ // Georgian Math. J. — 2006. — Vol. 13, №2. — P. 261–265.

Стаття: надійшла до редколегії 22.04.2016
прийнята до друку 08.06.2016

ON EXISTENCE IN GENERALIZED SOBOLEV SPACES SOLUTIONS OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ARISING FROM THEORY OF EUROPEAN OPTION

Oleh BUHRII, Mykola BUHRII

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

We consider nonlinear degenerate convection-diffusion equations perturbed by a jump-diffusion operator arising from theory of European option. The initial-boundary value problems for these equation are investigated and the existence theorem for the problems are proved.

Key words: nonlinear parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, Levy jump-diffucion process, European option.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 85–94
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 85–94

УДК 517.547

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ІНДИКАТОРІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ В ПРОКОЛЕНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ. II

Олег ВИШИНСЬКИЙ, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Використовуючи результати з першої частини, доведено теореми про асимптотичну поведінку голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині при $r \to +\infty$ та $r \to 0$ поза деякими E_0-множинами.

Ключові слова: функція цілком регулярного зростання, індикатор зростання, функція скінченного λ-типу, верхня відносна міра, коефіцієнти Фур'є, голоморфна функція.

1. Основні результати. Ця стаття є безпосереднім продовженням [1]. Ми використовуватимемо тут означення та позначення введені у першій частині. Зокрема, нагадаємо означення верхньої відносної міри множини $E \subset (0, +\infty)$ ([1])

$$\overline{m}_0^*(E) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{mes(E \cap (1,r))}{r} + \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{mes(E' \cap (1,r))}{r}, \text{ де } E' = \{\frac{1}{r} : r \in E \cap (0,1)\}.$$

Множину E з нульовою верхньою відносною мірою називатимемо E_0-множиною. В цій частині ми доводимо теореми про асимптотичну поведінку голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ([2]) при $r \to +\infty$ та $r \to 0$ поза деякими E_0-множинами. Основними результатами є такі теореми.

Теорема 5. *Нехай $f \in \Lambda_H^0$. Тоді існують E_0-множини $E_0^{(1)}$, $E_0^{(2)}$ такі, що виконується*

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(1)}}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = h_1(\varphi, f), \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(2)}}} \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = h_2(\varphi, f). \tag{2}$$

рівномірно для $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Теорема 6. *Нехай $f \in \Lambda_H$, функція $\lambda(r)$ опукла стосовно $\log r$ та існують E_0-множини $E_0^{(1)}$, $E_0^{(2)}$, а також дійсні функції $H_1(\varphi)$, $H_2(\varphi)$ на $[0, 2\pi]$ такі, що*

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(1)}}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = H_1(\varphi), \quad \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(2)}}} \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = H_2(\varphi), \tag{3}$$

рівномірно для $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тоді $f \in \Lambda_H^0$ і

$$h_1(\varphi, f) = H_1(\varphi), \quad h_2(\varphi, f) = H_2(\varphi) \tag{4}$$

для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$.

2. Допоміжні поняття та результати. Нехай f голоморфна функція в проколеній площині $\mathbb{C}^*$, відмінна від тотожного нуля. Ми вживатимемо дещо модифіковані позначення з [3], [4] та [5]. А саме, через $n_0^{(1)}(t, f)$, $n_0^{(2)}(t, f)$ та $n_0(\mathbb{T}, f)$ позначимо кількість нулів a_j функції f з урахуванням їхньої кратності відповідно в $\{z : 1 < |z| \leqslant t\}$, $\{z : \frac{1}{t} \leqslant |z| < 1\}$, $t > 1$, та на одиничному колі $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$. Також нехай

$$N_0^{(i)}(r, f) = \int_1^r \frac{n_0^{(i)}(t, f)}{t} dt, \quad i = 1, 2.$$

Для довільного цілого $k \neq 0$ приймемо $n_k^{(1)}(t, f) = \sum\limits_{1<|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j}$, $n_k^{(2)}(t, f) = \sum\limits_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|<1} e^{-ik\gamma_j}$, $n_k(\mathbb{T}, f) = \sum\limits_{|a_j|=1} e^{-ik\gamma_j}$, де $\gamma_j = \arg a_j$, а також

$$N_k^{(i)}(r, f) = \int_1^r \frac{n_k^{(i)}(t, f)}{t} dt, \quad i = 1, 2.$$

Зауваження 3. Використовуючи властивість інтеграла Стільтьєса ([6], с. 217-218) можемо записати

$$\int_1^r \frac{dn_k^{(1)}(t, f)}{t^k} = \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \frac{e^{-ik\gamma_j}}{|a_j|^k}, \qquad \int_1^r \frac{dn_k^{(2)}(t, f)}{t^k} = \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} e^{-ik\gamma_j}|a_j|^k,$$

$$\int_1^r t^k dn_k^{(1)}(t, f) = \sum_{1<|a_j|\leqslant r} e^{-ik\gamma_j}|a_j|^k, \qquad \int_1^r t^k dn_k^{(2)}(t, f) = \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} \frac{e^{-ik\gamma_j}}{|a_j|^k}.$$

Нагадаємо, що під функцією зростання ми розуміємо додатну, неспадну, неперервну, необмежену функцію λ. Ми розглядаємо так звані функції помірного зростання, тобто такі функції зростання для яких $(\exists M > 0)$ $(\forall r > 1) : \lambda(2r) \leqslant M\lambda(r)$.

Означення 5. *Клас функцій Λ_H° будемо називати тривіальним, якщо для всіх функцій з цього класу індикатори $h_1 \equiv 0$, $h_2 \equiv 0$. В іншому випадку будемо казати, що клас Λ_H° є нетривіальним.*

Функції зростання $\lambda(r)$ та $\tilde{\lambda}(r)$, для яких $\lambda(r)/\tilde{\lambda}(r) \to 1$ при $r \to +\infty$ будемо вважати еквівалентними й ототожнювати.

Лема 1. *Для того, щоб клас Λ_H° був нетривіальним, достатньо, щоб функція зростання $\lambda(r)$ була еквівалентною до деякої опуклої стосовно $\log r$ функції зростання.*

Доведення. Нехай функція зростання $\lambda(r)$ еквівалентна до деякої опуклої стосовно $\log r$ функції зростання. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функція λ визначена при $r \geqslant 0$. В такому випадку нетривіальним буде клас Λ_E° цілих функцій цілком регулярного зростання (див. [7] або [8, с. 85]), а отже, існуватиме ціла функція f для якої індикатор $h_1 \not\equiv 0$. Кожна ціла функція цілком регулярного зростання стосовно λ в класичному розумінні [8], [9] буде також функцією цілком регулярного зростання і в проколеній площині $\mathbb{C}^*$. Справді, якщо $T(r, f)$ її класична характеристика Неванлінни [10], то справджується нерівність $T_0(r, f) \leqslant T(r, f)$ для всіх $r > 1$ (див. [3]). Крім того, існуватимуть границі $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r}, f)}{\lambda(r)} = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. А отже, f задовольнятиме Означення 2 з першої частини цієї праці. У цьому випадку голоморфна у $\mathbb{C}^*$ функція $f(1/z)$ також належатиме до класу Λ_H° з індикатором $h_2 \not\equiv 0$. □

Лема 2. *Нехай $\lambda(r)$ функція помірного зростання опукла стосовно $\log r$. Нехай $1 < \gamma < 2$. Тоді*

$$\sup_{r>1} \frac{\lambda(\gamma r)}{\lambda(r)} \leqslant 1 + M^3(\gamma - 1).$$

Доведення цієї леми є аналогічним до доведення Леми 7.2 з [8, ст. 81], [11].

Лема 3. *Нехай $f \in \Lambda_H$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exists A_k \quad \forall \gamma \in (1, 2) \quad \forall r > 1 : \quad \Big| c_k(\gamma r, f) - c_k(r, f) \Big| \leqslant A_k(\gamma - 1)\lambda(r).$$

Лема 4. *Нехай $f \in \Lambda_H$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exists A_k \quad \forall \gamma \in (1, 2) \quad \forall r > 1 : \quad \left| c_k\left(\frac{1}{\gamma r}, f\right) - c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) \right| \leqslant A_k(\gamma - 1)\lambda(r).$$

Доведення цих двох лем ми подаємо нижче.

3. Доведення леми 3. Оскільки $f \in \Lambda_H$, то $(\exists A > 0)$ $(\forall r > 1)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$: $|c_k(2r, f)| \leqslant A\lambda(r)$, $n_0(2r, f) \leqslant A\lambda(r)$.

Спочатку розглянемо випадок $k = 0$. Нам знадобиться така формула, яку можна знайти в доведенні аналога формули Єнсена для кільця з роботи [3]

$$N_0^{(1)}(r, f) + \frac{1}{2} n_0(\mathbb{T}, f) \log r = c_0(r, f) - c_0(1, f) + \alpha_f \log r, \tag{5}$$

де $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$, α_f – стала, яка не залежить від r. Маємо

$$N_0^{(1)}(\gamma r, f) - N_0^{(1)}(r, f) = \int_r^{\gamma r} \frac{n_0^{(1)}(t, f)}{t} dt \leqslant n_0^{(1)}(\gamma r, f) \log \gamma \leqslant A(\gamma - 1)\lambda(r). \tag{6}$$

Тому, використовуючи (5), отримуємо

$$|c_0(\gamma r, f) - c_0(r, f)| \leq A(\gamma - 1)\lambda(r) + \frac{1}{2}(n_0(\mathbb{T}, f) + |\alpha_f|) \log \gamma \leq B(\gamma - 1)\lambda(r),$$

де $B = A + \frac{n_0(\mathbb{T},f)+|\alpha_f|}{2\lambda(1)}$.

При $k \in \mathbb{N}$, використовуючи вирази для коефіцієнтів Фур'є ([4])

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}) + \frac{1}{2k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right) - \frac{n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k}, \quad r>1,$$

отримуємо

$$\frac{c_k(\gamma r,f)}{\gamma^k} - c_k(r,f) = \frac{1}{2\gamma^k}\left(\alpha_k(\gamma r)^k + \frac{\overline{\alpha}_{-k}}{(\gamma r)^k}\right) + \frac{1}{2k\gamma^k} \sum_{1<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\left(\frac{\gamma r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{\gamma r}\right)^k \right) -$$

$$-\frac{n_k(\mathbb{T},f)}{2k\gamma^{2k}r^k} - \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}) - \frac{1}{2k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right) + \frac{n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k} =$$

$$= \frac{k\overline{\alpha}_{-k} - n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) - \frac{1}{2k\gamma^{2k}} \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k -$$

$$-\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k + \frac{1}{2k} \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k. \tag{7}$$

Враховуючи, що

$$\gamma^s - 1 \leqslant 2^s \cdot (\gamma - 1), \tag{8}$$

при $1 < \gamma < 2$ та $s \in \mathbb{N}$, оцінимо суми з правої частини (7). Маємо

$$\left| \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right| \leqslant \frac{1}{2k} \frac{\gamma^{2k}-1}{\gamma^{2k}} n_0^{(1)}(r,f) =$$

$$= \frac{1}{2k} \frac{(\gamma^k+1)(\gamma^k-1)}{\gamma^{2k}} n_0^{(1)}(r,f) < \frac{\gamma^k - 1}{2k} n_0^{(1)}(r,f) < 2^k(\gamma-1)A\lambda(r), \tag{9}$$

а також, використовуючи зображення сум інтегралами Стілтьєса (див. Зауваження 3) та інтегруючи частинами

$$\frac{1}{2k}\left| \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \frac{1}{\gamma^{2k}} \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right| =$$

$$= \frac{1}{2k}\left| r^k \int_r^{\gamma r} \frac{dn_k^{(1)}(r,f)}{t^k} - \frac{1}{r^k\gamma^{2k}} \int_r^{\gamma r} t^k dn_k^{(1)}(r,f) \right| =$$

$$= \frac{1}{2k}\left| r^k \left(\frac{n_k^{(1)}(t,f)}{t^k}\Bigg|_r^{\gamma r} + k\int_r^{\gamma r} \frac{n_k^{(1)}(r,f)}{t^{k+1}} dt \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{r^k\gamma^{2k}} \left(t^k n_k^{(1)}(t,f)\Bigg|_r^{\gamma r} - k\int_r^{\gamma r} t^{k-1} n_k^{(1)}(r,f) dt \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)n_0^{(1)}(r,f)+\frac{r^k}{2k}n_0^{(1)}(\gamma r,f)\left(\frac{1}{r^k}-\frac{1}{(\gamma r)^k}\right)+\frac{1}{2k}n_0^{(1)}(\gamma r,f)\frac{\gamma^k-1}{\gamma^{2k}}=$$

$$=\frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)n_0^{(1)}(r,f)+\frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^k}\right)n_0^{(1)}(\gamma r,f)+\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^k}-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)n_0^{(1)}(\gamma r,f)=$$

$$=\frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)(n_0^{(1)}(r,f)+n_0^{(1)}(\gamma r,f))\leqslant \frac{1}{k}n_0^{(1)}(\gamma r,f)\frac{\gamma^{2k}-1}{\gamma^{2k}}<2^k(\gamma-1)A\lambda(r). \quad (10)$$

Нарешті,

$$\left|\frac{k\overline{\alpha}_{-k}-n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}}-1\right)\right|\leqslant \frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2}2^k(\gamma-1)\leqslant \frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2\lambda(1)}2^k(\gamma-1)\lambda(r). \quad (11)$$

Тоді з (7), зважаючи на (9) – (11), отримуємо

$$\frac{1}{\gamma^k}\left|c_k(\gamma r,f)-\gamma^k c_k(r,f)\right|\leqslant\left(2A+\frac{|\alpha_{-k}|}{2\lambda(1)}\right)2^k(\gamma-1)A\lambda(r).$$

Оскільки

$$|c_k(\gamma r,f)-c_k(r,f)|\leqslant(\gamma^k-1)|c_k(r,f)|+|c_k(\gamma r,f)-\gamma^k c_k(r,f)|,$$

то

$$|c_k(\gamma r,f)-c_k(r,f)|\leqslant 2^k(\gamma-1)A\lambda(r)+$$
$$+\left(2A+\frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2\lambda(1)}\right)2^{2k}(\gamma-1)A\lambda(r)=(\gamma-1)A_k\lambda(r),$$

де $A_k=2^kA+\left(2A+\frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2\lambda(1)}\right)2^{2k}$.

При $k\in\mathbb{Z}$ використовуємо властивість $c_{-k}(r,f)=\overline{c_k(r,f)}$.

□

4. Доведення Леми 4. Доведення цієї леми за своєю структурою нагадує доведення Леми 3 із використанням відповідних співвідношень і результатів для випадку $|z|<1$.

Оскільки $f\in\Lambda_H$, то $(\exists A>0)$ $(\forall r>1)$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$: $|c_k(\frac{1}{\gamma r},f)|\leqslant A\lambda(r)$, $n_0(\gamma r,f)\leqslant A\lambda(r)$.

Для випадку $k=0$ використаємо таке співвідношення, яке можна знайти в доведенні аналога формули Єнсена для кільця з [3]

$$N_0^{(2)}(r,f)-\frac{1}{2}n_0(\mathbb{T},f)\log r=c_0\left(\frac{1}{r},f\right)-c_0(1,f)-\alpha_f\log r,\quad r>1, \quad (12)$$

де α_f – стала, яка не залежить від r. Аналогічно до (6) одержуємо

$$N_0^{(2)}(\gamma r,f)-N_0^{(2)}(r,f)=\int_r^{\gamma r}\frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt\leqslant A(\gamma-1)\lambda(r).$$

З (12) отримуємо

$$\left|c_0\left(\frac{1}{\gamma r},f\right)-c_0\left(\frac{1}{r},f\right)\right|\le A(\gamma-1)\lambda(r)+\frac{1}{2}(n_0(\mathbb{T},f)+|\alpha_f|)\log\gamma\le B(\gamma-1)\lambda(r),$$

де $B=A+\frac{n_0(\mathbb{T},f)+|\alpha_f|}{2\lambda(1)}$.

При $k \in \mathbb{N}$, використовуючи вирази для коефіцієнтів Фур'є [4]

$$c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k) + \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left((\overline{a}_j r)^k - \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right) - \frac{n_k(\mathbb{T}, f)}{2kr^{-k}}, \quad r > 1,$$

отримуємо

$$\frac{c_k(\frac{1}{\gamma r}, f)}{\gamma^k} - c_k(\frac{1}{r}, f) = \frac{\alpha_k(\gamma r)^{-k} + \overline{\alpha}_{-k}(\gamma r)^k}{2\gamma^k} + \frac{1}{2k\gamma^k} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < 1} \left((\overline{a}_j \gamma r)^k - \left(\frac{1}{a_j \gamma r}\right)^k \right) -$$

$$-\frac{n_k(\mathbb{T}, f)}{2kr^{-k}} - \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k) - \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left((\overline{a}_j r)^k - \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right) + \frac{n_k(\mathbb{T}, f)}{2kr^{-k}} - =$$

$$= \frac{\alpha_k r^{-k}}{2}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) + \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} (\overline{a}_j r)^k +$$

$$+\frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{\gamma^{2k}}\right) \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k - \frac{1}{2k\gamma^{2k}} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k. \tag{13}$$

Оцінимо суми з правої частини (13). Використовуючи (8), а також скінченність λ-типу, маємо

$$\left| \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right| \leqslant \frac{1}{2k} \frac{\gamma^{2k} - 1}{\gamma^{2k}} n_0^{(2)}(r, f) < 2^k(\gamma - 1)A\lambda(r). \tag{14}$$

Зображуючи суми інтегралами Стільтьєса, користуючись Зауваженням 3 та застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$\frac{1}{2k}\left| \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} (\overline{a}_j r)^k - \frac{1}{\gamma^{2k}} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right| =$$

$$= \frac{1}{2k}\left| r^k \int_r^{\gamma r} \frac{dn_k^{(2)}(r, f)}{t^k} - \frac{1}{r^k \gamma^{2k}} \int_r^{\gamma r} t^k dn_k^{(2)}(r, f) \right| =$$

$$= \frac{1}{2k}\left| r^k \left(\frac{n_k^{(2)}(t, f)}{t^k}\Big|_r^{\gamma r} + k \int_r^{\gamma r} \frac{n_k^{(2)}(r, f)}{t^{k+1}} dt \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{r^k \gamma^{2k}} \left(t^k n_k^{(2)}(t, f)\Big|_r^{\gamma r} - k \int_r^{\gamma r} t^{k-1} n_k^{(2)}(r, f) dt \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{\gamma^{2k}}\right) n_0^{(2)}(r, f) + \frac{r^k}{2k} n_0^{(2)}(\gamma r, f)\left(\frac{1}{r^k} - \frac{1}{(\gamma r)^k}\right) + \frac{1}{2k} n_0^{(2)}(\gamma r, f) \frac{\gamma^k - 1}{\gamma^{2k}} \leqslant$$

$$= \frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{\gamma^{2k}}\right)(n_0^{(2)}(r, f) + n_0^{(2)}(\gamma r, f)) \leqslant \frac{1}{k} n_0^{(2)}(\gamma r, f) \frac{\gamma^{2k} - 1}{\gamma^{2k}} < 2^k(\gamma - 1)A\lambda(r). \tag{15}$$

Нарешті,

$$\left|\frac{\alpha_k r^{-k}}{2}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}}-1\right)\right| \le \frac{|\alpha_k|}{2r^k}\frac{\gamma^{2k}-1}{\gamma^{2k}} \le \frac{|\alpha_k|}{2\lambda(1)}2^k(\gamma-1)\lambda(r). \tag{16}$$

Тоді з (14) – (16) отримуємо $\frac{1}{\gamma^k}\left|c_k(\frac{1}{\gamma r}, f) - \gamma^k c_k(\frac{1}{r}, f)\right| \leqslant (2A + \frac{|a_k|}{2\lambda(1)})2^k(\gamma-1)A\lambda(r)$. Але оскільки

$$\left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r}, f\right) - c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| \leqslant (\gamma^k - 1)\left|c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| + \left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r}, f\right) - \gamma^k c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right|,$$

то

$$\left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r}, f\right) - c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| \leqslant 2^k(\gamma-1)A\lambda(r) +$$

$$+\left(2A + \frac{|a_k|}{2\lambda(1)}\right)2^{2k}(\gamma-1)A\lambda(r) = A_k(\gamma-1)\lambda(r),$$

де $A_k = 2^k A + (2A + \frac{|a_k|}{2\lambda(1)})2^{2k}$.

Для отримання бажаного результату для від'ємних цілих k використовуємо рівність $c_{-k}(\frac{1}{r}, f) = \overline{c_k(\frac{1}{r}, f)}$.

□

5. Доведення Теореми 5. Нехай $z = re^{i\varphi}$. За теоремою про одностайну неперервність [1, Теорема 3], маємо $(\forall \eta > 0)$ $(\exists E_\eta) : \overline{m}_0^*(E_\eta) \leqslant \eta$ таке, що при $r \notin E_\eta$, $r > 1$ сім'я функцій $h_r^{(1)}(\varphi) := \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)}$ є одностайно неперервною. Враховуючи неперервність індикатора h_1 [1, Теорема 1], отримуємо, що $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall \eta > 0)$ $(\forall r \notin E_\eta)$ $(\forall \theta, \varphi)$:

$$|\theta-\varphi| < \delta \to \left||h_r^{(1)}(\varphi)-h_1(\varphi)|-|h_r^{(1)}(\theta)-h_1(\theta)|\right| < |h_r^{(1)}(\varphi)-h_r^{(1)}(\theta)|+|h_1(\varphi)-h_1(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси

$$|h_r^{(1)}(\varphi) - h_1(\varphi)| < |h_r^{(1)}(\theta) - h_1(\theta)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Інтегруючи останню нерівність стосовно θ на $[\varphi, \varphi+\delta]$, одержимо

$$|h_r^{(1)}(\varphi) - h_1(\varphi)| < \frac{1}{\delta}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\delta} |h_r^{(1)}(\theta) - h_1(\theta)|d\theta + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{\delta}\int\limits_0^{2\pi} |h_r^{(1)}(\theta) - h_1(\theta)|d\theta + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Оскільки $f \in \Lambda_H^\circ$, то, зважаючи на ([5], Теорема 1, $p = 1$), робимо висновок, що правильна рівність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\lambda(r)} - h_1(\theta)\right|d\theta = 0,$$

тому

$$(\exists r_\varepsilon > 1) \quad (\forall r \in (r_\varepsilon, +\infty) \setminus E_\eta) \quad : \quad \frac{1}{\delta}\int\limits_0^{2\pi}|h_r^{(1)}(\theta) - h_1(\theta)|d\theta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_\eta}} h_r^{(1)}(\varphi) = h_1(\varphi)$ для кожного $\varphi \in [0,2\pi]$. Використовуючи міркування наведені у [12, с.185-186, п.3], отримуємо існування E_0-множини $E_0^{(1)}$ такої, що $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_0^{(1)}}} h_r^{(1)}(\varphi) = h_1(\varphi)$ рівномірно стосовно $\varphi \in [0,2\pi]$.

Нехай тепер $z = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$. Застосовуючи лему про одностайну неперервність для цього випадку [1, Теорема 4], маємо $(\forall \mu > 0)$ $(\exists E_\mu)$: $\overline{m}_0^*(E_\mu) \leqslant \mu$ таке, що при $r \notin E_\mu$, $r > 1$ сім'я функцій $h_r^{(2)}(\varphi) := \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)}$ буде одностайно неперервною. Далі міркуємо аналогічно як у випадку доведення першої частини теореми, використовуючи неперервність індикатора h_2 [1, Теорема 2], інтегруючи та застосовуючи результат з [2] (Теорема 2, $q = 1$)

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)} - h_2(\theta)\right|d\theta = 0$$

отримуємо спочатку, що $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_\mu}} h_r^{(2)}(\varphi) = h_2(\varphi, f)$ для кожного $\varphi \in [0,2\pi]$, а потім й існування E_0-множини $E_0^{(2)}$ такої, що $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_0^{(2)}}} h_r^{(2)}(\varphi) = h_2(\varphi, f)$ рівномірно стосовно $\varphi \in [0,2\pi]$, застосовуючи той самий метод з [12, с.185-186, п.3], що й у випадку $z = re^{i\theta}$.

$\square$

6. Доведення Теореми 6. Нехай $\lambda(r)$ – функція зростання, опукла стосовно $\log r$. Тоді за Лемою 1 клас Λ_H° є нетривіальним. Нехай $f \in \Lambda_H^\circ$. Припустимо, що виконується (3), тобто

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists r' > 1 \quad \forall r \in (r', +\infty) \setminus E_0^1 \quad \forall\varphi \in [0,2\pi] : \quad \left|\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} - H_1(\varphi)\right| < \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists r'' > 1 \quad \forall r \in (r'', +\infty) \setminus E_0^2 \quad \forall\varphi \in [0,2\pi] : \quad \left|\frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} - H_2(\varphi)\right| < \varepsilon.$$

Ці нерівності можна переписати у вигляді

$$H_1(\varphi) - \varepsilon < \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} < H_1(\varphi) + \varepsilon, \quad H_2(\varphi) - \varepsilon < \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} < H_2(\varphi) + \varepsilon.$$

Інтегруючи ці нерівності стосовно φ по $[0,2\pi]$, матимемо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_1(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi - \varepsilon < \frac{1}{\lambda(r)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|e^{-ik\varphi}\,d\varphi < \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_1(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi + \varepsilon,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_2(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi - \varepsilon < \frac{1}{\lambda(r)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)\right|e^{-ik\varphi}\,d\varphi < \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_2(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi + \varepsilon.$$

Звідси, позначивши коефіцієнти Фур'є функції $H_1(\varphi)$ через $b_k^{(1)}$, а коефіцієнти Фур'є функції $H_2(\varphi)$ через $b_k^{(2)}$, отримаємо

$$\left|\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} - b_k^{(1)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} - b_k^{(2)}\right| < \varepsilon.$$

А отже,

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(1)}}} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} = b_k^{(1)}, \qquad \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(2)}}} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} = b_k^{(2)}.$$

Зокрема,

$$\forall\varepsilon>0\ \forall\gamma>1(\gamma r\notin E_0^{(1)})\ \forall r>r_1=r_1(\varepsilon)\ \forall k\in\mathbb{Z}: \quad |c_k(\gamma r,f)-b_k^{(1)}\lambda(\gamma r)|<\varepsilon\lambda(r), \tag{18}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \forall\gamma>1(\gamma r\notin E_0^{(2)})\ \forall r>r_2=r_2(\varepsilon)\ \forall k\in\mathbb{Z}: \quad |c_k(\frac{1}{\gamma r},f)-b_k^{(2)}\lambda(\gamma r)|<\varepsilon\lambda(r). \tag{19}$$

З означення E_0-множини випливає, що для довільного γ_0 такого, що $1<\gamma_0<2$ знайдеться $r_3=r_3(\gamma_0)$ таке, що при $E_0^{(1)}\ni r>r_3$ існує γ, $1<\gamma\leqslant\gamma_0$, для якого $\gamma r\notin E_0^{(1)}$. Отже, при $E_0^{(1)}\ni r>r_0':=\max\{r_1,r_3\}$, використовуючи (18), Леми 2, 3, а також попереднє зауваження, для фіксованого $k\in\mathbb{Z}$ знаходимо

$$|c_k(r,f)-b_k^{(1)}\lambda(r)|\leqslant|c_k(\gamma r,f)-b_k^{(1)}\lambda(\gamma r)|+|c_k(\gamma r,f)-c_k(r,f)|+|b_k^{(1)}||\lambda(\gamma r)-\lambda(r)|\leqslant$$
$$\leqslant M\varepsilon\lambda(r)+A_k(\gamma_0-1)\lambda(r)+|b_k^{(1)}|M^3(\gamma_0-1)\lambda(r).$$

Звідси випливає, що $\lim_{r\to\infty}\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)}=b_k^{(1)}, \quad k\in\mathbb{Z}$.

Аналогічно для довільного $\gamma_0\in(1,2)$ знайдеться $r_4=r_4(\gamma_0)$ таке, що при $E_0^{(2)}\ni r>r_4$ існує γ, $1<\gamma\leqslant\gamma_0$, для якого $\gamma r\notin E_0^{(2)}$. А отже, при $E_0^{(2)}\ni r>r_0'':=\max\{r_2,r_4\}$, використовуючи (19), Леми 2, 4 для фіксованого $k\in\mathbb{Z}$ отримуємо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r},f\right)-b_k^{(2)}\lambda(r)\right|\leqslant\left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r},f\right)-b_k^{(2)}\lambda(\gamma r)\right|+\left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r},f\right)-c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right|+$$
$$+|b_k^{(2)}||\lambda(\gamma r)-\lambda(r)|\leqslant M\varepsilon\lambda(r)+A_k(\gamma_0-1)\lambda(r)+|b_k^{(2)}|M^3(\gamma_0-1)\lambda(r).$$

Тому

$$\lim_{r\to\infty}\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)}=b_k^{(2)}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Пригадуючи означення функції цілком регулярного зростання, робимо висновок, що $f\in\Lambda_H^0$. На підставі неперервності H_1, H_2 отримуємо виконання (4).

□

Список використаної літератури

1. *Вишинський О.* Про властивості індикаторів голоморфних функцій цілком регулярного зростання у проколеній комплексній площині. I / О. Вишинський, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2015. — Вип. 80. — С. 10–26.
2. *Голдак М.* Голоморфні функції цілком регулярного зростання в проколеній площині / М. Голдак, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — С. 91–96.

3. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I / A. Ya. Khrystiyanyn, A. A. Kondratyuk // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 23, №1. — P. 19–30.
4. *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains. // Joensuu–L'viv, 2006. — 116 p. (A. Kondratyuk, I. Laine, Meromorphic functions in multiply connected domains, Fourier series methods in complex analysis // Mekrijärvi, 2005, Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. **10** (2006), 9–111.)
5. *Вишинський О.* Про одностайне цілком регулярне зростання модуля та аргумента голоморфної в проколеній комплексній площині функції / О. Вишинський, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2014. — Вип. 79. — С. 33–47.
6. *Натансон Н.П.* Теория функций вещественной переменной / Н. П. Натансон, — Москва, 1982.
7. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста II / А. А. Кондратюк // Мат. сб. — 1980. — 113. — №. 1. — С. 118–152.
8. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / А. А. Кондратюк, — Львів, 1988.
9. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста I / А. А. Кондратюк // Мат. сб. — 1978. — 106. — №. 1. — С. 386–408.
10. *Хейман У.* Мероморфные функции / У. Хейман — М.: Мир, 1966.
11. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста III / А. А. Кондратюк // Мат. сб. — 1983. — 120. — №. 3. — С. 331–343.
12. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин — М.:ГИТТЛ, 1956.

Стаття: надійшла до редколегії 12.05.2015.
доопрацьована 15.04.2016.
прийнята до друку 08.06.2016.

ON THE PROPERTIES OF THE INDICATORS OF COMPLETELY REGULARLY GROWING HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE PUNCTURED PLANE. II

Andriy KHRYSTIYANYN, Oleg VYSHYNS'KYI

Ivan Franko National University of Lviv,
79000, Lviv, Universytetska Str., 1
e-mail: khrystiyanyn@ukr.net, vyshynskyi@ukr.net

Using the results obtained in Part I we prove theorems describing asymptotic behaviour of a holomorphic function of completely regular growth in the punctured complex plane as $r \to +\infty$ and $r \to 0$ outside some E_0-sets.

Key words: function of completely regular growth, growth indicator, function of finite λ-type, upper relative measure, Fourier coefficients, holomorphic function.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 95–99
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 95–99

УДК 517.956

ESTIMATES OF SOLUTIONS OF ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

Tahir GADJIEV, Soltan ALIEV, Gunel GASANOVA

Institute of Mathematics and Mechanics,
NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
e-mail: tgadjiev@mail.az

A class of degenerated second order elliptic-parabolic equations of non-divergent structure is considered. For solutions of the boundary value problems of these equations the coercive estimation in an appropriate Sobolev space is established.

Key words: elliptic-parabolic equations, boundary value problems, Sobolev space.

1. Introduction. Let Ω be a bounded domain in R^n with the boundary $\partial\Omega \subset C^2$, let $\Omega \times (0;T)$ be the cylinder, where $T \in (0;\infty)$. Let us consider in Q_T the boundary value problem

$$lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{ij} + \psi(x,t)u_{tt} - u_t = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|\Gamma(Q_T) = 0, \tag{2}$$

where for $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $\quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},$

$\Gamma(Q_T) = (\partial\Omega\times[0,T])\cup(\Omega\times(x,t) : t = 0)$ is parabolic boundary ofQ_T, and

$$\Psi(x,t) = \omega(x)\lambda(t)\varphi(T-t), \tag{3}$$

where $\omega(x){\in}A_p$ satisfies the condition of Muckenhoupt (see [8]),

$\lambda(t){\geqslant}0, \lambda(t){\in}C^1[0,T], \varphi(z){\geqslant}0, \varphi^\backprime(z){\geqslant}0, \varphi(z){\in}C^1[0,T], \varphi(0) = \varphi^\backprime(0) = 0, \varphi(z){\geqslant}\beta z\varphi^\backprime(z),$

here β is a positive constant.

Assume that for the coefficients of the operator ???? the following conditions hold:

If $\|a_{ij}(x,t)\|$ is a real symmetrical matrix with elements measurable in Q_T for every $(x,t){\in}Q_T$ and $\xi{\in}R^n$ then the inequalities

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant\gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2 \tag{4}$$

hold, where γ is a constant from the interval $[0,1]$.

The purpose of this paper is to obtain a coercive estimation for problem (1)–(2) in an appropriate Sobolev space.

The obtained estimation can be used when proving a unique strong (almost everywhere) solvability of the first boundary value problem (1)–(2) at every

$$f(x,t)\in L_2(Q_T).$$

The theory of degenerated elliptic-parabolic equations ascends to the classical paper by Keldysh [1] in which the correct statements of the boundary value problems for the equations of kind (1) with one space variable were found. G.Fickera [2] has established a weak solvability of the first boundary value problem for a wide class of the second order equations with the non-negative characteristic form (see also [3]). As to strong solvability of the first boundary value problem for elliptic-parabolic equations in the non-divergent form with smooth coefficients, we shall note in this connection the papers [4-6]. The similar result for the equations of kind (1) is the case when the coefficients satisfy the Cordes condition is obtained in [7].

The paper is organized as follows. In Section 2 we present some definitions and preliminary results. In Section 3 we give main results.

2. Definitions and preliminary results. For $R>0$ and $x^0\in\Omega$ we denote the ball $\{x:|x-x^0|<R\}$ by $B_R(x^0)$ and the cylinder $B_R(x^0)\times(0,T)$ by $Q_T^R(x^0)$. Let $\overline{B}_R(x^0)\subset\Omega$. We say that $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$ if $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T^R(x^0)), u|_{t=0}=0$ and $\operatorname{supp} u\in\overline{Q}_T^\rho(x^0)$ for some $\rho\in(0,R)$.

We say that $u(x,t)\in A_1(Q_T^R(x^0))$ if $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T^R(x^0)), u|_{t=0}=0$. Finally, $u(x,t)\in B(Q_T^R(x^0))$ if $u(x,t)\in A(\overline{Q}_T^R(x^0))$ and $u|_{t=T}=u_t|_{t=T}=0$. In the sequel, the notation $C(\cdot)$ shows that a positive constants C depends only on the contents of brackets.

Let us introduce the Banach spaces of the functions $u(x,t)$ given on Q_T with finite norms

$$\|u\|_{w^1_{2,\omega}(Q_T)}=(\int_{Q_T}\omega(x)(u^2+\textstyle\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)dxdt)^{\frac12},$$
$$\|u\|_{w^2_{2,\omega}(Q_T)}=(\int_{Q_T}\omega(x)(u^2+\textstyle\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_i}^2)dxdt)^{\frac12},$$
$$\|u\|_{w_2^{2,1}(Q_T)}=\|u\|_{w^2_{2,\omega}(Q_T)}+\|u_t\|_{L_2(Q_T)},$$
$$\|u\|_{w^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)}=$$
$$(\int_{Q_T}(\omega(x)(u^2+\textstyle\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_i}^2)+u_t^2+\psi^2(x,t)u_{tt}^2+\psi(x,t)\sum_{i=1}^n u_{tt}^2)dxdt)^{\frac12},$$
$$\|u\|_{w^{1,1}_{2,\psi}(Q_T)}=(\int_{Q_T}(\omega(x)(u^2+\textstyle\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)+u_t^2+\psi^2(x,t)u_{tt}^2)dxdt)^{\frac12}.$$

Suppose that $\dot{w}^{1,1}_{2,\psi}(Q_T)$ is a subspace of the space $w^{1,1}_{2,\psi}(Q_T)$ that contains the set of all functions from $C^\infty(Q_T)$ vanishing on the parabolic boundary $\Gamma(Q_T)$.

Consider the model operator

$$Z_0 = \omega(x)\Delta + \psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t},$$

where $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ is the Laplace operator.

Lemma 1. *If the function $\psi(x,t)$ satisfies (3) and conditions (4) are fulfilled, then there exists $T_1(\psi(x,t),n)$ such that $T\leqslant T_1$ and for any function $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$ the estimate*

$$\int\limits_{Q_T^R(x^0)} \left[\omega^2(x)\sum_{i=1}^{n} u_{u_{ij}}^2 + u_t^2 + \psi^2(x,t)u_{it}^2 + \psi(x,t)\sum_{i=1}^{n} u_{tt}^2\right] dxdt \leqslant$$

$$\leqslant (1+DS) \int\limits_{Q_T^R(x^0)} (Z_0 u)^2 dxdt \qquad (5)$$

holds, where $S = S(\psi,n)$ is some constant, $D = D(T) = q(T) + q_1(T)$ and $q(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi'(t)$, $\quad q_1(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi(t)$.

3. Coercive estimates for weak solutions and main result.

Lemma 2. *If the conditions of the previous lemma are fulfilled, then for any function $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$, where $T\leqslant T_2(\psi,n,\delta)$ the following estimate is true:*

$$I = \int\limits_{Q_T^R(x^0)} \left(\omega^2(x)\sum_{i=1}^{n} u_{u_{ij}}^2 + u_t^2 + \psi^2(x,t)u_{it}^2 + \psi(x,t)\sum_{i=1}^{n} u_{tt}^2\right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_{Q_T^R(x^0)} (Zu)^2 dxdt,$$

where $C_2 = C_2(\psi,n,\delta)$.

Lemma 3. *If conditions (4), (5) are fulfilled for the coefficients of the operator Z, then at $T\leqslant T_2$ the following estimate is true for any function $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$*

$$\|u\|_{w_{2,\psi}^{2,2}(Q_T^R(x^0))} \leqslant C_4(\psi,\delta,n)\|Zu\|_{l_2(Q_T^R(x^0))}.$$

Lemma 4. *If conditions (4), (5) are fulfilled for the coefficients of the operator Z, then for every $T\leqslant T_2$ and $\varepsilon > 0$ the following estimate holds for any function $u(x,t)\in A_1(Q_T^R(x^0))$:*

$$\|u\|_{w_{2,\psi}^{2,2}(Q_T^{R/2}(x^0))} \leqslant C_8\|Zu\|_{l_2(Q_T^R(x^0))} + \varepsilon\|u\|_{w_{2,\psi}^{2,2}(Q_T^R(x^0))} + \frac{C_9(\psi,\delta,n)}{\varepsilon R^2}\|u\|_{l_2(Q_T^R(x^0))}.$$

Corollary 1. *If the coefficients of the operator Z satisfy conditions (4), (5), then for every $T\leqslant T_2$ and $\varepsilon > 0$ the estimate*

$$\|u\|_{w_{2,\psi}^{2,2}(Q_{T(\rho)})} \leqslant C_{13}(\psi,\delta,n,\rho,\Omega)\|Zu\|_{l_2(Q_T)} + \varepsilon\|u\|_{w_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)} + C_{14}(\psi,\delta,n,\rho,\Omega)\|u\|_{l_2(Q_T)}$$

holds for any function $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T(x^0))$, where $u|_{t=0} = 0$.

Lemma 5. *If the coefficients of the operator* Z *satisfy conditions (4), (5), then there exists* $\rho_1(n,\sigma,\Omega)$ *such that for every* $T\leqslant T_2$ *and* $\delta>0$ *the estimate*

$$\|u\|_{w^{2,2}_{2,\psi}(Q^1_{T(\rho_1)})}\leqslant C_{15}(\psi,\delta,n,\rho_1,\Omega)\|Zu\|_{l_2(Q_T)}+\varepsilon\|u\|_{w^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)}+\frac{C_{16}(\psi,\delta,n,\rho_1,\Omega)}{\varepsilon}\|u\|_{l_2(Q_T)}$$

holds for any function $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T(x^0))$, *where* $u|_{t=0}=0$ *and* $Q^1_T(\rho_1)=Q_T\backslash Q_T(\rho_1)$.

Lemma 6. *Under the conditions of Lemma 5 the estimate*

$$\|u\|_{w^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)}\leqslant C_{27}(\psi,\delta,n,\rho,\Omega)\|Zu\|_{l_2(Q_T)}+C_{28}(\psi,\delta,n,\rho_1,\Omega)\|u\|_{l_2(Q_T)}$$

holds for any $u(x,t)\in w^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)$ *and* $T\leqslant T_2$.

Theorem 1. *If conditions (4), (5) are fulfilled, then there exists* $T_0=T_0(\psi,\delta,n,\Omega)$ *such that for every* $T\leqslant T_2$ *the estimate*

$$\|u\|^2_{w^{2,2}_{2,\psi}(Q)}\leqslant C_{29}(\psi,\delta,n,\Omega)\|Zu\|_{l_2(Q)}$$

holds for any function $u(x,t)\in w^{2,2}_{2,\psi}(Q)$.

References

1. 1. *Keldysh M. V.* On some cases of degeneration of an equation of elliptic type on the domain boundary, Dokl. Akad. Nauk SSSR. –– 1951. –- T. 77. –– № 2. –– C. 181–183.
2. *Fichera G.* To the unique theory of boundary-value problems for the second order elliptic-parabolic equations (The collections of the translated foreign articles) — 1963. — Vol. 7, №6. — P. 99–121.
3. *Oleynik O.A., Radkevitch J.V.* Second order quations with nonnegative characteristic form. Viniti, ser. Itogi nauki, Math. Analysis — 1971. — P. 7–252.
4. *Franciosi M.* Sul de un equazioni elliptico-parabolica a coefficienti discontinue. Boll. Un. Math. Ital. — 1983. — Vol. 6, №2. — P. 63–75.
5. *Franciosi M.* Un theoreme di esistenza ed unicita per la soluzione di un'equazione elliptico-parabolica, a coefficienti-discontinui, in forma non divergenza. Bull. Un. Mat. Ital. — 1985. — Vol. 6, №4-B. — P. 253–263.
6. *Alvino A., Trombetti G.* Second order elliptic equation whose coefficients have their first derivatives weakly-Ln????. Publ. Ist.Mat. "R.Cacciopoli", 1983, Vol. 14.
7. *Gadjiev T.S., Gasimova E.* On smoothness of solution of the first boundary-value problem for second order degenerate elliptic-parabolic equations. Ukranian Mathematical Journal — 2008. — Vol. 60, №6. — P. 723–736.
8. *Chanillo S., Wheeden R. L.* Existence and estimates of Green's function for degenerate elliptic equations //Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze. –– 1988. –- T. 15, № 2. –- C. 3090-340.

Стаття: надійшла до редколегії 18.11.2015
доопрацьована 27.02.2016
прийнята до друку 08.06.2016

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81

ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Тагір ГАДЖИЄВ, Солтан АЛІЄВ, Гюнель ГАСАНОВА

Інститут математики і механіки,
НАН Азербайджану, Баку, Азербайджан
e-mail: tgadjiev@mail.az

Досліджено клас вироджених еліптично-параболічних рівнянь другого порядку в недивергентній формі. Визначено оцінку розв'язків крайових задач для цих рівнянь у відповідних просторах Соболєва.

Ключові слова: еліптично-параболічні рівняння, крайові задачі, простір Соболєва.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 100–116
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 100–116

УДК 512.534.5

ON THE MONOID OF MONOTONE INJECTIVE PARTIAL SELFMAPS OF $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ WITH COFINITE DOMAINS AND IMAGES

Dedicated to the memory of Professor Mykola Komarnytskyy

Oleg GUTIK, Inna POZDNIAKOVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv,
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, pozdnyakova.inna@gmail.com

Let $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ be the set $\mathbb{N}^2$ with the partial order defined as the product of usual order $\leqslant$ on the set of positive integers $\mathbb{N}$. We study the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ having cofinite domain and image. We describe properties of elements of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ as monotone partial bijections of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ and show that the group of units of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is isomorphic to the cyclic group of order two. Also we describe the subsemigroup of idempotents of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and the Green relations on $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. In particular, we show that $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ in $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.

Key words: semigroup of partial bijections, monotone partial map, idempotent, Green's relations.

1. Introduction and preliminaries

We shall follow the terminology of [1] and [9].

In this paper we shall denote the cardinality of the set A by $|A|$. We shall identify all sets X with their cardinality $|X|$. By $\mathbb{Z}_2$ we shall denote the cyclic group of order two. Also, for infinite subsets A and B of an infinite set X we shall write $A\subseteq^* B$ if and only if there exists a finite subset A_0 of A such that $A \setminus A_0 \subseteq B$.

An algebraic semigroup S is called *inverse* if for any element $x \in S$ there exists a unique $x^{-1} \in S$ such that $xx^{-1}x = x$ and $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. The element x^{-1} is called the *inverse of* $x \in S$.

If S is a semigroup, then we shall denote the subset of idempotents in S by $E(S)$. If S is an inverse semigroup, then $E(S)$ is closed under multiplication and we shall refer to $E(S)$ as a *band* (or the *band of* S). If the band $E(S)$ is a non-empty subset of S, then the semigroup operation on S determines the following partial order $\leqslant$ on $E(S)$: $e \leqslant f$

if and only if $ef = fe = e$. This order is called the *natural partial order* on $E(S)$. A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents. A semilattice E is called *linearly ordered* or a *chain* if its natural order is a linear order.

If S is a semigroup, then we shall denote the Green relations on S by $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ and $\mathscr{H}$ (see [1, Section 2.1]):

$$
\begin{aligned}
&a\mathscr{R}b \text{ if and only if } aS^1 = bS^1;\\
&a\mathscr{L}b \text{ if and only if } S^1a = S^1b;\\
&a\mathscr{J}b \text{ if and only if } S^1aS^1 = S^1bS^1;\\
&\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L};\\
&\mathscr{H} = \mathscr{L}\cap\mathscr{R}.
\end{aligned}
$$

The $\mathscr{R}$-class (resp., $\mathscr{L}$-, $\mathscr{H}$-, $\mathscr{D}$- or $\mathscr{J}$-class) of the semigroup S which contains an element a of S will be denoted by R_a (resp., L_a, H_a, D_a or J_a).

If $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ is a partial map, then by $\operatorname{dom}\alpha$ and $\operatorname{ran}\alpha$ we denote the domain and the range of α, respectively.

Let $\mathscr{I}_\lambda$ denote the set of all partial one-to-one transformations of an infinite set X of cardinality λ together with the following semigroup operation: $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ if $x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}$, for $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda$. The semigroup $\mathscr{I}_\lambda$ is called the *symmetric inverse semigroup* over the set X (see [1, Section 1.9]). The symmetric inverse semigroup was introduced by Vagner [16] and it plays a major role in the semigroup theory. An element $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda$ is called *cofinite*, if the sets $\lambda\setminus\operatorname{dom}\alpha$ and $\lambda\setminus\operatorname{ran}\alpha$ are finite.

Let $(X, \leqslant)$ be a partially ordered set (a poset). A non-empty subset A of $(X, \leqslant)$ is called a *chain* if the induced partial order from $(X, \leqslant)$ onto A is linear. For an arbitrary $x \in X$ and non-empty $A \subseteq X$ we denote

$$
{\uparrow}x = \{y \in X \colon x \leqslant y\}, \quad {\downarrow}x = \{y \in X \colon y \leqslant x\}, \quad {\uparrow}A = \bigcup_{x\in A} {\uparrow}x \quad \text{and} \quad {\downarrow}A = \bigcup_{x\in A} {\downarrow}x.
$$

We shall say that a partial map $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ is *monotone* if $x \leqslant y$ implies $(x)\alpha \leqslant (y)\alpha$ for $x, y \in \operatorname{dom}\alpha$.

Let $\mathbb{N}$ be the set of positive integers with the usual linear order $\le$. On the Cartesian product $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ we define the product partial order, i.e.,

$$
(i,m) \leqslant (j,n) \qquad \text{if and only if} \qquad (i \leqslant j) \quad \text{and} \quad (m \leqslant n).
$$

Later the set $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ with this partial order will be denoted by $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$.

By $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ we denote the subsemigroup of injective partial monotone selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images. Obviously, $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is a submonoid of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$ and $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is a countable semigroup.

Furthermore, we shall denote the identity of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ by $\mathbb{I}$ and the group of units of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ by $H(\mathbb{I})$.

It well known that each partial injective cofinite selfmap f of λ induces a homeomorphism $f^*\colon \lambda^* \to \lambda^*$ of the remainder $\lambda^* = \beta\lambda\setminus\lambda$ of the Stone-Čech compactification of the discrete space λ. Moreover, under some set theoretic axioms (like **PFA** or **OCA**), each homeomorphism of ω^* is induced by some partial injective cofinite selfmap of ω, where ω is a first infinite cardinal (see [10]–[15] and the corresponding sections in the book [17]). Thus, the inverse semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ of injective partial selfmaps of an infinite cardinal λ with cofinite domains and images admits a natural homomorphism $\mathfrak{h}\colon \mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}} \to \mathscr{H}(\lambda^*)$ to the homeomorphism group $\mathscr{H}(\lambda^*)$ of λ^* and this homomorphism is surjective under certain set theoretic assumptions.

In the paper [8] algebraic properties of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ are studied. It is shown that $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ is a bisimple inverse semigroup and that for every non-empty chain L in $E(\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}})$ there exists an inverse subsemigroup S of $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ such that S is isomorphic to the bicyclic semigroup and $L \subseteq E(S)$, described the Green relations on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ and proved that every non-trivial congruence on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ is a group congruence. Also, the structure of the quotient semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}/\sigma$, where σ is the least group congruence on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$, is described.

The semigroups $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ of injective isotone partial selfmaps with cofinite domains and images of positive integers and integers, respectively, are studied in [6] and [7]. It was proved that the semigroups $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ have similar properties to the bicyclic semigroup: they are bisimple and every non-trivial homomorphic image $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ is a group, and moreover the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ has $\mathbb{Z}(+)$ as a maximal group image and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ has $\mathbb{Z}(+)\times\mathbb{Z}(+)$, respectively.

In the paper [5] we studied the semigroup $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ of monotone injective partial selfmaps of the set of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ having cofinite domain and image, where $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ is the lexicographic product of n-elements chain and the set of integers with the usual linear order. We described the Green relations on $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$, showed that the semigroup $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ is bisimple and established its projective congruences. Also, we proved that $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ is finitely generated, every automorphism of $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z})$ is inner, and showed that in the case $n \geqslant 2$ the semigroup $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ has non-inner automorphisms. In [5] we proved that for every positive integer n the quotient semigroup $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})/\sigma$, where σ is a least group congruence on $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$, is isomorphic to the direct power $(\mathbb{Z}(+))^{2n}$. The structure of the sublattice of congruences on $\mathscr{I\!O}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ which are contained in the least group congruence is described in [4].

In this paper we study algebraic properties of the semigroup $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. We describe properties of elements of the semigroup $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ as monotone partial bijection of $\mathbb{N}^2_\leqslant$ and show that the group of units of $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is isomorphic to the cyclic group of the order two. Also, the subsemigroup of idempotents of $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and the Green relations on $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ are described. In particular, we show that $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ in $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

2. Properties of elements of the semigroup $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ as monotone partial permutations

In this short section we describe properties of elements of the semigroup $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ as monotone partial transformations of the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$.

For any $n \in \mathbb{N}$ and an arbitrary $\alpha \in \mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we denote:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{V}^n = \{(n,j)\colon j\in\mathbb{N}\}; && \mathsf{H}^n = \{(j,n)\colon j\in\mathbb{N}\};\\
&\mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{V}^n \cap \operatorname{dom}\alpha; && \mathsf{V}^n_{\operatorname{ran}\alpha} = \mathsf{V}^n \cap \operatorname{ran}\alpha;\\
&\mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{H}^n \cap \operatorname{dom}\alpha; && \mathsf{H}^n_{\operatorname{ran}\alpha} = \mathsf{H}^n \cap \operatorname{ran}\alpha.
\end{aligned}$$

Remark 1. We observe that the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies that for any $n \in \mathbb{N}$ and arbitrary $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ the sets $\mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha}$, $\mathsf{V}^n_{\operatorname{ran}\alpha}$, $\mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha}$ and $\mathsf{H}^n_{\operatorname{ran}\alpha}$ are infinite, and moreover all of these sets with the partial order induced from $\mathbb{N}^2_\leqslant$ are order isomorphic to $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

Lemma 1. *There exists no element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(m,n) < (m,n)\alpha$ for some $(m,n) \in \operatorname{dom}\alpha$.*

Proof. Suppose the contrary, i.e., that there exists an element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(m,n) < (m,n)\alpha$ for some $(m,n) \in \operatorname{dom}\alpha$. We denote $(m,n)\alpha = (i,j)$. Then our assumption implies that the family of subsets

$$\mathfrak{R}_\alpha = \left\{\mathsf{V}^k_{\operatorname{ran}\alpha} \colon k < i\right\} \cup \left\{\mathsf{H}^k_{\operatorname{ran}\alpha} \colon k < j\right\}$$

has more elements than the family

$$\mathfrak{D}_\alpha = \left\{\mathsf{V}^k_{\operatorname{dom}\alpha} \colon k < m\right\} \cup \left\{\mathsf{H}^k_{\operatorname{dom}\alpha} \colon k < n\right\}.$$

Then there exist $A \in \mathfrak{D}_\alpha$ and distinct $B_1, B_2 \in \mathfrak{R}_\alpha$ such that the following conditions hold:

- (i) $(p,q)\alpha \in B_1$ for infinitely many $(p,q) \in A$; and
- (ii) $(s,t)\alpha \in B_2$ for infinitely many $(s,t) \in A$.

We observe that A is a linearly ordered subset of the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$. Hence, the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies that the image $(A)\alpha$ must be a linearly ordered subset of the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$ as well. This implies that one of the following conditions holds:

- (a) there exist distinct elements $\mathsf{V}^{k_1}_{\operatorname{ran}\alpha}$ and $\mathsf{V}^{k_2}_{\operatorname{ran}\alpha}$ of the family $\mathfrak{R}_\alpha$ such that the sets $\mathsf{V}^{k_1}_{\operatorname{ran}\alpha} \cap (A)\alpha$ and $\mathsf{V}^{k_2}_{\operatorname{ran}\alpha} \cap (A)\alpha$ are infinite;
- (b) there exist distinct elements $\mathsf{H}^{k_1}_{\operatorname{ran}\alpha}$ and $\mathsf{H}^{k_2}_{\operatorname{ran}\alpha}$ of the family $\mathfrak{R}_\alpha$ such that the sets $\mathsf{H}^{k_1}_{\operatorname{ran}\alpha} \cap (A)\alpha$ and $\mathsf{H}^{k_2}_{\operatorname{ran}\alpha} \cap (A)\alpha$ are infinite;
- (c) there exist distinct elements $\mathsf{V}^{k_1}_{\operatorname{ran}\alpha}$ and $\mathsf{H}^{k_2}_{\operatorname{ran}\alpha}$ of the family $\mathfrak{R}_\alpha$ such that the sets $\mathsf{V}^{k_1}_{\operatorname{ran}\alpha} \cap (A)\alpha$ and $\mathsf{H}^{k_2}_{\operatorname{ran}\alpha} \cap (A)\alpha$ are infinite.

Each of the above conditions contradicts the fact that $(A)\alpha$ is a linearly ordered subset of the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$. The obtained contradiction implies the statement of the lemma.

By ϖ we denote the bijective transformation of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ defined by the formula $(i,j)\varpi = (j,i)$, for any $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. It is obvious that ϖ is an element of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and $\varpi\varpi = \mathbb{I}$.

Lemma 2. *There exists no element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(n,m) < (m,n)\alpha$ for some $(m,n) \in \operatorname{dom}\alpha$.*

Proof. Suppose the contrary. Then there exists an element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(n,m) < (m,n)\alpha$ for some $(m,n) \in \operatorname{dom}\alpha$. Then we obtain that $(m,n) < (m,n)\alpha\varpi$, which contradicts Lemma 1. The obtained contradiction implies the statement of our lemma.

For arbitrary positive integer l we define a partial map $\alpha^l_{\mathsf{V}}\colon \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}^2$ in the following way:

$$\operatorname{dom}(\alpha^l_{\mathsf{V}}) = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1,1),\ldots,(l,1)\}, \qquad \operatorname{ran}(\alpha^l_{\mathsf{V}}) = \mathbb{N}^2 \qquad \text{and}$$

$$(i,j)\alpha^l_{\mathsf{V}} = \begin{cases} (i,j), & \text{if } i > l; \\ (i,j-1), & \text{if } i \leqslant l. \end{cases}$$

It it obvious that $\alpha^l_{\mathsf{V}} \in \mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ for any positive integer l.

Lemma 3. *For any element α of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ the following assertions hold:*

(1) *either $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ or $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$;*
(2) *either $(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ or $(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$.*

Proof. We shall show that assertion (1) holds. The proof of (2) is similar.

First we observe that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ if and only if $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\varpi \subseteq \mathsf{V}^1$.

Suppose the contrary: there exists an element α of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ such that neither $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ nor $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$. Then the definition of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, Lemma 1 and the above observation imply that without loss of generality we may assume that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \nsubseteq \mathsf{H}^1 \cup \mathsf{V}^1$ and there exists $(k,1) \in \operatorname{dom}\alpha$ such that $(k,1)\alpha = (i,j)$, $j \neq 1$ and $2 \leqslant i < k$. Also, by the definition of $\alpha^l_{\mathsf{V}} \in \mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ we get that without loss of generality we may assume that $j = 2$, i.e., $(k,1)\alpha = (i,2)$. Then there exist disjoint infinite subsets A and B of the set $\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^{k-1}_{\operatorname{dom}\alpha}$ such that

$$A \cup B = \mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^{k-1}_{\operatorname{dom}\alpha}, \qquad \mathsf{H}^1_{\operatorname{ran}\alpha} \subseteq (A)\alpha \qquad \text{and} \qquad \mathsf{V}^1_{\operatorname{ran}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^{k-1}_{\operatorname{ran}\alpha} \subseteq (B)\alpha.$$

If $A \cap \mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \neq \varnothing$ then the definition of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and Lemma 1 imply that there exists $(a,b) \in B$ such that $(a,b)\alpha \in \mathsf{V}^1_{\operatorname{ran}\alpha}$ and $(c,d) \leqslant (a,b)$ for some $(c,d) \in A$, which contradicts the definition of the partial order $\leqslant$ of the poset $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$.

Assume that $A \subseteq \mathsf{V}^2_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^{k-1}_{\operatorname{dom}\alpha}$. Then there exist infinite subsets $A_1 \subseteq A$ and $B_1 \subseteq B$ such that $(A_1)\alpha = \mathsf{H}^1_{\operatorname{ran}\alpha} \setminus \{(1,1)\}$ and $(B_1)\alpha = \mathsf{V}^1_{\operatorname{ran}\alpha} \setminus \{(1,1)\}$. Hence the definition of the poset $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ implies that at least one of the following conditions holds: ${\uparrow}A_1 \cap {\downarrow}B_1 \neq \varnothing$ or ${\downarrow}A_1 \cap {\uparrow}B_1 \neq \varnothing$. If ${\uparrow}A_1 \cap {\downarrow}B_1 \neq \varnothing$ then $({\downarrow}B_1)\alpha \subseteq {\downarrow}\mathsf{V}^1_{\operatorname{ran}\alpha} = \mathsf{V}^1$ but $\mathsf{V}^1 \cap {\uparrow}\big(\mathsf{H}^1_{\operatorname{ran}\alpha} \setminus \{(1,1)\}\big) \subseteq \mathsf{V}^1 \cap {\uparrow}\big(\mathsf{H}^1 \setminus \{(1,1)\}\big) = \varnothing$, a contradiction. Similarly, if ${\downarrow}A_1 \cap {\uparrow}B_1 \neq \varnothing$ then $({\downarrow}A_1)\alpha \subseteq {\downarrow}\mathsf{H}^1_{\operatorname{ran}\alpha} = \mathsf{H}^1$ and we get a contradiction with

$$\mathsf{H}^1 \cap {\uparrow}\big(\mathsf{V}^1_{\operatorname{ran}\alpha} \setminus \{(1,1)\}\big) \subseteq \mathsf{H}^1 \cap {\uparrow}\big(\mathsf{V}^1 \setminus \{(1,1)\}\big) = \varnothing.$$

The obtained contradictions imply the statement of the lemma.

Proposition 1. *Let α be an arbitrary element of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Then the following assertions hold:*

(1) *$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ if and only if $(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$, and moreover in this case the sets $\mathsf{H}^1 \setminus (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha$ and $\mathsf{V}^1 \setminus (\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha$ are finite;*
(2) *$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ if and only if $(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$, and moreover in this case $\mathsf{V}^1 \setminus (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha$ and $\mathsf{H}^1 \setminus (\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha$ are finite.*

Proof. The first statements of assertions (1) and (2) follow from Lemma 3 and their second parts follow from Lemma 1.

Theorem 1. *Let α be an arbitrary element of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and n be an arbitrary positive integer. Then the following assertions hold:*

(1) *if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ *then* $(\mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{H}^n$ *and* $(\mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{V}^n$*, and moreover* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1 \cup \ldots \cup \mathsf{H}^n$ *and* $(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1 \cup \ldots \cup \mathsf{V}^n$;

(2) *if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ *then* $(\mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{V}^n$ *and* $(\mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{H}^n$*, and moreover* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1 \cup \ldots \cup \mathsf{V}^n$ *and* $(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1 \cup \ldots \cup \mathsf{H}^n$.

Proof. (1) We shall prove this assertion by induction.

In the case when $n = 1$ our statement follows from Lemma 3 and Proposition 1. Next we shall show that the step of induction holds.

We assume that our assertion holds for arbitrary $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and for all positive integers $n \leq k$ and we shall prove that then the assertion is true in the case when $n = k + 1$.

For an arbitrary element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we define a partial map $\alpha_{[k+1]}\colon \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}^2$ in the following way:

$$
\begin{aligned}
(i,j)\alpha_{[k+1]} \quad & \text{is defined if and only if} \quad (i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(k+1,k+1)\\
& \text{and} \quad (i,j)\alpha \in \operatorname{ran}\alpha \cap {\uparrow}(k+1,k+1), \quad \text{and moreover in this case we put}\\
& (i,j)\alpha_{[k+1]} = (i,j)\alpha,
\end{aligned}
$$

i.e., the partial map $\alpha_{[k+1]}\colon \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}^2$ is the restriction of the partial map $\alpha\colon \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}^2$ onto the set ${\uparrow}(k+1,k+1)$. Since the set ${\uparrow}(k+1,k+1)$ with the partial induced from $\mathbb{N}^2_\leqslant$ is order isomorphic to $\mathbb{N}^2_\leqslant$, the assumption of induction and Lemma 3 imply that either $(\mathsf{H}^{k+1} \cap \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}))\alpha_{[k+1]} \subseteq \mathsf{H}^{k+1}$ or $(\mathsf{H}^{k+1} \cap \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}))\alpha_{[k+1]} \subseteq \mathsf{V}^{k+1}$. Then the inclusion

$$
{\downarrow}(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{H}^k_{\operatorname{dom}\alpha}) \subseteq {\downarrow}(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{H}^k_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \mathsf{H}^{k+1}_{\operatorname{dom}\alpha})
$$

implies that

$$
(\mathsf{H}^{k+1} \cap \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}))\alpha = (\mathsf{H}^{k+1} \cap \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}))\alpha_{[k+1]} \subseteq \mathsf{H}^{k+1}.
$$

Hence we have that $(\mathsf{H}^{k+1}_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{H}^{k+1}$, because the set $\operatorname{dom}\alpha \setminus \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}) \cap \mathsf{H}^{k+1}$ is finite. Also, since $(i,j) \leqslant (p,q)$ for all $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \setminus \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}) \cap \mathsf{H}^{k+1}$ and $(p,q) \in \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}) \cap \mathsf{H}^{k+1}$, the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$, the assumption of induction and the inclusion $(\mathsf{H}^{k+1} \cap \operatorname{dom}(\alpha_{[k+1]}))\alpha \subseteq \mathsf{H}^{k+1}$ imply the requested inclusion

$$
(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{H}^k_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \mathsf{H}^{k+1}_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1 \cup \ldots \cup \mathsf{H}^k \cup \mathsf{H}^{k+1}.
$$

Again using indiction and Proposition 1 we get that the condition $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ implies that $(\mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{H}^n$ and $(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1 \cup \ldots \cup \mathsf{V}^n$ for every positive integer n.

(2) If $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ then $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\varpi \subseteq \mathsf{H}^1$. Then assertion (1) and the equality $\alpha\varpi\varpi = \alpha$ imply assertion (2).

The following theorem describes the structure of elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ as monotone partial permutations of the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$.

Theorem 2. *Let α be an arbitrary element of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then the following assertions hold:*

(1) *if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ *then*
 (i_1) $(i,j)\alpha \leqslant (i,j)$ *for each* $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$; *and*
 (ii_1) *there exists a smallest positive integer* n_α *such that* $(i,j)\alpha = (i,j)$ *for each* $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(n_\alpha, n_\alpha)$;

(2) *if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ *then*
 (i_2) $(i,j)\alpha \leqslant (j,i)$ *for each* $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$; *and*
 (ii_2) *there exists a smallest positive integer* n_α *such that* $(i,j)\alpha = (j,i)$ *for each* $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(n_\alpha, n_\alpha)$.

Proof. (1) Fix an arbitrary element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$. Suppose to the contrary that there exists $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$ such that $(i,j)\alpha = (k,l) \nleqslant (i,j)$. Then Lemma 1, Theorem 1(1) and the definition of the partial order of the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$ imply that $k > i$ and $l < j$. Now, by the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we get that there exists a positive integer $m \leqslant i$ such that

$$(\mathsf{V}^1_{\operatorname{dom}\alpha} \cup \ldots \cup \mathsf{V}^m_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \nsubseteq \mathsf{V}^1 \cup \ldots \cup \mathsf{V}^m,$$

which contradicts Theorem 1(1). The obtained contradiction implies the requested inequality $(i,j)\alpha \leqslant (i,j)$ and this completes the proof of (i).

Next we shall prove (ii). Fix an arbitrary element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$. Suppose to the contrary that for any positive integer n there exists $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(n,n)$ such that $(i,j)\alpha \neq (i,j)$. We put $\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha} = \left|\mathbb{N}^2 \setminus \operatorname{dom}\alpha\right| + 1$ and

$$\mathsf{M}_{\operatorname{dom}\alpha} = \max\left\{\{i\colon (i,j) \notin \operatorname{dom}\alpha\}, \{j\colon (i,j) \notin \operatorname{dom}\alpha\}\right\} + 1.$$

The definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies that the positive integers $\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha}$ and $\mathsf{M}_{\operatorname{dom}\alpha}$ are well defined. Put $n_0 = \max\{\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha}, \mathsf{M}_{\operatorname{dom}\alpha}\}$. Then our assumption implies that there exists $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(n_0, n_0)$ such that $(i,j)\alpha = (i_\alpha, j_\alpha) \neq (i,j)$. By ($i$), we have that $(i_\alpha, j_\alpha) < (i,j)$. We consider the case when $i_\alpha < i$. In the case when $j_\alpha < j$ the proof is similar. Assume that $i \leqslant j$. By Theorem 1 the partial bijection α maps the set $S_i = \{(n,m)\colon n,m \leqslant i-1\}$ into itself. Also, by the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ the partial bijection α maps the set $\{(i,1), \ldots, (i,i)\}$ into S_i as well. Then our construction implies that

$$|S_i \setminus \operatorname{dom}\alpha| = \left|\mathbb{N}^2 \setminus \operatorname{dom}\alpha\right| = \mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha} - 1 \qquad \text{and} \qquad |\{(i,1), \ldots, (i,i)\}| \geqslant \mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha},$$

a contradiction. In the case when $j \leqslant i$ we get a contradiction in a similar way. This completes the proof of existence of such a positive integer n_α for any $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. The existence of such minimal positive integer n_α follows from the fact that the set of all positive integers with the usual order $\leqslant$ is well-ordered.

(2) If $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ then $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\varpi \subseteq \mathsf{H}^1$, and hence (1) and the equality $\alpha\varpi\varpi = \alpha$ imply our assertion.

Theorem 2 implies the following corollary:

Corollary 1. $\left|\mathbb{N}^2 \setminus \operatorname{ran}\alpha\right| \leqslant \left|\mathbb{N}^2 \setminus \operatorname{dom}\alpha\right|$ *for an arbitrary* $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

For an arbitrary non-empty subset A of $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ and any element $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ we denote $\overline{A}=\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\colon (j,i)\in A\}$ and $\overline{(i,j)}=(j,i)$.

Proposition 2. *Let α be an arbitrary element of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Then the following assertions hold:*

(i) $\operatorname{dom}(\varpi\alpha)=\operatorname{dom}(\varpi\alpha\varpi)=\overline{\operatorname{dom}\alpha}$ *and* $\operatorname{dom}(\alpha\varpi)=\operatorname{dom}\alpha$*;*

(ii) $\operatorname{ran}(\varpi\alpha)=\operatorname{ran}\alpha$ *and* $\operatorname{ran}(\varpi\alpha\varpi)=\operatorname{ran}(\alpha\varpi)=\overline{\operatorname{ran}\alpha}$*;*

(iii) *α is an idempotent if and only if so is $\varpi\alpha\varpi$.*

Proof. Items (i) and (ii) follow from the definition of the composition of partial maps.

(iii) Suppose that α is an idempotent of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. By items (i) and (ii) we have that $\operatorname{dom}(\varpi\alpha\varpi)=\overline{\operatorname{dom}\alpha}=\overline{\operatorname{ran}\alpha}=\operatorname{ran}(\varpi\alpha\varpi)$. Then $(j,i)\varpi\alpha\varpi=(i,j)\alpha\varpi=(i,j)\varpi=(j,i)$ for an arbitrary $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$, and hence $\varpi\alpha\varpi\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$. The converse statement follows from the equality $\varpi\varpi=\mathbb{I}$.

The following statement follows from the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and Lemma 3.

Proposition 3. *Let α and β be arbitrary elements of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Then $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\alpha\beta)})\alpha\beta\subseteq\mathsf{H}^1$ if and only if $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\beta\alpha)})\beta\alpha\subseteq\mathsf{H}^1$.*

3. Algebraic properties of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$

Theorems 1 and 2 imply the following

Proposition 4. *The group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.*

Proposition 5. *Let α be an element of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Then $\alpha\in H(\mathbb{I})$ if and only if* $\operatorname{dom}\alpha=\mathbb{N}^2$.

Proof. The implication $(\Rightarrow)$ is trivial. The implication $(\Leftarrow)$ follows from Theorems 1, 2 and Corollary 1.

Proposition 6. *An element α of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is an idempotent if and only if α is an identity partial self-map of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with the cofinite domain.*

Proof. The implication $(\Leftarrow)$ is trivial.

$(\Rightarrow)$ Let an element α be an idempotent of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Then for every $x\in\operatorname{dom}\alpha$ we have that $(x)\alpha\alpha=(x)\alpha$ and hence we get that $\operatorname{dom}\alpha^2=\operatorname{dom}\alpha$ and $\operatorname{ran}\alpha^2=\operatorname{ran}\alpha$. Also since α is a partial bijective self-map of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ we conclude that the previous equalities imply that $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{ran}\alpha$. Fix an arbitrary $x\in\operatorname{dom}\alpha$ and suppose that $(x)\alpha=y$. Then $(x)\alpha=(x)\alpha\alpha=(y)\alpha=y$. Since α is a partial bijective self-map of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ we have that the equality $(y)\alpha=y$ implies that the full preimage of y under the partial map α is equal to y. Similarly the equality $(x)\alpha=y$ implies that the full preimage of y under the partial map α is equal to x. Thus we get that $x=y$ and our implication holds.

Remark 2. The proof of Proposition 6 implies that the statement of the proposition holds for any semigroup of partial bijections, but in the general case of a semigroup of transformations this statement is not true.

The following theorem describes the subset of idempotents of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

Theorem 3. *For an element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ the following conditions are equivalent:*

(*i*) *α is an idempotent of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$;*

(*ii*) $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{ran}\alpha$ *and there exists a positive integer $n > 1$ such that $(n,1) \in \operatorname{dom}\alpha$ and $(n,1)\alpha \in \mathsf{H}^1$;*

(*iii*) $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{ran}\alpha$ *and there exists a positive integer $m > 1$ such that $(1,m) \in \operatorname{dom}\alpha$ and $(1,m)\alpha \in \mathsf{V}^1$.*

Proof. Implications $(i) \Rightarrow (ii)$ and $(i) \Rightarrow (iii)$ follow from Proposition 6.

We shall prove implication $(ii) \Rightarrow (i)$ by induction in two steps. The proof of implication $(iii) \Rightarrow (i)$ is similar.

First we remark that if $(1,1) \in \operatorname{dom}\alpha$ then since $(1,1) \leqslant (i,j)$ for any $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$, the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies that $(1,1)\alpha = (1,1)$.

Now, condition (ii) and Lemma 3 imply that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$. Since the set $\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha}$ with the induced order from the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$ is order isomorphic to the set of all positive integers with the usual linear order, without loss of generality we may assume that $\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} = \{x^1_i \colon i = 1,2,3,\ldots\}$ and $x^1_i \leqslant x^1_j$ in $\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha}$ if and only if $i \leqslant j$. Since $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$, Theorem 2(1) implies that $(x^1_1,1)\alpha \leqslant (x^1_1,1)$, and by the equality $\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{H}^1_{\operatorname{ran}\alpha}$ we get that $(x^1_1,1)\alpha = (x^1_1,1)$. Suppose that we have shown that $(x^1_l,1)\alpha = (x^1_l,1)$ for every positive integer $l < t_0$, where t_0 is some positive integer $\geqslant 2$. Then the equality $\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{H}^1_{\operatorname{ran}\alpha}$ and Theorem 2(1) imply that $(x^1_{t_0},1)\alpha = (x^1_{t_0},1)$, because $(x^1_{t_0},1)\alpha \leqslant (x^1_{t_0},1)$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$. Therefore, we have proved that $(x^1_k,1)\alpha = (x^1_k,1)$ for every $(x_k,1) \in \operatorname{dom}\alpha$.

Now, we shall show that the equality $(p,q)\alpha = (p,q)$ for all positive integers $q < k_0$ and all positive integers p such that $(p,q) \in \operatorname{dom}\alpha$, where k_0 is some positive integer $\geqslant 2$, implies that $(p,k_0)\alpha = (p,k_0)$ for all $(p,k_0) \in \operatorname{dom}\alpha$. Since the set $\mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{dom}\alpha}$ with the induced order from the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$ is order isomorphic to the set of all positive integers with the usual linear order, without loss of generality we may assume that $\mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{dom}\alpha} = \left\{x^{k_0}_i \colon i = 1,2,3,\ldots\right\}$ and $x^{k_0}_i \leqslant x^{k_0}_j$ in $\mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{dom}\alpha}$ if and only if $i \leqslant j$. Then the assumption of induction and Theorem 1(1) imply that $(\mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{H}^{k_0}$. Theorem 2(1) implies that $(x^{k_0}_1,k_0)\alpha \leqslant (x^{k_0}_1,k_0)$, and by the equality $\mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{ran}\alpha}$ we get that $(x^{k_0}_1,k_0)\alpha = (x^{k_0}_1,k_0)$. Suppose that we showed that $(x^{k_0}_l,k_0)\alpha = (x^{k_0}_l,k_0)$ for every positive integer $l < s_0$, where s_0 is a some positive integer $\geqslant 2$. Then the equality $\mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{ran}\alpha}$ and Theorem 2(1) imply that $(x^{k_0}_{s_0},k_0)\alpha = (x^{k_0}_{s_0},k_0)$, because $(x^{k_0}_{s_0},k_0)\alpha \leqslant (x^{k_0}_{s_0},k_0)$ and $(\mathsf{H}^{k_0}_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^{k_0}$. Therefore, we have proved that $(x^{k_0}_k,k_0)\alpha = (x^{k_0}_k,k_0)$ for every $(x^{k_0}_k,k_0) \in \operatorname{dom}\alpha$.

The proof of implication $(ii) \Rightarrow (i)$ is complete.

Proposition 6 implies the following proposition.

Proposition 7. *The subset of idempotents $E(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant))$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is a commutative submonoid of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and moreover $E(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant))$ is isomorphic to the free semilattice with unit $\big(\mathscr{P}^*(\mathbb{N}^2),\cup\big)$ over the set $\mathbb{N}^2$ under the mapping $(\varepsilon)\mathfrak{h} = \mathbb{N}^2 \setminus \operatorname{dom}\varepsilon$.*

Later we shall need the following technical lemma.

Lemma 4. *Let α be an element of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then the following assertions hold:*

(i) $\alpha = \gamma\alpha$ for some $\gamma \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ if and only if the restriction $\gamma|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \to \mathbb{N}^2$ is an identity partial map;

(ii) $\alpha = \alpha\gamma$ for some $\gamma \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ if and only if the restriction $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha}\colon \operatorname{ran}\alpha \to \mathbb{N}^2$ is an identity partial map

Proof. (i) The implication $(\Leftarrow)$ is trivial.

$(\Rightarrow)$ Suppose that $\alpha = \gamma\alpha$ for some $\gamma \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then we have that $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{dom}\gamma$ and $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{ran}\gamma$. Since $\gamma\colon \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}^2$ is a partial bijection, the above arguments imply that $(i,j)\gamma = (i,j)$ for each $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$. Indeed, if $(i,j)\gamma = (m,n) \neq (i,j)$ for some $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$ then since $\alpha\colon \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}^2$ is a partial bijection we have that either

$$(i,j)\alpha = (i,j)\gamma\alpha = (m,n)\alpha \neq (i,j)\alpha, \qquad \text{if} \quad (m,n) \in \operatorname{dom}\alpha,$$

or $(m,n)\alpha$ is undefined. This completes the proof of the implication.

The proof of (ii) is similar to that of (i).

The following theorem describes the Green relations $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ and $\mathscr{D}$ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

Theorem 4. *Let α and β be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then the following assertions hold:*

(i) $\alpha\mathscr{L}\beta$ if and only if either $\alpha = \beta$ or $\alpha = \varpi\beta$;

(ii) $\alpha\mathscr{R}\beta$ if and only if either $\alpha = \beta$ or $\alpha = \beta\varpi$;

(iii) $\alpha\mathscr{H}\beta$ if and only if either $\alpha = \beta$ or $\alpha = \varpi\beta = \beta\varpi$;

(iv) $\alpha\mathscr{D}\beta$ if and only if $\alpha = \mu\beta\nu$ for some $\mu,\nu \in H(\mathbb{I})$.

Proof. (i) The implication $(\Leftarrow)$ is trivial.

$(\Rightarrow)$ Suppose that $\alpha\mathscr{L}\beta$ in the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then there exist $\gamma,\delta \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $\alpha = \gamma\beta$ and $\beta = \delta\alpha$. The last equalities imply that $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$.

By Lemma 3 only one of the following cases holds:

(i_1) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{H}^1$;

(i_2) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1$;

(i_3) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{H}^1$;

(i_4) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1$.

Suppose that case (i_1) holds. Then the equalities $\alpha = \gamma\beta$ and $\beta = \delta\alpha$ imply that

$$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\gamma})\gamma \subseteq \mathsf{H}^1 \qquad \text{and} \qquad (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\delta})\delta \subseteq \mathsf{H}^1, \tag{1}$$

and moreover we have that $\alpha = \gamma\delta\alpha$ and $\beta = \delta\gamma\beta$. Hence by Lemma 4 we have that the restrictions $(\gamma\delta)|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \to \mathbb{N}^2$ and $(\delta\gamma)|_{\operatorname{dom}\beta}\colon \operatorname{dom}\beta \to \mathbb{N}^2$ are identity partial maps. Then by condition (1) we obtain that the restrictions $\gamma|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \to \mathbb{N}^2$

and $\delta|_{\operatorname{dom}\beta}\colon \operatorname{dom}\beta \to \mathbb{N}^2$ are also identity partial maps. Indeed, other wise there exists $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$ such that either $(i,j)\gamma \nleqslant (i,j)$ or $(i,j)\delta \nleqslant (i,j)$, which contradicts Theorem 2(1). Thus, the above arguments imply that in case (i_1) we have that $\alpha=\beta$.

Suppose that case (i_2) holds. Then we have that $\alpha=\gamma\beta=\gamma\mathbb{I}\beta=\gamma(\varpi\varpi)\beta=(\gamma\varpi)(\varpi\beta)$ and $\varpi\beta=(\varpi\delta)\alpha$. Hence we get that $\alpha\mathscr{L}(\varpi\beta)$, $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\subseteq\mathsf{H}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\varpi\beta)})\varpi\beta\subseteq\mathsf{H}^1$. Then we apply case (i_1) for elements α and $\varpi\beta$ and obtain that $\alpha=\varpi\beta$.

In case (i_3) the proof of the equality $\alpha=\varpi\beta$ is similar to case (i_2).

Suppose that case (i_4) holds. Then the equalities $\alpha=\gamma\beta$ and $\beta=\delta\alpha$ imply that $\alpha\varpi=\gamma(\beta\varpi)$ and $\beta\varpi=\delta(\alpha\varpi)$, which implies that $(\alpha\varpi)\mathscr{L}(\beta\varpi)$. Since for the elements $\alpha\varpi$ and $\beta\varpi$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ case (i_1) holds, $\alpha\varpi=\beta\varpi$ and hence $\alpha=\alpha\varpi\varpi=\beta\varpi\varpi=\beta$, which completes the proof of (i).

The proof of assertion (ii) is dual to that of (i).

Assertion (iii) follows from (i) (ii).

(iv) Suppose that $\alpha\mathscr{D}\beta$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then there exists $\gamma\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $\alpha\mathscr{L}\gamma$ and $\gamma\mathscr{R}\beta$. By Proposition 4 the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ has two distinct elements $\mathbb{I}$ and ϖ. By (i), (ii), there exist $\mu,\nu\in H(\mathbb{I})$ such that $\alpha=\mu\gamma$ and $\gamma=\beta\nu$ and hence $\alpha=\mu\beta\nu$. Converse, suppose that $\alpha=\mu\beta\nu$ for some $\mu,\nu\in H(\mathbb{I})$. Then by (i), (ii), we have that $\alpha\mathscr{L}(\beta\nu)$ and $\beta\mathscr{R}(\beta\nu)$, and hence $\alpha\mathscr{D}\beta$.

Theorem 4 implies Corollary 2 which gives the inner characterization of the Green relations $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ and $\mathscr{D}$ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ as partial permutations of the poset $\mathbb{N}^2_\leqslant$.

Corollary 2. (i) *Every $\mathscr{L}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ contains two distinct elements.*

(ii) *Every $\mathscr{R}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ contains two distinct elements.*

(iii) *Every $\mathscr{H}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ contains at most two distinct elements.*

(iv) *The $\mathscr{H}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains an element α consists of two distinct elements if and only if $\operatorname{dom}\alpha=\overline{\operatorname{dom}\alpha}$, $\operatorname{ran}\alpha=\overline{\operatorname{ran}\alpha}$ and $(\overline{(i,j)})\alpha=\overline{(i,j)\alpha}$ for each $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$, and the $\mathscr{H}$-class of α is a singleton in the other case.*

(v) *The $\mathscr{H}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains an idempotent ε consists of two distinct elements if and only if $\operatorname{dom}\varepsilon=\overline{\operatorname{dom}\varepsilon}$.*

(vi) *The $\mathscr{H}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains an idempotent ε is a singleton if and only if $\operatorname{dom}\varepsilon\neq\overline{\operatorname{dom}\varepsilon}$.*

(vii) *Every $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ contains either two or four distinct elements.*

$(viii)$ *A $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ has two distinct elements if and only if it contains only one $\mathscr{H}$-class.*

(ix) *A $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ has two distinct elements if and only if it contains a non-singleton $\mathscr{H}$-class.*

(x) *A $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ has four distinct elements if and only every its $\mathscr{H}$-class is singleton.*

(xi) *A $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ has four distinct elements if and only it contains a singleton $\mathscr{H}$-class.*

(xii) *The $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains an idempotent ε consists of two distinct elements if and only if $\operatorname{dom}\varepsilon=\overline{\operatorname{dom}\varepsilon}$.*

(*xiii*) *The $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains an idempotent ε consists of four distinct elements if and only if* $\operatorname{dom}\varepsilon \neq \overline{\operatorname{dom}\varepsilon}$.

Proof. Statements (i), (ii) and (iii) are trivial and they follow from the equality $\varpi\varpi = \mathbb{I}$ and the corresponding statements of Theorem 4.

(iv) By (i) and (ii) we have that the $\mathscr{H}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains an element α contains at most two distinct elements.

$(\Rightarrow)$ Assume that $\alpha\mathscr{H}\beta$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and $\alpha \neq \beta$. By Theorem 4(iii), $\beta = \alpha\varpi = \varpi\alpha$. Then by the definition of ϖ we get that $\operatorname{dom}\beta = \operatorname{dom}\alpha = \overline{\operatorname{dom}\alpha}$ and $\operatorname{ran}\beta = \operatorname{ran}\alpha = \overline{\operatorname{ran}\alpha}$. If $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$ and $(i,j)\alpha = (m,n)$ then

$$(n,m) = (m,n)\varpi = (i,j)\alpha\varpi = (i,j)\beta = (i,j)\varpi\alpha = (j,i)\alpha.$$

This completes the proof of the implication.

The converse implication is trivial, and the last statement of item (iv) follows from the above part of its proof.

(v) If $\operatorname{dom}\varepsilon = \overline{\operatorname{dom}\varepsilon}$ then $\varepsilon\varpi = \varpi\varepsilon \neq \varepsilon$. Conversely, suppose that $\varepsilon\varpi = \varpi\varepsilon \neq \varepsilon$. Since $\operatorname{dom}\varpi = \operatorname{ran}\varpi = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ and $\operatorname{dom}\varepsilon = \operatorname{ran}\varepsilon$, the equality $\varepsilon\varpi = \varpi\varepsilon$ implies that $\operatorname{dom}(\varepsilon\varpi) = \operatorname{dom}\varepsilon = \operatorname{ran}\varepsilon = \operatorname{ran}(\varpi\varepsilon)$, and hence the definition of the element $\varpi \in H(\mathbb{I})$ implies that $\operatorname{dom}\varepsilon = \overline{\operatorname{dom}\varepsilon}$.

Statement (vi) follows from items (iii), (v).

(vii) Theorem 4(iv) and (i), (ii) imply that every $\mathscr{D}$-class of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ contains at most four and at least two distinct elements. Suppose to the contrary that there exists a $\mathscr{D}$-class D_α in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains three distinct elements such that $\alpha \in D_\alpha$ for some element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. By Theorem 4$(iv)$, $\varpi\alpha, \alpha\varpi, \varpi\alpha\varpi \in D_\alpha$. Since $\varpi\gamma \neq \gamma \neq \gamma\varpi$ for any $\gamma \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$, we have that $\varpi\alpha = \alpha\varpi$ or $\alpha = \varpi\alpha\varpi$. If $\varpi\alpha = \alpha\varpi$ then the definition of the element ϖ of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies that $\alpha = \varpi\varpi\alpha = \varpi\alpha\varpi$. Similarly, if $\alpha = \varpi\alpha\varpi$ then $\varpi\alpha = \varpi\varpi\alpha\varpi = \alpha\varpi$. This completes the proof of the statement.

$(viii)$ $(\Rightarrow)$ Assume that a $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ has two distinct elements and it contains α. Then the proof of item (vii) implies that $\varpi\alpha = \alpha\varpi$ and $\alpha = \varpi\alpha\varpi$. By Theorem 4$(iv)$ we have that $D_\alpha = H_\alpha$.

Implication $(\Leftarrow)$ is trivial.

(ix) Implication $(\Rightarrow)$ follows form item $(viii)$.

$(\Leftarrow)$ Assume that there exists a $\mathscr{D}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ which contains a non-singleton $\mathscr{H}$-class H_α of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ for some $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. By Theorem 4$(iii)$ we have that $H_\alpha = \{\alpha, \alpha\varpi\}$ and $\alpha \neq \alpha\varpi = \varpi\alpha$. Then the last equality implies that $\alpha = \varpi\alpha\varpi$. Hence by Theorem 4$(iv)$, $D_\alpha = H_\alpha$, which complete the proof of the implication.

Statement (x) follows from $(viii)$, (ix).

(xi) By Theorem 2.3 of [1] any two $\mathscr{H}$-classes of an arbitrary $\mathscr{D}$-class are of the same cardinality. Now, we apply statement (x).

Statement (xii) follows from $(viii)$, (v).

Items (x) and (vi) imply statement $(xiii)$.

We need the following three lemmas.

Lemma 5. *Let α, β and γ be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $\alpha = \beta\alpha\gamma$. Then the following statements hold:*

(*i*) *if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{H}^1$ *then the restrictions* $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *and* $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha}\colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *are identity partial maps;*

(*ii*) *if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1$ *then* $(i,j)\beta=(j,i)$ *for each* $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$ *and* $(m,n)\gamma=(n,m)$ *for each* $(m,n)\in\operatorname{ran}\alpha$*; and moreover in this case we have that* $\operatorname{dom}\alpha=\overline{\operatorname{dom}\alpha}$, $\operatorname{ran}\alpha=\overline{\operatorname{ran}\alpha}$ *and* $(j,i)\alpha=\overline{(i,j)\alpha}$ *for any* $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$*, i.e.,* $\alpha=\varpi\alpha\varpi$.

Proof. (*i*) Assume that the inclusion $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{H}^1$ holds. Then one of the following cases holds:

(1) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$;

(2) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$.

If case (1) holds then the equality $\alpha=\beta\alpha\gamma$ and Lemma 3 imply that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\gamma})\gamma \subseteq \mathsf{H}^1$. By Theorem 2(1), $(i,j)\beta\leqslant(i,j)$ for any $(i,j)\in\operatorname{dom}\beta$ and $(m,n)\gamma\leqslant(m,n)$ for any $(m,n)\in\operatorname{dom}\gamma$. Suppose that $(i,j)\beta<(i,j)$ for some $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$. Then we have that

$$(i,j)\alpha=(i,j)\beta\alpha\gamma<(i,j)\alpha\gamma\leqslant(i,j)\alpha,$$

which contradicts the equality $\alpha=\beta\alpha\gamma$. The obtained contradiction implies that the restriction $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map. This and the equality $\alpha=\beta\alpha\gamma$ imply that the restriction $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha}\colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map too.

Suppose that case (2) holds. Then we have that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\varpi \subseteq \mathsf{H}^1$. Now, the equality $\alpha=\beta\alpha\gamma$ and the definition of the element ϖ the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ imply that

$$\alpha\varpi=\beta\alpha\gamma\varpi=\beta(\alpha\varpi)(\varpi\gamma\varpi).$$

Then we apply case (1). This completes the proof of (*i*).

(*ii*) Assume that the inclusion $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1$ holds. Then the equality $\alpha=\beta\alpha\gamma$ implies that $\alpha=\beta\beta\alpha\gamma\gamma$ and the inclusion $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1$ implies that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\beta\beta)})\beta\beta \subseteq \mathsf{H}^1$. Now, by (*i*), the restrictions $(\beta\beta)|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ and $(\gamma\gamma)|_{\operatorname{ran}\alpha}\colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ are identity partial maps. Since $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1$, Theorem 2(2) implies that $(i,j)\beta\leqslant(j,i)$ for any $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$. Suppose that $(i,j)\beta<(j,i)$ for some $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$. Again, by Theorem 2(2) we get that $(j,i)\beta\leqslant(i,j)$ and hence we have that $(i,j)=(i,j)\beta\beta<(j,i)\beta\leqslant(i,j)$, a contradiction. The obtained contradiction implies that $(i,j)\beta=(j,i)$ for each $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$. Next, the inclusion $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1$ and the equality $\alpha=\beta\alpha\gamma$ imply that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\gamma})\gamma \subseteq \mathsf{V}^1$. Then the similar arguments as in the above part of the proof imply that $(m,n)\gamma=(n,m)$ for each $(m,n)\in\operatorname{ran}\alpha$.

Now, the property that $(i,j)\beta=(j,i)$ for each $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$ and $(m,n)\gamma=(n,m)$ for each $(m,n)\in\operatorname{ran}\alpha$, and the equality $\alpha=\beta\alpha\gamma$ imply that $\operatorname{dom}\alpha=\overline{\operatorname{dom}\alpha}$ and $\operatorname{ran}\alpha=\overline{\operatorname{ran}\alpha}$. Fix an arbitrary $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha$. Put $(m,n)=(i,j)\alpha$. Then the above part of the proof of this item implies that $(m,n)=(i,j)\alpha=(i,j)\beta\alpha\gamma=(j,i)\alpha\gamma$ and hence $(n,m)=(m,n)\varpi=(j,i)\alpha\gamma\varpi=(j,i)\alpha$.

Lemma 6. *Let* α *and* β *be elements of the semigroup* $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ *and* A *be a cofinite subset of* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*. If the restriction* $(\alpha\beta)|_A\colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *is an identity partial map then one of the following conditions holds:*

(*i*) *the restrictions* $\alpha|_A\colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *and* $\beta|_A\colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *are identity partial maps;*

(*ii*) $(i,j)\alpha=(j,i)$ *for all* $(i,j)\in A$ *and* $(m,n)\beta=(n,m)$ *for all* $(m,n)\in\overline{A}$.

Proof. By Lemma 3 we have that either $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ or $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$. Suppose that the inclusion $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ holds. Then the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{H}^1$. By Theorem 2(1) we have that

$$(i,j)\alpha \leqslant (i,j)$$

for any $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha$ and $(m,n)\beta \leqslant (m,n)$ for any $(m,n) \in \operatorname{dom}\beta$. Suppose that $(i,j)\alpha < (i,j)$ for some $(i,j) \in A$. Then we have that

$$(i,j) = (i,j)\alpha\beta < (i,j)\beta \leqslant (i,j),$$

which contradicts the assumption that the restriction $(\alpha\beta)|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map. Hence the restriction $\alpha|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map. Similar arguments imply that the restriction $\beta|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is also an identity partial map. Thus, in the case when $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$, item (i) holds.

Suppose that the inclusion $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ holds. By the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we have that

$$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta \subseteq \mathsf{V}^1, \ \alpha\beta = (\alpha\varpi)(\varpi\beta), \ (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\alpha\varpi)})\alpha\varpi \subseteq \mathsf{H}^1$$

and

$$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\varpi\beta)})\varpi\beta \subseteq \mathsf{H}^1.$$

Then the previous part of the proof implies that the restrictions $(\alpha\varpi)|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ and $(\varpi\beta)|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ are identity partial maps. Since $(\alpha\varpi)\varpi = \alpha$ and $\varpi(\varpi\beta) = \beta$, the inclusion $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ implies that (ii) holds.

Lemma 7. *Let α and β be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and A be a cofinite subset of $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. If $(i,j)\alpha\beta = (j,i)$ for all $(i,j) \in A$, then one of the following conditions holds:*

- (i) *the restriction $\alpha|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map and $(m,n)\beta = (n,m)$ for all $(m,n) \in A$;*
- (ii) *$(i,j)\alpha = (j,i)$ for all $(i,j) \in A$ and $\beta|_{\overline{A}} \colon \overline{A} \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map.*

Proof. The assumption of the lemma implies that the restriction $\alpha(\beta\varpi)|_A \colon \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map. Hence by Lemma 6 only one of the following conditions holds:

1. the restrictions $\alpha|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ and $(\beta\varpi)|_A \colon A \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ are identity partial maps;
2. $(i,j)\alpha = (j,i)$ for all $(i,j) \in A$ and $(m,n)\beta\varpi = (n,m)$ for all $(m,n) \in \overline{A}$.

Since $(\beta\varpi)\varpi = \beta$, the above arguments imply the statement of the lemma.

Elementary calculations and the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ imply the following proposition.

Proposition 8. *Let α and β be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then the following assertions hold:*

- (i) *if the restriction $\beta|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map then $\alpha\beta = \alpha\mathbb{I} = \alpha$;*
- (ii) *if the restriction $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is an identity partial map then $\beta\alpha = \mathbb{I}\alpha = \alpha$;*

(*iii*) *if* $(m,n)\beta=(n,m)$ *for all* $(m,n)\in\operatorname{ran}\alpha$ *then* $\alpha\beta=\alpha\varpi$;

(*iv*) *if* $(m,n)\beta=(n,m)$ *for all* $(m,n)\in\overline{\operatorname{dom}\alpha}$ *then* $\beta\alpha=\varpi\alpha$.

Theorem 5. $\mathscr{D}=\mathscr{J}$ *in* $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.

Proof. The inclusion $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{J}$ is trivial.

Fix any $\alpha,\beta\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ such that $\alpha\mathscr{J}\beta$. Then there exist $\gamma_\alpha,\delta_\alpha,\gamma_\beta,\delta_\beta\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ such that $\alpha=\gamma_\alpha\beta\delta_\alpha$ and $\beta=\gamma_\beta\alpha\delta_\beta$ (see [2] or [3, Section II.1]). Hence we have that

$$\alpha=\gamma_\alpha\gamma_\beta\alpha\delta_\beta\delta_\alpha \quad\text{and}\quad \beta=\gamma_\beta\gamma_\alpha\beta\delta_\alpha\delta_\beta.$$

Suppose that

$$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\gamma_\alpha\gamma_\beta)})\gamma_\alpha\gamma_\beta\subseteq\mathsf{H}^1.$$

By Proposition 3,

$$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\gamma_\beta\gamma_\alpha)})\gamma_\beta\gamma_\alpha\subseteq\mathsf{H}^1.$$

Lemma 5(i) implies that the restrictions

$$(\gamma_\alpha\gamma_\beta)|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha\rightharpoonup\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad (\delta_\beta\delta_\alpha)|_{\operatorname{ran}\alpha}\colon \operatorname{ran}\alpha\rightharpoonup\mathbb{N}\times\mathbb{N},$$
$$(\gamma_\beta\gamma_\alpha)|_{\operatorname{dom}\beta}\colon \operatorname{dom}\beta\rightharpoonup\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \text{ and }\ (\delta_\alpha\delta_\beta)|_{\operatorname{ran}\beta}\colon \operatorname{ran}\beta\rightharpoonup\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

are identity partial maps. Then by Lemma 6 and Proposition 8 there exist $\omega_1,\omega_2\in H(\mathbb{I})$ such that $\gamma_\beta\alpha=\omega_1\alpha$, $\alpha\delta_\beta=\alpha\omega_2$, $\gamma_\alpha\beta=\omega_1\beta$ and $\beta\delta_\alpha=\beta\omega_2$. This implies that

$$\alpha=\gamma_\alpha\beta\delta_\alpha=\omega_1\beta\delta_\alpha=\omega_1\beta\omega_2 \qquad\text{and}\qquad \beta=\gamma_\beta\alpha\delta_\beta=\omega_1\alpha\delta_\beta=\omega_1\alpha\omega_2,$$

and hence by Theorem 4 we get that $\alpha\mathscr{D}\beta$.

Suppose that

$$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\gamma_\alpha\gamma_\beta)})\gamma_\alpha\gamma_\beta\subseteq\mathsf{V}^1.$$

Then by Proposition 3 and Lemma 3 we have that

$$(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\gamma_\beta\gamma_\alpha)})\gamma_\beta\gamma_\alpha\subseteq\mathsf{V}^1.$$

Now, as in the above part of the proof the statement of the theorem follows from Lemma 5(ii), Lemma 7 and Proposition 8.

Acknowledgements

The author acknowledges T. Banakh and A. Ravsky for their comments and suggestions.

References

1. *Clifford A. H., Preston G. B.* The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
2. *Green J. A.* On the structure of semigroups, Ann. Math. (2) **54** (1951), 163—172.
3. *Grillet P. A.* Semigroups. An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker, New York, 1995.

4. *Gutik O., Pozdniakova I.* Congruences on the monoid of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\rm lex} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **57**:2 (2014), 7–15; reprinted version: J. Math. Sci. **217**:2 (2016), 139–148.
5. *Gutik O., Pozdnyakova I.* On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\rm lex} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images, Algebra Discr. Math. **17**:2 (2014), 256–279.
6. *Gutik O., Repovš D.* Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image, Stud. Sci. Math. Hungar. **48**:3 (2011), 342–353.
7. *Gutik O., Repovš D.* On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images, Georgian Math. J. **19**:3 (2012), 511–532.
8. *Gutik O., Repovš D.* On monoids of injective partial cofinite selfmaps, Math. Slovaca **65**:5 (2015), 981–992.
9. *Howie J. M.* Fundamentals of Semigroup Theory, London Math. Monographs, New Ser. 12, Clarendon Press, Oxford, 1995.
10. *Shelah S., Steprāns J.* Non-trivial homeomorphisms of $\beta N \setminus N$ without the Continuum Hypothesis, Fund. Math. **132** (1989), 135–141.
11. *Shelah S., Steprāns J.* Somewhere trivial autohomeomorphisms, J. London Math. Soc. (2), **49** (1994), 569–580.
12. *Shelah S., Steprāns J.* Martin's axiom is consistent with the existence of nowhere trivial automorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2097–2106.
13. *Veličković B.* Definable automorphisms of $\mathscr{P}(\omega)/\operatorname{fin}$, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 130–135.
14. *Veličković B.* Applications of the Open Coloring Axiom, In Set Theory of the Continuum, H. Judah, W. Just et H. Woodin, eds., Pap. Math. Sci. Res. Inst. Workshop, Berkeley, 1989, MSRI Publications. Springer-Verlag. Vol. **26**, Berlin, (1992), pp. 137–154.
15. *Veličković B.* OCA and automorphisms of $\mathscr{P}(\omega)/\operatorname{fin}$, Topology Appl. **49** (1993), 1–13.
16. *Vagner V. V.* Generalized groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR **84** (1952), 1119–1122 (in Russian).
17. *Weaver N.* Forcing for Mathematicians, World Sc. Publ. Co., 2014.

Стаття: надійшла до редколегії 06.02.2016
прийнята до друку 08.06.2016

ПРО МОНОЇД МОНОТОННИХ ІН'ЄКТИВНИХ ЧАСТКОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ МНОЖИНИ $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ З КОСКІНЧЕННИМИ ОБЛАСТЯМИ ВИЗНАЧЕНЬ І ЗНАЧЕНЬ

Олег ГУТІК, Інна ПОЗДНЯКОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000,
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, pozdnyakova.inna@gmail.com

Нехай $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ – множина $\mathbb{N}^2$ з частковим порядком, визначеним як добуток звичайного лінійного порядку $\leqslant$ на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Вивчено напівгрупу $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ монотонних ін'єктивних часткових перетворень частково впорядкованої множини $\mathbb{N}^2_\leqslant$, які мають коскінченні області визначення та значення. Описуємо властивості елементів напівгрупи $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ як монотонних часткових бієкцій частково впорядкованої множини $\mathbb{N}^2_\leqslant$ і доводимо, що група одиниць напівгрупи $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ ізоморфна циклічній групі другого порядку. Також описуємо піднапівгрупу ідемпотентів напівгрупи $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ та відношення Гріна $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Зокрема, доведено, що $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ в $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

Ключові слова: напівгрупа часткових бієкцій, монотонне часткове відображення, ідемпотент, відношення Гріна.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 117–120
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 117–120

УДК 517.5

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ЗБІЖНОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА-СТІЛЬТЬЄСА

Маркіян ДОБУШОВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: mdobush19@gmail.com

Для абсциси збіжності інтегралу Лапласа-Стільтьєса отримано нову формулу. Збіжність інтегралів Лапласа-Стільтьєса зводиться до збіжності рядів Діріхле.

Ключові слова: інтеграл Лапласа-Стільтьєса, ряд Діріхле.

1. Вступ. Нехай V — клас невід'ємних неспадних неперевних справа необмежених на $[0, +\infty)$ функцій F, а f — невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція. Інтеграл

$$I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x), \ \sigma \in \mathbb{R} \tag{1}$$

називається [1, с.7] інтегралом Лапласа-Стільтьєса. Зрозуміло, що інтеграл (1) або збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або розбіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або існує число $\sigma_3[I]$ таке, що цей інтеграл збіжний для $\sigma < \sigma_3[I]$ і розбіжний для $\sigma > \sigma_3[I]$. В останньому випадку число $\sigma_3[I]$ називається абсцисою збіжності. Якщо інтеграл (1) розбіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то вважаємо $\sigma = -\infty$, а якщо збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то вважаємо $\sigma = +\infty$.

2. Основна частина.

Твердження 1 ([1], с.11). *Якщо $F \in V$ і $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \dfrac{\ln F(x)}{x} = \tau$, то*

$$\sigma_3 \geqslant \alpha - \tau, \ \ \alpha =: \varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}, \tag{2}$$

крім випадку, коли $\tau = \alpha = +\infty$. Звідси випливає таке: якщо $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то $\sigma_3[I] \geqslant \alpha$.

В [1, с.16] доведено, що для кожних $-\infty \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant +\infty$ існує додатна і неперервна на $[0, +\infty)$ функція f така, що для інтеграла $I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dx$ правильні рівності $\sigma_3[I] = \beta > \gamma = \alpha$. Щоб отримати рівність $\sigma_3[I] = \alpha$, як в [1, с.21], будемо говорити, що невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція f регулярно змінюється стосовно $F \in V$, якщо існують числа $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ і $\delta \geqslant 0$ такі, що для всіх $x \geqslant a$

$$\int_{x-a}^{x+b} dF(x) \geqslant \delta f(x). \tag{3}$$

Твердження 2 ([1], с.11)**.** *Нехай $F \in V$ і f регулярно змінюється стосовно F, то $\sigma_3[I] \leqslant \alpha$.*

Об'єднуючи твердження 1 і 2, приходимо до такого результату.

Твердження 3. *Якщо $F \in V$ і f регулярно змінюється стосовно F. Тоді, якщо $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то $\sigma_3[I] = \alpha$.*

Тут буде наведений інший підхід до дослідження збіжності інтегралів Лапласа-Стільтьєса, який ґрунтується на зведенні інтеграла до ряду Діріхле.

Отже, нехай (λ_n) — довільна зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел така, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant h < +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Тоді

$$I(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) e^{x\sigma} dF(x). \tag{4}$$

Якщо $\sigma \geqslant 0$, то

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) e^{x\sigma} dF(x) \leqslant \\ \leqslant e^{\lambda_{n+1}\sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \leqslant e^{h\sigma} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x), \end{aligned} \tag{5}$$

а якщо $\sigma \leqslant 0$, то

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \geqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) e^{x\sigma} dF(x) \geqslant \\ \geqslant e^{\lambda_{n+1}\sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \geqslant e^{h\sigma} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x), \end{aligned} \tag{6}$$

Приймемо

$$a_n = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x),\ n \geqslant 0 \tag{7}$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n \sigma}. \tag{8}$$

Тоді з (4)–(6) випливає, що $F(\sigma) \leqslant I(\sigma) \leqslant e^{h\sigma} F(\sigma)$, якщо $\sigma \geqslant 0$, і $e^{h\sigma} F(\sigma) \leqslant I(\sigma) \leqslant F(\sigma)$, якщо $\sigma \leqslant 0$. Тому абсциса збіжності інтеграла (1) збігається з абсцисою збіжності ряду Діріхле (8). Оскільки $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то [2,с.15] для абсциси збіжності $\sigma_3[F]$ ряду Діріхле правильна рівність

$$\sigma_3[F] = \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n}.$$

Отже, правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай $F \in V$, f — невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція, а (λ_n) — довільна зростаюча до $+\infty$ послідовність така, що $\lambda_{n+1} - \lambda_n < h < +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$.*
Тоді

$$\sigma_3[I] = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x)}. \tag{9}$$

Зауважимо, що з доведеної теореми випливають твердження 2 і 3.

Справді, припустимо, $\alpha > -\infty$. Тоді для будь-якого $\alpha^* < \alpha$ і всіх $x \geqslant x_0(\alpha^*)$ з (2) випливає нерівність $f(x) \leqslant e^{-\alpha^* x}$. Тому для всіх досить великих n

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\alpha^* x}dF(x) \leqslant F(\lambda_{n+1})e^{-\alpha^*\lambda_{n+1}} + \alpha^* \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} F(x)e^{-\alpha^* x}dx$$

і якщо $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x) \leqslant \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_{n+1}\} + \alpha^* \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \exp\{-\alpha^*(1+o(1))x\}dx \leqslant \\ &\leqslant \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_n\} + \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_n\} = \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_n\}\ n \to \infty.\end{aligned}$$

Тому з (9) випливає, що

$$\sigma_3[I] \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln e^{\alpha^*(1+o(1))\lambda_n} = \alpha^*,$$

тобто з огляду на довільність α^* правильна нерівність $\sigma_3[I] \geqslant \alpha$, яка є очевидною, коли $\alpha = -\infty$. Отже, з теореми випливає твердження 2.

Припустимо тепер, що $\alpha < +\infty$. Тоді для кожного $\alpha^* > \alpha$ існує послідовність $(x_k) \uparrow +\infty$ така, що $f(x_h) \geqslant \exp\{-\alpha^* x_h\}$. Тому, якщо f регулярно змінюється стосовно F, то з (3) матимемо

$$\int_{x_h - a}^{x_h + b} f(t)dF(t) \geqslant \delta f(x_h) \geqslant \delta \exp\{-\alpha^* x_h\}.$$

Можемо вважати, що $x_{h+1} - a > x_h + b$ і виберемо послідовність λ_{n_h} так, щоб $\lambda_{n_h} = x_h - a$ і $\lambda_{n_h+1} = x_h + b$. Тоді $\lambda_{n_h+1} - \lambda_{n_h} = b + a < \infty$. Решту членів послідовності можемо вибрати довільно, щоб $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant h (h > b + a)$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$.

Тоді з (9) випливає, що

$$\sigma_3[I] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n_h}} \ln \frac{1}{\int_{\lambda_{n_h}}^{\lambda_{n_h+1}} f(t)dt} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{x_h - a} \ln \frac{1}{\delta \exp\{-\alpha^* x_h\}} = \alpha^*,$$

тобто з огляду на довільність α^* отримаємо нерівність $\sigma_3[I] \leqslant \alpha$, яка є очевидною, якщо $\alpha = +\infty$. Отож, з теореми випливає твердження 3.

Зауважимо також, що з теореми 1 випливає такий результат.

Наслідок 1. *Нехай $F \in V$ і f — невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція така, що $\ln f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, а (λ_n) — така зростаюча послідовність додатних чисел , що $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant h < +\infty$ для всіх n і $\ln f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$. Тоді*

$$\sigma_3[I] = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{F(\lambda_n + 1) - F(\lambda_n)}. \tag{10}$$

Справді, для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ маємо $-\varepsilon x \leqslant \ln f(x) \leqslant x\varepsilon$. Тому для всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$e^{-\varepsilon\lambda_{n+1}}(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n)) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x) \leqslant e^{\varepsilon\lambda_{n+1}}(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n)),$$

тобто

$$\ln\frac{e^{-\varepsilon\lambda_{n+1}}}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))} \leqslant \frac{1}{\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x)} \leqslant \ln\frac{e^{\varepsilon\lambda_{n+1}}}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))}.$$

Звідки з огляду на (9) випливає, що

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))}-\varepsilon \leqslant \sigma_3[I] \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))}+\varepsilon,$$

і завдяки довільності ε правильна рівність (10).

Література

1. *Sheremeta M.M.* Asymptotical behavior of Laplace-Stieltjes integrals-Lviv:VNTL Publishers, 2010. — 210 p.
2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. — М.:Наука, 1976. — 536 с.

Стаття: надійшла до редколегії 10.03.2016.
прийнята до друку 08.06.2016.

A REMARK TO THE CONVERGENCE OF LAPLACE-STIELTJES INTEGRALS

Markiyan DOBUSHOVSKYY

Ivan Franko National University of Lviv,
79000, Lviv, Universytetska Str., 1
e-mail: mdobush19@gmail.com

For the abscissa of the convergence of Laplace-Stieltjes integral a new formula is obtained. The convergence of the Laplace-Stieltjes integrals reduces to the convergence of Dirichlet series.

Key words: Laplace-Stieltjes integral, Dirichlet series

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 121–129
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 121–129

УДК 517.53

p-ELLIPTIC FUNCTIONS

Andriy KONDRATYUK,
Vasylyna KHOROSHCHAK, Dzvenyslava LUKIVSKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mails: v.khoroshchak@gmail.com
d.lukivska@gmail.com

We investigate p-elliptic functions (meromorphic in $\mathbb{C}$ functions satisfying the conditions $g(u+\omega_1) = g(u)$, $g(u+\omega_2) = pg(u)$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$). In the case $p = 1$ this is the classical theory of elliptic functions. p-Elliptic functions generate so-called p-loxodromic functions and vice versa. We generalize the elliptic Weierstrass $\wp$-function and find the corresponding p-loxodromic function in the case $|p| = 1$.

Key words: p-elliptic function, the Weierstrass $\wp$-function, p-loxodromic function, generalized Weierstrass $\wp$-function.

1. Acknowledgement

This research was initiated by our supervisor Professor Andriy Kondratyuk. His unexpected death made it impossible for him to finish the work. We are grateful to Andriy Kondratyuk for his contribution to this paper. Thanks a lot to our supervisor for constant attention to us, useful discussions and valuable remarks. We will always remember him.

2. Introduction

As usual, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Definition 1. *Let ω_1, ω_2 be complex numbers such that $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. A meromorphic in $\mathbb{C}$ function g is called p-**elliptic**, if there exists $p \in \mathbb{C}^*$ such that for every $u \in \mathbb{C}$*

$$g(u+\omega_1) = g(u), \quad g(u+\omega_2) = pg(u). \tag{1}$$

The second property is called the **multi p-periodicity of period** ω_2. Note that (1) implies $g(u+m\omega_1+n\omega_2)=p^n g(u)$, where $m,n\in\mathbb{Z}$.

Denote the class of p-elliptic functions by $\mathcal{E}_p$.

If $p=1$ we obtain the classical theory of elliptic functions, which are well known due to the works of K. Jacobi, N. Abel, K. Weierstrass. The theories of loxodromic (multiplicatively periodic) and elliptic functions are dual (see [1], [2], [3]).

3. Relation between p-loxodromic and p-elliptic functions

We are going to show that the p-elliptic functions generate the so-called p-loxodromic functions and vice versa.

Definition 2. *Let $q\in\mathbb{C}^*$, $0<|q|<1$. A meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function f is said to be* **p-loxodromic of multiplicator** *q if there exists $p\in\mathbb{C}^*$, $p\neq 1$, such that for every $z\in\mathbb{C}^*$*

$$f(qz)=pf(z). \tag{2}$$

Let $\mathcal{L}_{qp}$ denote the class of p-loxodromic functions of multiplicator q.

If f is meromorphic in $\mathbb{C}^*$ and p-loxodromic of multiplicator $q=e^{2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1}>0$, that is $f\in\mathcal{L}_{qp}$, then the function

$$g(u)=f\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)$$

is meromorphic in $\mathbb{C}$ and p-elliptic of periods ω_1,ω_2. Indeed, for all $u\in\mathbb{C}$ we have

$$g(u+m\omega_1+n\omega_2)=f\left(e^{2\pi i\frac{u+m\omega_1+n\omega_2}{\omega_1}}\right)=f\left(e^{2\pi in\frac{\omega_2}{\omega_1}}e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=$$

$$=f\left(q^n e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=p^n f\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=p^n g(u).$$

Hence, $g\in\mathcal{E}_p$.

Conversely, if $g\in\mathcal{E}_p$ and $z\in\mathbb{C}^*$, then the function

$$f(z)=g\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right)$$

is well defined because g admits the period ω_1 and $\log z\in\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$. In other words we have here that the composition of a multivalent mapping and a univalent one is a univalent function. Hence, if we set $q=e^{2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1}>0$, we obtain

$$f(qz)=g\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log(qz)\right)=g\left(\omega_2+\frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right)=$$

$$=pg\left(\frac{\omega_1}{2i\pi}\log z\right)=pf(z).$$

Thus, $f\in\mathcal{L}_{qp}$.

4. Generalization of the Weierstrass $\wp$-function

Taking into account the fact that $\wp$ and $\wp'$ generate the field of elliptic functions, it will be interesting to obtain a counterpart of $\wp$ in the theory of p-elliptic functions.

Therefore, in this section we generalize the elliptic Weierstrass $\wp$-function

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right),$$

where $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$. The proposed generalized function will be a p-elliptic function.

Let $p = e^{i\alpha}$ and

$$g_\alpha(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{e^{in\alpha}}{(u-\omega)^2} - \frac{e^{in\alpha}}{\omega^2}\right).$$

If $p = 1$, we have

$$g_0(u) = \wp(u).$$

We suppose further $p \neq 1$.

Definition 3. *Let $p = e^{i\alpha}$, $p \neq 1$. The function of the form*

$$\wp_\alpha(u) = g_\alpha(u) + C_\alpha,$$

where

$$C_\alpha = \frac{g_\alpha\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\alpha} g_\alpha\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\alpha}-1},$$

is called **the generalized Weierstrass $\wp$-function.**

We prove the following theorem.

Theorem 1. *The generalized Weierstrass $\wp$-function $\wp_\alpha$ belongs to $\mathcal{E}_p$ with $p = e^{i\alpha} \neq 1$.*

Proof. Let us consider the derivative of g_α,

$$g'_\alpha(u) = -2\sum_{\omega} \frac{e^{in\alpha}}{(u-\omega)^3}.$$

We have

$$g'_\alpha(u+\omega_2) = -2\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in\alpha}}{(u+\omega_2 - m\omega_1 - n\omega_2)^3} = -2\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in\alpha}}{(u - m\omega_1 - (n-1)\omega_2)^3} =$$

$$= -2e^{i\alpha}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(n-1)\alpha}}{(u - m\omega_1 - (n-1)\omega_2)^3} = e^{i\alpha} g'_\alpha(u).$$

Thus, we obtain

$$g'_\alpha(u+\omega_2) - e^{i\alpha} g'_\alpha(u) = 0. \qquad (3)$$

Note that the function $(g_\alpha + C)$ satisfies (3) for any $C \in \mathbb{C}$. Put

$$C = C_\alpha.$$

Then relation (3) implies

$$g_\alpha(u+\omega_2) + C_\alpha - e^{i\alpha}\big(g_\alpha(u) + C_\alpha\big) = A,$$

where A is a constant. Let us define A. Setting $u = -\frac{\omega_2}{2}$ in the preceding equality, we obtain

$$g_\alpha\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\alpha} g_\alpha\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) + (1 - e^{i\alpha})C_\alpha = A.$$

Taking into account the choice of C_α, we conclude that $A = 0$. Hence, we have

$$g_\alpha(u + \omega_2) + C_\alpha = e^{i\alpha}\big(g_\alpha(u) + C_\alpha\big), \tag{4}$$

that is we have shown that the function $\wp_\alpha = g_\alpha + C_\alpha$ is multi p-periodic of period ω_2.

It remains to prove the uniqueness of C_α. We suppose that there is a constant C such that the function $\big(g_\alpha + C\big)$ is multi p-periodic of period ω_2, that is

$$g_\alpha(u + \omega_2) + C = e^{i\alpha}\big(g_\alpha(u) + C\big).$$

Using (4), we obtain $C - C_\alpha = e^{i\alpha}\big(C - C_\alpha\big)$, which implies $C = C_\alpha$. Let us now consider the period ω_1. We have

$$g'_\alpha(u + \omega_1) = -2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in\alpha}}{(u + \omega_1 - m\omega_1 - n\omega_2)^3} =$$

$$= -2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in\alpha}}{(u - (m-1)\omega_1 - n\omega_2)^3} = g'_\alpha(u).$$

Hence, $g'_\alpha(u + \omega_1) = g'_\alpha(u)$. We can deduce from this the following

$$g_\alpha(u + \omega_1) + C_\alpha = g_\alpha(u) + C_\alpha + B, \tag{5}$$

where B is some constant.

Let us now define B. Using equalities (4) and (5), we obtain

$$g_\alpha(u + \omega_2 + \omega_1) + C_\alpha = g_\alpha(u + \omega_2) + C_\alpha + B,$$

$$g_\alpha(u + \omega_1 + \omega_2) + C_\alpha = e^{i\alpha}\big(g_\alpha(u + \omega_1) + C_\alpha\big) = e^{i\alpha}\big(g_\alpha(u) + C_\alpha + B\big).$$

We can write B in the form

$$B = \frac{g_\alpha(u + \omega_2) - e^{i\alpha} g_\alpha(u) + C_\alpha(1 - e^{i\alpha})}{e^{i\alpha} - 1}.$$

Setting $u = -\dfrac{\omega_2}{2}$, we have

$$B = \frac{g_\alpha\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\alpha} g_\alpha\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\alpha} - 1} - C_\alpha.$$

According to the definition of C_α, we can conclude $B = C_\alpha - C_\alpha = 0$. Since $B = 0$, equalities (4), (5) imply that the function $\wp_\alpha = g_\alpha + C_\alpha$ belongs to $\mathcal{E}_p$ with $p = e^{i\alpha}$, $p \neq 1$, which completes the proof.

5. Generalization of the Weierstrass ζ and σ functions

Let us now consider the function

$$\zeta_\alpha(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{e^{in\alpha}}{u-\omega} + \frac{e^{in\alpha}}{\omega} + \frac{ue^{in\alpha}}{\omega^2}\right),$$

where $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}, Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0, \omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ m, n \in \mathbb{Z}$. The remainders of the series converge uniformly on the compact subsets of $\mathbb{C}$, see [4].

Differentiating ζ_α we obtain $g_\alpha(u) = -\zeta'_\alpha(u)$. Hence, $\wp_\alpha(u) = g_\alpha(u) + C_\alpha = C_\alpha - \zeta'_\alpha(u)$. We can rewrite ζ_α as follows

$$\zeta_\alpha(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\alpha}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right), \quad m^2+n^2\neq 0.$$

Fix $n \in \mathbb{Z}$ and denote

$$\chi_0(u) = \frac{1}{u} + \sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{u-m\omega_1} + \frac{1}{m\omega_1} + \frac{u}{m^2\omega_1^2}\right),$$

$$\chi_n(u) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right), \quad n\neq 0.$$

Then, ζ_α can be rewritten as follows

$$\zeta_\alpha(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\alpha}\chi_n(u). \tag{6}$$

Let $f(u) = 1 - \frac{u}{\omega}$. We have $\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u-\omega}$. Hence, we obtain

$$\int_0^u \frac{d\zeta}{\zeta-\omega} = \int_0^u \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \log f(u) - \log f(0)$$

for any branch of $\log f$ and specifically for the branch defined by the condition $\log f(0) = \log 1 = 0$. Thus, we have

$$\int_0^u \frac{d\zeta}{\zeta-\omega} = \log\left(1-\frac{u}{\omega}\right).$$

By A^* denote $\mathbb{C}$ with radial slits from ω to ∞. Integrating $\left(\chi_0(t) - \frac{1}{t}\right)$ and $\chi_n(t)$ along a path in A^* which connects the points 0 and u, we obtain

$$\int_0^u \left(\chi_0(t) - \frac{1}{t}\right)dt = \sum_{m\neq 0, n=0}\left(\log\left(1-\frac{u}{\omega}\right) + \frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right), \tag{7}$$

$$\int_0^u \chi_n(t)dt = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\log\left(1-\frac{u}{\omega}\right) + \frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right), \quad n\neq 0. \tag{8}$$

Let us consider the entire functions

$$\sigma_0(u) = u \prod_{m\neq 0, n=0} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}},$$

$$\sigma_n(u) = \prod_{m\in\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}}, \quad n \neq 0.$$

Using these functions, we can rewrite (7) and (8) in the form

$$\int_0^u \left(\chi_0(t) - \frac{1}{t}\right) dt = \log \frac{\sigma_0(u)}{u}, \quad \int_0^u \chi_n(t) dt = \log \sigma_n(u).$$

If we differentiate these relations, then we obtain

$$\chi_0(u) = \frac{\sigma_0'(u)}{\sigma_0(u)}, \quad \chi_n(u) = \frac{\sigma_n'(u)}{\sigma_n(u)}.$$

Taking into account such representations of $\chi_n(u)$, $n \in \mathbb{Z}$, we can rewrite (6) as follows

$$\zeta_\alpha(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\alpha} \frac{\sigma_n'(u)}{\sigma_n(u)}.$$

Hence, $\wp_\alpha$ can be rewritten in the next form

$$\wp_\alpha(u) = C_\alpha + \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\alpha} \frac{\sigma_n'^2(u) - \sigma_n''(u)\sigma_n(u)}{\sigma_n^2(u)}.$$

Remark 1. If we consider the product $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n(u)$, then we obtain the Weierstrass σ-function. If $\alpha = 0$, then ζ_0 is the Weierstrass ζ-function.

6. p-loxodromic function that corresponds to the generalized Weierstrass $\wp$-function

Let us consider the function

$$\rho_p(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(pq)^n z}{(z - q^n)^2}, \quad |q| < 1,\ |q| < |p| < \frac{1}{|q|}.$$

Since $|pq| < 1$, $q^n \to 0$ as $n \to +\infty$, and $\left|\frac{q}{p}\right| < 1$, the remainders of the series converge uniformly on the compact subsets of $\mathbb{C}^*$.

The function ρ_p belongs to $\mathcal{L}_{qp}$. Indeed,

$$\rho_p(qz) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(pq)^n qz}{(qz - q^n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{p^n q^{n-1} z}{(z - q^{n-1})^2} =$$

$$= p \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(pq)^{n-1} z}{(z - q^{n-1})^2} = p\rho_p(z).$$

The following theorem holds.

Theorem 2. *If* $q = e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$, $Im \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, *then* $\rho_p\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) = -\frac{\omega_1^2}{4\pi^2} \wp_\alpha(u)$, $p = e^{i\alpha} \neq 1$.

Proof. Let us consider the function

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(pq)^n}{z-q^n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k}\left(\frac{1}{q^k z - 1} + 1\right).$$

The remainders of the first series converge if $|p| < \frac{1}{|q|}$, and of the second if $|q| < |p|$. Hence, if $|q| < |p| < \frac{1}{|q|}$, the function f is meromorphic in $\mathbb{C}^*$. It is easy to verify that the functions f and ρ_p are connected as follows

$$\rho_p(z) = -zf'(z). \tag{9}$$

All points satisfying the equation

$$e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}} = q^n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

are simple poles of the function $f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right)$. If u satisfies relation (10), then $(u + m\omega_1)$, $m \in \mathbb{Z}$, satisfy it as well. Thus, $f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right)$ has the poles at the points $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Let now calculate the residues of $f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right)$ at the points ω. If $n \geqslant 0$, then

$$\lim_{u\to\omega}(u-\omega)f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) = \lim_{u\to\omega}(pq)^n \frac{u-\omega}{e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}} - e^{2\pi i \frac{\omega}{\omega_1}}} = \lim_{u\to\omega} p^n \frac{u-\omega}{e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(u-\omega)} - 1} = \frac{\omega_1}{2\pi i} p^n.$$

Similarly, if $n < 0, n = -k$, then we obtain

$$\lim_{u\to\omega}(u-\omega)f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) = \lim_{u\to\omega} p^n (u-\omega)\left(\frac{1}{e^{-2\pi i n \frac{\omega_2}{\omega_1}} e^{-2\pi i n \frac{u}{\omega_1}} - 1} + 1\right) =$$

$$= \lim_{u\to\omega} \frac{p^n(u-\omega)}{e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(u-\omega)} - 1} = \frac{\omega_1}{2\pi i} p^n.$$

Thus, the principal parts corresponding to each pole ω take the form $\frac{\omega_1}{2\pi i}\frac{p^n}{u-\omega}$.

Since $f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right)$ is a meromorphic in $\mathbb{C}$ function of variable u, in virtue of the Mittag-Leffler theorem [4] there exists a meromorphic function $F(u)$ with the same poles and principal parts. That is there exists an entire function $G(u)$ such that

$$f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) = G(u) + F(u).$$

Applying the theorem of expansion into the simple fraction [4] to the function $F(u)$, we obtain

$$F(u) = \frac{\omega_1}{2\pi i}\left(\frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0} \frac{u^2}{\omega^2}\frac{p^n}{u-\omega}\right).$$

Since the double series $\sum_{\omega\neq 0} \frac{1}{|\omega|^3}$ is convergent (see [3], [4]), the series on the right hand side of preceding equality is uniformly convergent on the compact subsets of $\mathbb{C}$.

Hence, we obtain

$$f\left(e^{2\pi i \frac{u}{\omega_1}}\right) = G(u) + \frac{\omega_1}{2\pi i}\left(\frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0} \frac{u^2}{\omega^2}\frac{p^n}{u-\omega}\right). \tag{11}$$

Relation (9) implies

$$\rho_p\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=-e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}f'\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right).$$

Differentiating equality (11), we have

$$-\rho_p\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=\frac{\omega_1}{2\pi i}G'(u)-\frac{\omega_1^2}{4\pi^2}\left(-\frac{1}{u^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{p^n}{\omega^2}-\frac{p^n}{(u-\omega)^2}\right)\right).$$

According to the definition of $\wp_\alpha$ we can deduce

$$-\rho_p\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=\frac{\omega_1}{2\pi i}G'(u)+\frac{\omega_1^2}{4\pi^2}\left(\wp_\alpha(u)-C_\alpha\right)$$

or this can be rewritten in the form

$$\frac{\omega_1^2}{4\pi^2}\wp_\alpha(u)+\rho_p\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=\frac{\omega_1^2}{4\pi^2}C_\alpha-\frac{\omega_1}{2\pi i}G'(u). \tag{12}$$

The function on the left hand side of equality (12) is p-elliptic as the sum of two p-elliptic functions. Thus, an entire function on the right hand side of (12) is p-elliptic. Since $|p|=1$ then (1) implies that every entire p-elliptic function is bounded in $\mathbb{C}$. Thus, by the Liouville theorem it is constant. The only constant function $g\in\mathcal{E}_p$ in the case $p\neq 1$ is $g\equiv 0$. Hence, we can conclude from (12) the equality

$$\rho_p\left(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\right)=-\frac{\omega_1^2}{4\pi^2}\wp_\alpha(u).$$

This completes the proof.

References

1. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer variabeln /*O. Rausenberger.* — Leipzig: Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884. — 470 p.
2. *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions: 2nd Edition / *G. Valiron.* — Paris: Masson et.Cie., 1947. — 522 p.
3. *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles / *Y. Hellegouarch.* — Academic Press, 2002. — 381 p.
4. *Hurwitz A.* Function theory /*A. Hurwitz, R. Courant.* — Moscow: Nauka, 1968. — 648 p. (in Russian)

Стаття: надійшла до редколегії 04.05.2016.
доопрацьована 05.06.2016.
прийнята до друку 08.06.2016.

p-ЕЛІПТИЧНІ ФУНКЦІЇ

Андрій КОНДРАТЮК,

Василина ХОРОЩАК, Дзвенислава ЛУКІВСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: v.khoroshchak@gmail.com
d.lukivska@gmail.com

Вивчено p-еліптичні функції (мероморфні у $\mathbb{C}$ функції, що задовольняють умови $g(u+\omega_1)=g(u)$, $g(u+\omega_2)=pg(u)$, $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1}>0$, $p\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$). У випадку $p=1$ — це класична теорія еліптичних функцій. Доведено зв'язок p-еліптичних функцій з p-локсодромними. Узагальнено еліптичну $\wp$-функцію Вейєрштрасса. Знайдено p-локсодромну функцію, яка відповідає узагальненій $\wp$-функції Вейєрштрасса у випадку $|p|=1$.

Ключові слова: p-еліптична функція, $\wp$-функція Вейєрштрасса, p-локсодромна функція, узагальнена $\wp$-функція Вейєрштрасса.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 130–141
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 130–141

УДК 517.9

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ НА АЛГЕБРАХ ТИПУ ВІНЕРА ТА ЙОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ

Ольга М'ЯУС

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Степана Бандери, 12, Львів, Україна
e-mail: myausolya@mail.ru

Побудовано функціональне числення Хілле-Філліпса-Балакрішнана на алгебрах типу Вінера обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі у класах узагальнених функцій та одержані його диференціальні властивості.

Ключові слова: узагальнена функція, операторне числення, генератор групи, алгебра типу Вінера.

1. Вступ. Перетворення

$$\widehat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)x dt, \tag{1}$$

де $U(t)$ — група операторів, називають перетворенням Е. Хілле, Р. Філліпса та А. Балакришнана, яке вони використовували для побудови функціонального числення [1, 2, 3] генераторів C_0 — груп операторів у згорткових алгебрах мір.

За допомогою перетворень вигляду (1) та їхніх узагальнень у [2] побудовано функціональне числення генераторів сильно неперервних груп операторів у класах обмежених функцій, у [4, 5, 6] – у певних класах узагальнених функцій експоненціального типу, зокрема, у [6] – на банахових алгебрах типу Вінера обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі. Зауважимо, що за допомогою перетворення

$$\widehat{x} = \int_{0}^{\infty} U(t)x dt,$$

де $U(t)$– півгрупа операторів, у [1, 7] та інших працях будують функціональне числення генераторів півгруп операторів.

Оскільки простори функцій експоненціального типу [8, 9] інваріантні щодо операторів диференціювання, то таке функціональне числення має деякі диференціальні властивості, яких немає у класичному функціональному численні операторів.

Мета нашої праці — побудувати функціональне числення на банахових алгебрах типу Вінера для інших, ніж у [6], просторів узагальнених функцій та визначити його диференціальні властивості.

2. Розподіли експоненціального типу. Нехай $L_1(\mathbb{R})$ — банахів простір сумовних функцій $\varphi(t)$ дійсної змінної $t \in \mathbb{R}$ з нормою $\|\varphi\|_{L_1} := \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, dt$. Якщо $\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R})$, то визначена згортка

$$(\varphi * \psi)(t) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\psi(t-s)\, ds.$$

Простір $L_1(\mathbb{R})$ є банаховою алгеброю стосовно згортки.

Нехай $L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})$ – простір сумовних функцій $\varphi(t)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |t^m \omega(at)\varphi(t)| dt < \infty$$

при фіксованих m, a $(m = 0, 1, 2, \dots; a > 0)$, де $\omega(t)$ $(-\infty < t < \infty)$– ціла трансцендентна функція нульового роду, корені якої лежать на уявній додатній півосі

$$\omega(t) = C \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{t}{it_k}\Big),$$

$C = const,\ \ C \geq 1,\ \ 0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots,\ \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{t_k} < \infty$, або $\omega(t) \equiv 1$.

Для кожного $\nu > 0$ у просторі $L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})$ визначимо [10] банахів підпростір

$$E_\nu^{(m,a,\omega)} := \Big\{\varphi(t) \in L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R}) \mid \ \|\varphi\|_{E_\nu^{(m,a,\omega)}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|D^k\varphi\|_{L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty\Big\},$$

який є інваріантним стосовно оператора диференціювання $D = \frac{d}{dt}$, тобто якщо $\varphi \in E_\nu^{(m,a,\omega)}$, то $D\varphi \in E_\nu^{(m,a,\omega)}$, вкладення $E_\nu^{(m,a,\omega)} \subset L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})$ ізометричне [10]. Нехай

$$E^{(m,a,\omega)} := \bigcup\nolimits_\nu E_\nu^{(m,a,\omega)} = lim\ ind_{\nu\to+\infty} E_\nu^{(m,a,\omega)}$$

– об'єднання просторів з топологією індуктивної границі стосовно неперервних вкладень $E_\nu^{(m,a,\omega)} \subset E_\mu^{(m,a,\omega)}$, де $\nu \leq \mu$. Простір $E^{(m,a,\omega)}$ належить області визначення оператора диференціювання D та є інваріантним щодо його дії [10].

У випадку $m = 0$ та $\omega \equiv 1$ отримуємо простори

$$\mathcal{E}^\nu := \Big\{\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}) \mid \ \|\varphi\|_{\mathcal{E}^\nu} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|D^k\varphi\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty\Big\} \quad \text{та} \quad \mathcal{E} := \bigcup\nolimits_{\nu>0} \mathcal{E}^\nu.$$

Простір $\mathcal{E}$ складається з усіх цілих аналітичних функцій на $\mathbb{C}$ експоненціального типу, звуження яких на дійсну вісь $\mathbb{R}$ належить $L_1(\mathbb{R})$. Операторне числення у цьому класі функцій та у класі лінійних неперервних функціоналів на ньому вивчене у [5].

Введемо [10] простір

$$E := \bigcap\nolimits_{m,a} E^{(m,a,\omega)} = lim\ pr_{m,a} E^{(m,a,\omega)}$$

з топологією проективної границі, впорядкувавши m, a так, щоб вкладення $E^{(m+1,a+1,\omega)} \subset E^{(m,a,\omega)}$ були неперервними. Згідно з [10] простір E секвенціально повний (див. [9]), інваріантний стосовно дії ізометричної групи зсувів $T_s : \varphi(t) \to \varphi(t-s)$, $s \in \mathbb{R}$ на $L_1(\mathbb{R})$.

Через $\mathcal{L}(E)$ позначаємо алгебру лінійних неперервних операторів над простором E з сильною операторною топологією.

Елементи спряженого простору E' називаємо [10] узагальненими функціями експоненціального типу. Простір E' — локально опуклий лінійний топологічний простір. У [10] доведено, що E' є інваріантним щодо диференціювання, тому коректно визначена операція диференціювання

$$\langle \varphi \mid D^k g \rangle = (-1)^k \langle D^k \varphi \mid g \rangle, \qquad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{2}$$

для всіх функціоналів $g \in E'$ і всіх цілих функцій $\varphi \in E$ на $\mathbb{R}$ експоненціального типу. Операцію згортки функцій $f \in E'$ та $\varphi \in E$ визначаємо формулою

$$(f * \varphi)(t) := \langle \varphi(t-s) \mid f(s) \rangle = \langle T_s \varphi(t) \mid f(t) \rangle.$$

У [10] доведено, що для кожної $f \in E'$ оператор згортки

$$K_f : E \ni \varphi \longrightarrow f * \varphi \tag{3}$$

належить простору $\mathcal{L}(E)$, задовольняє співвідношення

$$K_f T_{-s} \varphi = T_{-s} K_f \varphi \qquad \forall\, \varphi \in E, \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

і навпаки, якщо оператор $K_f \in \mathcal{L}(E)$ задовольняє умову (4), то існує єдиний функціонал $f \in E'$ такий, що оператор K_f набуває вигляду (3).

Згортку функцій $f, g \in E'$ визначаємо [10] формулою

$$\langle \varphi \mid f * g \rangle = [f * (g * \varphi)](0) \quad \forall \varphi \in E.$$

Тоді [10, 11]

$$(f * g) * \varphi = f * (g * \varphi) \quad \forall f, g \in E',\ \varphi \in E,$$

E' – топологічна алгебра щодо згортки

$$E' \times E' \ni (g, h) \longmapsto g * h \in E',$$

а E – її згорткова підалгебра.

За відомою теоремою Пейлі–Вінера–Шварца [12, с. 175], Фур'є-образ

$$\widehat{E} := \left\{ \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\cdot\xi} \varphi(t)\, dt \ (\xi \in \mathbb{R}) \ : \ \varphi(t) \in E \right\}$$

простору E з індуктивною топологією при перетворенні Фур'є

$$\mathcal{F} \colon E \ni \varphi \longrightarrow \widehat{\varphi} \in \widehat{E}$$

складається з нескінченно диференційовних фінітних функцій на $\mathbb{R}$. Тому

$$\widehat{E} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{5}$$

де $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – класичний простір основних функцій Шварца. Згідно з [10]

$$\mathcal{F}(g * h) = \widehat{g * h} = \widehat{g} \cdot \widehat{h}, \qquad g, h \in E'$$

і тоді Фур'є-образ $\widehat{E'}$ простору E' – топологічна алгебра з поточковим множенням, а $\widehat{E}$ – її підалгебра щодо множення; $\langle \widehat{E} \mid \widehat{E'} \rangle$ утворює нову дуальну пару, що є Фур'є-образом дуальної пари $\langle E \mid E' \rangle$.

3. Алгебра Вінера $W_\pi(B)$**.** Нехай X — банахів рефлексивний простір, X' — дуальний до нього; $\mathcal{B}(X^n)$ — сукупність обмежених n-лінійних функціоналів на $X^n = X \times \ldots \times X$; $\mathcal{B}(X_s^n)$ — сукупність усіх симетричних n-лінійних функціоналів h, тобто таких, що $h(x_1, \ldots, x_n) = h(x_{s_1}, \ldots, x_{s_n})$ для кожного елемента $s = (s_1, \ldots, s_n)$ групи $\mathcal{G}_n$ перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$; $\mathcal{P}^n(X)$ — сукупність n-однорідних функціоналів $f : X \to \mathbb{C}$, тобто таких, що

$$f(x) = (h \circ \Delta_n)(x) \quad \forall x \in X \quad \text{та деякого} \quad h \in \mathcal{B}(X^n),$$

де Δ_n – вкладення X в X^n, а саме $\quad \Delta_n : X \longrightarrow X^n \qquad (x \longmapsto (x, \ldots, x))$.

Алгебричний проективний тензорний добуток n просторів Банаха

$$X^{\otimes n} = X \otimes \ldots \otimes X$$

складається з усіх скінченних сум

$$u = \sum_j x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{nj}, \qquad x_{ij} \in X, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \in \mathbb{N} \tag{6}$$

зі звичайними алгебричними операціями [13, 14].

Нехай $X_\pi^{\otimes n}$ — алгебричний тензорний добуток $X^{\otimes n}$ з проективною нормою [13]

$$\|u\|_\pi = \inf \sum_j \|x_{1j}\| \cdots \|x_{nj}\|.$$

Тут інфімум приймаємо за всіма скінченними зображеннями (6),

$X_\pi'^{\otimes n}$ — проективний тензорний добуток дуальних банахових просторів X' (відомо [3], IV.9, [15], що $X_\pi'^{\otimes n}$ є замкненим підпростором простору $(X_\pi^{\otimes n})'$);

$\langle u \mid F_n' \rangle$ — значення лінійного функціоналу $F_n' \in X_\pi'^{\otimes n}$ на $u \in X_\pi^{\otimes n}$;

$x_1 \odot \ldots \odot x_n := \frac{1}{n!} \sum_{s=(s_1,\ldots,s_n) \in \mathcal{G}_n} x_{s_1} \otimes \ldots \otimes x_{s_n}$ — елементи симетричного проективного тензорного добутку $X_\pi^{\odot n}$;

$x^{\odot n} := x \odot \ldots \odot x \in X_\pi^{\odot n}, \;\; x^{\odot 0} := 1 \in \mathbb{C} \quad \forall x \in X$.

Згідно з [15] кожному функціоналу $F_n' \in X_\pi'^{\odot n}$ відповідає єдиний n-однорідний поліном F_n [16, 17] такий, що

$$F_n(x) := \langle x^{\odot n} \mid F_n' \rangle \text{ для всіх } x \in X.$$

Позначимо

$$\mathcal{P}_\pi^n(X) = \left\{ F_n \colon F_n' \in X_\pi'^{\odot n} \right\}, \; n = 1, 2, \ldots, \; \mathcal{P}_\pi^0(X) = \mathbb{C}.$$

На $\mathcal{P}_\pi^n(X)$ визначаємо норму

$$\|F_n\| := \|F_n'\|_\pi, \quad \forall F_n' \in X_\pi^{'\odot n}$$

та одержуємо ізометрію $\mathcal{P}_\pi^n(X)$ та $X_\pi'^{\odot n}$ [18, Prop. 1]. Зауважимо, що $\quad \mathcal{P}_\pi^n(X) \subset \mathcal{P}^n(X)$.

Користуючись подібним означенням для просторів Гільберта з [19], у [20] введена алгебра Вінера

$$W_\pi(X) := \Big\{F = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n \colon F_n \in \mathcal{P}_\pi^n(X)\Big\}$$

зі скінченною нормою $\|F\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|F_n\|$.

При $X = \mathbb{C}$ отримуємо класичну алгебру Вінера.

Нехай $B = B(X) = \big\{x \in X \colon \|x\| < 1\big\}$ – відкрита одинична куля в X. Згідно з [18], $W_\pi(B)$ – банахова підалгебра з одиницею алгебри всіх обмежених аналітичних функцій на $B(X)$.

У [21] досліджено властивості секторіальних операторів на алгебрах типу Вінера. Функціональне числення для генераторів сильно неперервних груп ізометричних лінійних операторів, що діють на алгебрі Вінера $W_\pi(B)$, побудоване в [6] у Фур'є-образах просторів $\mathcal{E}$ та $\mathcal{E}'$. Тут будуємо його у Фур'є-образах просторів E, E' та визначаємо диференціальні властивості побудованого функціонального числення.

4. Функціональне числення на алгебрі Вінера. Нехай U_t $(t \in \mathbb{R})$ — C_0-група лінійних ізометричних операторів на X з генератором $-A$. Тоді на алгебрі $W_\pi(B)$ коректно визначена [18] C_0-група ізометричних операторів

$$\widehat{U}_t F(x) = F(U_t x), \quad x \in B, \quad F \in W_\pi(B).$$

Також $\widehat{U}_t$ є групою алгебричних автоморфізмів

$$\widehat{U}_t(F \cdot G) = \big(\widehat{U}_t F\big) \cdot \big(\widehat{U}_t G\big).$$

Справді, оскільки $F \cdot G = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} F_k \cdot G_{n-k}\Big)$, то

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_t(F \cdot G)(x) &= (F \cdot G)(U_t x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k=0}^{n} F_k(U_t x) \cdot G_{n-k}(U_t x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n(U_t x) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} G_n(U_t x) \\
&= \big(\widehat{U}_t F\big)(x) \cdot \big(\widehat{U}_t G\big)(x), \quad x \in B.
\end{aligned}$$

Позначаємо через $\mathcal{L}(W_\pi)$ банахову алгебру всіх обмежених лінійних операторів на W_π. Нехай A' — спряжений до A, I' — одиничний оператор в X',

$A'_j := \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{j-1} \otimes A' \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad A'_0 = I'$,

$-\widehat{A}$ — генератор групи $\widehat{U}_t$.

5. Властивості фінітних функцій від оператора $\widehat{A}$. Для кожної $\varphi \in E$ визначаємо оператори

$$\widehat{\varphi}(A) = \int_{\mathbb{R}} U_t \varphi(t)\, dt,$$

$$[\widehat{\varphi}(A_j)]' := \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{j-1} \otimes [\widehat{\varphi}(A)]' \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $[\widehat{\varphi}(A)]'$ – спряжений до $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{L}(X)$, $[\widehat{\varphi}(A_0)]' = I'$.

Оператори $\widehat{\varphi}(A)$ та $[\widehat{\varphi}(A)]'$ обмежені на X і $X_\pi'^{\odot n}$, відповідно.

Згідно з [18]

$$\widehat{A}F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} A_j' F_n' \right\rangle,$$

а за теоремою 1 [6] для кожної $\varphi \in E$ оператор $\widehat{\varphi}(\widehat{A})$

$$\widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} [\widehat{\varphi}(A_j)]' F_n' \right\rangle, \qquad x \in B, \quad F \in W_\pi \tag{7}$$

належить до банахової алгебри $\mathcal{L}(W_\pi)$.

Теорема 1. *Для довільних* $\varphi, \psi \in E$

$$\widehat{(D^k\varphi)}(\widehat{A}) = \widehat{A}^k \, \widehat{\varphi}(\widehat{A}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(\widehat{A}) = \widehat{\varphi}(\widehat{A})\widehat{\psi}(\widehat{A}). \tag{9}$$

Доведення. Доведемо спочатку диференціальну властивість (8). Для довільних $\varphi \in E$, $F \in W_\pi$, $x \in B$ знайдемо $\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x)$. Згідно з означенням

$$\begin{aligned}
\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{(D\varphi)}(A_j)\right]' F_n' \right\rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{(D\varphi)}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F_n' \right\rangle.
\end{aligned}$$

Використовуючи властивість групи, доводимо, що

$$\widehat{(D\varphi)}(A) = \int_{\mathbb{R}} U_t (D\varphi)(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} DU_t \varphi(t)dt = A\widehat{\varphi}(A),$$

тобто

$$\widehat{(D\varphi)}(A) = A\widehat{\varphi}(A). \tag{10}$$

Тоді $\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x)$ набуває вигляду

$$\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes [A\widehat{\varphi}(A)]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F_n' \right\rangle =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} [\widehat{\varphi}(A)]' A' F_n' \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} A' [\widehat{\varphi}(A)]' F_n' \right\rangle.$$

Для довільних $y \in D(A')$ матимемо

$$\sum_{j=1}^{n} A' \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' y =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} I'y_1 \otimes \ldots \otimes I'y_{j-1} \otimes A' \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' y_j \otimes I'y_{j+1} \otimes \ldots \otimes I'y_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A'_j \Big(I'y_1 \otimes \ldots \otimes I'y_{j-1} \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' y_j \otimes I'y_{j+1} \otimes \ldots \otimes I'y_n \Big).$$

Врахувавши означення $\widehat{A}$ та $\widehat{\varphi}(\widehat{A}) \in \mathcal{L}(W_\pi)$, одержуємо

$$\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{k=0}^{n} \frac{A'_k}{n!} \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in\mathcal{G}_n} \Big(\underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{k-1} \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\right]' \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-k} \Big) \Big(F'_{n,s_1} \otimes \ldots \otimes F'_{n,s_n} \Big) \right\rangle$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{k=0}^{n} A'_k \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{\varphi}(A_j)\right]' F'_n \right\rangle =$$

$$= \widehat{A} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{\varphi}(A_j)\right]' F'_n \right\rangle = \widehat{A}\, \widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x),$$

а отже, для довільних $\varphi \in E$, $F \in W_\pi$, $x \in B$

$$\widehat{(D\varphi)}(\widehat{A})F(x) = \widehat{A}\, \widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x). \tag{11}$$

Так само для довільно вибраного k, враховуючи, що $\widehat{(D^k\varphi)}(A) = A^k \widehat{\varphi}(A)$ [11] та попередні перетворення, маємо

$$\widehat{(D^k\varphi)}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{(D^k\varphi)}(A_j)\right]' F'_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{(D^k\varphi)}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[A^k \widehat{\varphi}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle =$$

$$= \widehat{A}^k \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F'_n \right\rangle =$$

$$= \widehat{A}^k \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{j=0}^{n} \widehat{\varphi}(\widehat{A}_j) F'_n \right\rangle = \widehat{A}^k\, \widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x).$$

Для довільних $\varphi, \psi \in E$ визначеною є згортка функцій $\varphi * \psi \in E$, $\widehat{\varphi}(A)\widehat{\psi}(A) \in \mathcal{L}(X)$ та відома властивість $\widehat{(\varphi * \psi)}(A) = \widehat{\varphi}(A)\widehat{\psi}(A)$ [11].

Для довільних $\varphi, \psi \in E$, $F \in W_\pi$, $x \in B$ знайдемо

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \left[\widehat{(\varphi * \psi)}(A_j)\right]' F_n' \right\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{(\varphi * \psi)}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F_n' \right\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes \left[\widehat{\varphi}(A)\widehat{\psi}(A)\right]'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j} F_n' \right\rangle.$$

Звідси, як при доведенні попередньої властивості, отримуємо

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(\widehat{A})F(x) = \widehat{\varphi}(\widehat{A})\,\widehat{\psi}(\widehat{A})F(x)$$

для довільних $F \in W_\pi$ та $x \in B$, а отже, властивість (9). Теорема доведена.

$\square$

6. Узагальнені функцій від оператора $\widehat{A}$ та їхні властивості. Визначимо поповнення

$$E(W_\pi) := E \otimes_\pi W_\pi$$

тензорного добутку $E \otimes W_\pi$ з відповідною проективною тензорною нормою.

З відомої теореми Гротендіка [3, с. 122] про зображення елементів проективного тензорного добутку випливає, що для кожної $F \in E(W_\pi)$ існує набір $\varphi_j \in E$, $j \in \mathbb{N}$ такий, що ряди

$$F = \sum_{j\in\mathbb{N}} F_j \otimes \varphi_j \qquad F_j \in W_\pi, \quad \varphi_j \in E \tag{12}$$

абсолютно збігаються в $E(W_\pi)$. Кожний елемент $F \in E(W_\pi)$ є W_π-значна ціла функція експоненціального типу

$$R \ni t \longmapsto F(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} F_j(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} F_j(x) \otimes \varphi_j(t), \quad F_j \in W_\pi, \quad \varphi_j \in E.$$

Отже, визначені елементи

$$\widehat{F} := \{\sum_{j\in\mathbb{Z}^+} \widehat{\varphi}_j(\widehat{A})F_j : \quad F_j \in W_\pi,\ \ \varphi_j \in E\} \in \widehat{E}(W_\pi),$$

де $\widehat{\varphi}_j(\widehat{A})$ визначена формулою (7).

Підпростір

$$\widehat{E}(W_\pi) := \left\{\widehat{F} \colon F \in E(W_\pi)\right\}$$

повний щодо норми, індукованої відображенням $E(W_\pi) \ni F \longmapsto \widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi)$ (доводиться як лема 5 у [4]).

Визначимо згортку розподілу експоненціального типу $g \in E'$ і W_π-значної цілої функції експоненціального типу $F \in E(W_\pi)$, поданої за допомогою ряду (12)

$$(F * g)(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} F_j(x) \otimes (g * \varphi_j)(t), \qquad x \in B, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

де $g * \varphi$ – згортка розподілу $g \in E'$ і $\varphi \in E$.

Підпростір $\widehat{E}(W_\pi)$ інваріантний щодо кожного

$$\widehat{K}_g : \widehat{K}_g \widehat{F} := \widehat{F * g}, \qquad g \in E'$$

(доводиться за схемою доведення леми 6 із [4]).

Позначаємо через $\mathcal{L}\left[\widehat{E}(W_\pi)\right]$ алгебру всіх обмежених лінійних операторів на просторі $\widehat{E}(W_\pi)$ з сильною операторною топологією.

Для $g \in E'$ визначимо лінійний оператор $\widehat{g}(\widehat{A})$ формулою

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\widehat{A})\colon \widehat{E}(W_\pi) \ni \widehat{F} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \widehat{\varphi}_j(\widehat{A}) F_j \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F}, \\ \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F} := \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \widehat{(g * \varphi_j)}(\widehat{A}) F_j \in \widehat{E}(W_\pi). \end{aligned} \tag{14}$$

Теорема 2. *Відображення*

$$\widehat{E'} \ni \widehat{g} \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A}) \in \mathcal{L}\left[\widehat{E}(W_\pi)\right]$$

є неперервним гомоморфізмом алгебри $\widehat{E'}$ на $\mathcal{L}\left[\widehat{E}(W_\pi)\right]$. Для довільної $g \in E'$

$$\widehat{(D^k g)}(\widehat{A}) = \widehat{A}^k \widehat{g}(\widehat{A}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

де похідна Dg узагальненої функції g визначена формулою (2).

Доведення. За властивостями згортки та з означення простору $\widehat{E}$ одержуємо, що $\widehat{K}_g : \widehat{E} \longrightarrow \widehat{E}$. За означенням $\widehat{E}(W_\pi)$

$\widehat{F}^m \to \widehat{F}$ у просторі $\widehat{E}(W_\pi)$ тоді і тільки тоді, коли

$F^m \to F$ у просторі $E(W_\pi)$, $\quad m \to \infty$.

Якщо ж $F^m \to F$, $m \to \infty$ у просторі $E(W_\pi)$, то за неперервністю K_g матимемо: $K_g F^m \to K_g F$, $m \to \infty$ у просторі E. Звідси знову за означенням $\widehat{E}(W_\pi)$ отримуємо $\widehat{K}_g \widehat{F^m} \to \widehat{K}_g \widehat{F}$, $m \to \infty$. Ми з'ясували, що $\widehat{K}_g \in \mathcal{L}(\widehat{E})$.

Для довільних узагальнених функцій f, g із рівності

$$K_{f*g} = K_f K_g$$

випливає

$$\widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \widehat{K}_g.$$

Отже, побудоване функціональне числення реалізує алгебричний гомоморфізм із згорткової алгебри узагальнених функцій на алгебру неперервних операторів над простором $\widehat{E}(W_\pi)$.

Щоб довести неперервність функціонального числення, використовуємо, що у просторі $\widehat{E}'$ топологія індукується з E', а в просторі E' задано слабку топологію. Отож, достатньо довести неперервність відображення

$$E' \ni g \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi) \text{ для кожного } \widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi).$$

За властивістю згортки одержуємо неперервність

$$E' \ni g \longrightarrow K_g \in \mathcal{L}(E(W_\pi)),$$

а звідси також неперервність відображення

$$E' \ni g \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F} \in E(W_\pi).$$

Якщо $g_m \to g$ у просторі E', то

$$(I \otimes K_{g_m})F \to (I \otimes K_g)F$$

у просторі $E(W_\pi)$. З означення $\widehat{E}$ матимемо $\widehat{K}_{g_m}\widehat{F} \to \widehat{K}_g\widehat{F}$ у просторі $\widehat{E}(W_\pi)$. Отже, відображення

$$E' \ni g \longrightarrow \widehat{K}_g\widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi)$$

є неперервним.

Доведемо диференціальну властивість (15). Використовуючи означення (14) узагальненої функції від оператора, для довільних $g \in E'$, $\widehat{F} \in \widehat{E}(W_\pi)$ матимемо

$$\widehat{(Dg)}(\widehat{A})\widehat{F} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^+} (\widehat{Dg * \varphi_j})(\widehat{A})F_j \tag{16}$$

з деякими функціями $F_j \in W_\pi$, $\varphi_j \in E$. За властивостями згортки

$$Dg * \varphi = g * D\varphi = D(g * \varphi).$$

Для кожної $F_j \in W_\pi$ матимемо

$$(\widehat{Dg * \varphi_j})(\widehat{A})F_j(x) = D\widehat{(g * \varphi_j)}(\widehat{A})F_j(x)$$

і ці функції визначаються формулою (7) (оскільки $g * \varphi \in E$ для довільних $g \in E'$, $\varphi \in E$)

$$\begin{aligned} &D\widehat{(g * \varphi_j)}(\widehat{A})F_j(x) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \sum_{k=0}^{n} \left[D\widehat{(g * \varphi_j)}(A_k)\right]' F_n' \right\rangle = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \;\Big|\; \left[\sum_{k=0}^{n} \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes [D\widehat{(g * \varphi_j)}(A)]'}_{k} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-k}\right] F_n' \right\rangle \end{aligned}$$

для всіх $x \in B$. За доведеним у [10]

$$D\widehat{(g * \varphi_j)}(A) = A\,\widehat{(g * \varphi_j)}(A),$$

звідки попередній вираз набуває вигляду

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle x^{\odot n}\;\middle|\;\left[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'\otimes[A(\widehat{g*\varphi_j})(A)]'}_{k}\otimes\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'}_{n-k}\right]F_n'\right\rangle,$$

а останній, як при виведенні властивості (8), дорівнює

$$\widehat{A}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle x^{\odot n}\;\middle|\;\left[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'\otimes[(\widehat{g*\varphi_j})(A)]'}_{k}\otimes\underbrace{I'\otimes\ldots\otimes I'}_{n-k}\right]F_n'\right\rangle=$$

$$=\widehat{A}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle x^{\odot n}\;\middle|\;\sum_{s=0}^{n}\left[(\widehat{g*\varphi_j})(A_k)\right]'F_n'\right\rangle=\widehat{A}\,(\widehat{g*\varphi_j})(\widehat{A})F_j(x),\quad x\in B.$$

Ми довели, що

$$(\widehat{Dg*\varphi_j})(\widehat{A})F_j(x)=\widehat{A}\,(\widehat{g*\varphi_j})(\widehat{A})F_j(x),\quad x\in B.$$

Звідси, на підставі формул (14) та (16), одержуємо бажану властивість (15) при $k=1$. Випадок $k=2,3,\ldots$ розглядаємо як при доведенні теореми 1 із використанням відомих відповідних властивостей функцій оператора A та властивостей згорток. □

Список використаної літератури

1. *Balakrishnan A.V.* An operational calculus of infinitesimal operators of semigroups / A.V. Balakrishnan // Trans. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 91. — P. 330–351 (doi: 10.1090/5002-9947-1959-0107179-0.)
2. *Baeumer B.* Unbounded functional calculas for bounded groups with applications / B. Baeumer, M. Haase and M. Kovcs // J. Evol. Eqn. — 2009. — Vol. 9. — P. 171–195.
3. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства / Х. Шефер — М: Мир, 1971.
4. *Lozynska V.Ja.* Analytical distributions of exponential type / V.Ja. Lozynska, O.V. Lopushansky // Mat. met. and phys.-mech. fields. — 1999. — Vol. 42, №4. — P. 46–55.
5. *Lopushansky O.V.* Operator calculas in algebras of distributions of exponential type / O.V. Lopushansky, V.Ja. Lozynska // Mat. met. and phys.-mech. fields. — 2000. — Vol. 43, №3. — P. 24–33.
6. *Myaus O.M.* Functional calculus on a Wiener type algebra of analytic functions of infinite many variables / O.M. Myaus // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech/Mat. — 2012. — Vol. 76. — P. 231–237.
7. *Parta M.I.* Operator calculas on the class of Sato's hyperfunctions / M.I. Parta, S.V. Sharyn // Carp. Math. Publ. — 2013. — Vol. 5, №1. — P. 114–120.
8. *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа / Я.В. Радыно // Докл. АН БССР. — 1983. — Т. 27, №9. — С. 791–793.
9. *Лопушанський О.В.* Операторне числення на ультрагладких векторах / О.В. Лопушанський // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, №4. — С. 502–513.
10. *Lozynska V.Ja.* On generalized functions of exponential type / V.Ja. Lozynska, O.M. Myaus // Prykladni prob. of mech. and mat. — 2006. — Vol.4. — P. 48–53.

11. *Lozynska V. Ja.* Distributions of exponential type and functional calculas / V. Ja. Lozynska, O.M. Myaus // Mat. meth. and phys.-mech. fields. — 2004. — Vol. 4, №2. — P. 44–49.
12. *Владимиров B.C.* Уравнения математической физики / B.C. Владимиров — M.: Наука, 1981.
13. *Grothendieck A.* Résumé de la théorie métrique des products tensorels topologiques / A. Grothendieck // Bol. Soc Math São Paulo. — 1953. — Vol. 8. — P. 1–79.
14. *Grotendieck A.* Products tensoriel topologues et espases nucleaire / A. Grothendieck // Mem. Amer. Math. Soc. — 1955. — Vol. 16, №2. — P. 1–140.
15. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces / S. Dineen — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
16. *Aron R.* An introduction to polynomials on Banach spaces / R. Aron // Extracta Mathematics. — 2002. — Vol. 17, №3. — P. 303–329.
17. *Bochnak J.* Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces / J. Bochnak, J. Siciak // Studia Mathematica. — Vol. XXXIX. — P. 59–76.
18. *Bednarz A.* Exponential Type Vectors in Wiener algebras on a Banach ball / A. Bednarz // Opuscula Matematica. — 2008. — Vol. 28, №1. — P. 5–17.
19. *Lopushansky O., Zagorodnyuk A.* Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables / // Annales Polonici Mathematici. — 2003. — Vol. 81, №2. — P. 111–122.
20. *Bednarz A.* Exponential Type Vectors of Isometric Group Generators / A. Bednarz, O.V. Lopushansky // Matematychni Studii. — 2002. — Vol. 18, №1. — P. 99–106.
21. *Lopushansky A.* Sectorial operators on Wiener algebras of analytic functions / A. Lopushansky // Topology. — 2009. — Vol. 48, №2-4. — P. 105–110.

Стаття: надійшла до редколегії 25.04.2016
прийнята до друку 08.06.2016

FUNCTIONAL CALCULUS ON WIENER TYPE ALGEBRAS AND ITS DIFFERENTIAL PROPERTIES

Olga MYAUS

Lviv Polytechnic National University,
Stepan Bandera str., 12, Lviv, Ukraine
e-mail: myausolya@mail.ru

Hille-Phillips-Balacrishnan functional calculus on Wiener algebras of bounded analytical functions on unit ball and its differential properties are obtained.

Key words: generalized function, operator calculus, generator of group, Wiener type algebra.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 142–158
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 142–158

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, Україна
e-mail: snitkog@ukr.net

З'ясовано умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежних від часу коефіцієнтів при перших похідних невідомої функції у двовимірному параболічному рівнянні в області, розташування частини межі якої визначається невідомими залежними від часу функціями.

Ключові слова: обернена задача, вільна межа, параболічне рівняння, функція Гріна.

Ми досліджуємо задачу, яка поєднує два типи задач, а саме, коефіцієнтну обернену задачу і задачу з вільною межею. Кожен із цих типів вивчали раніше, проте їхнє поєднання в одній задачі недостатньо вивчене питання. У [1]–[4] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при молодшій похідній невідомої функції в одновимірних параболічних рівняннях в областях з відомими межами. Заміною незалежних змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з фіксованими межами. Такий підхід дає змогу об'єднати два типи задач — коефіцієнтні обернені задачі та задачі з вільними межами в один. У працях [5]–[8] знайдено умови однозначної розв'язності обернених задач визначення залежних від часу старших коефіцієнтів в одно- та двовимірних параболічних рівняннях в областях з вільними межами. Дослідження обернених задач для двовимірних параболічних рівнянь з невідомими залежними від часу молодшими коефіцієнтами в областях з вільними межами є актуальним.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < l(t), 0 < x_2 < h(t), 0 < t < T\}$, де $l = l(t)$, $h = h(t)$ – невідомі функції, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $b_1(t), b_2(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = \Delta u + b_1(t)u_{x_1} + b_2(t)u_{x_2} + f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

за умов

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in [0, l(0)] \times [0, h(0)], \tag{2}$$

$$u(0,x_2,t)=\mu_1(x_2,t),\quad u(l(t),x_2,t)=\mu_2(x_2,t),\ (x_2,t)\in[0,h(t)]\times[0,T],$$
$$u(x_1,0,t)=\mu_3(x_1,t),\quad u(x_1,h(t),t)=\mu_4(x_1,t),\ (x_1,t)\in[0,l(t)]\times[0,T], \tag{3}$$

$$l'(t)=-\int_0^{h(t)}u_{x_1}(l(t),x_2,t)dx_2+\mu_5(t),\quad h'(t)=-\int_0^{l(t)}u_{x_2}(x_1,h(t),t)dx_1+\mu_6(t),$$

$$\int_0^{l(t)}\int_0^{h(t)}u(x_1,x_2,t)dx_2dx_1=\mu_7(t),\ \int_0^{l(t)}\int_0^{h(t)}x_2u(x_1,x_2,t)dx_2dx_1=\mu_8(t),\ t\in[0,T]. \tag{4}$$

Заміною змінних $y_1=\dfrac{x_1}{l(t)},\ y_2=\dfrac{x_2}{h(t)}$ задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(l(t),h(t),b_1(t),b_2(t),v(y_1,y_2,t))$, де $v(y_1,y_2,t)=u(y_1l(t),y_2h(t),t)$, в області $Q_T=\{(y_1,y_2,t):0<y_1<1,0<y_2<1,0<t<T\}$

$$v_t=\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}+\frac{b_1(t)+y_1l'(t)}{l(t)}v_{y_1}+\frac{b_2(t)+y_2h'(t)}{h(t)}v_{y_2}+$$
$$+f(y_1l(t),y_2h(t),t),\ (y_1,y_2,t)\in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y_1,y_2,0)=\varphi(y_1l(0),y_2h(0)),\quad (y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1], \tag{6}$$

$$v(0,y_2,t)=\mu_1(y_2h(t),t),\quad v(1,y_2,t)=\mu_2(y_2h(t),t),\quad (y_2,t)\in[0,1]\times[0,T],$$
$$v(y_1,0,t)=\mu_3(y_1l(t),t),\quad v(y_1,1,t)=\mu_4(y_1l(t),t),\quad (y_1,t)\in[0,1]\times[0,T], \tag{7}$$

$$l'(t)=-\frac{h(t)}{l(t)}\int_0^1 v_{y_1}(1,y_2,t)dy_2+\mu_5(t),\quad t\in[0,T], \tag{8}$$

$$h'(t)=-\frac{l(t)}{h(t)}\int_0^1 v_{y_2}(y_1,1,t)dy_1+\mu_6(t),\quad t\in[0,T], \tag{9}$$

$$h(t)l(t)\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_7(t),\quad t\in[0,T], \tag{10}$$

$$h^2(t)l(t)\int_0^1\int_0^1 y_2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_8(t),\quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

2. Основні результати. Умови на вихідні дані, за яких існує єдиний розв'язок задачі (5)–(11), зазначені в таких теоремах.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T])$, $\varphi\in C^2([0,\infty)\times[0,\infty))$, $\mu_i\in C^{2,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $i=1,2$, $\mu_j\in C^{2,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $j=3,4$, $\mu_k\in C[0,T]$, $k=5,6$, $\mu_n\in C^1[0,T]$, $n=7,8$;

2) $f(x_1,x_2,t) \geqslant 0$, $(x_1,x_2,t) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T]$, $0<\varphi_0\leqslant\varphi(x_1,x_2)\leqslant\varphi_1<\infty$, $(x_1,x_2)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2)>0$, $\varphi_{x_2}(x_1,x_2)>0$, $(x_1,x_2)\in[0,l(0)]\times[0,h(0)]$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2)-\varphi_{x_1}(x_1,h(0)-x_2)>0$, $\varphi_{x_2}(x_1,h(0)-x_2)-\varphi_{x_2}(x_1,x_2)>0, (x_1,x_2)\in[0,l(0)]\times\left[0,\frac{h(0)}{2}\right)$, $\mu_n(t)>0$, $n=7,8,\ t\in[0,T]$;

3) *умови узгодження нульового та першого порядків.*

Тоді можна зазначити таке число $T_0, 0<T_0\leqslant T$, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок $(l,h,b_1,b_2,v)\in(C^1[0,T_0])^2\times(C[0,T_0])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $l(t)>0,\ h(t)>0,\ t\in[0,T_0]$, задачі (5)–(11).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T])$, $\mu_i\in C^{3,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $i=1,2$, $\mu_j\in C^{3,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $j=3,4$;

2) $0<\varphi_0\leqslant\varphi(x_1,x_2)\leqslant\varphi_1<\infty$, $(x_1,x_2)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2)-\varphi_{x_1}(x_1,h(0)-x_2)>0$, $\varphi_{x_2}(x_1,h(0)-x_2)-\varphi_{x_2}(x_1,x_2)>0$, $(x_1,x_2)\in[0,l(0)]\times\left[0,\frac{h(0)}{2}\right)$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2)>0$, $\varphi_{x_2}(x_1,x_2)>0$, $(x_1,x_2)\in[0,l(0)]\times[0,h(0)]$, $\mu_n(t)>0$, $n=7,8,\ t\in[0,T]$.

Тоді можна зазначити таке число $t_0, 0<t_0\leqslant T$, яке визначається вихідними даними, що задача (5)–(11) не може мати двох різних розв'язків $(l,h,b_1,b_2,v)\in(C^1[0,t_0])^2\times(C[0,t_0])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$, $l(t)>0,\ h(t)>0,\ t\in[0,t_0]$.

3. Існування розв'язку задачі (5)–(11). Доведення існування розв'язку задачі (5)–(11) ґрунтується на зведенні задачі до системи рівнянь стосовно невідомих і застосуванні до неї теореми Шаудера про нерухому точку. Спочатку визначимо значення невідомих функцій $l(t),h(t)$ у початковий момент часу. З умов (2), (4) отримуємо

$$\int_0^{l_0}\int_0^{h_0}\varphi(x_1,x_2)dx_2dx_1=\mu_7(0),\quad \int_0^{l_0}\int_0^{h_0}x_2\varphi(x_1,x_2)dx_2dx_1=\mu_8(0),\tag{12}$$

$l_0=l(0),\ h_0=h(0)$. Позначивши $\int\limits_0^{l_0}\varphi(x_1,x_2)dx_1=\psi(l_0,x_2)$, подамо (12) у вигляді

$$\int_0^{h_0}\psi(l_0,x_2)dx_2=\mu_7(0),\quad \int_0^{h_0}x_2\psi(l_0,x_2)dx_2=\mu_8(0).$$

Згідно з припущеннями теореми

$$l_0\varphi_0\leqslant\psi(l_0,x_2)\leqslant l_0\varphi_1.$$

Тоді

$$l_0h_0\varphi_0\leqslant\int_0^{h_0}\psi(l_0,x_2)dx_2\leqslant l_0h_0\varphi_1.$$

Функція $y = \int\limits_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)dx_2$ за довільного фіксованого $l_0 > 0$ монотонно зростаюча стосовно h_0. Отож, існує єдине значення $h_0(l_0)$, яке є розв'язком рівняння

$$\int\limits_0^{h_0(l_0)} \psi(l_0, x_2)dx_2 = \mu_7(0).$$

Отже,

$$\frac{\mu_7(0)}{l_0\varphi_1} \leqslant h_0(l_0) \leqslant \frac{\mu_7(0)}{l_0\varphi_0}, \qquad \frac{\varphi_0\mu_7^2(0)}{2l_0\varphi_1^2} \leqslant \int\limits_0^{h_0(l_0)} x_2\psi(l_0, x_2)dx_2 \leqslant \frac{\varphi_1\mu_7^2(0)}{2l_0\varphi_0^2}.$$

Тоді $y = \int\limits_0^{h_0} x_2\psi(l_0, x_2)dx_2$ монотонно спадна функція змінної l_0, яка перетне пряму $y = \mu_8(0)$ тільки в одній точці. Отже, існує єдиний розв'язок l_0, h_0 системи рівнянь(12).

Зведемо задачу (5)–(7) до задачі з нульовими початковою та крайовими умовами. Введемо позначення

$$\mu_0(y_1, y_2, t) = \mu_1(y_2h(t), t) - \mu_1(0, t) + \mu_3(y_1l(t), t) + y_1(\mu_2(y_2h(t), t) - \mu_2(0, t) -$$
$$-\mu_1(y_2h(t), t) + \mu_1(0, t)) + y_2(\mu_4(y_1l(t), t) - \mu_3(y_1l(t), t) - \mu_1(h(t), t) + \mu_1(0, t)) -$$
$$-y_1y_2(\mu_2(h(t), t) - \mu_2(0, t) - \mu_1(h(t), t) + \mu_1(0, t)),$$
$$v_0(y_1, y_2, t) = \varphi(y_1l_0, y_2h_0) + \mu_0(y_1, y_2, t) - \mu_0(y_1, y_2, 0),$$
$$\tilde{v}(y_1, y_2, t) = v(y_1, y_2, t) - v_0(y_1, y_2, t),$$
$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{l^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{1}{h^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Для функції $\tilde{v}(y_1, y_2, t)$ отримуємо задачу

$$L\tilde{v} = \frac{b_1(t) + y_1l'(t)}{l(t)}v_{y_1}(y_1, y_2, t) + \frac{b_2(t) + y_2h'(t)}{h(t)}v_{y_2}(y_1, y_2, t) -$$
$$-Lv_0(y_1, y_2, t) + f(y_1l(t), y_2h(t), t),\ (y_1, y_2, t) \in Q_T,$$
$$\tilde{v}(y_1, y_2, 0) = 0, \quad (y_1, y_2) \in [0, 1] \times [0, 1],$$
$$\tilde{v}(0, y_2, t) = \tilde{v}(1, y_2, t) = 0, \quad \tilde{v}(y_1, 0, t) = \tilde{v}(y_1, 1, t) = 0, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T. \tag{13}$$

За допомогою функції Гріна $G = G(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$L\tilde{v} = 0$$

розв'язок задачі (13) подамо у вигляді

$$\tilde{v}(y_1, y_2, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\Big(\frac{b_1(\tau) + \eta_1l'(\tau)}{l(\tau)}v_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) +$$

$$+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 h'(\tau)}{h(\tau)}v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T.$$

Позначивши $w_1(y_1,y_2,t) = v_{y_1}(y_1,y_2,t)$, $w_2(y_1,y_2,t) = v_{y_2}(y_1,y_2,t)$, $p(t) = l'(t)$, $q(t) = h'(t)$, повернемось до функції v

$$v(y_1,y_2,t)=v_0(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Big(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\qquad (14)$$

$$(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T.$$

Продиференціювавши (14) за змінними y_1, y_2, одержуємо

$$w_1(y_1,y_2,t)=v_{0y_1}(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Big(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}\times$$

$$\times w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T,\qquad (15)$$

$$w_2(y_1,y_2,t)=v_{0y_2}(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Big(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}\times$$

$$\times w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T.\qquad (16)$$

З умов (8)–(11) знаходимо

$$p(t)=-\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 w_1(1,y_2,t)dy_2+\mu_5(t),\quad t\in[0,T],\qquad (17)$$

$$q(t)=-\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1+\mu_6(t),\quad t\in[0,T],\qquad (18)$$

$$h(t)=\frac{\mu_8(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}{\mu_7(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y^2 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2},\quad t\in[0,T],\qquad (19)$$

$$l(t)=\frac{\mu_7^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y^2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}{\mu_8(t)\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\right)^2},\quad t\in[0,T]. \tag{20}$$

Продиференціювавши умови (10), (11) за змінною t і використавши (5), отримуємо

$$b_1(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\Bigg(\bigg(l(t)h(t)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)dy_1-\mu_7(t)\bigg)F_1(t)-$$

$$-l(t)F_2(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l(t),t)-\mu_3(y_1l(t),t))dy_1\Bigg),\quad t\in[0,T], \tag{21}$$

$$b_2(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\Bigg(F_2(t)h(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h(t),t)-\mu_1(y_2h(t),t))dy_2-$$

$$-h^2(t)F_1(t)\int\limits_0^1 y_2(\mu_2(y_2h(t),t)-\mu_1(y_2h(t),t))dy_2\Bigg),\quad t\in[0,T], \tag{22}$$

де

$$F_1(t)=\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1(w_1(0,y_2,t)-w_1(1,y_2,t))dy_2+\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1(w_2(y_1,0,t)-w_2(y_1,1,t))dy_1+$$

$$-l(t)h(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)dy_1dy_2+h(t)\left(\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 w_1(1,y_2,t)dy_2-\mu_5(t)\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^1\mu_2(y_2h(t),t)dy_2+l(t)\left(\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1-\mu_6(t)\right)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)dy_1+\mu_7'(t),$$

$$F_2(t)=\frac{h^2(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 y_2(w_1(0,y_2,t)-w_1(1,y_2,t))dy_2-l(t)\int\limits_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1+$$

$$+l(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(w_2(y_1,y_2,t)-y_2h^2(t)f(y_1l(t),y_2h(t),t))dy_1dy_2+$$

$$+h^2(t)\left(\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 w_1(1,y_2,t)dy_2-\mu_5(t)\right)\int\limits_0^1 y_2\mu_2(y_2h(t),t)dy_2+$$

$$+l(t)h(t)\left(\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1-\mu_6(t)\right)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)dy_1+\mu_8'(t),$$

$$\Delta(t) = h(t)\int\limits_0^1 (\mu_2(y_2h(t),t) - \mu_1(y_2h(t),t))dy_2\Big(l(t)h(t)\int\limits_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)dy_1-$$

$$-\mu_7(t)\Big) - l(t)h^2(t)\int\limits_0^1 y_2(\mu_2(y_2h(t),t) - \mu_1(y_2h(t),t))dy_2\times$$

$$\times\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l(t),t) - \mu_3(y_1l(t),t))dy_1.$$

Отож, задачу (5)–(11) зведено до системи рівнянь (14)–(22) стосовно невідомих $(v(y_1,y_2,t), w_1(y_1,y_2,t), w_2(y_1,y_2,t), p(t), q(t), h(t), l(t), b_1(t), b_2(t))$. Якщо $(l,h,b_1,b_2,v) \in (C^1[0,T])^2 \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(11), то $(v,w_1,w_2,p,q,h,l,b_1,b_2) \in (C(\overline{Q}_T))^3 \times (C[0,T])^6$ — розв'язок системи рівнянь (14)–(22). Правильним є і обернене твердження.

Нехай $(v,w_1,w_2,p,q,h,l,b_1,b_2)$ — неперервний розв'язок системи рівнянь (14)–(22). Продиференціюємо (14) за змінними y_1, y_2. Праві частини отриманих рівностей і рівностей (15), (16) збігаються, тому можемо зробити висновок, що $w_i(y_1,y_2,t) = v_{y_i}(y_1,y_2,t)$, $i=1,2$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1} + \frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2} + \frac{b_1(t)+y_1p(t)}{l(t)}v_{y_1} + \frac{b_2(t)+y_2q(t)}{h(t)}v_{y_2}+$$

$$+f(y_1l(t),y_2h(t),t), \quad (y_1,y_2,t)\in Q_T, \tag{23}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $l(t), h(t), p(t), q(t), b_1(t), b_2(t)$. З рівностей (19), (20) випливають умови (10), (11). Припущення теореми дають підстави продиференціювати (19), (20) за t. Використавши те, що функція $v(y_1,y_2,t)$ задовольняє рівняння (23), та віднявши від отриманих рівностей (21), (22), одержуємо

$$\mu_7(t)((p(t)-l'(t))h(t) + (q(t)-h'(t))l(t)) = 0,$$

$$\mu_8(t)((p(t)-l'(t))h(t) + 2(q(t)-h'(t))l(t)) = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $p(t) = l'(t)$, $q(t) = h'(t)$, $l,h \in (C^1[0,T])^2$ і функція $v(y_1,y_2,t)$ задовольняє рівняння (5). З (17), (18) отримуємо умови (8), (9).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(11) та системи рівнянь (14)–(22) у зазначеному сенсі доведено.

Зведемо $\Delta(t)$ до вигляду

$$\Delta(t) = l(t)h^2(t)\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 w_1(y_1,y_2,t)dy_2dy_1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_2w_2(y_1,y_2,t)dy_2dy_1-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_2w_1(y_1,y_2,t)dy_2dy_1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 w_2(y_1,y_2,t)dy_2dy_1\Big) =$$

$$= \frac{1}{2} l(t) h^2(t) \Big(\int_0^1 \int_0^1 (1-2y_2) w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 \int_0^1 \int_0^1 w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 \int_0^1 \int_0^1 (2y_2-1) w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 \Big).$$

В (15) всі доданки, крім $\varphi_{y_1}(y_1 l_0, y_2 h_0)$, при $t \to 0$ прямують до нуля. Тоді згідно з умовами теореми з (15) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, що

$$w_1(y_1,y_2,t) \geqslant \frac{l_0}{2} \min_{(y_1,y_2) \in [0,1]\times[0,1]} \varphi_{y_1}(y_1 l_0, y_2 h_0) \equiv M_1 > 0, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді

$$\int_0^1 \int_0^1 w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 > 0, \quad t \in [0,t_1].$$

Аналогічно з (16) можемо вважати, що існує таке число t_2, $0 < t_2 \leqslant T$, що

$$w_2(y_1,y_2,t) \geqslant \frac{h_0}{2} \min_{(y_1,y_2) \in [0,1]\times[0,1]} \varphi_{y_2}(y_1 l_0, y_2 h_0) \equiv M_2 > 0, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_2}.$$

Тоді

$$\int_0^1 \int_0^1 w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 > 0, \ t \in [0,t_2].$$

Подамо вирази $\int_0^1 \int_0^1 (1-2y_2) w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1$, $\int_0^1 \int_0^1 (2y_2-1) w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1$ у вигляді

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-2y_2) w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y_2)(w_1(y_1,y_2,t) - w_1(y_1,1-y_2,t)) dy_2 dy_1, \tag{24}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2y_2-1) w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y_2)(w_2(y_1,1-y_2,t) - w_2(y_1,y_2,t)) dy_2 dy_1. \tag{25}$$

Підставимо (15) в (24). Всі доданки, крім $\varphi_{y_1}(y_1 l_0, y_2 h_0) - \varphi_{y_1}(y_1 l_0, h_0(1-y_2))$, при $t \to 0$ прямують до нуля. Тоді можемо вважати, що існує таке число t_3, $0 < t_3 \leqslant T$, що

$$\int_0^1\int_0^1(1-2y_2)w_1(y_1,y_2,t)dy_2dy_1 \geqslant \frac{l_0}{2}\int_0^1\int_0^{\frac12}(1-2y_2)\times$$

$$\times(\varphi_{y_1}(y_1l_0,y_2h_0)-\varphi_{y_1}(y_1l_0,h_0(1-y_2)))dy_2dy_1>0,\ t\in[0,t_3].$$

Підставивши (16) в (25), можемо зробити висновок про існування такого числа t_4, $0<t_4\leqslant T$, що

$$\int_0^1\int_0^1(2y_2-1)w_2(y_1,y_2,t)dy_2dy_1 \geqslant \frac{h_0}{2}\int_0^1\int_0^{\frac12}(1-2y_2)\times$$

$$\times(\varphi_{y_2}(y_1l_0,h_0(1-y_2))-\varphi_{y_2}(y_1l_0,h_0y_2))dy_2dy_1>0,\ t\in[0,t_4].$$

Визначимо оцінки функцій $l(t)$ і $h(t)$. Згідно з умовами теореми з (14) можемо вважати, що існує таке число t_5, $0<t_5\leqslant T$, що

$$v(y_1,y_2,t)\geqslant\frac{\varphi_0}{2}\equiv M_0>0,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_5}. \tag{26}$$

Виконання (26) рівносильне виконанню нерівності

$$\Bigg|\mu_0(y_1,y_2,t)-\mu_0(y_1,y_2,0)+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{b_1(\tau)+\eta_1p(\tau)}{l(\tau)}w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+\frac{b_2(\tau)+\eta_2q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+f(\eta_1l(\tau),\eta_2h(\tau),\tau)\Bigg)d\eta_1d\eta_2d\tau\Bigg|\leqslant M_0,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_5}. \tag{27}$$

Врахувавши (27), з (14) одержуємо

$$v(y_1,y_2,t)\leqslant\varphi_1+M_0\equiv M_3<\infty,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_5}. \tag{28}$$

Тоді для розв'язків рівнянь (19), (20) справджуються нерівності

$$0<H_0\leqslant h(t)\leqslant H_1<\infty,\quad 0<L_0\leqslant l(t)\leqslant L_1<\infty,\quad t\in[0,t_5]. \tag{29}$$

Отже,

$$\Delta(t)\geqslant C_0>0,\quad t\in[0,t_0],\ t_0=\min\{t_i\},\ i=\overline{1,5}. \tag{30}$$

Визначимо оцінки розв'язків системи рівнянь (14)–(22). Позначимо $W_i(t)=\max\limits_{(y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1]}|w_i(y_1,y_2,t)|$, $i=1,2$. З (17), (18), (21), (22), врахувавши (28)–(30), одержуємо

$$|p(t)|\leqslant C_1+C_2W_1(t),\ |q(t)|\leqslant C_3+C_4W_2(t),\ |b_1(t)|\leqslant C_5+C_6W_1(t)+C_7W_2(t),$$

$$|b_2(t)|\leqslant C_8+C_9W_1(t)+C_{10}W_2(t),\quad t\in[0,t_0]. \tag{31}$$

Використавши (29), (31) та оцінки функції Гріна [9], з (15), (16) отримуємо

$$W_1(t)\leqslant C_{11}+C_{12}\int_0^t(1+W_1(\tau)+W_2(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)+W_1^2(\tau)+W_2^2(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$W_2(t) \leqslant C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t (1 + W_1(\tau) + W_2(\tau) + W_1(\tau)W_2(\tau) +$$

$$+ W_1^2(\tau) + W_2^2(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad t \in [0, t_0].$$

Звідси для функції $R(t) = W_1(t) + W_2(t)$ одержуємо нерівність

$$R(t) \leqslant C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t \frac{R(\tau) + R^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_0].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [10]. Звідси отримуємо оцінку

$$R(t) \leqslant M_4 < \infty, \quad t \in [0, t_6],$$

де M_4 і $t_6, 0 < t_6 \leqslant t_0$, визначаються відомими величинами. Тоді

$$|w_1(y_1, y_2, t)| \leqslant M_4, \quad |w_2(y_1, y_2, t)| \leqslant M_4, \quad |p(t)| \leqslant B_1 < \infty,$$

$$|q(t)| \leqslant B_2 < \infty, \quad |b_1(t)| \leqslant B_3 < \infty, \quad |b_2(t)| \leqslant B_4 < \infty, \quad t \in [0, t_6].$$

Визначимо оператор P і побудуємо множину N так, щоб оператор P переводив N в себе. Візьмемо довільні $(v, w_1, w_2, p, q, h, l, b_1, b_2)$, для яких правильні визначені оцінки. Оцінимо праві частини рівнянь (15), (16):

$$\left| v_{0y_1}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G_{y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \left(\frac{b_1(\tau) + \eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_2(\tau) + \eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} + C_{17}\sqrt{t}, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_6},$$

$$\left| v_{0y_2}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G_{y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \left(\frac{b_1(\tau) + \eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_2(\tau) + \eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{13} + C_{18}\sqrt{t}, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_6}.$$

Вибираючи число t_7, $0 < t_7 \leqslant t_6$, так, щоб виконувалась нерівність $C_{11} + C_{17}\sqrt{t_6} \leqslant M_4$, отримаємо

$$\left| v_{0y_1}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G_{y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \left(\frac{b_1(\tau) + \eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_2(\tau) + \eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_4, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_7}.$$

Аналогічно можемо вважати, що існує таке число t_8, $0 < t_8 \leqslant t_6$, що $C_{13} + C_{18}\sqrt{t_8} \leqslant M_4$. Тоді

$$\Big| v_{0y_2}(y_1,y_2,t) + \int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\bigg(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1,\eta_2,\tau) - Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau) + f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\bigg) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \Big| \leqslant$$
$$\leqslant M_4, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_8}.$$

Подамо систему рівнянь (14)–(22) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y_1,y_2,t), w_1(y_1,y_2,t), w_2(y_1,y_2,t), p(t), q(t), h(t), l(t), b_1(t), b_2(t))$, а оператор $P = (P_1,\ldots,P_9)$ визначається правими частинами рівнянь (14)–(22). Позначимо $N = \{(v,w_1,w_2,p,q,h,l,b_1,b_2) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 \times (C[0,T_0])^6 : \ M_0 \leqslant v(y_1,y_2,t) \leqslant M_3$, $M_1 \leqslant w_1(y_1,y_2,t) \leqslant M_4$, $M_2 \leqslant w_2(y_1,y_2,t) \leqslant M_4$, $H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1$, $L_0 \leqslant l(t) \leqslant L_1$, $|p(t)| \leqslant B_1$, $|q(t)| \leqslant B_2$, $|b_1(t)| \leqslant B_3$, $|b_2(t)| \leqslant B_4\}$, $T_0 = \min\{t_7, t_8\}$. Множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як у [10].

Отож, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок системи рівнянь (14)–(22), а отже, і розв'язок задачі (5)–(11) при $(y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{T_0}$.

4. Єдиність розв'язку задачі (5)–(11). Припустимо, що $(l_i(t), h_i(t), b_{1i}(t), b_{2i}(t), v_i(y_1,y_2,t))$, $i = 1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(11). Позначимо

$$\frac{l_i'(t)}{l_i(t)} = p_i(t), \quad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \quad \frac{b_{1i}(t)}{l_i(t)} = s_i(t), \quad \frac{b_{2i}(t)}{h_i(t)} = r_i(t), \quad i = 1,2,$$
$$p(t) = p_1(t) - p_2(t), \quad q(t) = q_1(t) - q_2(t), \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t), \quad r(t) = r_1(t) - r_2(t),$$
$$v(y_1,y_2,t) = v_1(y_1,y_2,t) - v_2(y_1,y_2,t).$$

Функції $p(t), q(t), s(t), r(t), v(y_1,y_2,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{1}{l_1^2(t)} v_{y_1y_1} + \frac{1}{h_1^2(t)} v_{y_2y_2} + (s_1(t) + y_1 p_1(t)) v_{y_1} + (r_1(t) + y_2 q_1(t)) v_{y_2} +$$
$$+\left(\frac{1}{l_1^2(t)} - \frac{1}{l_2^2(t)}\right) v_{2y_1y_1} + \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right) v_{2y_2y_2} + (s(t) + y_1 p(t)) v_{2y_1} +$$
$$+(r(t) + y_2 q(t)) v_{2y_2} + f(y_1 l_1(t), y_2 h_1(t), t) - f(y_1 l_2(t), y_2 h_2(t), t), \ (y_1,y_2,t) \in Q_T, \tag{32}$$

та умови

$$v(y_1,y_2,0) = 0, \quad (y_1,y_2) \in [0,1]\times[0,1], \tag{33}$$

$$v(0,y_2,t) = \mu_1(y_2 h_1(t),t) - \mu_1(y_2 h_2(t),t), \quad v(1,y_2,t) = \mu_2(y_2 h_1(t),t) - \mu_2(y_2 h_2(t),t),$$
$$v(y_1,0,t) = \mu_3(y_1 l_1(t),t) - \mu_3(y_1 l_2(t),t),$$
$$v(y_1,1,t) = \mu_4(y_1 l_1(t),t) - \mu_4(y_1 l_2(t),t), \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_T, \tag{34}$$

$$p(t) = -\frac{h_1(t)}{l_1^2(t)} \int_0^1 v_{y_1}(1,y_2,t) dy_2 + \mu_5(t)\left(\frac{1}{l_1(t)} - \frac{1}{l_2(t)}\right) -$$

$$-\left(\frac{h_1(t)}{l_1^2(t)}-\frac{h_2(t)}{l_2^2(t)}\right)\int_0^1 v_{2y_1}(1,y_2,t)dy_2, \quad t\in[0,T], \tag{35}$$

$$q(t)=-\frac{l_1(t)}{h_1^2(t)}\int_0^1 v_{y_2}(y_1,1,t)dy_1+\mu_6(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)-$$

$$-\left(\frac{l_1(t)}{h_1^2(t)}-\frac{l_2(t)}{h_2^2(t)}\right)\int_0^1 v_{2y_2}(y_1,1,t)dy_1, \quad t\in[0,T], \tag{36}$$

$$\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_7(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}\right), \quad t\in[0,T], \tag{37}$$

$$\int_0^1\int_0^1 y^2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_8(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}\right), \quad t\in[0,T]. \tag{38}$$

Зведемо задачу (32)–(34) до задачі з нульовими крайовими умовами. Введемо позначення

$$\psi(y_1,y_2,t)=(1-y_1)(\mu_1(y_2h_1(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))+y_1(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t))+$$
$$+(1-y_2)(\mu_3(y_1l_1(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))+y_2(\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t))-$$
$$-y_1y_2(\mu_2(h_1(t),t)-\mu_2(h_2(t),t)),$$
$$\tilde v(y_1,y_2,t)=v(y_1,y_2,t)-\psi(y_1,y_2,t),$$
$$L_1=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{l_1^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{1}{h_1^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}-(s_1(t)+y_1p_1(t))\frac{\partial}{\partial y_1}-(r_1(t)+y_2q_1(t))\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Для функції $\tilde v(y_1,y_2,t)$ отримуємо задачу

$$L_1\tilde v=-L_1\psi(y_1,y_2,t)+\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)v_{2y_1y_1}+\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)v_{2y_2y_2}+$$
$$+(s(t)+y_1p(t))v_{2y_1}+(r(t)+y_2q(t))v_{2y_2}+f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-$$
$$-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t), \quad (y_1,y_2,t)\in Q_T,$$
$$\tilde v(y_1,y_2,0)=0, \quad (y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1],$$
$$\tilde v(0,y_2,t)=\tilde v(1,y_2,t)=0, \quad \tilde v(y_1,0,t)=\tilde v(y_1,1,t)=0, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{39}$$

Зобразивши розв'язок задачі (39) за допомогою функції Гріна $\tilde G=\tilde G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$L_1\tilde v=0,$$

повернемось до функції $v(y_1,y_2,t)$

$$v(y_1,y_2,t)=\psi(y_1,y_2,t)+\int_0^t\int_0^1\int_0^1\tilde G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)}-\frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+(s(\tau)+\eta_1p(\tau))v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+(r(\tau)+\eta_2 q(\tau))v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)-L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l_1(\tau),\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$
$$-f(\eta_1 l_2(\tau),\eta_2 h_2(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{40}$$

Оскільки для $b_i(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (21), (22), то звідси отримуємо

$$s(t)\int_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2+r(t)\int_0^1(\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1+$$
$$+p(t)\int_0^1\mu_2(y_2h_2(t),t)dy_2+q(t)\int_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1=F_3(t), \quad t\in[0,T], \tag{41}$$
$$r(t)\Big(\int_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1+$$
$$+\int_0^1 y_2(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int_0^1\mu_3(y_1l_2(t),t)dy_1-\int_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int_0^1\int_0^1 v_2(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\Big)+p(t)\Big(\int_0^1 y_2\mu_1(y_2h_2(t),t)dy_2\times$$
$$\times\int_0^1\mu_2(y_2h_2(t),t)dy_2-\int_0^1 y_2\mu_2(y_2h_2(t),t)dy_2\int_0^1\mu_1(y_2h_2(t),t)dy_2\Big)+$$
$$+q(t)\int_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1=$$
$$=F_3(t)\int_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2+\int_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\Big(s_1(t)\int_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h_1(t),t)+\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2+r_1(t)\int_0^1(\mu_3(y_1l_1(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1+$$
$$+p_1(t)\int_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t))dy_2-\mu_7'(t)\Big(\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}\Big)+$$
$$+\frac{1}{l_1^2(t)}\int_0^1(1-y_2)(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))dy_2-\frac{1}{h_1^2(t)}\int_0^1 v_{y_2}(y_1,0,t)dy_1+\int_0^1\int_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times(f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))dy_1dy_2+\frac{1}{h_1^2(t)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v_{y_2}(y_1,y_2,t)dy_1dy_2+$$

$$+\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)\left(\frac{\mu_8'(t)}{l_1(t)}-\int\limits_0^1 v_{2y_2}(y_1,0,t)dy_1+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v_{2y_2}(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\right)+\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)\left(\frac{\mu_8'(t)}{h_2^2(t)}+\int\limits_0^1(1-y_2)(v_{2y_1}(1,y_2,t)-v_{2y_1}(0,y_2,t))dy_2\right)\Bigg),\quad t\in[0,T],\qquad(42)$$

$$F_3(t)=-s_1(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_1(t),t)+\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2-$$

$$-r_1(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_1(t),t)+\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1-$$

$$-p_1(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t))dy_2-q_1(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t))dy_1+$$

$$+\mu_7'(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}\right)-\frac{1}{l_1^2(t)}\int\limits_0^1(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))dy_2-$$

$$-\frac{1}{h_1^2(t)}\int\limits_0^1(v_{y_2}(y_1,1,t)-v_{y_2}(y_1,0,t))dy_1-\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)\int\limits_0^1(v_{2y_1}(1,y_2,t)-$$

$$-v_{2y_1}(0,y_2,t))dy_2-\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)\int\limits_0^1(v_{2y_2}(y_1,1,t)-v_{2y_2}(y_1,0,t))dy_1-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1(f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))dy_1dy_2.$$

Зауважимо, що для

$$\Delta(t)=l_2(t)h_2^2(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\Bigg(\int\limits_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1-$$

$$\left.-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v_2(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\right)-\int\limits_0^1 y_2(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\times$$

$$\times\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1$$

виконується нерівність (30).

Продиференціювавши (40) за змінними y_1, y_2, одержуємо

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t)=\psi_{y_1}(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \tilde{G}_{y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Bigg(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)}-\frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)\times$$
$$\times v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+(s(\tau)+\eta_1 p(\tau))v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+(r(\tau)+\eta_2 q(\tau))v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)-L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l_1(\tau),\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$
$$-f(\eta_1 l_2(\tau),\eta_2 h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \tag{43}$$

$$v_{y_2}(y_1,y_2,t)=\psi_{y_2}(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \tilde{G}_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Bigg(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)}-\frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)\times$$
$$\times v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+(s(\tau)+\eta_1 p(\tau))v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+(r(\tau)+\eta_2 q(\tau))v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)-L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l_1(\tau),\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$
$$-f(\eta_1 l_2(\tau),\eta_2 h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{44}$$

Виразимо $l_i(t), h_i(t)$ через $p_i(t)$, $q_i(t)$

$$l_i(t)=l_i(0)\exp\left(\int\limits_0^t p_i(\tau)d\tau\right),\quad h_i(t)=h_i(0)\exp\left(\int\limits_0^t q_i(\tau)d\tau\right),\ i=1,2,$$

де $l_1(0)=l_2(0)=l_0,\ h_1(0)=h_2(0)=h_0$. Звідси, використавши рівності

$$e^x-e^y=(x-y)\int\limits_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

$$f(yh_1(t))-f(yh_2(t))=y(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 f_y(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma,$$

отримуємо

$$\frac{1}{l_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)}=-\frac{1}{l_0}\int\limits_0^t p(\tau)d\tau\int\limits_0^1\exp\left(-\int\limits_0^t(\sigma p(\tau)+p_2(\tau))d\tau\right)d\sigma,$$

$$\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}=-\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t q(\tau)d\tau\int\limits_0^1\exp\left(-\int\limits_0^t(\sigma q(\tau)+q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma,$$

$$\mu_i(y_2h_1(t),t)-\mu_i(y_2h_2(t),t)=$$
$$=y_2(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1\mu_{ix_2}(y_2(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma,\ i=1,2,$$

$$\mu_j(y_1l_1(t),t)-\mu_j(y_1l_2(t),t)=$$

$$= y_1(l_1(t) - l_2(t)) \int_0^1 \mu_{jx_1}(y_1(l_2(t) + \sigma(l_1(t) - l_2(t))), t)d\sigma, \ j = 3, 4. \tag{45}$$

Рівності (45) можемо використати для зображення різниць $l_1(t) - l_2(t)$, $\dfrac{1}{l_1^2(t)} - \dfrac{1}{l_2^2(t)}$, $h_1(t) - h_2(t)$, $\dfrac{1}{h_1^2(t)} - \dfrac{1}{h_2^2(t)}$, $\mu_{ix_1}(y_2h_1(t), t) - \mu_{ix_1}(y_2h_2(t), t)$, $\mu_{ix_1x_1}(y_2h_1(t), t) - \mu_{ix_1x_1}(y_2h_2(t), t)$, $\mu_{it}(y_2h_1(t), t) - \mu_{it}(y_2h_2(t), t)$, $i = 1, 2$, $\mu_{jx_2}(y_1l_1(t), t) - \mu_{jx_2}(y_1l_2(t), t)$, $\mu_{jx_2x_2}(y_1l_1(t), t) - \mu_{jx_2x_2}(y_1l_2(t), t)$, $\mu_{jt}(y_1l_1(t), t) - \mu_{jt}(y_1l_2(t), t)$, $j = 3, 4$, $f(y_1l_1(t), y_2h_1(t), t) - f(y_1l_2(t), y_2h_2(t), t)$.

Підставивши (43), (44) в (35), (36), (41), (42) і використавши (45), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (35), (36), (41), (42) стосовно невідомих $(p(t), q(t), s(t), r(t))$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З властивостей розв'язків таких систем випливає, що система має тільки тривіальний розв'язок.

Отже, $l_1(t) = l_2(t)$, $h_1(t) = h_2(t)$, $b_{11}(t) = b_{12}(t)$, $b_{21}(t) = b_{22}(t)$, $v_1(y_1, y_2, t) = v_2(y_1, y_2, t)$, $(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_0}$.

Список використаної літератури

1. *Hong-Ming Yin.* Global solvability for some parabolic inverse problems // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — P. 392–403.
2. *Trong D.D., Ang D.D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems. — 1994. — **10**, №3. — P. 733–752.
3. *Cannon J., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. — 1994. — **10**, №3. — P. 521–531.
4. *Пабирівська Н.В.* Теплові моменти в обернених задачах для параболічних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — Вип. 56. — С. 142–149.
5. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, №7. — С. 901–910.
6. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 20–38.
7. *Баранська І.Є.* Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — **50**, № 2. — С. 17–28.
8. *Баранська І.Є., Іванчов М.І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею // Укр. мат. вісн. — 2007. — **4**, № 4. — С. 457–484.
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // Москва: Наука, 1967. — 736 с.
10. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. — 238 p. — (Math. Studies: Monograph Ser. — Vol. 10.)

Стаття: надійшла до редколегії 04.12.2015
прийнята до друку 08.06.2016

DETERMINATION OF THE MINOR COEFFICIENTS IN A PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
Dudaev Str., 15, 79005, Lviv, Ukraine
e-mail: snitkog@ukr.net

We find unique solvability conditions of the inverse problem of finding the time-dependent coefficients of the first derivatives of unknown function in two-dimensional parabolic equation in a domain for which the location of boundary part is described by the unknown time-dependent functions.

Key words: inverse problem, Green function, free boundary, parabolic equation.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 159–162
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 159–162

УДК 519.217

ПРО ВИБІР МАЛОГО ПАРАМЕТРА НОРМУВАННЯ ГЕНЕРАТОРА ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Оксана ЯРОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
e-mail: oksana-yarova@rambler.ru

Досліджено марковські випадкові еволюції та їхні апроксимації. Основним об'єктом дослідження є генератори випадкових процесів з незалежними приростами. Ці процеси розглядають в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. Генератори випадкових процесів нормуються параметрами, які є нелінійними функціями. Доведено існування таких параметрів нормування.

Ключові слова: генератор, марковський процес, процес з незалежними приростами, нормувальний множник, пуассонова апроксимація, апроксимація Леві.

1. Вступ. Дослідженням марковських випадкових еволюцій та їхніх апроксимацій присвячено багато наукових праць, серед яких можна виділити [1], [2], [3]. Зокрема в [3] досліджуються процеси з незалежними приростами в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. В таких процесах немає дифузійної складової, а між стрибками відбувається марковський процес. В апроксимаціях Пуассона і Леві генератор процесу нормується лінійним множником[1]. Проте в деяких випадках таке нормування не є доцільним. Тому виникає потреба розглядати нормувальний множник як нелінійну функцію. Мета нашої праці — знайти такі параметри в зображенні генератора випадкового процесу з незалежними приростами.

2. Апроксимація Пуассона та Леві. Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ та траєкторіями в області визначення $D^R[0;\infty)$, які нормуються множником $g_1(\varepsilon) \to 0$,при $(\varepsilon) \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta(\tfrac{t}{(g_1(\varepsilon))}),\ t \geqslant 0,$$

де $\eta(t)$ — процес з незалежними приростами, що визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Тут $\varphi(u)$ — дійснозначна, двічі диференційована функція в R^d, яка дорівнює 0 на нескінченості та з sup-нормою $\varphi(u)$ належить класу двічі неперервно-диференційовних функцій в евклідовому просторі $C_0^2(R^d)$. Ядро інтенсивності Γ^ε належить класу $C^3(R)$. Це ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0) = 0$.

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації.

(P1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = g_1(\varepsilon)(b + \theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = g_1(\varepsilon)(c + \theta_c^\varepsilon),$$

де $b < \infty, c < \infty, |\theta_b^\varepsilon| \to 0, |\theta_c^\varepsilon| \to 0, g_1(\varepsilon) \to 0.$

(P2) Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне подання

$$\Gamma_g^\varepsilon = g_1(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon).$$

для всіх g, що належать класу $C^3(R)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$) задано на класі функцій, що визначає міру $C^3(R)$ таким співвідношенням

$$\Gamma_g = \int_R g(v)\Gamma^0(dv).$$

(P3)У граничному генераторі немає дифузійної складової, тобто виконується така умова

$$c = \int_R v^2\Gamma^0(dv) = 0$$

(P4) Справджується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv) = 0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

Перейдемо до апроксимації Леві.

Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами, які нормуються множником $g_2(\varepsilon)$, де $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)$

$$\eta_2^\varepsilon(t) = \eta(\tfrac{t}{(g_2(\varepsilon))}),\ t \geqslant 0.$$

Тут $\eta(t)$ — процес з незалежними приростами, що визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv),$$

де $\varphi(u)$ — дійснозначна, двічі диференційована функція в R^d, яка дорівнює 0 на нескінченості та з sup-нормою $\varphi(u)$ належить класу двічі неперервно-диференційовних функцій в евклідовому просторі $C_0^2(R^d)$. Ядро інтенсивності Γ^ε належить класу $C^3(R)$. Таке ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0) = 0$.

Нехай виконуються умови апроксимації Леві.

(L1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = g_1(\varepsilon)b_1 + g_2(\varepsilon)(b + \theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = g_2(\varepsilon)(c + \theta_c^\varepsilon),$$

де $b < \infty, c < \infty, |\theta_b^\varepsilon| \to 0, |\theta_c^\varepsilon| \to 0, g_1(\varepsilon) \to 0.$

(L2) Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне зображення

$$\Gamma_g^\varepsilon = g_2(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon),$$

для всіх g, що належать класу $C^3(R)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C^3(R)$ таким співвідношенням:

$$\Gamma_g = \int_R g(v)\Gamma^0(dv).$$

(L3) Справджується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty}\int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv)=0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

3. Вибір пармаметра нормування.

Розглянемо генератор марковського процесу пуассонової апроксимації, що нормується множником $g_1(\varepsilon)$

$$\Gamma_g^\varepsilon = g_1(\varepsilon)(\Gamma_g+\theta_g^\varepsilon).$$

Для генератора Γ_g^ε завжди існує такий граничний генератор Γ_g, що

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\Gamma_{1,g}.$$

Знайдемо зображення генератора $\Gamma_{1,g}$

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\frac{g_1(\varepsilon)(\Gamma_g+\Theta_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\frac{g_1(\varepsilon)\Gamma_g+g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\frac{\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)}{g_1\varepsilon}+\Theta_g^\varepsilon=\Gamma_{1,g}.$$

Виберемо такий нормувальний множник $g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon))$, для якого виконується така умова:

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g-g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,g}}{g_2(\varepsilon)}=\Gamma_{2,g}.$$

Знайдемо зображення генератора $\Gamma_{2,g}$

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g-g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,g}}{g_2(\varepsilon)}=\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g-\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)-g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon}{g_2(\varepsilon)}=\frac{g_2(\varepsilon)\Gamma_g+g_2(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon-\Gamma_g-\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)-g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}=$$

$$=\frac{\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-1-g_1(\varepsilon)+1+\Theta_g^\varepsilon(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))}{g_2(\varepsilon)}=\frac{\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))}{g_2(\varepsilon)}+\Theta_g^\varepsilon\frac{g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon)}{g_2(\varepsilon)}=\Gamma_{2,g}.$$

Отож,

$$\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma=g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,g}+g_2(\varepsilon)\Gamma_{2,g}+o(g_2(\varepsilon))=\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)+g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon+\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))+$$

$$+\Theta_g^\varepsilon(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))=\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-1)+\Theta_g^\varepsilon g_2(\varepsilon)+o(g_2(\varepsilon)).$$

Це співвідношення містить доданок Θ_g^ε. Знайдемо його з розв'язку задачі сингулярного збурення.

Для генератора марковського процесу, нормованого множником $g_2(\varepsilon)$, задача запишеться так:

$$\Gamma^\varepsilon=\Gamma+\Gamma_{1,g}g_2(\varepsilon)$$
$$\varphi^\varepsilon=\varphi+\varphi_1 g_2(\varepsilon).$$

Розв'язок задачі сингулярного збурення набуде вигляду

$$\Gamma^\varepsilon\varphi^\varepsilon=0$$
$$\Gamma\varphi_1+\Gamma\varphi=\psi$$
$$\Gamma_{1,g}\varphi_1=\Theta^\varepsilon.$$

Виразимо Θ^ε

$$\Gamma^\varepsilon\varphi^\varepsilon=\Gamma\varphi+g_2(\varepsilon)(\Gamma\varphi_1+\Gamma_{1,g}\varphi)+\varphi_1\Gamma_{1,g}g_2^2(\varepsilon)=\Gamma\varphi+g_2(\varepsilon)\psi+\Theta^\varepsilon g_2^2(\varepsilon)=0.$$

Звідси

$$\Theta^\varepsilon=-\frac{\Gamma\varphi}{g_2^2(\varepsilon)}-\frac{\psi}{g_2(\varepsilon)}.$$

4. Висновки. Отже, існують нелінійні параметри нормування для генераторів марковських процесів у схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

Список використаної літератури

1. *Koroliuk V.* Stochastic systems in merging phase space. / V.S. Koroliuk, N. Limnios // Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. — 348 p.
2. *Chernoff H.* Measure of asymptotical efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations / H. Chernoff // Annals of Mathematical Statistics. —- 1952. —- Vol. 23, Number 4. — P. 493–655.
3. *Feng J.* Large deviation for stochastic processes. / J. Feng, T.G. Kurtz // Mathematical Surveys and Monographs, 131. Providence, RI. AMS, 2006. — 410 p.

Стаття: надійшла до редколегії 28.12.2015
прийнята до друку 08.06.2016

ABOUT SELECTION OF A SMALL NORMALIZATION PARAMETER FOR GENERATOR OF RANDOM PROCESS

Oksana YAROVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
e-mail: oksana-yarova@rambler.ru

Consider the Markov random evolution and their approximation. The main object of study is the generator of random processes with independent increments. These processes are considered in Poisson approximation and approximation of Levi scheme. Generators of random processes are normalized by parameters, which are nonlinear functions. We prove the existence of these parameters.

Key words: generator, Markov process, a process with independent increments normalizing factor, Poisson approximation, Levy approximation.

МИКОЛА ЯРОСЛАВОВИЧ КОМАРНИЦЬКИЙ

(25.05.1948 – 20.04.2016)

20 квітня 2016 року пішов з життя завідувач кафедри алгебри і логіки, Заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка доктор фізико-математичних наук Микола Ярославович Комарницький. Його раптова смерть стала великою втратою як для львівських математиків, так і для всього українського математичного товариства.

Микола Ярославович Комарницький народився 25 травня 1948 року в селі Комарники Львівської області. Після закінчення середньої школи вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка. У 1971 році, після закінчення університету працював у відділі алгебри Фізико-механічного інституту Академії наук УРСР, з якого і був призваний на дійсну армійську службу. Після повернення з армії, М. Я. Комарницький працював з 1974 по 1979 р. інженером відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики, одночасно навчаючись в аспірантурі. У 1979 р. він захистив кандидатську дисертацію.

У лютому 1979 року розпочалася його науково-педагогічна діяльність на механіко-математичному факультеті Львівського державного університету. Надалі, все його наукове життя було тісно пов'язане з цим факультетом. У 1993-1995 роках в якості старшого наукового співробітника він працював над багатьма важливими алгебраїчними задачами. Отримані результати лягли в основу його докторської дисертації, захищеної в 1998 році. З 1998 року він працював на посаді професора кафедра алгебри і топології, в 2002 році став завідувачем цієї кафедри, а згодом після її поділу в 2003 році — завідувачем кафедри алгебри і логіки. У 1992–1993 і 1996–1999 роках він був заступником декана механіко-математичного факультету. У 1999 р. Миколу Ярославовича обрано першим головою Львівського товариства логіків, заснованого у цьому ж році.

Микола Ярославович Комарницький зробив значний внесок у багатьох областях сучасної алгебри: теорії кілець і модулів, теорії моделей, категорної логіки, теорії напівгруп та полігонів. Так, зокрема, в 1996 році він розв'язав проблему Козенса-Фейса про зліченний ультрастепінь V-області Койфмана-Коззенса, розв'язок якої став основою його докторської дисертації. Він знайшов необхідні і достатні умови аксіоматизовності класів радикалів в категорії модулів над областю Дедекінда в термінах подільності модулів радикалів. Серед інших результатів у цьому напрямку можна навести доведення аксіоматизовності класу некомутативних кілець Прюфера.

Професор М. Я. Комарницький є автором понад 100 наукових праць, багатьох науково-методичних розробок, серед яких підручники та навчальні посібники з лінійної алгебри, дискретної математики, алгебри і математичної логіки.

На додаток до його плодотворної дослідницької роботи, Микола Ярославович Комарницький також активно займався викладацькою діяльністю, особливо в пошуку талановитих студентів і залученням їх до дослідницької діяльності. Професор Комарницький був керівником семи кандидатських дисертацій та науковим консультантом двох докторських дисертацій. Він організував багато міжнародних алгебраїчних конференцій у Львові та був редактором багатьох математичних журналів. Зокрема, він був заступником головного редактора журналу "Algebra and Discrete Mathematics", членом редколегій Математичних студій та Вісника Львівського університету (серія механіко-математична). Багато років із самого заснування Микола Ярославович Комарницький був незмінним керівником Львівського міського алгебраїчного семінару та спільного семінару з кафедрою геометрії і топології з теорії полігонів і спектральних просторів.

У 2014 році за його багаторічну продуктивну науково-педагогічну роботу, Микола Ярославович Комарницький був удостоєний звання Заслуженого професора Львівського національного університету імені Івана Франка.

Професор Микола Ярославович Комарницький відзначався ерудицією і розумінням ролі математики у сучасному світі. Він мав багато друзів серед математиків в Україні і по всьому світу. Світла пам'ять про Миколу Ярославовича назавжди залишиться в умах і серцях його колег, студентів, сім'ї та друзів.

Т.О. Банах, А.І. Гаталевич, І.Й. Гуран, О.В. Гутік, Б.В. Забавський, М.М. Зарічний, В.Р. Зеліско, Ю.Б. Іщук, М.О. Малоїд-Глебова, І.О. Мельник, Р.М. Олійник, Я.Г. Притула, О.М. Романів

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме має передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською та англійською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме подається на веб-сторінці

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2010**.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. — 2002. — 54, № 1. — С. 106–124.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — Москва: Наука, 1973. — 296 с.

3. *Михайленко Г.Д.* Назва. — Львів: ІППММ, 1993. — 9 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача: 80.1).

4. *Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М.* Динамические системы статистической механики // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. — 1985. — 2. — С. 235–284.

5. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. —- 2003. — 46. — С. 229–248.

6. *Колмаз Ю.А.* Назва: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. — Киів, 2008. — 20 с.

7. *Сеник С.М., Мандрик І.Т.* Назва . — Київ, 1992. — 17 с. — Деп. в ДНТБ України, В2020–1995.

8. *Муравський В.К., Ліско С.В.* Назва // Наукова конф. "Нелінійні диференціальні рівняння": тези доп., 27 серпня — 2 вересня 1994 р., Київ. — Київ: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1994. — С. 540–551.