ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 82

Львівський національний університет імені Івана Франка
2016

ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 82

Львівський національний університет імені Івана Франка
2016

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 82

Випуск 82

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2016

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол №30/12 від 28.12.2016 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №528 від 12.05.2015р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Відповідальний за випуск *Михайло Зарічний*

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-42-18

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 18,2
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 5–19
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 5–19

УДК 519.6.

DEFECT CORRECTION METHODS, CLASSIC AND NEW

Winfried AUZINGER[1], **Roksolyana STOLYARCHUK**[2], **Martin TUTZ**[1]

[1] *Technische Universität Wien,*
Wiedner Haupstrasse 8-10, 1040 Wien, Austria
e-mail: w.auzinger@tuwien.ac.at, martin.tutz@gmx.at

[2] *Lviv Polytechnic National University,*
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
e-mail: sroksolyana@yahoo.com

Defect correction methods are based on the idea of measuring the quality of an approximate solution to an operator equation by forming the defect, or residual, with respect to the given problem. By an appropriate backsolving procedure, an error estimate is obtained. This process can also be continued in an iterative fashion. One purpose of this overview is the further dissemination of the underlying concepts. Therefore, we first give a general and consistent review on various types defect correction methods, and its application in the context of discretization schemes for differential equations. After describing the general algorithmic templates we discuss some specific techniques used in the solution of ordinary differential equations. Moreover, new results about the application to implicit problems are presented.

Key words: defect correction, discretization, ordinary differential equations.

1. Introduction

Defect Correction (DeC) methods (also: 'deferred correction methods') are based on a particular way to estimate local or global errors, especially for differential and integral equations. The use of simple and stable integration schemes in combination with defect (residual) evaluation leads to computable error estimates and, in an iterative fashion, yields improved numerical solutions.

In the first part of this article, the underlying principle is motivated and described in a general setting, with focus on the main ideas and algorithmic templates. In the sequel, we consider its application to ordinary differential equations in more detail. The proper

---

2010 Mathematics Subject Classification: 65L05, 65L06.

choice of algorithmic components is not always straightforward, and we discuss some of the relevant issues.

We are not specifying all algorithmic components in detail, e.g., concerning the required interpolation and quadrature processes. But these are numerical standard procedures which are easy to understand and to realize. Also, exhaustive survey of the available literature on the topic is no provided here.

The introductory part of this text is a revised and extended version of the overview given in [1]. We motivate the DeC principle in a way slightly different from the classical paper [18], with a clear focus on the underlying error estimation principles.

In addition, some recent material is included, in particular, that concerning the role of error structures for the convergence behavior. An algorithmic version for differential equations in implicit formulation proposed in [19] is also presented.

We use upper indices for iteration counts and lower indices for numbering along discrete grids.

2. Underlying concepts and general algorithmic templates

Many iterative numerical algorithms are based on the following principle. Let an initial value y_0 be given. For $i = 0, 1, 2, \ldots$:

- Compute the residual, or 'defect', d^i of the current iterate y^i with respect to the given problem,
- backsolve for a correction ε^i using an approximate solver,
- apply the correction to obtain the next iterate $y^{i+1} := y^i - \varepsilon^i$.

Stationary iterative methods for linear systems of equations and Newton iteration for systems of nonlinear equations are classical examples. For starting our general considerations, we think of a given, *original problem* in form of a system of nonlinear equations,

$$\phi(y) = 0, \quad \text{with exact solution } \; y = y^*. \tag{1}$$

2.1. Error estimation based on nonlinear approximation.

We assume that some reasonable linear or nonlinear approximation $\tilde{\phi} \approx \phi$ is given. We consider a procedure for the purpose of estimating the error of a given approximate solution y^0 to y^*. To this end we define the *defect*

$$d^0 := \phi(y^0)$$

of y_0, i.e., the amount by which $\phi(y^0)$ fails approximate $0 = \phi(y^*)$. Furthermore, with y^0, d^0 we associate the so-called *neighboring problem* related to (1),

$$\phi(y) = d^0, \quad \text{with exact solution } \; y = y^0. \tag{2}$$

We invoke two heuristic principles, (A) and (B) in the terminology from [18], for estimating the error of y^0. Originally introduced in [18] (see also [6]), these are based on the idea that (2) may be considered to be closely related to (1), provided d^0 is small enough.

(A): Let $\tilde{y}$ and $\tilde{y}^0$ be the solutions of $\tilde{\phi}(y) = 0$ and $\tilde{\phi}(y) = d^0$, respectively; we assume that these can be formed at low computational cost. Considering original problem (1) neighboring problem (2) together with their approximations,

$$\begin{array}{cc} \phi(y^*) = 0 & \phi(y^0) = d^0 \\ \tilde{\phi}(\tilde{y}) = 0 & \tilde{\phi}(\tilde{y}^0) = d^0 \end{array}$$

suggests the approximate identity

$$\tilde{y}^0 - \tilde{y} \approx y^0 - y^*.$$

This leads to the

$$\text{error estimator} \quad \varepsilon^0 := \tilde{y}^0 - \tilde{y} \tag{3a}$$

as a computable estimate for the error $e^0 := y^0 - y^*$. We can use it to obtain an updated approximation y^1 in the form

$$y^1 := y^0 - \varepsilon^0 = y^0 - (\tilde{y}^0 - \tilde{y}). \tag{3b}$$

(B): Consider the truncation error $\ell^* := \tilde{\phi}(y^*)$, the amount by which y^* fails to satisfy the approximate equation $\tilde{\phi}(y) = 0$. With $\tilde{d}^0 := \tilde{\phi}(y^0)$, considering the approximate identity

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}(y^*) - \tilde{\phi}(y^0) \approx \phi(y^*) - \phi(y^0), \\ &\text{i.e.,} \quad \ell^* - \tilde{d}^0 \approx -d^0, \end{aligned}$$

suggests to choose the

$$\text{truncation error estimator} \quad \lambda^0 := \tilde{d}^0 - d^0 \tag{4a}$$

i.e., $\lambda^0 = (\tilde{\phi} - \phi)(y^0)$, as a computable estimate for the truncation error. Note that $-d^0 = \phi(y^*) - d^0$ is the truncation error of y^* with respect to (2). In the case $y^0 = \tilde{y}$, i.e., $\tilde{\phi}(y^0) = 0$, we have $\lambda^0 = -d^0 \approx \ell^*$.

We can use λ^0 to obtain an updated approximation y^1 by solving

$$\tilde{\phi}(y^1) = \lambda^0, \tag{4b}$$

which also provides an estimate for the error: $\varepsilon^0 := y^0 - y^1 \approx y^0 - y^* = e^0$. Eq. (4b) can also be written in terms of the error estimate as

$$\tilde{\phi}(y^0 - \varepsilon^0) = \lambda^0, \tag{4c}$$

approximating the error equation $\tilde{\phi}(y^0 - e^0) = \ell^*$.

In general, (A) and (B) are not equivalent. However, if $\tilde{\phi}(y) = P\,y - c$ is an affine mapping, it is easy to check that (A) and (B) result in the same error estimate ε^0, which can be directly obtained as the solution of the correction equation

$$P\,\varepsilon^0 = d^0, \tag{5}$$

and the corresponding truncation error estimate is $\lambda^0 = (P\,y^0 - c) - d^0$.

2.2. **Iterated Defect Correction (IDeC).** Both approaches (A) and (B) are designed for a posteriori error estimation, and they can also be used to design iterative solution algorithms, involving updated versions of the neighboring problem in course of the iteration. This leads in straightforward way to two alternative versions the method of *Iterated Defect Correction* (IDeC), starting from an initial approximation y^0. Of course, $y^0 = \tilde{y}$ is a natural choice.

IDeC (A) : : Solve $\tilde{\phi}(\tilde{y}) = 0$
For $i = 0, 1, 2, \ldots$:
– Compute $d^i := \phi(y^i)$
– Solve $\tilde{\phi}(\tilde{y}^i) = d^i$
– Set $\varepsilon^i := \tilde{y}^i - \tilde{y}$
– Update $y^{i+1} := y^i - \varepsilon^i$

The corrections ε^i play the role of successive estimates for the errors $e^i = y^i - y^*$.

IDeC (B) : : Set $\lambda^{-1} := \tilde{\phi}(y^0)$
For $i = 0, 1, 2, \ldots$:
– Compute $d^i := \phi(y^i)$
– Update $\lambda^i := \lambda^{i-1} - d^i$
– Solve $\tilde{\phi}(y^{i+1}) = \lambda^i$

The λ^i evolve from accumulated defects, $\lambda^i = \tilde{\phi}(y^0) - d^0 - \ldots - d^i$, playing the role of successive approximations to the truncation error $\ell^* = \tilde{\phi}(y^*)$.

An equivalent reformulation reads
For $i = 0, 1, 2, \ldots$:
– Compute $d^i := \phi(y^i)$
– Solve $\tilde{\phi}(y^{i+1}) = (\tilde{\phi} - \phi)(y^i)$

Remarks.

- Nonlinear IDeC has the form of a 'full approximation scheme', where we directly solve for the new approximation in each step. If $\tilde{\phi}$ is affine, IDeC (A) and IDeC (B) are again equivalent and can be reformulated as a correction scheme in terms of linear backsolving steps for the correction $\varepsilon^i = \tilde{y}^i - \tilde{y}$, as in (5).
- IDeC (B) can also be rewritten in the spirit of (4c).
- Note that y^* is a fixed point of an IDeC iteration since $d^* := \phi(y^*) = 0$.

For systems of algebraic equations, choosing $\tilde{\phi}$ to be nonlinear is usually not very relevant from a practical point of view. Rather, such a procedure turns out to be useful in a more general context, where ϕ represents an operator between functions spaces (typically a differential or integral operator), and where $\tilde{\phi}$ is a *discretization* of ϕ. This leads us to the class of DeC methods for differential or integral equations.

3. Application to ordinary differential equations (ODEs)

We mainly focus on IDeC (A), the 'classical' IDeC method originally due to [20]. IDeC (B) can be realized in a similar way, and we will remark on this where appropriate.

3.1. **A basic version: IDeC (A) based on forward Euler.** Let us identify the original problem $\phi(y) = 0$ with an initial value problem (IVP) for a system of n ODEs,

$$\tfrac{d}{dx}\, y(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \tag{6a}$$

with exact solution $y^*(x) \in \mathbb{R}^n$. This means

$$\phi(y)(x) := \tfrac{d}{dx}\, y(x) - f(x, y(x)), \tag{6b}$$

with fixed initial condition $y(x_0) = y_0$. More precisely, the underlying function spaces and the initial condition $y(x_0) = y_0$ are part of the complete problem specification.

Furthermore, we identify the problem $\tilde{\phi}(y) = 0$ with a discretization scheme for (6); at the moment we assume that a constant stepsize h is used, with grid points $x_l = a + l\,h$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Consider for instance the first order accurate forward Euler scheme

$$\frac{Y^0_{l+1} - Y^0_l}{h} = f(x_l, {Y_l}^0), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7a}$$

and associate it with the operator $\tilde{\phi}$ acting on continuous functions $y(x)$ satisfying the initial condition $y(x_0) = y_0$,

$$\tilde{\phi}(y)(x_l) := \frac{y(x_{l+1}) - y(x_l)}{h} - f(x_l, y(x_l)) = 0. \tag{7b}$$

Choose a continuous function $y^0(x)$ interpolating the ${Y_l}^0$ at the grid points x_l. The standard choice is a continuous piecewise polynomial interpolant of degree p over $p+1$ successive grid points, i.e., piecewise interpolation over subintervals $\mathbf{I}_j$ of length ph. In the corresponding piecewise-polynomial space $\mathcal{P}_p$, $y^0(x)$ is the solution of $\tilde{\phi}(y) = 0$. The defect $d^0 := \phi(y^0)$ is well-defined,

$$d^0(x) = \phi(y^0)(x) = \tfrac{d}{dx}\, y^0(x) - f(x, y^0(x)), \tag{8a}$$

and $y^0(x)$ is the exact solution of the neighboring IVP

$$\tfrac{d}{dx}\, y(x) = f(x, y(x)) + d^0(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{8b}$$

We now consider a correction step $y^0 \mapsto y^1$ of type (A),

$$\begin{aligned} &\text{Solve} \;\; \tilde{\phi}(\tilde{y}^0) = d^0, \\ &\text{followed by} \;\; y^1(x) \;:=\; y^0(x) - (\tilde{y}^0 - y^0)(x). \end{aligned}$$

This means that $\tilde{y}^0 \in \mathcal{P}_p$ is to be understood as the interpolant of the discrete values ${\tilde{Y}_j}^0$ obtained by the solution of

$$\frac{\tilde{Y}^0_{l+1} - \tilde{Y}^0_l}{h} = f(x_l, {\tilde{Y}_l}^0) + d^0(x_l), \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

which is the forward Euler approximation to (8b), with additional pointwise evaluation of the defect at the grid points x_l.

According to our general characterization of IDeC (A), this process is to be continued to obtain further iterates $y^i(x)$. If we use m IDeC steps in the first subinterval $\mathbf{I}_1 = [a, a+$

$ph]$, we can restart the process at the starting point $a+ph$ of the second subinterval $\mathbf{I}_2$, with the new initial value $y(a+ph) = y^m(a+ph)$. This is called local, or active mode. Alternatively, one may integrate with forward Euler over a longer interval I encompassing several of the $\mathbf{I}_j$ and perform IDeC on I, where each individual $y^i(x)$ is forwarded over the complete interval. This is called global, or passive mode.

Remark. The exact solution y^* is not in the scope of the iteration, since the y^i live in the space $\mathcal{P}_p$. But there is a fixed point $\hat{y} \in \mathcal{P}_p$ related to y^*: It is characterized by the property $\hat{d} := \phi(\hat{y}) = 0$, i.e., $\frac{d}{dx}\,\hat{y}(x_l) = f(x_l, \hat{y}(x_l))$ for all l. This means that $\hat{y}$ is a collocation polynomial, and IDeC based on the Euler scheme can be regarded as an iterative method to approximate collocation solutions. In fact, this means that, instead of (6), the system of collocation equations $\phi(\hat{y})(x_l) = \frac{d}{dx}\,\hat{y}(x_l) - f(x, \hat{y}(x_l)) = 0$ at the collocation nodes x_l is rather to be considered as the effective original problem.

3.2. **IDeC based on higher order schemes $\tilde{\phi}$. Remarks on convergence theory.** For IDeC applied to IVPs, any basic scheme $\tilde{\phi}$ may be used instead of forward Euler. E.g., in the pioneering paper [20] a classical Runge-Kutta (RK) scheme of order 4 was used. Using RK in the correction steps means that in each individual evaluation of the right hand side the pointwise value of the current defect is to be added (RK applied to [NP]). Many other authors have also considered and analyzed IDeC versions based on RK schemes.

Despite the natural idea behind IDeC, the convergence analysis is not straightforward. Obtaining a full higher order of convergence asymptotically for $h \to 0$ requires

- a sufficiently well-behaved, smooth problem,
- a sufficiently high degree p for the local interpolants $y^i(x)$,
- sufficient smoothness of these interpolants, in the sense of boundedness of a certain number of derivatives of the $y^i(x)$, uniformly for $h \to 0$.

A typical convergence result reads as follows:

> *If the sequence of grids is equidistant and the underlying scheme has order q, then m IDeC steps result in an error $y^m(x) - y^*(x) = \mathcal{O}(h^{\min\{p,\,m\,q\}})$ for $h \to 0$, where p is the degree of interpolation.*

The achievable order p is usually identical to the approximation order of the fixed point $\hat{u} \in \mathcal{P}_p$, which corresponds to a collocation polynomial in a generalized sense.

Naturally, IDeC can also be applied to boundary value problems (BVPs). For second order two-point boundary value problems, the necessary algorithmic modifications have first been described in [9]. Here, special care has to be taken at the end points of the interpolation intervals $\mathbf{I}_j$, where an additional defect terms arises due to jumps in the derivatives of the local interpolants.

3.3. **The influence of a nonequidistant grid.** As mentioned above, the smoothness of the global error is essential for the successful performance of an IDeC iteration. A technical tool to assure the latter smoothness property are asymptotic expansions of the global discretization error $\tilde{y} - y^*$ for the underlying scheme, which have been proved to exist for RK methods over constant stepsize sequences. A convergence result for IDeC derived in this way is, e.g., given in [10]; see also [17].

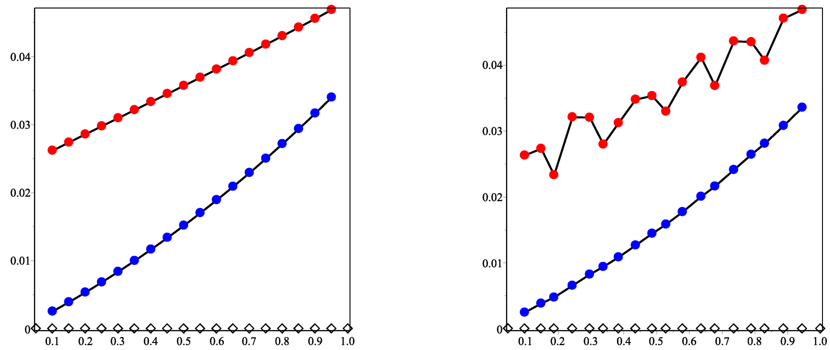

FIG. 1. Error behavior of an Euler solution, equidistant grid (left) and nonequidistant grid (right).

The assumption of a constant stepsize appears quite restrictive, but it is sufficient to assume that the stepsize h be kept fixed over each interpolation interval. We note that for IDeC algorithms, this requirement is indeed necessary, as has been demonstrated in [3]. Otherwise the error $\tilde{y} - y^*$ usually lacks the required smoothness properties, despite its asymptotic order.

To illustrate this fact, let us consider the forward Euler scheme (7a) applied to the simple ODE $y'(x) = y(x) - (\sin x + \cos x)$. For $y(0) = 1$, the solution of the IVP is $y^*(x) = \cos x$. We apply (7a) on the interval $x \in [0, 1]$ and take 20 integration steps with constant stepsize $h = 1/20$. Then we repeat the procedure on on a nonequidistant grid, where the stepsizes h_j are small relative random perturbations of the original stepsize h. Fig. 1 shows the behavior of the error (lower curve) and its first difference quotients over the grid (upper curve) for both cases. In the right plot the irregular variation of the error is clearly visible, and this effect becomes even more significant if we consider higher difference quotients. This is not difficult to explain theoretically, see [19]. As a consequence, higher derivatives of the associated interpolants $y^i(x)$ are not uniformly bounded, which would be required in the convergence theory of IDeC schemes.

3.4. **Reformulation in terms of integral equations. IQDeC (A) and IQDeC (B) ('spectral IDeC').** An ODE can be transformed into an integral equation. Taking the integral means of (6a) over the interval spanned by two successive grid points gives

$$\frac{y(x_{l+1}) - y(x_l)}{h} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} f(x, y(x))\, dx. \tag{9}$$

We observe that the left-hand side is of the same type as in the Euler approximation (7a). Therefore it appears natural to consider (9) instead of (6) as the original problem. In addition, for numerical evaluation the integral on the right-hand side has to be approximated, typically by polynomial quadratures using the $p+1$ nodes available in the current working interval $\mathbf{I}_j \ni x_l$. The coefficients depend on the location of x_l within $\mathbf{I}_j$.

Using Q as a generic symbol for these quadratures we obtain the computationally tractable, modified original problem replacing the ODE (6b), defined over the grid $\{x_l\}$

as

$$\phi(y)(x_l) := \frac{y(x_{l+1}) - y(x_l)}{h} - (Qf)(x, y(x))_l = 0, \tag{10a}$$

or, more precisely, its effective version restricted to $y \in \mathcal{P}_p$. Up to quadrature error, (10a) is an 'exact finite difference' scheme exactly satisfied by y^*. The treatment of the leading derivative term y' is the same in (10a) and in (7b), which turns out to be advantageous. (10a) leads to an alternative definition of the defect at the evaluation points x_l, namely

$$\begin{aligned} \bar{d}^i(x_l) &:= \phi(y^i)(x_l) \\ &= \frac{y^i(x_{l+1}) - y^i(x_l)}{h} - (Qf)(x, y^i(x))_l\,. \end{aligned} \tag{10b}$$

This may be interpreted in the sense that the original, pointwise defect $d^i(x)$ is 'preconditioned' by applying local quadrature. All other algorithmic components of IDeC remain unchanged, with correspondingly defined neighboring problems.

In [3], this version is introduced and denoted as IQDeC (type (A)). Variants in the spirit of IQDeC of type (B) have also been developed; this is often called 'spectral defect correction' and has first been described in [8]. For a convergence proof, see [12].

Remarks.

- With appropriate choice of defect quadrature, the fixed point of IQDeC is the same as for IDeC. In fact, the equation $\hat{d} = \phi(\hat{u}) = 0$ turns out to be closely related to a reformulation of the associated collocation equations $\hat{y}'(x_l) = f(x_l, \hat{y}(x_l))$ in the form of an exact finite difference scheme approximated via quadrature. The latter is closely related to the implicit Runge-Kutta (IRK) reformulation of the collocation equations.
- There are several motivations for considering IQDeC. The major point is that, as demonstrated in [3], its convergence properties are much less affected by irregular distribution of the x_l. This is due to the close relationship between $\tilde{\phi}$ and ϕ, see (7a) and (10a). In the forward Euler case, for instance, the normal order sequence $1, 2, 3, \ldots$ shows up, in contrast to classical IDeC.

  We also refer to [2] for a motivation and explanation of the IQDeC technique in the context of semilinear problems.
- IQDeC is also closely related to the concept of *exact difference schemes*, see, e.g., [11, 15]: Eq. (9) represents an exact difference scheme (EDS) satisfied by the true solution y^*. In the context of IQDeC, the defect is taken with respect this EDS, using an appropriate quadrature formula for evaluation of the right-hand side. However, this way of 'truncating' the EDS not the same as in [11, 15], where compact schemes are constructed and defect correction is typically not considered as an algorithmic option.

  Similar remarks apply to second order problems (which are also considered in Sec. 4 below). To our opinion, the combination of compactly truncated EDS schemes with defect correction will be worth considering as an alternative to simple fixed point iterations or more intricate Newton-like schemes applied to an EDS.

- For a related approach in the context of second order two-point boundary value problems, also permitting variable mesh spacing, see [7].
- Another modification can be used to construct superconvergent IDeC methods: In [3] ('IPDeC') and in [16], use of an equidistant basic grid is combined with defect evaluation at Gaussian nodes, in a way that the resulting iterates converge to the corresponding superconvergent fixed point (collocation at Gaussian nodes).

3.5. **Stiff and singular problems.** For stiff systems of ODEs, DeC methods have been used with some success. However, as for any other method, the convergence properties strongly depend on the problem at hand. The main difficulty for DeC is that the convergence rate may be rather poor for error components associated with stiff eigendirections. An overview and further material on this topic can be found in [4] or [8]. Similar remarks apply to problems with singularities.

3.6. **Boundary value problems (BVPs) and 'deferred correction'.** Historically, one of the first applications of a type (B) truncation error estimator (4a) appears in the context of finite-difference approximations to a BVP

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = f(x, y(x)), \quad R(y(x_0), y(b)) = 0, \tag{11}$$

posed on an interval $[a, b]$ (with boundary conditions represented by the function R), or higher order problems. (A classical text on the topic is [14].) For a finite-difference approximation of $y'(x_l)$, e.g. as in (7a), asymptotic expansion of the truncation error ℓ^* is straightforward using Taylor series and using (11):

$$\begin{aligned} \ell^*(x_l) &= \tilde{\phi}(y^*)(x_l) = \frac{y^*(x_{l+1}) - y^*(x_l)}{h} - \frac{d}{dx}\,y^*(x_l) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\,y^*(x_l) + \frac{1}{6}\frac{d^3}{dx^3}\,y^*(x_l) + \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

The idea is to approximate the leading term $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\,y^*(x_l)$ by a second order difference quotient involving three successive nodes. This defines an approximate truncation error associated with an approximate original problem, which corresponds to a higher order discretization of (11). The corresponding estimator λ^0 is obtained by evaluating the approximate truncation error at a given $y = y^0$. This is used in the first step of an IDeC (B) procedure (see (4a)–(4c)). In this context, *updating* the (approximate) [OP] in course of the iteration is natural, involving difference approximations of the higher order terms in (12), to be successively evaluated at the iterates y^i.

IDeC (B) versions of this type are usually addressed as deferred correction techniques, and they have been extensively used, especially in the context of boundary value problems. The analysis heavily relies on the smoothness properties of the error. Piecewise equidistant meshes are usually required. A difficulty to be coped with is the fact that the difference quotients involved increase in complexity and have to be modified near the boundary and at points where the stepsize is changed.

3.7. **Defect-based error estimation and adaptivity.** In practice, the DeC principle is also applied – in the spirit of our original motivation – for estimating the error of a given numerical solution with the purpose of adapting the mesh. A typical case is described and analyzed in [5]: Assume that y^0 is a piecewise polynomial collocation solution to the BVP (11). Collocation methods are very popular and have favorable convergence properties. By definition of y^0, its pointwise defect $d^0(x) = \frac{d}{dx}\, y^0(x) - f(x, y^0(x))$ vanishes at the collocation nodes which are, e.g., chosen in the interior of the collocation subintervals $\mathbf{I}_j$. Therefore, information about the quality of y^0 is to be obtained by evaluating $d^0(x)$ at another nodes, e.g., the endpoints of the $\mathbf{I}_j$.

For estimating the global error $e^0(x) = (y^0 - y^*)(x)$ one can use the type (A) error estimator (3a) based on a low-order auxiliary scheme $\tilde{\phi}$, e.g., an Euler or box scheme, over the collocation grid. Replacing the pointwise defect d^0 by the modified defect $\bar{d}^0$, analogously as in (10b), is significantly advantageous, because this version is robust with respect to the lack of smoothness of y^0 which is only a C^1 function. In [5] it has been proved that such a procedure leads to a reliable and asymptotically correct error estimator of QDeC type.

With an appropriately modified version of $\bar{d}^0$, closely related to the defect definition from [7], the QDeC estimator can also be extended to second (or higher order) problems.

4. Extensions

In this section we describe recent extensions of the I*DeC technique (version A) to regular implicit first and second order initial value problems in more detail. Numerical results for selected test examples are also presented. Clearly, these versions can also be applied to the special case of explicit ODEs.

4.1. **IQDeC (A) for implicit first order ODEs – IIQDeC.** Consider a first order initial value problem of the type

$$F\Big(x, y(x), \tfrac{d}{dx}\, y(x)\Big) = 0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{13}$$

The IIQDeC algorithm for the solution of (13) is an extension of the IQDeC approach explained in Sec. 3.4. For the numerical solution of (13) we introduce a grid comprising several subintervals $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots$, where the relative position of the grid points within the $\mathbf{I}_j$ is determined by $m+1$ parameters $0 \leqslant c_0 < c_1 < \ldots < c_{m-1} < c_m \leqslant 1$, and the absolute position is given by

$$x_{j,l} = \mathbf{x}_{j-1} + c_l\, \mathbf{h}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad l = 0 \ldots m,$$

where $\mathbf{h}_j$ denotes the length of the subinterval $\mathbf{I}_j$. On this grid, a first approximation $Y^0_{j,l}$, using the backward Euler scheme as basic discretization, is computed, i.e., we solve

$$F\Big(x_{j,l}, Y^0_{j,l}, \tfrac{Y^0_{j,l} - Y^0_{j,l-1}}{h_{j,l}}\Big) = 0, \tag{14}$$

starting from $Y^0_{1,0} = y_0$ at $x_{1,0} = x_0$. The $Y^0_{j,l}$ and, later on, the $Y^i_{j,l}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ are interpolated by polynomials $p^i_j(x)$ of degree $\leqslant m$, which define the piecewise polynomial function $p^i(x) = p^i_j(x)$. The pointwise defect of $p^i_j(x)$ with respect to (13) is given by

$$d^i_j(x) = F\Big(x, p^i_j(x), \tfrac{d}{dx}\, p^i_j(x)\Big), \quad x \in \mathbf{I}_j.$$

Now we define the locally integrated defect, an extension of (10b) to the implicit case, by

$$\bar{d}^i_{j,l} := \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{l,\mu}\, d^i_j(x_{j,\mu}) \approx \frac{\displaystyle\int_{x_{j,l-1}}^{x_{j,l}} d^i_j(x)\,dx}{x_{j,l}-x_{j,l-1}}\,. \tag{15}$$

The $\alpha_{l,\mu}$ are the weights of the corresponding interpolatory quadrature formulas with nodes $c_1,\dots,c_m$ and degree of exactness $m-1$. With the basic discretization scheme (14), and the defect (15), the discretized neighboring problem reads

$$F\Big(x_{j,l}, \tilde{Y}^i_{j,l}, \tfrac{\tilde{Y}^i_{j,l}-\tilde{Y}^i_{j,l-1}}{h_{j,l}}\Big) = \bar{d}^i_{j,l}, \tag{16}$$

starting from $\tilde{Y}^i_{1,0} = y_0$ at $x_{1,0} = x_0$. With the solution of (16), the improved approximations are defined by

$$Y^i_{j,l} = Y^0_{j,l} - \big(\tilde{Y}^{i-1}_{j,l} - Y^{i-1}_{j,l}\big), \quad i = 1,2,\dots. \tag{17}$$

For a convergence proof of the IIQDeC method, see [19].

Example 1. Consider the implicit scalar nonlinear test problem

$$\begin{aligned} e^{y'(x)} + y'(x) + y(x) & \qquad\qquad\qquad (18a)\\ = e^{-\sin x} + \cos x - \sin x, &\\ y(0) = 1, & \qquad\qquad\qquad (18b) \end{aligned}$$

with exact solution $y^*(x) = \cos x$. The numerical solution is computed over a sequence of subintervals of length $\mathbf{h}$, each of them divided into a nonequidistant grid with 4 'randomly' chosen nodes ($c_1 = 0.1234$, $c_2 = 0.5054$, $c_3 = 0.7134$, $c_4 = 1$), in order to demonstrate the robustness of IQDeC with respect to varying stepsizes.

We choose the integration interval $x \in [0,3]$. The resulting global errors with respect to the exact solution at the endpoint $x = 3$ are displayed in Table 1 together with the observed convergence orders. Results are given for the basic scheme (BEUL), 4 IIQDeC iterates working in passive mode, and the fixed point of the IIQDeC iteration (COLL, corresponding to collocation at the points where the defect is evaluated).

4.2. **IPDeC (A) for implicit second order ODEs – IIPDeC2-DQ2.** Here we present a new superconvergent I*DeC algorithm for implicit initial value problems of second order. Consider a problem of the type

$$F\Big(x, y(x), \tfrac{d}{dx}\,y(x), \tfrac{d^2}{dx^2}\,y(x)\Big) = 0, \tag{19a}$$

$$y(x_0) = y_0,\ \tfrac{d}{dx}\,y(x_0) = y'_0. \tag{19b}$$

The IIPDeC 2 algorithm for the solution of (19) is an extension of the IPDeC approach mentioned at the end of Sec. 3.4. It is based on a combination of an equidistant grid $\{x_{j,l},\ l = 0\dots m\}$ with constant inner stepsize h in each interval $\mathbf{I}_j$, and another grid $\{\hat{x}_{j,k},\ k = 1\dots\hat{m}\}$ ($\hat{m} = m-1$) based on Lobatto nodes (with parameters $\hat{c}_k$).

h	BEUL	IIQDeC/1	IIQDeC/2	IIQDeC/3	COLL
0.1	6.31E-03	1.14E-04	1.02E-06	3.83E-09	3.98E-09
0.05	3.16 E-03	2.90E-05	1.31E-07	2.69E-10	2.43E-10
0.025	1.58E-03	7.30E-05	1.66E-08	1.77E-11	1.50E-11
0.0125	7.91E-04	1.83E-06	2.09E-09	1.14E-12	9.31E-12
0.1					
0.05	1.00	1.98	2.96	3.83	4.04
0.025	1.00	1.99	2.98	3.92	4.02
0.0125	1.00	1.99	2.99	3.96	4.01

TABLE 1. Numerical results for Example 1

The equidistant grid $\{x_{j,l}\}$ is used for realizing a second order basic discretization (DQ 2) based on symmetric finite differences according to

$$\begin{cases} F\Big(x_{1,0}, y_0, y_0', \frac{\frac{Y_{1,1}^0 - y_0}{h} - y_0'}{\frac{h}{2}}\Big) = 0; \\ \text{For } j \geqslant 1,\, l > 1: \\ \;F\Big(x_{j,l}, Y_{j,l}^0, \frac{Y_{j,l+1}^0 - Y_{j,l-1}^0}{2h}, \frac{Y_{j,l+1}^0 - 2Y_{j,l}^0 + Y_{j,l-1}^0}{h^2}\Big) = 0; \\ \text{For } j > 1,\, l = 1: \\ \;F\Big(x_{j-1,m}, Y_{j-1,m}^0, \frac{Y_{j,1}^0 - Y_{j-1,m-1}^0}{2h}, \\ \qquad\qquad \frac{Y_{j,1}^0 - 2Y_{j-1,m}^0 + Y_{j-1,m-1}^0}{h^2}\Big) = 0. \end{cases}$$

The Lobatto grid $\{\hat{x}_{j,l}\}$ is used for the computation of an interpolated defect. This is realized as follows:

- First, after interpolating the current iterate and defining the defect in the usual way, the defect is evaluated at the $\hat{x}_{j,k}$,

$$\hat{d}_{j,k}^i := \tfrac{d}{dx}\, p^i(x_{j,k}) - f(x^i, p^i(x_{j,k})), \quad k = 1 \ldots \hat{m}.$$

- Next, after interpolating the $\hat{d}_{j,k}^i$ by a piecewise polynomial function $\hat{d}(x)$ we define the modified defect

$$\begin{cases} \hat{d}_{1,0}^{A,i} := \hat{d}^{\,i}(x_{1,0}), \quad \hat{d}_{1,0}^{B,i} := \tfrac{d}{dx}\, p^i(x_{1,0}) - y_0'; \\ \text{For } j \geqslant 1,\, l > 0: \quad \hat{d}_{j,l}^i := \hat{d}^{\,i}(x_{j,l}); \\ \text{For } j > 1,\, l = 0: \\ \;\hat{d}_{j,0}^i = F\Big(x_{j,l}, p_{j,0}^i, \frac{\frac{d}{dx}\, p^i(x_{j,0}) + \frac{d}{dx}\, p^i(x_{j-1,m})}{2}, \hat{\gamma}_{j,0}^i\Big) \end{cases} \tag{20a}$$

with the 'jump defect'

$$\hat{\gamma}^i_{j,0} := \frac{\frac{d^2}{dx^2}\, p^i(x_{j,0}) + \frac{d^2}{dx^2}\, p^i(x_{j-1,m})}{2} + \frac{\frac{d}{dx}\, p^i(x_{j,0}) - \frac{d}{dx}\, p^i(x_{j-1,m})}{h}. \tag{20b}$$

Then we solve the corresponding discretized neighboring problem

$$\begin{cases} F\Big(x_{1,0}, y_0, y_0' + \hat{d}^{B,i}_{1,0}, \frac{\frac{\tilde{Y}^i_{1,1}-y_0}{h} - (y_0' + d^{B,i}_{1,0})}{\frac{h}{2}}\Big) = d^{A,i}_{1,0}; \\ \text{For } j \geqslant 1,\, l > 1: \\ \; F\Big(x_{j,l}, \tilde{Y}^i_{j,l}, \frac{\tilde{Y}^i_{j,l+1} - \tilde{Y}^i_{j,l-1}}{2h}, \frac{\tilde{Y}^i_{j,l+1} - 2\tilde{Y}^i_{j,l} + \tilde{Y}^i_{j,l-1}}{h^2}\Big) = \hat{d}^i_{j,l}; \\ \text{For } j > 1,\, l = 1: \\ \; F\Big(x_{j-1,m}, \tilde{Y}^i_{j-1,m}, \frac{\tilde{Y}^i_{j,1} - \tilde{Y}^i_{j-1,m-1}}{2h}, \frac{\tilde{Y}^i_{j,1} - 2\tilde{Y}^i_{j-1,m} + \tilde{Y}^i_{j-1,m-1}}{h^2}\Big) = \hat{d}^i_{j,0}, \end{cases}$$

and proceed as before (cf. (17)).

The purpose of the modified defect definition (20) is, like for classical explicit first order IPDeC from [3], to modify the iteration in such a way that its fixed point is given by a higher-order superconvergent collocation scheme, in our case of Lobatto type. In fact, Lobatto collocation at the nodes $\hat{x}_{j,k}$ means that the defect of the collocation polynomial vanishes at these nodes, and thus, this collocation polynomial is a fixed point of our iteration. This lets us expect that after several defect correction steps a superconvergent iterate is obtained; see Example 2 for numerical evidence.

1. Remark. In (20a), a defect with respect to the initial condition for the first derivative is also taken into account. Furthermore, the discontinuity of the first derivative of $p^i(x)$ at the endpoints of the intervals $\mathbf{I}_j$ $(p^i(\mathbf{x}_j))$ enforces to include the jump defect $\hat{\gamma}^i_{j,0}$, see (20), see also [9].

Example 2. Consider the implicit scalar nonlinear test problem

$$e^{y''(x)} + y'(x) + y(x) = e^{-\sin x} + 1 + \sin x + \cos x, \tag{21a}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \tag{21b}$$

with exact solution $y^*(x) = 1 + \sin x$. The numerical solution is computed over a sequence of subintervals of length $\mathbf{h}$, each of them divided into 6 equidistants nodes and 5 Lobatto nodes ($\hat{c}_1 = 0$, $\hat{c}_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\hat{c}_3 = \frac{1}{2};$, $\hat{c}_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\hat{c}_5 = 1$).

We choose the integration interval $x \in [0, 3]$. The resulting global errors with respect to the exact solution at the endpoint $x = 3$ are displayed in Table 2 together with the observed convergence orders. Results are given for the basic scheme (DQ 2), 4 IIPDeC 2 iterates working in passive mode, and the fixed point of the IIPDeC 2 iteration (L-COLL, corresponding to Lobatto collocation of degree $\hat{m} = 5$ at the nodes $\hat{x}_{j,k}$ where the defect is interpolated). Note that the convergence order of the Lobatto collocation scheme is

h	DQ 2	IIPDeC 2/1	IIPDeC 2/2	IIPDeC 2/3	L-COLL
0.1	2.30E-05	1.93E-09	9.62E-14	6.07E-16	6.32E-16
0.05	5.75E-06	1.21E-10	1.51E-15	2.37E-18	2.47E-18
0.025	1.44E-06	7.54E-12	2.36E-17	9.24E-21	9.63E-21
0.0125	3.59E-07	4.71E-13	3.69E-19	3.61E-23	3.76E-23
0.1					
0.05	2.00	4.00	5.99	8.00	8.00
0.025	2.00	4.00	6.00	8.00	8.00
0.0125	2.00	4.00	6.00	8.00	8.00

Table 2. Numerical results for Example 2.

$\mathcal{O}(h^{2\hat{m}-2}) = \mathcal{O}(h^8)$, and the same convergence order is realized after only 3 IIPDeC 2 iteration steps.

References

1. *Auzinger W.* Defect correction methods. — Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics, Volume 1, Enquist, B. (Ed.), Berlin: Springer, 2015. — p. 323–332,
2. *Auzinger W.* Error estimation via defect computation and reconstruction: Some particular techniques // J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math. — 2011. — **6**, №1-2. — P. 15–27.
3. *Auzinger W., Hofstätter H., Kreuzer W., Weinmüller E.* Modified defect correction algorithms for ODEs. Part I: General theory // Numer. Algorithms. — 2004. — **36**, №2. — P. 135–155.
4. *Auzinger W., Hofstätter H., Kreuzer W., Weinmüller E.* Modified defect correction algorithms for ODEs. Part II: Stiff initial value problems // Numer. Algorithms. — 2005. — **40**, №3. — P. 285–303.
5. *Auzinger W., Koch O., Weinmüller E.* Efficient collocation schemes for singular boundary value problems // Numer. Algorithms. — 2002. — **31**, №1. — P. 5–25.
6. *Böhmer W., Stetter H.J., Eds.* Defect Correction Methods – Theory and Applications. — Computing Suppl. 5, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
7. *Butcher J.C., Cash J.R., Moore G., Russell R.D.* Defect correction for two-point boundary value problems on nonequidistant meshes // Math. Comput. — 1995. — **64**, №210. — P. 629–648.
8. *Dutt A., Greengard L., Rokhlin V.* Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations // BIT Numer. Math. — 2000. — **40**, №2. — P. 241–266.
9. *Frank R.* The method of iterated defect-correction and its application to two-point boundary value problems // Numer. Math. — 1975. — **25**, №4. — P. 409–419.
10. *Frank R, Ueberhuber C.W.* Iterated defect correction for differential equations. Part I: Theoretical results // Computing. — 1978. — **20**, №3. — P. 207–228.
11. *Gavriluk I.P., Hermann M., Makarov V.L., Kutniv M.V.* Exact and Truncated Difference Schemes for Boundary Value ODEs. — Basel: Birkhäuser, 2011.
12. *Hansen A.C., Strain J.* On the order of deferred correction // Appl. Numer. Math. — 2011. — **61**, №8. — P. 961–973.
13. *Hairer A., Nørsett S.P., Wanner, G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. — Berlin: Springer, 1993.

14. *Pereyra V.* Iterated deferred correction for nonlinear boundary value problems // Numer. Math. — 1968. — **11**, №2. — P. 111–125.
15. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. — New-York, Basel: Marcel Dekker Inc., 2001.
16. *Schild, K.H.* Gaussian collocation via defect correction // Numer. Math. — 1990. — **58**, №1. — P. 369–386.
17. *Skeel R.D.* A theoretical framework for proving accuracy results for deferred corrections // SIAM J. Numer. Anal. — 1981. — **19**, №1. — P. 171–196.
18. *Stetter H.J.* The defect correction principle and discretization methods // Numer. Math. — 1978. — **29**, №4. — P. 425–443.
19. *Tutz M.* Iterierte Defektkorrektur für explizite und implizite Anfangswertprobleme erster und zweiter Ordnung: PhD Thesis (in German). — Vienna University of Technology, 2013.
20. *Zadunaisky P.E.* On the estimation of errors propagated in the numerical integration of ODEs // Numer. Math. — 1976. — **27**, №1. — P. 21–39.

Стаття: надійшла до редколегії 15.05.2016
прийнята до друку 20.02.2017

МЕТОДИ КОРЕКЦІЇ ДЕФЕКТУ, КЛАСИЧНІ ТА НОВІ

Вінфрід АУЦІНҐЕР[1], Роксолана СТОЛЯРЧУК[2], Мартін ТУТЦ[1]

[1] *Віденьський технічний університет, Віднер Гауптштрассе, 8-10, 1040 Відень, Австрія*
[2] *Національний університет "Львівська Політехніка", вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна*

Методи корекції дефекту ґрунтуються на ідеї оцінки точності наближеного розв'зку за допомогою формування дефекту, або залишку, стосовно до даної задачі. За допомогою процедури зворотнього розв'язування отримуємо оцінку похибки. Цей процес можна продовжити ітеративно. Мета цього огляду – подальше поширення концепції, що розглядається. Більш того, вперше подано загальний і узгоджений огляд різних типів методів корекції дефекту, їхнє застосувань в контексті дискретизаційних схем для диференціальних рівнянь. Після опису загального алгоритму обговоримо деякі спеціальні технології, які використовуються для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. Також представлені нові результати стосовно застосування до неявних задач.

Ключові слова: корекція дефекту, дискретизація, звичайні диференціальні рівняння.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 20–26
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 20–26

УДК 517.95, 519.21

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ ТА МІГРАЦІЄЮ

Ірина БАЗИЛЕВИЧ, Христина ЯКИМИШИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: I_ Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_ Hrystyna@ukr.net

Виведено диференціальне рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом і систему диференціальних рівнянь для розподілу ймовірностей цього гіллястого процесу.

Ключові слова: гіллястий процес, неперервний час, міграція, твірна функція, диференціальне рівняння, система диференціальних рівнянь, розподіл ймовірностей.

1. Вступ. Перша стаття для гіллястих процесів з іммiграцією [1] була опублікована в 1957 р. Цей напрямок вивчали багато вчених. В 1980 р. С.В. Нагаєв і Л.В. Хан [2] та Н. Янев і К. Мітов [3] паралельно опублікували статті, де вперше досліджували задачу поєднання еміграції та іммiграції, тобто дослідження міграційних процесів. Майже у всіх відомих публікаціях, де досліджувались гіллясті процеси з міграцією, розглядався випадок дискретного часу.

2. Постановка задачі. Розглядаємо гіллястий процес $\mu(t)$ з одним типом частинок, з міграцією та неперервним часом. Тут $\mu(t)$ – кількість частинок у момент часу t. Вважаємо, що в початковий момент часу в системі одна частинка, тобто

$$\mu(0) = 1.$$

Процес $\mu(t)$ можна подати як поєднання двох процесів – однорідний гіллястий процес Белмана-Харріса $\xi(t)$ та однорідний процес міграції $\zeta(t)$. Якщо в момент часу t в системі існує випадкова кількість $\mu(t)$ частинок, то вони розмножуються незалежно одна від одної та незалежно від свого походження за тим самим законом. Закон розмноження частинок у середині деякої системи визначається процесом $\xi(t)$. Крім того, в систему ще можуть іммігрувати частинки та відбуватися еміграція. Імміграція та еміграція визначаються процесом $\zeta(t)$, де $\zeta(t)$ – позначає кількість частинок у момент часу t, які емігрують із системи або іммігрують в неї. Очевидно, що

$$\mu(t) = max\{0, \xi(t) + \zeta(t)\}. \quad (1)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D35

Опишемо детальніше процеси $\xi(t)$ та $\zeta(t)$.

Спочатку розглядаємо $\xi(t)$. Нехай у момент часу t в системі існує $\mu(t)$ частинок. Ці частинки незалежно від походження та незалежно одна від одної, розмножуються за тим самим законом $\xi(t)$. Тому достатньо визначити закон розподілу однієї частинки.

Позначимо через $\xi_i(\Delta t)$ $(i = 1, \ldots, \mu(t))$ кількість нащадків i-ї частинки за час Δt, тобто в момент часу $t + \Delta t$ і, враховуючи однорідність $\xi(t)$ припускаємо, що

$$P\{\xi_i(t+\Delta t) = n \mid \xi_i(t) = 1\} = P\{\xi_i(\Delta t) = n \mid \xi_i(0) = 1\} =$$
$$= H_n(\Delta t) = \begin{cases} h_n \Delta t + o(\Delta t), & \text{якщо } n = 0,\, 2,\, 3, \ldots; \\ 1 + h_n \Delta t + o(\Delta t), & \text{якщо } n = 1, \end{cases}$$

де $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n = 0$, $h_1 \leqslant 0$, $h_j \geqslant 0$ $(j = 0, 2, \ldots)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(t) = 1$.

Процес $\xi(t + \Delta t)$ визначається як сукупність нащадків кожної частинки $\mu_i(t)$, а саме

$$\xi(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{\mu(t)} \xi_i(\Delta t).$$

Переходимо до процесу $\zeta(t)$. Насамперед вважаємо, що $\zeta(0) = 0$. У довільний момент часу $t \in [0; \infty)$ з ймовірністю $P_k(t)$ в популяцію іммігрує k частинок ($k = 0, 1, 2, \ldots$) або з ймовірністю $P_r(t)$ з популяції емігрує r частинок $(r = -m, \ldots, -1)$ і

$$\sum_{k=-m}^{\infty} P_k(t) = 1, \tag{2}$$

$$P\{\zeta(t) = k\} = P_k(t),\ k \geqslant -m. \tag{3}$$

Процес міграції відбувається так. Як уже зазначалось, у випадковий момент часу (позначимо його τ_1) вперше відбувається міграція у процесі $\mu(t)$, ймовірнісний розподіл якої визначається співвідношеннями (2), (3). Після цього вважаємо, що процес $\zeta(t)$ знову набуває нульового значення та перебуває у цьому стані випадковий час τ_2. У момент часу $\tau_1 + \tau_2$ у систему знову іммігрують або навпаки емігрують з неї частинки та після цього процес $\zeta(t)$ знову набуває значення нуль, у якому перебуває випадковий час τ_3, і так далі. Випадкові величини τ_1, τ_2, τ_3, ..., τ_n вважаємо незалежними та однаково розподіленими.

Введемо таке позначення $S_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$. Процес S_n є процесом відновлення, а $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — моментами відновлення.

Далі припускаємо, що розподіли процесу $\zeta(t)$ у моменти часу $S_1, S_2, \ldots, S_n$ збігаються, а також, що $\zeta(t)$ — однорідний марковський процес.

Задамо асимптотику при $\Delta t \to 0$:

$$P_0(\Delta t) = 1 + p_0 \Delta t + o(\Delta t),\ P_k(\Delta t) = p_k \Delta t + o(\Delta t),\ k = -m, \ldots, -1, 1, \ldots$$

причому

$$\sum_{k=-m}^{\infty} p_k = 0,\ p_0 \leqslant 0,\ p_j \geqslant 0\ (j = -m \ldots, -1, 1, 2, \ldots).$$

Надалі будемо вважати, що $P_{-m}(t) > 0$ для довільного $t > 0$.

Отже, процес $\mu(t)$ можна описати так. У початковий момент часу у системі міститься одна частинка, тобто $\mu(0) = 1$. Ця частинки розмножуються за уже вказаним законом розподілу процесу $\xi(t)$. Далі поряд з еволюцією процесу $\xi(t)$ з певною ймовірністю можуть ще потрапляти частинки чи навпаки емігрувати внаслідок дії процесу $\zeta(t)$. Розподіл процесу $\zeta(t)$ не залежить від $\xi(t)$.

Враховуючи (1), кількість частинок у момент часу $t + \Delta t$ дорівнює

$$\mu(t+\Delta t) = \max\Big\{\sum_{i=1}^{\mu(t)} \xi_i(\Delta t) + \zeta_t(\Delta t);\ 0\Big\},$$

де $\zeta_t(\Delta t)$ – кількість частинок, які емігрували з системи або іммігрували в систему протягом часу $(t, t + \Delta t]$.

Вважаємо, що випадкові моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ не залежать від процесу $\xi(t)$ та не залежать значення процесу $\zeta(t)$ у ці моменти. Також кількість частинок, які іммігрують у систему або емігрують з неї, не залежить від $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, а також від процесу $\xi(t)$.

Твірну функцію процесу $\mu(t)$ будемо позначати через $F_\mu(t, s)$, а процесу $\xi(t)$ – через $F_\xi(t, s)$ і

$$F_\mu(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t) = n\}s^n,\ F_\xi(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi(t) = n\}s^n,\ |s| \leqslant 1,\ s \in \mathbb{C}.$$

Твірні функції щільностей перехідних ймовірностей для процесів $\mu(t)$, $\xi(t)$ позначимо через $f_\mu(s)$ та $h(s)$, відповідно. $h(s)$ визначаємо так:

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n s^n,\ |s| \leqslant 1,\ s \in \mathbb{C}.$$

Замість класичної твірної функції для процесу $\zeta(t)$ розглядатимемо функцію

$$\widehat{F}_\zeta(t,s) = \sum_{n=-m}^{\infty} P\{\zeta(t) = n\}s^n, \quad 0 < |s| \leqslant 1,$$

яку назвемо *узагальненою твірною функцією*. Також введемо *узагальнену твірну функцію щільностей* перехідних ймовірностей для процесу $\zeta(t)$

$$f_\zeta(s) = \sum_{l=-m}^{\infty} p_l s^l, \quad 0 < |s| \leqslant 1.$$

Далі будемо використовувати таке позначення.

Нехай $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ – деяка послідовність дійсних чисел. Позначимо

$$A(s) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n s^n,$$

де $s \in \mathbb{C}$, $0 < |s| < s_0$, k — деяке натуральне число і $\sum\limits_{n=-k}^{\infty} a_n (s_0)^n < \infty$.Тоді

$$\langle A(s) \rangle_0 = \sum_{n=-k}^{0} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n.$$

Очевидно, що $\langle A(s)$ визначено для всіх $s \in [-1, 1]$.

Лема 1. *Нехай* $A(s) = \sum\limits_{n=-k}^{\infty} a_n s^n$ *і* $B(s) = \sum\limits_{n=-k}^{\infty} b_n s^n$. *Тоді*

$$\langle A(s) + B(s) \rangle_0 = \langle A(s) \rangle_0 + \langle B(s) \rangle_0 .$$

Якщо C *— довільна константа, то* $\langle CA(s) \rangle_0 = C \langle A(s) \rangle_0$.

Лема 2. *Твірна функція процесу* $\mu(t)$ *в момент часу* $t + \Delta t$ *дорівнює*

$$F_\mu(t + \Delta t, s) = \langle F_\xi(t + \Delta t, s) \widehat{F}_{\zeta_t}(\Delta t, s) \rangle_0.$$

Позначимо через θ_1 — момент першого потрапляння в нуль процесу $\mu(t)$, а також введемо систему таких позначень

$$Q(t) = P\{\mu(t) > 0 \mid \theta_1 > t\},$$

$$Q_i(t) = P\{\mu(t) = i \mid \theta_1 > t\} = \left. \frac{\partial^i F_\mu(t, s)}{i! \partial s^i} \right|_{s=0}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

3. Основні результати.

Теорема 1. *Твірна функція процесу* $\mu(t)$ *задовольняє диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial F_\mu(t, s)}{\partial t} = h(F_\mu(t, s)) + \langle F_\mu(t, s) \widehat{f}_\zeta(s) \rangle_0,$$

з початковою умовою

$$\mu(0) = 1.$$

Доведення. Позаяк процеси $\xi(t)$, $\zeta(t)$ – однорідні, то процес, який задається співвідношенням

$$\mu(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^{\mu(t)} \xi_j(\Delta t) + \zeta_t(\Delta t),$$

також однорідний.

Відомо, що в початковий момент часу в системі є одна частинка.

Позначимо через $\xi_1(\Delta t)$ кількість нащадків цієї частинки за час Δt. Враховуючи, що кількість частинок у системі визначається еволюцією цієї частинки та дією міграції, то в момент часу Δt в системі буде

$$\max\{\xi_1(\Delta t) + \zeta_0(\Delta t), 0\}$$

частинок. Кожна з існуючих частинок у момент часу Δt через час t, з врахуванням міграційних процесів, матимеме випадкову кількість нащадків

$$\mu(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{max\{\xi_1(\Delta t) + \zeta_0(\Delta t), 0\}} \mu_j(t).$$

Отже, твірну функцію процесу $\mu(t)$ у момент часу $t+\Delta t$ можна подати у вигляді

$$F_\mu(t+\Delta t, s) = F_{\max\{\xi_1(\Delta t)+\zeta_0(\Delta t),0\}}(F_\mu(t,s)).$$

Це означає, що

$$\begin{gathered} F_\mu(t+\Delta t, s) = \langle F_{\xi_1}(\Delta t, F_\mu(t,s))\widehat{F}_\zeta(\Delta t, s)\rangle_0 = \\ = \langle (F_\mu(t,s) + \Delta t h(F_\mu(t,s)) + o(\Delta t))(1+\Delta t\widehat{f}_\zeta(s) + o(\Delta t))\rangle_0 = \\ = \langle F_\mu(t,s) + \Delta t(h(F_\mu(t,s)) + F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)) + o(\Delta t)\rangle_0 = \\ = F_\mu(t,s) + \Delta t(h(F_\mu(t,s)) + \langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\rangle_0) + o(\Delta t). \end{gathered}$$

Звідси випливає диференціальне рівняння для твірної функції процесу $\mu(t)$

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = h(F_\mu(t,s)) + \langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\rangle_0.$$

Теорема доведена. □

Зауваження 1. Розпишемо детальніше $F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)$.

$$\begin{gathered} F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t)=n\}s^n \sum_{l=-m}^{\infty} p_l s^l = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{\infty} P\{\mu(t)=n\}p_l s^{n+l} = \sum_{k=-m}^{\infty}\sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l s^k. \end{gathered}$$

Отже,

$$\langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\rangle_0 = \sum_{k=-m}^{0}\sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l.$$

Отже, диференціальне рівняння можна записати так:

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = h(F_\mu(t,s)) + \sum_{k=-m}^{0}\sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l. \quad (4)$$

Теорема 2. 1. *Якщо існує таке натуральне число* n*, що для кожного* $t>0$ *виконується умова* $\sum_{u=n+1}^{\infty} Q_u(t) = o\big(\sum_{u=-m}^{n} Q_u(t)\big)$*, то для процесу* $\mu(t)$ *виконується система диференціальних рівнянь*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_0(t)}{\partial t} = h(Q_0(t)) + \sum\limits_{l=-m}^{0} Q_{0-l}(t)p_l, \\ \dfrac{\partial Q_1(t)}{\partial t} = h'(Q_0(t))Q_1(t) + \sum\limits_{l=-m}^{1} Q_{1-l}(t)p_l, \\ \dfrac{\partial Q_2(t)}{\partial t} = h''(Q_0(t))Q_1^2(t) + h'(Q_0(t))Q_2(t) + \sum\limits_{l=-m}^{2} Q_{2-l}(t)p_l, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial Q_n(t)}{\partial t} = \sum n! h^{(n)}(Q_0(t)) \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n_i!}\left(\dfrac{Q_i(t)}{i!}\right)^i + \sum\limits_{l=-m}^{n} Q_{n-l}(t)p_l, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} i n_i = n, \end{cases} \quad (5)$$

з початковими умовами

$$Q_1(0) = 1, \ Q_k(0) = 0, \quad k = 0, 2, ..., n.$$

2. *Якщо права частина кожного рівняння системи (5) задовольняє умову Ліпшиця, то існує розв'язок і він єдиний.*

Доведення. Продиференціюємо (4) по s

$$\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s} = h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l\right) =$$

$$= h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l.$$

Підставимо $s = 0$. Тоді

$$\left.\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{s=0} = \left.\left(h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l\right)\right|_{s=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left.\left(\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}\right)\right|_{s=0} = \left.\left(h'(F_\mu(t,s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}\right)\right|_{s=0} + \left.\sum_{l=-m}^{1} P\{\mu(t) = 1-l\}p_l\right|_{s=0},$$

$$\frac{\partial Q_1(t)}{\partial t} = h'(Q_0(t))Q_1(t) + \sum_{l=-m}^{1} Q_{1-l}(t)p_l.$$

Продиференціюємо рівняння (4) ще раз по змінній s

$$\frac{\partial^3 F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s^2} = h''(F_\mu(t,s))(\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s})^2 +$$

$$+ h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)s^{k-2} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial s^2}\right) = (h''(F_\mu(t,s))\left(\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}\right)^2 + h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial s^2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)s^{k-2} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l,$$

і знову підставимо $s = 0$. У підсумку отримуємо

$$\frac{\partial Q_2(t)}{\partial t} = h''(Q_0(t))Q_1^2(t) + h'(1 - Q(t))Q_2(t) + \sum_{l=-m}^{2} Q_{2-l}(t)p_l.$$

Продовжуючи аналогічні міркування, одержуємо

$$\frac{\partial Q_k(t)}{\partial t} = \sum k! h^{(k)}(Q_0(t)) \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i!}\left(\frac{Q_i(t)}{i!}\right)^i + \sum_{l=-m}^{n} Q_{n-l}(t)p_l + \sum_{l=n+1}^{k} Q_{k-l}(t)p_l,$$

де $\sum_{i=1}^{k} in_i = k$.

Враховуючи те, що існує таке натуральне число n, що для кожного $t > 0$ виконується умова $\sum\limits_{u=n+1}^{\infty} P_u(t) = o\big(\sum\limits_{u=-m}^{n} P_u(t)\big)$, то отримуємо систему (5). Це є система нелінійних диференціальних рівнянь. Враховуючи те, що функції

$$\sum k! h^{(k)}(Q_0(t)) \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i!} \left(\frac{Q_i(t)}{i!}\right)^i + \sum_{l=-m}^{k} Q_{k-l}(t) p_l,$$

(де $\sum\limits_{i=1}^{k} in_i = k$, $k = 1, \ldots, n$) задовольняють умову Ліпшиця, то згідно з [5] для цієї системи існує розв'язок, причому він єдиний. Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. *Севастьянов Б.А.* Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида // Теория вероятн. и ее примен. — 1957. — **2**, №3. — С. 339–348.
2. *Нагаев С.В., Хан Л.В.* Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией // Теория вероятн. и ее примен. — 1980. — **25**, №3. — С. 523–534.
3. *Yanev N.M., Mitov K.V.* Controlled branching processes: the case of random migration // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 1980. — **33**. — P. 473–475.
4. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — Москва: Наука, 1971. — 436 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. — 4-е изд., испр. — Москва: Наука, 1971. — 576 с.

Стаття: надійшла до редколегії 01.10.2016
прийнята до друку 14.12.2016

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR BRANCHING PROCESSES WITH CONTINUOUS TIME AND MIGRATION

Iryna BAZYLEVYCH, Khrystyna YAKYMYSHYN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mails: I_Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_Hrystyna@ukr.net

In the paper, we derive a differential equation for a generating function of a branching process with migration and continuous time as well as a system of differential equations for the probability distribution of this branching process.

Key words: branching process, continuous time, generating function, differential equation, system of differential equations, probability distribution.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 27–33
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 27–33

УДК 517.555

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

Андрій БАНДУРА[1], Наталія ПЕТРЕЧКО[2]

[1]*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,*
вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, 76019,
e-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: petrehcko.n@gmail.com

Узагальнено один критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних на випадок $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$. Отримане твердження описує поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд на кістяку полікруга. Також доведено нове твердження через заміну квантора загальності на квантор існування, яке послаблює відомі достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій.

Ключові слова: ціла функція, обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, полікруг, степеневий ряд.

1. Вступ. У [1, 2] один із авторів статті спільно з М.Т. Бордуляк та О.Б. Скасківим розширив означення функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних на випадок $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервні функції. Попереднє означення, введене М.Т. Бордуляк та М.М. Шереметою [3, 4], стосувалося функцій $\mathbf{L}_0$ такого вигляду $\mathbf{L}_0(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Відповідно, існують цілі функції, які через такий вузький клас функцій $\mathbf{L}_0$, мають необмежений $\mathbf{L}_0$-індекс за сукупністю змінних (див. приклад функції $F(z_1, z_2) = \exp(z_1 z_2)$ у [3]), хоча за фіксованих значень $n-1$ змінних вони мають обмежений індекс як функції однієї змінної. Увівши у розгляд функції $\mathbf{L}$ зазначеного загальнішого вигляду, ми зуміли розширити клас функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (див. той самий приклад у [1, 7]).

М.Т. Бордуляк та М.М. Шеремета [3] навели без доведення критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, в якому накладаються умови на поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд цілої функції на кістяку полікруга. Його доведення можна знайти у [5, 6]. Відповідне твердження було новим навіть для

2010 Mathematics Subject Classification: 32A15, 32A05, 32A17

$n = 1$. Ми переносимо цю теорему на випадок $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $z \in \mathbb{C}^n$. Крім того, використовуючи ідею про можливість заміни квантора загальності на квантор існування [8, 9] у критеріях обмеженості індексу, ми відповідно послаблюємо достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (теорема 3).

2. Основні позначення. Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ \ldots, \ l_n(z))$, $\mathbf{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+ := (0, +\infty)^n$ – деяка фіксована неперервна функція. Цілу функцію $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називаємо ([1, 2, 7], див. також [3, 4]) *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* якщо існує число $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ та всіх $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \leqslant \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \ K \in \mathbb{Z}^n_+, \ \|K\| \leqslant m\right\}, \tag{1}$$

де

$$F^{(K)}(z) := \frac{\partial^{\|K\|}F}{\partial z^K} := \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}, \quad K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+,$$

а $\|K\| = k_1 + \ldots + k_n$, $K! = k_1! \cdots k_n!$, $\mathbf{L}^J = l_1^{j_1} \cdots l_n^{j_n}$. Найменше ціле число m, для якого виконується нерівність (1), називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L})$. Зв'язок означення функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з іншими означеннями обмеженого індексу [10, 11] можна знайти у [1, 7].

Нам знадобляться деякі стандартні позначення. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Позначимо $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{2} = (2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$. Також для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ використовуватимемо такі позначення:

$$AB = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n), \ A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n), \ A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots a_n^{b_n},$$

однак не порушуючи умов існування зазначених виразів.

Запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$; подібно визначається відношення $A \leqslant B$.

Полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| < r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0, R)$, а його кістяк $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| = r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_j - z_j^0| \leqslant r_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0, R]$.

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції, $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для $R \in \mathbb{R}^n_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ та $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ визначимо

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \inf\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in D^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\},$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \sup\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in D^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\},$$

$$\Lambda_1(R) = (\lambda_{1,j}(R), \ldots, \lambda_{1,n}(R)), \quad \Lambda_2(R) = (\lambda_{2,1}(R), \ldots, \lambda_{2,n}(R)).$$

Через Q^n позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z)$, які для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$ та $j \in \{1, \ldots, n\}$ задовольняють $0 < \lambda_{1,j}(R) \leqslant \lambda_{2,j}(R) < +\infty$.

Нам буде потрібна така теорема:

Теорема 1 ([2]). *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують числа* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для усіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *справджується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)}: \ \|J\| = p+1\right\} \leqslant c\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)}: \ \|K\| \leqslant p\right\}. \qquad (2)$$

3. Основні твердження. Нехай $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Розвинемо цілу у $\mathbb{C}^n$ функцію F у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k((z-z^0)) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\|J\|=k} b_J(z-z^0)^J, \qquad (3)$$

де p_k — однорідні многочлени k-го степеня, $b_J = \frac{F^{(J)}(z^0)}{J!}$. Многочлен p_{k_0}, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (3) на $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)$ виконується така нерівність

$$|\sum_{k\neq k^0} p_k(z-z^0)| \leqslant \frac{1}{2}\max\{|b_J|R^J : \|J\| = k^0\}.$$

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існує* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для усіх* $d > 0$ *знайдеться* $\eta(d) \in (0; d)$, *що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *та деяких* $r = r(d, z^0) \in (\eta(d), d)$, $k^0 = k^0(d, z^0) \leqslant p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (3) *на* $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(z^0)})$.

Доведення. Нехай F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та $N = N(F, \mathbf{L}) < +\infty$, а n_0 — це $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних у точці $z^0 \in \mathbb{C}^n$, тобто це найменше число, для якого нерівність (1) виконується у точці z^0.

Тоді для кожної точки $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $n_0 \leqslant N$. Покладемо $a_J^* = \frac{|b_J|}{\mathbf{L}^J(z^0)} = \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)}$, $a_k = \max\{a_J^* : \ \|J\| = k\}$, $c = 2\{(N+n+1)!(n+1)! + (N+1)C_{n+N-1}^N\}$. Нехай d — довільне число. Покладемо $r_m = \frac{d}{(d+1)c^m}$ для $m \in \mathbb{Z}_+$ та позначимо $\mu_m = \max\{a_k r_m^k : \ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $s_m = \min\{k : \ a_k r_m^k = \mu_m\}$.

Оскільки при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $a_K^* \leqslant \max\{a_J^* : \ \|J\| \leqslant n_0\}$ для усіх $K \in \mathbb{Z}_+^n$, то $a_k \leqslant a_{n_0}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси для усіх $k > n_0$, враховуючи нерівність $r_0 < 1$, отримаємо $a_k r_0^k < a_{n_0} r_0^{n_0}$, тому $s_0 \leqslant n_0$. Водночас $cr_m = r_{m-1}$, а отже, для усіх $k > s_{m-1}$ (у нас $r_{m-1} < 1$) отримуємо

$$a_{s_{m-1}} r_m^{s_{m-1}} = a_{s_{m-1}} r_{m-1}^{s_{m-1}} c^{-s_{m-1}} \geqslant a_k r_{m-1}^k c^{-s_{m-1}} = a_k r_m^k c^{k-s_{m-1}} \geqslant c a_k r_m^k. \qquad (4)$$

З цієї нерівності випливає, що $s_m \leqslant s_{m-1}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Отож, можна записати

$$\mu_0 = \max\{a_k r_0^k : \ k \leqslant n_0\}, \ \mu_m = \max\{a_k r_m^k : \ k \leqslant s_{m-1}\}, \ m \in \mathbb{N}$$

Введемо додаткові позначення при $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_0^* = \max\left\{a_k r_0^k : \ s_0 \neq k \leqslant n_0\right\}, \ s_0^* = \min\{k : \ k \neq s_0, a_k r_0^k = \mu_0^*\},$$
$$\mu_m^* = \max\{a_k r_m^k : \ s_m \neq k \leqslant s_{m-1}\}, \ s_m^* = \min\{k : \ k \neq s_m, a_k r_m^k = \mu_m^*\},$$

і доведемо, що існує число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{\mu^*_{m_0}}{\mu_{m_0}} \leqslant \frac{1}{c}. \tag{5}$$

Від супротивного, припустимо, що для усіх $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\frac{\mu^*_m}{\mu_m} > \frac{1}{c}. \tag{6}$$

Якщо $s^*_m < s_m$, то спершу

$$a_{s^*_m} r^{s^*_m}_{m+1} = \frac{a_{s^*_m} r^{s^*_m}_m}{c^{s^*_m}} = \frac{\mu^*_m}{c^{s^*_m}} > \frac{\mu_m}{c^{s^*_m+1}} = \frac{a_{s_m} r^{s_m}_m}{c^{s^*_m+1}} = \frac{a_{s_m} r^{s_m}_{m+1}}{c^{s^*_m+1-s_m}} \geqslant a_{s_m} r^{s_m}_{m+1}.$$

Крім того, для усіх $k > s^*_m$, $k \neq s_m$, (інакше кажучи, $k-1 \geqslant s^*_m$) подібно виводимо, що

$$a_{s^*_m} r^{s^*_m}_{m+1} = \frac{a_{s^*_m} r^{s^*_m}_m}{c^{s^*_m}} \geqslant \frac{a_k r^k_m}{c^{s^*_m}} \geqslant \frac{a_k r^k_m}{c^{k-1}} = c a_k r^k_{m+1},$$

тобто $a_{s^*_m} r^{s^*_m}_{m+1} > a_k r^k_{m+1}$ для усіх $k > s^*_m$, тому

$$s_{m+1} \leqslant s^*_m \leqslant s_m - 1. \tag{7}$$

Якщо $s_m < s^*_m \leqslant s_{m-1}$, то можливою є рівність $s_{m+1} = s_m$. Справді, за визначенням $s_{m+1} \leqslant s_m$, тому згадана рівність вірогідна. Коли її немає, тобто $s_{m+1} < s_m$, тоді $s_{m+1} \leqslant s_m - 1$ (це натуральні числа!). Отож, отримали (7).

Оже, з нерівностей $s^*_{m+1} \leqslant s_m$ та $s^*_m \neq s_{m+1}$ випливає, що $s^*_{m+1} < s_{m+1}$. Тому замість (7) матимемо нерівність

$$s_{m+2} \leqslant s^*_{m+1} \leqslant s_{m+1} - 1 = s_m - 1.$$

Отже, якщо для усіх $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується (6), то для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ справджується одна з нерівностей $s_{m+2} \leqslant s_{m+1} \leqslant s_m - 1$ або $s_{m+2} \leqslant s_m - 1$, тобто $s_{m+2} \leqslant s_m - 1$. З цього випливає, що

$$s_m \leqslant s_{m-2} - 1 \leqslant \ldots \leqslant s_{m-2[m/2]} - [m/2] \leqslant s_0 - [m/2] \leqslant n_0 - [m/2] \leqslant N - [m/2].$$

Інакше кажучи, $s_m < 0$, при $m > 2N+1$, що неможливо. Отож, існує m_0, для якого виконується (5), причому як видно з наведених вище міркувань $m_0 \leqslant 2N+1$.

Приймемо $r = r_{m_0}$, $\eta(d) = \frac{d}{(d+1)c^{2(N+1)}}$, $p = N$ та $k_0 = s_{m_0}$. Тоді для $\|J\| \neq k_0 = s_{m_0}$ на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)})$, з врахуванням (4) та (5), отримуємо

$$|b_J||z - z^0|^J = a^*_J r^{\|J\|} \leqslant a_{\|J\|} r^{\|J\|} \leqslant \frac{1}{c} a_{s_{m_0}} r^{s_{m_0}}_{m_0} = \frac{1}{c} a_{k_0} r^{k_0},$$

тому на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)})$ одержуємо

$$\left| \sum_{\|J\| \neq k_0} b_J (z - z^0)^J \right| \leqslant \sum_{\|J\| \neq k_0} a^*_J r^{\|J\|} \leqslant \sum_{\substack{k=0,\\ k \neq k_0}}^{\infty} a_k C^k_{n+k-1} r^k =$$

$$= \sum_{\substack{k=0,\\ k \neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C^k_{n+k-1} r^k + \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C^k_{n+k-1} r^k. \tag{8}$$

Враховуючи (7), визначаємо таку оцінку для першої суми:

$$\sum_{\substack{k=0,\\ k\neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{k=0}^{N} C_{n+k-1}^k \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c}(N+1)C_{n+N-1}^N. \tag{9}$$

Для всіх $k \geqslant s_{m_0-1}+1$ виконується $a_k r_{m_0-1}^k \leqslant \mu_{m_0-1}$, тому $a_k r_{m_0}^k = \frac{a_k r_{m_0-1}^k}{c^k} \leqslant \frac{\mu_{m_0-1}}{c^k}$. З огляду на (5), отримуємо

$$\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leqslant \mu_{m_0-1} \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} C_{n+k-1}^k \frac{1}{c^k} \leqslant$$

$$\leqslant a_{s_{m_0-1}} r_{m_0}^{s_{m_0-1}} c^{s_{m_0-1}} \sum_{k=s_{m_0-1}+1} (k+1)(k+2)\dots(k+n)\frac{1}{c^k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_{s_{m_0}} r^{s_{m_0}}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left(\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} x^{k+n} \right)^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} = \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left\{ \frac{x^{s_{m_0-1}+n+1}}{1-x} \right\}^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} =$$

$$= \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \sum_{j=0}^{n} C_n^j (n-j)!(s_{m_0-1}+n+1)\dots(s_{m_0-1}+n-j+2)\times$$

$$\times \frac{x^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-x)^{n-j+1}} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0}-1} n!(N+n+1)! \sum_{j=0}^{n} \frac{(1/c)^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-1/c)^{n-j+1}} =$$

$$= n!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(c-1)^{n-j+1}} \leqslant (n+1)!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c}, \tag{10}$$

бо $c \geqslant 2$. З нерівностей (8)-(10) випливає, що

$$\left| \sum_{\|J\|\neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leqslant \frac{((N+1)C_{n+N-1}^N + (n+1)!(N+n+1)!) a_{k_0} r^{k_0}}{c} \leqslant \frac{1}{2} a_{k_0} r^{k_0},$$

тобто многочлен P_{k_0} є головним у ряді (3) на кістяку $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(|z^0|)})$. Необхідність доведена.

Перейдемо до доведення достатності. Нехай існують числа $p \in \mathbb{Z}_+$ та $\eta \in (0; d)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $d = 1$ і деяких $r = r(1, z^0) \in (\eta; 1)$, $k_0 = k_0(1, z^0) \leqslant p$ многочлен P_{k_0} є головним у ряді (3) на кістяку $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(|z^0|)})$. Тоді на цьому кістяку

$$\left| \sum_{\|J\|\neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| = \left| f(z) - \sum_{\|J\|= k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}.$$

Звідси за нерівністю Коші отримаємо $|b_J(z-z^0)^J| = a_j^* r^{\|J\|} \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}$ для усіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \neq k_0$, тобто для усіх $k \neq k_0$

$$a_k r^k \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}. \tag{11}$$

Припустимо, що F не є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Тоді за теоремою 1 для усіх $p_1 \in \mathbb{Z}_+$ та $c \geqslant 1$ при деякому $z^0 \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{\mathbf{L}^J(z^0)}:\ \|J\| = p_1 + 1\right\} > c\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{\mathbf{L}^K(z^0)}:\ \|K\| \leqslant p_1\right\}.$$

Візьмемо тут $p_1 = p$ та $c = \left(\frac{(p+1)!}{\eta^{p+1}}\right)^n$. Відтак для відповідного $z^0(p_1, c)$ одержимо

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(|z^0|)}:\ \|J\| = p + 1\right\} > \frac{1}{\eta^{p+1}}\max\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(|z^0|)}:\ \|K\| \leqslant p\}.$$

Іншими словами, $a_{p+1} > \frac{a_{k_0}}{\eta^{p+1}}$, і звідсіля $a_{p+1}r^{p+1} > \frac{a_{k_0}r^{p+1}}{\eta^{p+1}} \geqslant a_{k_0}r^{k_0}$. Ця нерівність суперечить (11). Отже, F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. □

Нескладно помітити, що у доведенні достатності радіус $R = (r, \dots, r)$ кістяка $\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$ можна замінити на радіус $R = (r_1, \dots, r_n)$, де r_j не обов'язково рівні між собою, $r_j \in \{1, \dots, n\}$. Отож, така теорема правильна.

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$ *та існують* $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0; 1]$, $\eta \in (0; d)$, *що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *і деякого* $R = (r_1, \dots, r_n)$ *з* $r_j = r_j(d, z^0) \in (\eta(d); d)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, *та* $k^0 = k^0(d, z^0) \leqslant p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (3) *на кістяку* $\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$. *Тоді ціла у* $\mathbb{C}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Список використаної літератури

1. *Bandura A.I., Bordulyak M.T., Skaskiv O.B.* Sufficient conditions of boundedness of $\mathbf{L}$-index in joint variables// Мат. Студ. — 2016. — **45**, №1. — С. 12–26. doi: 10.15330/ms.45.1.12-26
2. *Бандура А.І.* Нові критерії обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій // Мат. вісник НТШ. — 2016. — **16**. — С. 58–67.
3. *Бордуляк М.Т., Шеремета М.М.* Обмеженість $\mathbf{L}$-індексу цілої функції декількох змінних // Доп. АН України. — 1993. — **9**. — С. 10–13.
4. *Бордуляк М.Т.* Простір цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу // Мат. Студ. — 1995. — **4**. — С. 53–58.
5. *Бордуляк М.Т.* Обмеженість $\mathbf{L}$-індексу цілої функції багатьох комплексних змінних: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. — Львів. ун-т, Львів, 1995. – 100 с.
6. *Бордуляк М.Т.* Обмеженість $\mathbf{L}$-індексу цілої функції багатьох комплексних змінних. — Львів. ун-т, Львів, 1992. – 37 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 17.12.92, № 2006 – Ук -92.
7. *Bandura A., Skaskiv O.* Entire functions of several variables of bounded index. — Lviv: Publisher I.E. Chyzhykov, 2016. — 128 p.
8. *Bandura A.I.* A modified criterion of boundedness of L-index in direction // Мат. Студ. — 2013. — **39**, №1. — С. 99–102.
9. *Bandura A.I., Skaskiv O.B.* Open problems for entire functions of bounded index in direction// Мат. Студ. — 2015. — **43**, №1. — С. 103–109. doi: 10.15330/ms.43.1.103–109
10. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. — 1968. — **2**. — P. 298–307.

11. *Krishna G.J., Shah S.M.* Functions of bounded indices in one and several complex variables // Mathematical essays dedicated to A.J. Macintyre. — Athens: Ohio Univ. Press. — 1970. — P. 223–235.

PROPERTIES OF POWER SERIES EXPANSION OF ENTIRE FUNCTION OF BOUNDED L-INDEX IN JOINT VARIABLES

Andriy BANDURA[1], **Nataliya PETRECHKO**[2]

[1] *Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska Str., 15, e-mail: andriykopanytsia@gmail.com*
[2] *Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytets'ka str., 1, e-mail: petrechko.n@gmail.com*

Some criterion of boundedness of **L**-index in joint variables is generalized in the case $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$. This proposition describes behaviour of coefficients of power series expansion on the skeleton of a polydisc. Replacing the universal quantifier by the existential quantifier, we also prove new theorem which provides weaker sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables for entire functions.

Key words: entire function, bounded **L**-index in joint variables, polydisc, power series.

Стаття: надійшла до редколегії 29.11.2016
прийнята до друку 27.02.2017

ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 34–38*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 34–38

УДК 512.624.5

PERIODIC WORDS CONNECTED WITH THE k-FIBONACCI NUMBERS

Galyna BARABASH, Yaroslav KHOLYAVKA, Iryna TYTAR

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv
e-mails: galynabarabash71@gmail.com,
ya_khol@franko.lviv.ua,
iratytar1217@gmail.com

We introduce periodic words that are connected with the k-Fibonacci numbers and investigated their properties.

Key words: k-Fibonacci numbers, k-Fibonacci words.

1. Introduction. The Fibonacci numbers F_n are defined by the recurrence relation $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, for all integer $n > 1$, and with initial values $F_0 = 0$ and $F_1 = 1$. These numbers and their generalizations have interesting properties. Different kinds of the Fibonacci sequence and their properties have been presented in the literature, see, e.g., [1, 2, 3]. In particular, the k-Fibonacci numbers are generalizations of the Fibonacci numbers [4].

The k-Fibonacci numbers $F_{k,n}$ defined for any integer number $k \geqslant 1$ by the recurrence relation $F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$, for all integer $n > 1$, and with initial values $F_{k,0} = 0$ and $F_{k,1} = 1$, see [4, 5, 6]. These numbers have been studied in several papers, see [7, 8, 9].

Many properties of k-Fibonacci numbers require the full ring structure of the integers. However, generalizations to the ring $\mathbb{Z}_m$ have been considered, see, e.g., [10].

In analogy to the definition of the Fibonacci numbers, one defines the Fibonacci finite words as the contatenation of the two previous terms $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$, $n > 1$, with initial values $f_0 = 1$ and $f_1 = 0$ and defines the infinite Fibonacci word f, $f = \lim f_n$ [11]. It is the archetype of a Sturmian word [12]. The properties of the Fibonacci infinite word have been studied extensively by many authors, see, e.g., [12, 13, 14, 15, 16, 17].

The k-Fibonacci words are defined as the contatenation of the previous terms $f_{k,n} = f^k_{k,n-1}f_{k,n-2}$, $n > 1$, with initial values $f_{k,0} = 0$ and $f_{k,1} = 0^{k-1}1$ and one defines the infinite k-Fibonacci word f^*_k, $f^*_k = \lim f_{k,n}$ [18]. It is the archetype of a Sturmian word [12, 18].

2010 Mathematics Subject Classification: 08A50, 11B39, 11B83

Using k-Fibonacci words, in the present article we introduce new kind of the infinite word, namely k-FLP word, and investigate some of its properties.

For any notations not explicitly defined in this article we refer to [2, 10, 12, 18, 19].

2. k-Fibonacci sequence modulo m. The letter p is reserved to designate a prime, m and k are arbitrary integers, $m \geqslant 2$, $k \geqslant 1$.

We reduce $F_{k,n}$ modulo m taking the least nonnegative residues. Let $F^*_{k,n}(m)$ denote the n-th member of the sequence of integers $F_{k,n} \equiv kF_{k,n-1} + F_{k,n-2} \pmod{m}$, $0 \leqslant F^*_{k,n}(m) < m$, for all integer $n > 1$, and with initial values $F_{k,0} = 0$ and $F_{k,1} = 1$ ($F^*_{k,0}(m) = 0$ and $F^*_{k,1}(m) = 1$).

For any fixed m and k the sequence $F^*_{k,n}(m)$ is periodic. The Pisano period, written $\pi_k(m)$, is the period for which the sequence $F^*_{k,n}(m)$ of k-Fibonacci numbers modulo m repeats [10].

The problem of determining the length of the period of the recurring sequence arose in connection with methods for generating random numbers. A few properties of the $\pi_k(m)$ are in the following theorem [10].

Theorem 1. *In $\mathbb{Z}_m$ the following hold:*

1) Any k-Fibonacci sequence modulo m is periodic and period less than m^2.
2) If m has prime factorization $m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$, then $\pi_k(m) = \operatorname{lcm}(\pi_k(p_1^{e_1}), \ldots, \pi_k(p_n^{e_n}))$.
3) If $m_1|m_2$, then $\pi_k(m_1)|\pi_k(m_2)$.
4) If k is an odd number, then $\pi_k(k^2+4) = 4(k^2+4)$.
5) If k is an odd number, then $\pi_k(2) = 3$ and if k is an even number, then $\pi_k(2) = 2$.

3. k-Fibonacci words.

Definition 1. *The n-th finite k-Fibonacci words are words over $0, 1$ defined inductively as follows*

$$f_{k,0} = 0, \quad f_{k,1} = 0^{k-1}1, \quad f_{k,n} = f^k_{k,n-1} f_{k,n-2}, \quad n > 1. \tag{1}$$

The infinite word f^*_k is the limit $f^*_k = \lim f_{k,n}$ and is called the infinite k-Fibonacci word.

For example, the successive initial finite 3-Fibonacci words are:

$f_{3,0} = 0, f_{3,1} = 001, f_{3,2} = 0010010010, f_{3,3} = 0010010010001001001000100100100001, \ldots,$
$f^*_3 = 0010010010001001001000100100100001\ldots.$

We denote as usual by $|f_{k,n}|$ the length (the number of symbols) of $f_{k,n}$ (see [12]). The following proposition summarizes basic properties of k-Fibonacci words [18].

Theorem 2. *The infinite k-Fibonacci word and the finite k-Fibonacci words satisfy the following properties:*

1) The word 11 is not a subword of the infinite k-Fibonacci word.
2) For all $n > 1$ let ab be the last two symbols of $f_{k,n}$, then we have $ab = 10$ if n is even and $ab = 01$ if n is odd.
3) For all k, n $|f_{k,n}| = F_{k,n+1}$.
4) The number of 1s in $f_{k,n}$ equals $F_{k,n}$.

4. Periodic k-FLP words. Let us start with the classical definition of periodicity on words over arbitrary alphabet $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ (see [19]).

Definition 2. *Let $w = a_0a_1a_2\dots$ be an infinite word. We say that w is*

1) a periodic word if there exists a positive integer t such that $a_i = a_{i+t}$ for all $i \geqslant 0$. The smallest t satisfying the previous condition is called the period of w;

2) an eventually periodic word if there exist two positive integers r, s such that $a_i = a_{i+s}$, for all $i > r$;

3) an aperiodic word if it is not eventually periodic.

Theorem 3. *For any k the infinite k-Fibonacci word is aperiodic.*

Proof. This statement is proved in [18]. □

We consider the finite k-Fibonacci words $f_{k,n}$ (1) as numbers written in the binary system and denote them by $b_{k,n}$. Denote by $d_{k,n}$ the value of the number $b_{k,n}$ in usual decimal numeration system. We write $d_{k,n} = b_{k,n}$ meaning that $b_{k,n}$ and $d_{k,n}$ are writing of the same number in different numeration systems.

For example, for 3-Fibonacci words we obtain:

$$f_{3,0} = 0, f_{3,1} = 001, f_{3,2} = 0010010010, f_{3,3} = 0010010010001001001000100100010001, \dots,$$

$$b_{3,0} = 0,\ b_{3,1} = 1,\ b_{3,2} = 10010010,\ b_{3,3} = 10010010001001001000100100010001, \dots,$$

$$d_{3,0} = 0,\ d_{3,1} = 1,\ d_{3,2} = 146,\ d_{3,3} = 1225933969, \dots.$$

Formally, $f_{k,n}$, $n > 0$, coincide with the $b_{k,n}$, taken with prefix 0^{k-1}: $f_{k,n} = 0^{k-1}b_{k,n}$.

Theorem 4. *For any finite k-Fibonacci word $f_{k,n}$ in decimal numeration system we have*

$$d_{k,n} = d_{k,n-1}\sum_{t=0}^{k-1} 2^{tF_{k,n}+F_{k,n-1}} + d_{k,n-2}, \quad n > 1,$$

with $d_{k,0} = 0$ and $d_{k,1} = 1$.

Proof. See [20] for a proof for FLP-words. The same argument applies to the k-FLP words. □

Theorem 5. *Let $d_{k,n}(p) = d_{k,n} \pmod p$, $0 \leqslant d_{k,n}(p) < p$. For any fixed k and p the sequence $d_{k,n}(p)$ is periodic.*

Proof. There are only a finite number of $d_{k,n}(p)$ and $2^{F_{k,n}} \pmod p$ possible, and the recurrence of the first few terms sequence $d_{k,n}(p)$ and $2^{F_{k,n}} \pmod p$ gives recurrence of all subsequent terms. The statement follows from Theorem 4. □

Let $T(k, m)$ denote the length of the period of the repeating sequence $d_{k,n}(m)$.

Theorem 6. *For any p and k $T(k + p(p-1), p) = T(k, p)$.*

Proof. This follows from the congruence $k + p(p-1) \equiv k \pmod p$, Euler's theorem and Theorem 4. □

Let $w_{k,0}(m) = 0$ and for arbitrary integer n, $n \geqslant 1$, let $b_{k,n}(m)$ be $d_{k,n}(m)$ in the binary numeration system, $w_{k,n}(m) = w_{k,n-1}(m)b_{k,n}(m)$. Denote by $w_k(m)$ the limit $w_k(m) = \lim_{n\to\infty} w_{k,n}(m)$.

Definition 3. *We say that*

1) $w_{k,n}(m)$ is a finite FLP-word type 1 by modulo m;

2) $w_k(m)$ is a infinite FLP-word type 1 by modulo m.

Theorem 7. *The infinite FLP-word type 1 $w_k(p)$ is periodic.*

Proof. The statement follows from Theorem 5. □

Using k-Fibonacci words we define a periodic FLP-word $v_k(m)$ (infinite FLP-word type 2 by modulo m).

As usual, we denote by ϵ the empty word [12].

First we define words $t_{k,n}(m)$. Let $t_{k,n}(m)$ be the last $F^*_{k,n+1}(m)$ symbols of the word $f_{k,n}$. If $F^*_{k,n+1}(m) = 0$ for some k, n, then $t_{k,n}(m) = \epsilon$. Since $F^*_{k,n}(m)$ is a periodic sequence, the sequence $|t_{k,n}(m)|$ is periodic with the same period.

Theorem 8. *The word length $|t_{k,n}(m)|$ coincides with $F^*_{k,n+1}(m)$.*

Proof. This is clear by construction of $t_{k,n}(m)$.

Let $v_{k,0}(m) = 0$ and for arbitrary integer n, $n \geqslant 1$, $v_{k,n}(m) = v_{k,n-1}(m)t_{k,n}(m)$. Denote by $v_k(m)$ the limit $v_k(m) = \lim_{n\to\infty} v_{k,n}(m)$.

Definition 4. *We say that*

1) $v_{k,n}(m)$ is a finite FLP-word of type 2 by modulo m;
2) $v_k(m)$ is an infinite FLP-word of type 2 by modulo m.

Theorem 9. *The infinite FLP-word of type 2 $v_k(m)$ is a periodic word.*

Proof. The proof is a direct corollary of Theorem 2 and Theorem 8. □

Acknowledgement. The authors thank Taras Banakh for fruitful discussions.

References

1. *Atanassov K.T., Atanassova V., Shannon A.G., Turner J.C.* New visual perspectives on Fibonacci numbers. — London: World Scientific, 2002.
2. *Koshy T.* Fibonacci and Lucas numbers with applications. — New York: Wiley-Interscience, 2001.
3. *Rami'rez J.L., Rubiano G.N., de Castro R.* A generalization of the Fibonacci word fractal and the Fibonacci snowflake // Theor. Comput. Sci. — 2014 — **528**. — P. 40–56.
4. *Falco'n S., Plaza A.* On the Fibonacci k-numbers // Chaos Solitons Fractals. — 2007. — **32**, №5. — P. 1615–1624.
5. *Bolat C., Kose H.* On the properties of k-Fibonacci numbers // Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2010. — **5**, №21-24. — P. 1097–1105.
6. *Catarino P.* On Some Identities for k-Fibonacci sequence // Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2014. — **9**, №1-4. — P. 37–42.
7. *Falcón S., Plaza Á.* On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives// Chaos Solitons Fractals. — 2009. — **39**, №3. — P. 1005–1019.
8. *Ramirez J.L.* Some properties of convolved k-Fibonacci numbers // ISRN Combinatorics. — 2013. — Article ID 759641. — 5p.
9. *Salas A.* About k-Fibonacci numbers and their associated numbers // Int. Math. Forum. — 2011. — **6**, №50. — P. 2473–2479.
10. *Falcón S., Plaza Á.* k–Fibonacci sequences modulo m // Chaos Solitons Fractals. — 2009. — **41**, №1. — P. 497–504.

11. *Berstel J.* Fibonacci words – a survey // The Book of L. Rosenberg G., Salomaa A. (Eds.). — Berlin: Springer, 1986. — P. 11–26.
12. *Lothaire M.* Algebraic Combinatorics on Words. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
13. *Mignosi F., Pirillo G.* Repetitions in the Fibonacci infinite word // Theor. Inform. Appl. — 1992. — **26**, №3. — P. 199–204.
14. *Mignosi F., Restivo A., Salemi S.* Periodicity and the golden ratio // Theor. Comput. Sci. — 1998. — **204**, №1–2. — P. 153–167.
15. *Pirillo G.* Fibonacci numbers and words // Discrete Math. — 1997. — **173**, №1–3. — P. 197–207.
16. *Séébold P.* Fibonacci morphisms and sturmian words // Theor. Comput. Sci. — 1991. — **88**, №2. — P. 365–384.
17. *Wen Z.-X., Wen Z.-Y.* Some properties of the singular words of the Fibonacci word // Eur. J. Comb. — 1994. — **15**, №6. — P. 587–598.
18. *Ramirez J., Rubiano G.* On k-Fibonacci words // Acta Univ. Sapientiae, Inform. — 2013. — **5**, №2. — P. 212–226.
19. *Duval J.-P., Mignosi F., Restivo A.* Recurrence and periodicity in infinite words from local periods // Theor. Comput. Sci. — 2001. — **262**, №1-2. — P. 269–284.
20. *Barabash G.M., Kholyavka Ya.M., Tytar I.V.* Periodic words connected with the Fibonacci words // Carpathian Math. Publ. — 2016. — **8**, №1. — P. 11–15.

Стаття: надійшла до редколегії 05.12.2016
прийнята до друку 27.02.2017

ПЕРІОДИЧНІ СЛОВА, ЯКІ ПОВ'ЯЗАНІ З ЧИСЛАМИ k-ФІБОНАЧЧІ

Галина БАРАБАШ, Ярослав ХОЛЯВКА, Ірина ТИТАР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: galynabarabash71@gmail.com,
ya_khol@franko.lviv.ua,
iratytar1217@gmail.com

Означено періодичні слова, які пов'язані з числами k-Фібоначчі, досліджено їхні властивості.

Ключові слова: числа k-Фібоначчі, слова k-Фібоначчі.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 39–55
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 39–55

УДК 517.53

ОЦІНКИ ТА МІНІМАЛЬНІ ВІДХИЛЕННЯ ВІД 0 ТА ∞ МЕРОМОРФНОЇ В ПРОКОЛЕНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ З МАЛОЮ КІЛЬКІСТЮ НУЛІВ І ПОЛЮСІВ

Олександра БЕРЕЗА, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: berezalesya@gmail.com, khrystiayanyn@ukr.net

Розглянуто мероморфні функції у проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ з малою кількістю нулів і полюсів. Використовуючи аналоги введених В. П. Петренко величин $\beta(a, f)$, отримуємо оцінку на $\beta_0(0, f), \beta_0(\infty, f)$ для мероморфної у $\mathbb{C}^*$ функції f скінченного порядку $\rho \geqslant 1$.

Ключові слова: мероморфна функція, проколена площина, характеристика Неванлінни, дефект, мінімальне відхилення.

1. Вступ

Значна кількість задач теорії розподілу значень потребує вивчення властивостей мероморфних функцій у неоднозв'язних і, зокрема, двозв'язних областях. Багато авторів узагальнювали теорію Неванлінни на випадок двозв'язних областей. За теоремою про конформні відображення двозв'язних областей кожна така область конформно еквівалентна деякому кільцю, або проколеній площині, яку можна вважати узагальненим кільцем. Ми застосовуємо апарат одного з найостанніших підходів до вивчення розподілу значень мероморфних у кільці функцій, який належить А. Кондратюку, А. Христіянину та І. Лайне [1], [2], [3].

Для вивчення глибших асимптотичних властивостей мероморфних функцій В.П. Петренком ввів величини $\beta(a, f)$, які характеризують мінімальне відхилення мероморфної функції f від значення $a \in \overline{\mathbb{C}}$ ([4]). Ці величини, як виявилося, володіють багатьма властивостями аналогічними до властивостей дефектів введених Р. Неванлінною. Природно сформульована задача розширення цієї теорії та перенесення її результатів на випадок двозв'язних областей. Використовуючи аналоги $\beta_0(a, f)$ введених В.П. Петренком величин, отримуємо оцінки на $\beta_0(0, f)$, $\beta_0(\infty, f)$ для мероморфної у $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функції скінченного порядку $\rho \geqslant 1$. Досліджено вплив кількості нулів і полюсів функції f на зростання величин $\ln^+ M(r, f), \ln^+ M(r, \frac{1}{f})$

2010 Mathematics Subject Classification: 30D35 при $r \to 0$ та $r \to +\infty$. Оскільки ці результати є перенесенням відповідних результатів Петренка на випадок мероморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій, то ми загалом використовуємо ідею доведення Петренка з [4] для всієї комплексної площини $\mathbb{C}$, модифікуючи та доповнюючи це доведення для випадку $\mathbb{C}^*$.

2. Означення та позначення

Нехай f – мероморфна функція у проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Припустимо, що $f(z) \neq 0$ на одиничному колі. Позначатимемо через $n_0^1(r,f)$, $n_0^2(r,f)$ кількість полюсів функції f, відповідно, в $\{z : 1 < |z| \leqslant r\}$ та $\{z : \frac{1}{r} \leqslant |z| < 1\}$, $r > 1$ з врахуванням їх кратності. Вважатимемо при цьому $n_0^i(1,f) = 0$, $i = 1,2$. Нехай $n_0(r,f) = n_0^1(r,f) + n_0^2(r,f)$ при $r \geqslant 1$. Крім того, вживатимемо позначення $n_0(r,f,1/f) := n_0(r,f) + n_0(r,\frac{1}{f})$ при $r \geqslant 1$. Аналогічно розуміються позначення $n_0^i(r,f,1/f)$, $i = 1,2$.

Означення 1 ([1],[3]). $N_0^i(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_0^i(t,f)}{t} dt, \quad i = 1,2, \quad N_0(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t,f)}{t} dt.$

Позначимо також $N_0(r,f,1/f) = N_0(r,f) + N_0(r,\frac{1}{f})$, $r \geqslant 1$.

Характеристика $T_0(r,f)$ типу Неванлінни для функцій f, мероморфних у кільці $\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, де $1 < R_0 \leq +\infty$ була введена у [1].

Означення 2 ([1],[3]). $T_0(r,f) = m_0(r,f) + N_0(r,f)$, $r \geqslant 1$, *де*

$$m_0(r,f) = m(r,f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1,f),$$

$$m(t,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(te^{i\theta})| \, d\theta, \qquad \frac{1}{R_0} < t < R_0.$$

Через $E(z,p)$ позначатимемо канонічний множник Вейєрштрасса роду p, тобто цілу функцію, яка визначається так:

$$E(z,0) = 1 - z, \quad E(z,p) = (1-z)\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\}, \quad p \in \mathbf{N}.$$

Означення 3 ([3]). *Нехай $\{a_j\}$ і $\{b_j\}$ послідовності нулів і полюсів функції f відповідно. Позначимо*

$$z_j = \begin{cases} a_j, & \text{якщо } |a_j| > 1, \\ \frac{1}{a_j}, & \text{якщо } |a_j| < 1. \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} b_j, & \text{якщо } |b_j| > 1, \\ \frac{1}{b_j}, & \text{якщо } |b_j| < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Рід послідовності $\{z_j\}$ визначається як найменше невід'ємне ціле p таке, що

$$\sum_{z_j} |z_j|^{-p-1} < +\infty.$$

Означення 4 ([3]). *Порядком $\rho = \rho[f]$ мероморфної функції f в $\mathbb{C}^*$ називається порядок зростання її характеристичної функції $T_0(r, f)$, тобто*

$$\rho[f] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T_0(r, f)}{\log r}.$$

Означення 5 ([5], [6]). *Функція $\rho(r)$, задана на $[1, \infty)$, називається* **уточненим порядком**, *якщо: 1) $\rho(r) \geqslant 0$; 2) $\lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$; 3) $\rho(r)$ – неперервно-диференційовна на $[1, +\infty)$; 4) $\lim_{r\to+\infty} r\rho'(r) \ln r = 0$.*

Означення 6 ([5], [6]). *Уточнений порядок функції $\rho(r)$ називається уточненим порядком функції $\alpha(r)$, якщо існує $\sigma(\alpha)$, $0 < \sigma[\alpha] < +\infty$ таке, що $\sigma[\alpha] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\alpha(r)}{r^{\rho(r)}}$.*

Уточненим порядком мероморфної в $\mathbb{C}^*$ функції f називатимемо уточнений порядок її характеристики $T_0(r, f)$.

Означення 7. *Нехай f мероморфна функція в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Позначимо*

$$\varkappa_0(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)}{T_0(r, f)} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{N_0(r, f, 1/f)}{T_0(r, f)},$$

та

$$\beta_0(a, f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln^+ M(r, a, f) + \ln^+ M(\frac{1}{r}, a, f)}{T_0(r, f)}, \quad a \in \overline{\mathbb{C}},$$

де

$$M(r, a, f) = \max_{|z|=r} \frac{1}{|f(z) - a|} \text{ при } a \in \mathbb{C}, \quad M(t, \infty, f) = \max_{|z|=t} |f(z)|.$$

Величини $\beta_0(a, f)$ є аналогами характеристик мінімального відхилення функції f від значення a, введених В.П. Петренком ([4]).

Означення 8 ([3], [2]). *Нехай f - мероморфна функція в $\mathbb{C}^*$. Позначимо*

$$\delta_0(a, f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{m_0(r, \frac{1}{f-a})}{T_0(r, f)} \text{ при } a \in \mathbb{C}, \quad \delta_0(\infty, f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{m_0(r, f)}{T_0(r, f)}.$$

Величина $\delta_0(a, f)$ називається дефектом функції f для значення a.

Домовимося надалі позначати сталі, які залежать від функції f літерою C з індексами знизу, а сталі, які не залежать від f літерою K, з індексами знизу.

3. Основні результати

Теорема 1. *Нехай $f(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку $\rho \geqslant 1$. Тоді для $a = 0, \infty$ правильна оцінка*

$$\beta_0(a, f) \leqslant \pi + \varkappa_0(f) K(1 + \rho) \log(1 + \rho), \tag{2}$$

де K – деяка стала.

Зауважимо, що сталу π в теоремі не можна зменшити. Достатньо розглянути функцію $f(z) = \exp(z^p + \frac{1}{z^p})$, $p \in \mathbb{N}$. Справді, оскільки $|f(re^{i\theta})| = \exp\{(r^p + \frac{1}{r^p})\cos p\theta\}$, то $M(r, \infty, f) = M(\frac{1}{r}, \infty, f) = \exp(r^p + \frac{1}{r^p})$. Тому $m(r, f) = m(\frac{1}{r}, f) = \frac{1}{\pi}(r^p + \frac{1}{r^p})$, $m(1, f) = \frac{2}{\pi}$. А отже $m_0(r, f) = \frac{2}{\pi}(r^p + \frac{1}{r^p} - 2)$. Очевидно, що $N_0(r, f) = 0$. Звідси

$$\beta_0(\infty, f) = \lim_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r, \infty, f) + \log^+ M(\frac{1}{r}, \infty, f)}{T_0(r, f)} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^p + \dfrac{1}{r^p} + r^p + \dfrac{1}{r^p}}{\dfrac{2}{\pi}(r^p + \dfrac{1}{r^p} - 2)} = \pi.$$

Аналогічно $\beta_0(0, f) = \pi$. Варто зауважити, що $M(r, 0, f) = M(\frac{1}{r}, 0, f) = \exp(r^p + \frac{1}{r^p})$, а також використати властивість характеристики $T_0(r, f) = T_0(r, \frac{1}{f})$.

Теорема 2. *Нехай f – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку $\rho \geqslant 1$. Якщо $\sum\limits_a \delta_0(a, f) = 2$, то $\beta_0(\infty, f) \leqslant \pi$.*

4. Допоміжні результати

Теорема 3 ([3]). *Нехай f – мероморфна функція в $\mathbb{C}^*$, яка має скінченний порядок, нехай $\{a_j\}$ і $\{b_j\}$ – послідовності її нулів та полюсів відповідно, і нехай p – рід послідовності $\{z_j\}$, q – рід послідовності $\{w_j\}$, що визначається співвідношенням (1). Тоді*

$$f(z) = z^m e^{z^{-\nu}P(z)} \frac{\prod\limits_{|a_j|\leqslant 1} E(\frac{a_j}{z}, p) \prod\limits_{|a_j|>1} E(\frac{z}{a_j}, p)}{\prod\limits_{|b_j|\leqslant 1} E(\frac{b_j}{z}, q) \prod\limits_{|b_j|>1} E(\frac{z}{b_j}, q)}, \tag{3}$$

де $m \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $P(z)$ – поліном, $\deg P(z) = 2\nu$, і $\nu \leqslant \rho$.

Лема 1. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція*

$$f(z) = z^m e^{\alpha_0 z^p + P_{p-1}(z)} \frac{\prod\limits_{|a_j|\leqslant 1} E(\frac{a_j}{z}, p) \prod\limits_{|a_j|>1} E(\frac{z}{a_j}, p)}{\prod\limits_{|b_j|\leqslant 1} E(\frac{b_j}{z}, p) \prod\limits_{|b_j|>1} E(\frac{z}{b_j}, p)} \tag{4}$$

скінченного порядку ρ ($p = [\rho]$) задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \log|f(z)| = m\log|z| + \operatorname{Re}\{G_1(R)z^p + G_2(R)z^{-p}\} + \\ + \log\left|\frac{\prod\limits_{1<|a_k|<R}(1 - \frac{z}{a_k})}{\prod\limits_{1<|b_k|<R}(1 - \frac{z}{b_k})}\right| + \log\left|\frac{\prod\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1}(1 - \frac{a_k}{z})}{\prod\limits_{\frac{1}{R}<|b_k|\leqslant 1}(1 - \frac{b_k}{z})}\right| + H(z), \end{aligned} \tag{5}$$

де $0 < \frac{1}{R} < |z| = r < R < +\infty$, $P_{p-1}(z)$ – поліном не вище $p-1$ степеня, $E(u, p)$ – канонічний множник Вейерштрасса роду p, а

$$G_1(R) = \alpha_0 + \frac{1}{p}\left\{\sum_{1<|a_k|<R} \frac{1}{a_k^p} - \sum_{1<|b_k|<R} \frac{1}{b_k^p}\right\}, \tag{6}$$

$$G_2(R) = \frac{1}{p}\left\{ \sum_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} a_k^p - \sum_{\frac{1}{R}<|b_k|\leqslant 1} b_k^p \right\}. \tag{7}$$

Причому $H : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ *і*

$$\begin{aligned} |H(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{1}{R}\right)^k (r^k + \frac{1}{r^k}) \left\{ \frac{n_0(R, f, \frac{1}{f})}{k} + N_0(R, f, \frac{1}{f}) + kR^k \int_1^R \frac{N_0(t, f, \frac{1}{f})}{t^{k+1}} dt \right\} + \\ + \sum_{l=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^l (r^l + \frac{1}{r^l})\, lR^l \int_R^{\infty} \frac{N_0(t, f, 1/f)}{t^{l+1}} dt + C_1 r^{p-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Доведення. Співвідношення (5) одержується з (4), якщо врахувати, що $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$, де

$$\begin{aligned} H_1(z) = \sum_{1<|a_k|<R} \operatorname{Re}\left\{ \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p-1} \right\} - \\ - \sum_{1<|b_l|<R} \operatorname{Re}\left\{ \frac{z}{b_l} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_l}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{b_l}\right)^{p-1} \right\} + \\ + \sum_{|a_k|\geqslant R} \log|E(\frac{z}{a_k}, p)| - \sum_{|b_l|\geqslant R} \log|E(\frac{z}{b_l}, p)| + \operatorname{Re} P_{p-1}(z), \end{aligned} \tag{9}$$

а

$$\begin{aligned} H_2(z) = \sum_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} \operatorname{Re}\left\{ \frac{a_k}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{a_k}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{a_k}{z}\right)^{p-1} \right\} - \\ - \sum_{\frac{1}{R}<|b_l|\leqslant 1} \operatorname{Re}\left\{ \frac{b_l}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{b_l}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{b_l}{z}\right)^{p-1} \right\} + \\ + \sum_{|a_k|\leqslant \frac{1}{R}} \log|E(\frac{a_k}{z}, p)| - \sum_{|b_l|\leqslant \frac{1}{R}} \log|E(\frac{b_l}{z}, p)|. \end{aligned} \tag{10}$$

Використовуючи нерівність $|\log|E(u,p)|| \leqslant \sum\limits_{l=p+1}^{\infty} \frac{|u|^l}{l}$, яка правильна при $|u| < 1$, $p \geqslant 1$, з (9) та (10) отримуємо

$$|H_1(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{r^k}{k} \int_1^R \frac{dn_0^1(t, f, 1/f)}{t^k} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{r^l}{l} \int_R^{\infty} \frac{dn_0^1(t, f, 1/f)}{t^l} + C_1 r^{p-1},$$

$$|H_2(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{r^k k} \int_1^R \frac{dn_0^2(t, f, 1/f)}{t^k} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{1}{r^l l} \int_R^{\infty} \frac{dn_0^2(t, f, 1/f)}{t^l}.$$

Тобто,

$$|H(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \tfrac{1}{k}(r^k + \tfrac{1}{r^k}) \int_1^R \frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^k} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \tfrac{1}{l}(r^l + \tfrac{1}{r^l}) \int_R^\infty \frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^l} + C_1 r^{p-1}. \quad (11)$$

Двічі інтегруючи частинами у першому інтегралі з (11), маємо

$$\int_1^R \frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^k} = \frac{n_0(R,f,1/f)}{R^k} + k\int_1^R \frac{dN_0(t,f,1/f)}{t^k} =$$
$$= \frac{n_0(R,f,1/f)}{R^k} + k\left(\frac{N_0(R,f,1/f)}{R^k} + k\int_1^R \frac{N_0(t,f,1/f)}{t^{k+1}}dt\right).$$

Для оцінки другого інтеграла з (11) знову двічі застосовуємо інтегрування частинами

$$\int_R^\infty \frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^l} = -\frac{n_0(R,f,1/f)}{R^l} + l\int_R^\infty \frac{dN_0(t,f,1/f)}{t^l} =$$
$$= -\frac{n_0(R,f,1/f)}{R^l} - l\frac{N_0(R,f,1/f)}{R^l} + l^2\int_R^\infty \frac{N_0(t,f,1/f)}{t^{l+1}}dt \leqslant l^2\int_R^\infty \frac{N_0(t,f,1/f)}{t^{l+1}}dt.$$

З отриманих оцінок безпосередньо випливає (8). □

Лема 2. *Нехай f – мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція порядку $\rho \geqslant 1$, $\rho(r)$ її уточнений порядок. Тоді при $y \geqslant y_0 > r_0 > 1$ правильна нерівність*

$$\int_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1}\left\{\int_1^{\frac{q}{q-1}r} \log^+ \frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}dn_0(t,f,1/f) + \int_1^{\frac{q}{q-1}r} \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}dn_0(t,f,1/f)\right\}dr \leqslant$$
$$\leqslant K_1(1+\rho)\log(1+\rho)\int_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1}N_0(r,f,1/f)dr + C_2, \quad (12)$$

де $q = \max\{2, \rho\}$.

Доведення. Нехай I – це інтеграл у лівій частині нерівності (12). Він є сумою двох інтегралів. Позначимо їх, відповідно, I_1 та I_2. Оцінку вигляду (12) для I_1 отримуємо аналогічним способом до класичного випадку, розглянутого В.П. Петренком [4, Лема 7.3]. Варто лише змінити позначення $n(r)$ на $n_0(r,f,1/f)$.

Розглянемо тепер інтеграл I_2

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1}\left\{\int_1^{\frac{q}{q-1}r} \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}dn_0(t,f,1/f)\right\}dr.$$

Для $r \geqslant 1$, $t \geqslant 1$ при $\dfrac{r}{t} \leqslant 1$, виконується

$$\left|1-\frac{r}{t}\right| = 1-\frac{r}{t} \leqslant 1-\frac{1}{t} \leqslant 1-\frac{1}{rt} = \left|1-\frac{1}{rt}\right|.$$

Тобто при $r \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $\frac{r}{t} \leqslant 1$ виконується нерівність

$$\log^+ \frac{1}{|1-\frac{r}{t}|} \geqslant \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}.$$

У випадку, коли вже отримано оцінку (12) для інтеграла I_1, з огляду на невід'ємність підінтегральних виразів, достатньо розглянути лише ту частину множини по якій береться інтеграл I_2, яка потрапляє до множини $\{(r,t) : r \geqslant 1, t \geqslant 1, \frac{r}{t} > 1\}$.

Розглянемо спочатку інтеграл $I_2(t) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{\log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}}{r^{\rho(r)+1}} dr$. Перейдемо до нової змінної τ, яка пов'язана з r таким співвідношенням $1 - \dfrac{1}{rt} = \dfrac{\tau}{q}$. Використовуючи властивість уточненого порядку $\rho(r)$ [4], матимемо

$$I_2(t) = \int_{y_0}^{y} \frac{\log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}}{r^{\rho(r)+1}} dr = \int_{y_0}^{y} \frac{\log \frac{1}{1-\frac{1}{rt}}}{r^{\rho(r)+1}} dr = \frac{1+o(1)}{qt^{\rho}} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\log \frac{q}{\tau}}{\left(1-\frac{\tau}{q}\right)^{-\rho+1}} d\tau, \quad t \to +\infty,$$

де $\tau_1 = q(1-\frac{1}{y_0 t})$, $\tau_2 = q(1-\frac{1}{yt})$.

В останньому інтегралі зробимо ще одну заміну $u = \dfrac{q}{\tau}$

$$I_2(t) = \frac{1+o(1)}{qt^{\rho}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\log u}{\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-\rho+1}} \frac{(-q)\,du}{u^2} = \frac{1+o(1)}{t^{\rho}} \int_{u_2}^{u_1} \frac{\log u\,du}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}}, \quad t \to +\infty,$$

де $u_1 = (1-\frac{1}{y_0 t})^{-1}$, $u_2 = (1-\frac{1}{yt})^{-1}$.

При $t \geqslant 1$ одержуємо

$$\frac{1}{y_0 t} \leqslant \frac{1}{y_0} \implies 1-\frac{1}{y_0 t} \geqslant 1-\frac{1}{y_0} \implies \frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0}}.$$

Оскільки $y_0 t \geqslant y_0 > 1$, то $\frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}} > 1$. Аналогічно при $y \geqslant y_0 > 1$ і $t \geqslant 1$

$$1 < \frac{1}{1-\frac{1}{yt}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y}}, \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{yt}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}}.$$

Звідси

$$1 < \frac{1}{1-\frac{1}{yt}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0}}.$$

Тобто, $1 < u_2 \leqslant u_1 \leqslant (1-\frac{1}{y_0})^{-1}$, а отже,

$$0 \leqslant \int_{u_2}^{u_1} \frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} du < \int_{1}^{\infty} \frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} du. \tag{13}$$

При $u \to +\infty$: $\dfrac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} \sim \dfrac{\log u}{u^2}$. Якщо ж $u \to 1+0$, то

$$\frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} \sim \frac{u-1}{(u-1)^{-\rho+1}} = (u-1)^{\rho}.$$

Отже, останній інтеграл у (13) є збіжним, тому

$$I_2(t) = \frac{1+o(1)}{t^{\rho}} \int\limits_{u_2}^{u_1} \frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} du < \frac{C_3}{t^{\rho(t)}}, \qquad t \to +\infty.$$

Повертаючись до інтеграла I_2, пригадуючи, що нам достатньо оцінити лише його частину, і використовуючи той факт, що $\rho(r)$ є уточненим порядком функції f (тобто її характеристики $T_0(r,f)$), отримуємо

$$\int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1} \left\{ \int\limits_{1}^{r} \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|} dn_0(t,f,\frac{1}{f}) \right\} dr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1} \left\{ \int\limits_{1}^{y} \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|} dn_0(t,f,\frac{1}{f}) \right\} dr =$$

$$= \int\limits_{1}^{y} \left\{ \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}}{r^{\rho(r)+1}} dr \right\} dn_0(t,f,\frac{1}{f}) = \int\limits_{1}^{y} I_2(t)\, dn_0(t,f,\frac{1}{f}) =$$

$$\leqslant I_2^y n_0(y,f,\frac{1}{f}) \leqslant C_3 \frac{n_0(y,f,\frac{1}{f})}{y^{\rho(y)}} \leqslant C_3 \frac{N_0(2y,f,\frac{1}{f})}{y^{\rho(y)}} \log 2 \leqslant C_4.$$

Це завершує доведення. □

Теорема 4 ([3], [2]). *Нехай f – відмінна від сталої мероморфна функція в $\mathbb{C}^*$ і $a_1, a_2, \ldots, a_q$ – різні комплексні числа ($q \geqslant 2$). Тоді*

$$m_0(r,f) + \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, \frac{1}{f-a_\nu}) \leqslant 2T_0(r,f) - \widehat{N}_0(r,f) + S(r,f), \quad r > 1, \tag{14}$$

де

$$\widehat{N}_0(r,f) = N_0(r,\frac{1}{f'}) + 2N_0(r,f) - N_0(r,f')$$

і

$$S(r,f) = m_0(r,\frac{f'}{f}) + \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r,\frac{f'}{f-a_\nu}) + O(1), \quad r \to +\infty.$$

Лема 3 ([3]). *Якщо $\mathcal{R}$ - раціональна функція, $deg\mathcal{R} = q$, і f мероморфна в $\mathbb{C}^*$, то*

$$T_0(r, \mathcal{R} \circ f) = qT_0(r,f) + O(1), \qquad r \to +\infty.$$

Лема 4. *Якщо g – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку ρ, для якої $\sum\limits_a \delta_0(a,g) = 2$, то $\delta_0(0,g') = 1$.*

Доведення. Нехай $H(z) = h(g(z))$, де $h(\omega) = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{\omega - a_\nu}$. За Лемою 3

$$m_0(r, H) = T_0(r, H) - N_0(r, H) = qT_0(r, f) - \sum_{\nu=1}^{q} N_0(r, a_\nu, g) + O(1) = \\ = \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, a_\nu, g) + O(1), \qquad r \to +\infty. \tag{15}$$

Враховуючи означення функції $m_0(r, f)$ та Теорему 4, можна записати

$$m_0(r, H) \leqslant m_0(r, \frac{1}{g'}) + m_0(r, g'H) \leqslant \\ \leqslant m_0(r, \frac{1}{g'}) + \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, \frac{g'}{g - a_\nu}) + \log q = m_0(r, \frac{1}{g'}) + S(r, g), \tag{16}$$

де $S(r) = O(\log r)$ при $r \to +\infty$. З (15) та (16) отримуємо

$$\sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, a_\nu) - S(r, g) \leqslant m_0(r, \frac{1}{g'}). \tag{17}$$

Крім того,

$$T_0(r, g') = m_0(r, g') \leqslant m_0(r, g) + m_0(r, \frac{g'}{g}) + O(1) \leqslant T_0(r, g) + O(\log r), \quad r \to +\infty. \tag{18}$$

Поділимо (17) на $T_0(r, g)$ та спрямуємо $r \to +\infty$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta_0(a_\nu, g) \leqslant \varliminf_{r \to +\infty} \frac{m_0(r, \frac{1}{g'})}{T_0(r, g')} \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{T_0(r, g')}{T_0(r, g)}. \tag{19}$$

З огляду на (18)

$$\frac{T_0(r, g')}{T_0(r, g)} \leqslant \frac{T_0(r, g) + O(\log r)}{T_0(r, g)}.$$

Звідси

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{T_0(r, g')}{T_0(r, g)} \leqslant 1. \tag{20}$$

Тому (19) набуде вигляду

$$\sum_{a \neq \infty} \delta_0(a, g) \leqslant \delta_0(0, g'). \tag{21}$$

За умовою леми $\sum_a \delta_0(a, g) = 2$. Оскільки g є голоморфною в $\mathbb{C}^*$, то $\sum_{a \neq \infty} \delta_0(a, g) = 1$. Отже, з (21) отримуємо $\delta_0(0, g') = 1$. $\square$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82

5. Доведення Теореми 1

Нехай $G_i(R)$ – функції з Леми 1. Для фіксованого $R > 1$ позначимо через $\omega_i(R)$ аргумент $G_i(R)$, $i = 1, 2$. Розглянемо функцію

$$h_R(z) = exp\{m \log z + G_1(R)z^p + G_2(R)z^{-p}\}. \tag{22}$$

Враховуючи, що

$$|h_R(re^{i\theta})| = \exp\{m \log r + G_1(R)r^p \cos(p\theta + \omega_1(R)) + G_2(R)r^{-p} \cos(p\theta - \omega_2(R))\},$$

$$|h_R(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})| = \exp\{-m \log r + G_1(R)r^{-p} \cos(p\theta - \omega_1(R)) + G_2(R)r^p \cos(p\theta + \omega_2(R))\},$$

$$|h_R(e^{i\theta})| = \exp\{G_1(R)\cos(p\theta + \omega_1(R)) + G_2(R)\cos(p\theta - \omega_2(R))\}$$

матимемо

$$m_0(r, h_R) = m(r, h_R) + m(\tfrac{1}{r}, h_R) - 2m(1, h_R) =$$

$$= \frac{|G_1(R)|}{\pi}r^p + \frac{|G_2(R)|}{\pi}r^{-p} + \frac{|G_1(R)|}{\pi}r^{-p} + \frac{|G_2(R)|}{\pi}r^p - \frac{2}{\pi}(|G_1(R)| + |G_2(R)|) =$$

$$= \frac{|G_2(R)| + |G_2(R)|}{\pi}(r^p + r^{-p} - 2). \tag{23}$$

Запишемо допоміжні рівності та нерівності, які нам знадобляться в процесі доведення.

1) $\pi m_0(r, h_R) + 2(|G_1(R)| + |G_2(R)|) = (|G_1(R)| + |G_2(R)|)(r^p + r^{-p})$ (випливає з (23));

2) $\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log|1 - \frac{re^{i\theta}}{a_k}| = \sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log|\frac{re^{i\theta}}{a_k}| + \sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log|\frac{a_k}{re^{i\theta}} - 1| \leqslant \sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log\frac{r}{|a_k|} + $
$+ \sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log(1 + \frac{|a_k|}{r}) \leqslant \sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log\frac{r}{|a_k|} + n_0^1(R, \frac{1}{f})\log(1 + \frac{R}{r})$;

3) $\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} \log\left|1 - \frac{a_k r}{e^{i\theta}}\right| = \sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} \left(\log\left|\frac{a_k r}{e^{i\theta}}\right| + \log\left|\frac{e^{i\theta}}{a_k r} - 1\right|\right) \leqslant \sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} \log(r|a_k|) +$
$+ n_0^2(R, \frac{1}{f})\log(1 + \frac{R}{r})$;

4) $\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log|1 - \frac{e^{i\theta}}{ra_k}| \leqslant n_0^1(R, \frac{1}{f})\log(1 + \frac{1}{r}) \leqslant n_0^1(R, \frac{1}{f})$;

5) $\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} \log|1 - \frac{a_k}{re^{i\theta}}| \leqslant n_0^2(R, \frac{1}{f})\log(1 + \frac{1}{r}) \leqslant n_0^2(R, \frac{1}{f})$.

6) $\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} \log(r|a_k|) = -\int\limits_{\frac{1}{R}}^{1} \log(rt)\, dn_0^2(\frac{1}{t}, f) = -n_0^2(\frac{1}{t}, f)\log(rt)\Big|_{\frac{1}{R}}^{1} + \int\limits_{\frac{1}{R}}^{1} n_0^2(\frac{1}{t}, f)\frac{dt}{t} =$
$= n_0^2(R, f)\log\frac{r}{R} + N_0^2(R, f) \leqslant N_0^2(R, f)$.

7) $\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R} \log\frac{r}{|a_k|} = \int\limits_{1}^{R} \log\frac{r}{t}\, dn_0^1(t, f) = n_0^1(r, f)\log\frac{r}{t}\Big|_{1}^{R} + \int\limits_{1}^{R} n_0^1(t, f)\frac{dt}{t} = \log\frac{r}{R}n_0^1(R, f) +$
$+ N_0^1(R, f) \leqslant N_0^1(R, f)$.

8) $|G_1(R)| \leqslant |\alpha_0| + N_0^1(R, f) + N_0^1(R, \frac{1}{f})$, $|G_2(R)| \leqslant N_0^2(R, f) + N_0^2(R, \frac{1}{f})$ (випливає з (6), (7)).

Позначимо $z = re^{i\theta}$, $\tilde{z} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$. Зауважимо, що як для z так і для $\tilde{z}$ правильна оцінка (8) з Леми 1, а також $\log|\tilde{z}| = -\log|z|$. Враховуючи (23), (5), а також допоміжні рівності та нерівності 1) – 8), отримуємо:

$$\log|f(re^{i\varphi})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|\leqslant m\log|z|+|G_1(R)|r^p+|G_2(R)|r^{-p}+\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log|1-\frac{z}{a_k}|+$$
$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log\left|\frac{1}{1-\frac{z}{b_k}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log\left|1-\frac{a_k}{z}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log\left|\frac{1}{1-\frac{b_k}{z}}\right|+|H(z)|+$$
$$+m\log|\tilde z|+|G_1(R)|r^{-p}+|G_2(R)|r^p+\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log|1-\frac{\tilde z}{a_k}|+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log\left|\frac{1}{1-\frac{\tilde z}{b_k}}\right|+$$
$$+\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log\left|1-\frac{a_k}{\tilde z}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log\left|\frac{1}{1-\frac{b_k}{\tilde z}}\right|+|H(\tilde z)|\leqslant$$
$$\leqslant(|G_1(R)|+|G_2(R)|)(r^p+r^{-p})\overset{2)}{+}\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log\frac{r}{|a_k|}+n_0(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{R}{r})+$$
$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|\overset{5)}{+}n_0^2(R,\frac{1}{f})+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|+$$
$$\overset{4)}{+}n_0^1(R,\frac{1}{f})+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|\overset{3)}{+}\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log r|a_k|+n_0^2(R,\frac{1}{f})\log(\frac{R}{r}+1)+$$
$$+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|+|H(z)|+|H(\tilde z)|\overset{1),8)}{\leqslant}\pi m_0(r,h_R)+2(N_0(R,f)+N_0(R,\frac{1}{f}))+$$
$$+2|\alpha_0|+n_0(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{R}{r})+n_0(R,\frac{1}{f})\overset{6)+7)}{+}N_0(R,f)+|H(z)|+|H(\tilde z)|+$$
$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|+$$
$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|. \qquad (24)$$

Але

$$\log\left|\frac{f(z)}{h_R(z)}\right|=H(z)+\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log|1-\frac{z}{a_k}|+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log\left|\frac{1}{1-\frac{z}{b_k}}\right|+$$
$$+\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log\left|1-\frac{a_k}{z}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log\left|\frac{1}{1-\frac{b_k}{z}}\right|. \qquad (25)$$

Позначивши $\{c_k\}=\{a_k\}\cup\{b_k\}$ та використавши (25), отримуємо

$$m_0(r,\frac{h_R}{f})\leqslant m(r,\frac{h_R}{f})+m(\frac{1}{r},\frac{h_R}{f})\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|\frac{f(re^{i\theta})}{h_R(re^{i\theta})}\right|\right|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|\frac{f(\frac{1}{r}e^{i\theta})}{h_R(\frac{1}{r}e^{i\theta})}\right|\right|d\theta\overset{(25)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant|c_k|<R} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right|d\theta + \sum_{\frac{1}{R}<|c_k|<1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right|d\theta +$$
$$+\max_{|z|=r}|H(z)|+\max_{|z|=\frac{1}{r}}|H(z)|. \tag{26}$$

Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{r}{|c_k|}}\frac{dt}{|te^{i\theta}-1|} \geqslant \left|\int\limits_0^{\frac{r}{|c_k|}}\frac{dt}{te^{i\theta}-1}\right| = \left|e^{-i\theta}\log|te^{i\theta}-1|\Big|_{t=0}^{t=\frac{r}{|c_k|}}\right| = \left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right|. \tag{27}$$

Подібно оцінюємо ще один інтеграл

$$\int\limits_0^{\frac{|c_k|}{r}}\frac{dt}{|te^{i\theta}-1|} \geqslant \left|e^{-i\theta}\log|te^{i\theta}-1|\Big|_{t=0}^{t=\frac{|c_k|}{r}}\right| = \left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right|. \tag{28}$$

Із нерівностей (27) і (28) випливають відповідні оцінки

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}||d\theta \leqslant \int\limits_0^{\frac{r}{|c_k|}}A(t)\,dt,\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}||d\theta \leqslant \int\limits_0^{\frac{|c_k|}{r}}A(t)\,dt, \tag{29}$$

де $A(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{|te^{i\theta}-1|}$.

Едрей і Фукс [7] отримали оцінку для $A(t)$

$$A(t)\leqslant\frac{1}{1+t}\left\{1+\frac{2}{\pi}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right\},\qquad t\geqslant 0.$$

Використовуючи цей результат, з (29) отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right|d\theta \leqslant \log(1+\frac{r}{|c_k|})+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}{1+t}dt =$$
$$=\log\left(1+\frac{r}{|c_k|}\right)+K_2\leqslant\log^+\frac{r}{|c_k|}+K_3, \tag{30}$$

Аналогічно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right|d\theta\leqslant\log^+\frac{|c_k|}{r}+K_4. \tag{31}$$

Отож,

$$\sum_{1\leqslant|c_k|<R}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right|d\theta\leqslant N_0^1(,f,\frac{1}{f})+K_3n_0^1(R,f,\frac{1}{f}), \tag{32}$$

$$\sum_{\frac{1}{R}<|c_k|<1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right|d\theta\leqslant N_0^2(r,f,\frac{1}{f})+K_4n_0^2(R,f,\frac{1}{f}). \tag{33}$$

Використовуючи (8), (23), (27), (28), (32), (33), одержуємо

$$m_0(r,h_R)\leqslant m_0(r,f)+m_0(r,\frac{h_R}{f})+C_5\leqslant m_0(r,f)+\sum_{1\leqslant|c_k|<R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right|d\theta+$$

$$+\sum_{\frac{1}{R}<|c_k|<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right|d\theta+\max_{|z|=r}|H(z)|+\max_{|z|=\frac{1}{r}}|H(z)|+C_5\leqslant$$

$$\overset{(32),(33)}{\leqslant} m_0(r,f)+N_0(r,f,\frac{1}{f})+K_5n_0(R,f,\frac{1}{f})+\max_{|z|=r}|H(z)|+\max_{|z|=\frac{1}{r}}|H(z)|+C_5\leqslant$$

$$\overset{(8)}{\leqslant} m_0(r,f)+N_0(r,f,\frac{1}{f})+K_5n_0(R,f,\frac{1}{f})+$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{R}\right)^k(r^k+\frac{1}{r^k})\left\{\frac{n_0(R,f,\frac{1}{f})}{k}+N_0(R,f,\frac{1}{f})+kR^k\int_1^R\frac{N_0(t,f,\frac{1}{f})}{t^{k+1}}dt\right\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^l(r^l+\frac{1}{r^l})lR^l\int_R^{\infty}\frac{N_0(t,f,\frac{1}{f})}{t^{l+1}}dt+Cr^{p+1}\right)+C_5. \tag{34}$$

Нехай $R=\frac{q}{q-1}r$. З огляду на рівності

$$\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|=\int_1^{\frac{q}{q-1}r}\log^+\frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}dn_0^1(t,f);\quad \sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|=-\int_{(1-\frac{1}{q})\frac{1}{r}}^1\log^+\frac{1}{|1-\frac{t}{r}|}dn_0^2(\tfrac{1}{t},f);$$

$$\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|=\int_1^{\frac{q}{q-1}r}\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}dn_0^1(t,f);\quad \sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|=-\int_{(1-\frac{1}{q})\frac{1}{r}}^1\log^+\frac{1}{|1-rt|}dn_0^2(\tfrac{1}{t},f)$$

матимемо

$$\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|=$$

$$=\int_1^{\frac{q}{q-1}r}\left(\log^+\frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}+\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}\right)dn_0(t,f,\frac{1}{f}). \tag{35}$$

Тоді для $1<r_0<y_0<y<+\infty$ з (24), (34) та (35), одержимо

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\log^+M(r,\infty,f)+\log^+M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant$$

$$\leqslant\pi\int_{y_0}^{y}\frac{m_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr+\pi\int_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+(\pi K_5)\int_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+$$

$$+(2\pi+2)\sum_{k=1}^{p-1}(1-\frac{1}{q})^k\left(1+\frac{1}{r^{2k}}\right)\left\{\frac{1}{k}\int_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+\int_{y_0}^{y}\frac{N_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+\right.$$

$$+\left(\frac{q}{q-1}\right)^k k\int\limits_{y_0}^{y}\frac{r^k\int\limits_{1}^{\frac{q}{q-1}r}t^{-k-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr\Bigg\}+$$

$$+(2\pi+2)\sum_{l=p+1}^{\infty}(1-\frac{1}{q})^l\left(1+\frac{1}{r^l}\right)l\left(\frac{q}{q-1}\right)^l\int\limits_{y_0}^{y}\frac{r^l\int\limits_{\frac{q}{q-1}r}^{\infty}t^{-l-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{C(2\pi+2)r^{p-1}+C_5+2|\alpha_0|}{r^{\rho(r)+1}}dr+(\log(1+\frac{q}{q-1})+1)\int\limits_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+$$

$$+3\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+\int\limits_{y_0}^{y}\left\{\int\limits_{1}^{\frac{q}{q-1}r}\left(\log^+\frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}+\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}\right)dn_0(t,f,\frac{1}{f})\right\}r^{-\rho(r)-1}dr. \tag{36}$$

Аналогічно як у випадку функцій мероморфних у площині отримуємо такі оцінки:

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}t,f,\frac{1}{f})}{t^{\rho(t)+1}}dt\leqslant K_6\cdot\rho\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_6, \tag{37}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(\frac{q}{q-1}r)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant K_7\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_7, \tag{38}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(\frac{q}{q-1}r)^k\int\limits_{0}^{\frac{q}{q-1}r}t^{-k-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant K_8\frac{1}{\rho-k}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_8, \tag{39}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(\frac{q}{q-1}r)^l\int\limits_{\frac{q}{q-1}r}^{\infty}t^{-l-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant K_9\frac{1}{l-\rho}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_9, \tag{40}$$

при $y_0>r_0>1$. Крім того, виконуються нерівності

$$\rho<(\rho+1)\log(\rho+1)\quad\text{при}\ \ \rho\geqslant 1;\quad \log\left(1+\frac{q}{q-1}\right)\leqslant\log 3. \tag{41}$$

Використовуючи (37)–(41), Лему 2 та означення характеристики $T_0(r,f)$, з (36) одержимо

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\log^+M(r,\infty,f)+\log^+M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant$$

$$\leqslant \pi \int\limits_{y_o}^{y} \frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr + K_{10}(\rho+1)\log(\rho+1)\int\limits_{y_0}^{y} \frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr +$$

$$+K_{11}\sum_{l=p+1}^{\infty}(1-\frac{1}{q})^l\frac{l}{l-\rho}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})dr}{r^{\rho(r)}}+ \tag{42}$$

$$+K_{12}\sum_{k=1}^{p-1}(1-\frac{1}{q})^k\left\{\frac{\rho}{k}+1+\frac{k}{\rho-k}\right\}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr + C_{10}.$$

Отож, для $1 < r_0 < y_0 < y < \infty$

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr \leqslant$$

$$\leqslant \pi \int\limits_{y_o}^{y}\frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr + S(\rho)K_{13}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr + C_{14} \leqslant$$

$$\leqslant \{\pi + \varkappa_0(f)S(\rho)K_{13}\}\int\limits_{y_o}^{y}\frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr + C_{14}, \tag{43}$$

де $\quad S(\rho) = (\rho+1)\log(\rho+1) + \sum\limits_{k=1}^{p-1}(1-\frac{1}{q})^k\left\{\frac{\rho}{k}+1+\frac{k}{\rho-k}\right\} + \sum\limits_{l=p+1}^{\infty}\frac{l}{l-\rho}(1-\frac{1}{q})^l =$

$$\leqslant K_{14}(\rho+1)\log(\rho+1) + \rho\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\rho-k} + q + \rho\sum_{l=p+1}^{2p}\frac{1}{l-\rho}(1-\frac{1}{q})^l + \rho\sum_{l=2p+1}^{\infty}\frac{1}{l-\rho}(1-\frac{1}{q})^l \leqslant$$

$$\leqslant K_{15}(\rho+1)\log(\rho+2)\frac{1}{p+1-\rho}. \tag{44}$$

Для обґрунтування останніх двох знаків $\leqslant$ у (44) достатньо використати міркування з роботи Петренка [4], які у цьому випадку просто переносяться.

Якщо $p \leqslant \rho \leqslant p+\frac{1}{2}$, то $S(\rho) \leqslant K_{16}(1+\rho)\log(2+\rho)$. Звідси

$$\begin{aligned}&\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr \leqslant \\ &\leqslant \{\pi+\varkappa_0(f)K_{16}(1+\rho)\log(2+\rho)\}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+r}}dr + C_{14}.\end{aligned} \tag{45}$$

Нерівність (45) не змінюється, якщо $p+\frac{1}{2} \leqslant \rho < p+1$. У цьому випадку розпочнемо із зображення функції

$$f(z) = z^m e^{P_{p+1}(z)}\frac{\prod\limits_{|a_j|\leqslant 1}E(\frac{a_j}{z},p+1)\prod\limits_{|a_j|>1}E(\frac{z}{a_j},p+1)}{\prod\limits_{|b_j|\leqslant 1}E(\frac{b_j}{z},p+1)\prod\limits_{|b_j|>1}E(\frac{z}{b_j},p+1)}$$

і проводимо міркування аналогічні до вищенаведених.

Далі, оскільки $T_0(r,f)$ належить до класу розбіжності стосовно уточненого порядку, то, враховуючи (45), матимемо

$$\varlimsup_{y\to\infty}\frac{\int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1}(\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f))dr}{\int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1}T_0(r,f)dr}\leqslant \pi+\varkappa_0(f)K_{17}(1+\rho)\log(2+\rho).$$

Звідси одержуємо

$$\beta_0(\infty,f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{T_0(r,f)}\leqslant \pi+K\varkappa_0(f)(1+\rho)\log(1+\rho).$$

Нерівність (2) для $\beta_0(0,f)$ доводиться аналогічно, з використанням властивості $T_0(r,f)=T_0(r,\frac{1}{f})$ ([1], [3]). □

6. Доведення Теореми 2

Розглянемо функцію f'. За Лемою 4 отримаємо $\delta_0(0,f')=1$. Оскільки f – голоморфна, то $N_0(r,f')=0$, а отже,

$$\varkappa_0(f')=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,\frac{1}{f'})}{T_0(r,f')}=1-\varliminf_{r\to\infty}\frac{m_0(r,\frac{1}{f'})}{T_0(r,f')}=1-\delta_0(0,f')=0.$$

У такому випадку за Теоремою 1 матимемо $\beta_0(0,f')\leqslant\pi$, $\beta_0(\infty,f')\leqslant\pi$. Тому для f отримуємо

$$\beta_0(\infty,f)\leqslant\pi\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T_0(r,f')}{T_0(r,f)}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{\log^+ M(r,\infty,f')+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f')}. \tag{46}$$

Як ми вже бачили у доведенні Леми 4 (див. (20))

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T_0(r,f')}{T_0(r,f)}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m_0(r,f')+O(\log r)}{T_0(r,f)}\leqslant 1.$$

Логарифмуючи відому нерівність

$$\frac{M(r)-C}{r}\leqslant M_1(r),\ \text{ де } M_1(r)=\max_{|z|=r}|f'(z)|,\ \ M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|,\ \ C=const$$

та спрямовуючи $r\to+\infty$, одержуємо

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r)}{\log M_1(r)}\leqslant\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log M_1(r)+\log r+O(1)}{\log M_1(r)}=1.$$

Звідси, зокрема

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ M(r,\infty,f)}{\log^+ M(r,\infty,f')}\leqslant 1,\qquad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f')}\leqslant 1.$$

А тоді (46) дає $\beta_0(\infty,f)\leqslant\pi$. □

Список використаної літератури

1. *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I // Mat. Stud. — 2005. — **23**, №1. — P. 19–30.
2. *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II // Mat. Stud. — 2005. — **24**, №2. — P. 57–68.
3. *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains — Joensuu – L'viv, 2006. — 111 p.
4. *Петренко В.П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1969. — **33**, №2. — P. 414–454.
5. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. — Москва: Наука, 1970. — 591с.
6. *Hayman W.K.* Meromorphic Functions. — Oxford: Clarendon Press, 1964. — 191p.
7. *Edrei A., Fuchs W.H.J.* On the growth of meromorphic functions with several deficient values // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — **93**, №2 — P. 292–328.

MINIMAL DEVIATION FROM 0 AND ∞ ESTIMATES FOR A MEROMORPHIC IN THE PUNCTURED PLANE FUNCTION WITH A SMALL NUMBER OF ZEROS AND POLES

Oleksandra BEREZA, Andriy KHRYSTIYANYN

Ivan Franko National University of Lviv,
79000, Lviv, 1 Universytetska Street
e-mail: berezalesya@gmail.com, khrystiyanyn@ukr.net

We consider meromorphic in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ functions with a small number of zeros and poles. Using analogs $\beta_0(a, f)$ of Petrenko's minimal deviations $\beta(a, f)$ we obtain estimates for $\beta_0(0, f)$, $\beta_0(\infty, f)$ for a meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function f of finite order $\rho \geqslant 1$.

Key words: meromorphic function, punctured plane, Nevanlinna characteristic, deficiency, minimal deviation.

Стаття: надійшла до редколегії 05.05.2016.
доопрацьована 20.01.2017.
прийнята до друку 20.02.2017.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 56–74
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 56–74

УДК 517.95

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ВИРОДЖУВАНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

Микола БОКАЛО, Ольга СУС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університецька, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, oliasus@gmail.com

Досліджено мішані задачі для нелінійних вироджуваних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральними операторами типу Вольтерра. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків таких задач у відповідних узагальнених просторах Лебега та Соболєва. Отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Ключові слова: інтегро-диференціальні рівняння, еліптично-параболічні рівняння, змінні показники нелінійності, метод Гальоркіна, метод монотонності.

Вступ

Інтегро-диференціальні рівняння параболічного типу широко використовують для математичного моделювання складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці. Зокрема, такі рівняння трапляються в задачах опису еволюції популяцій [20], в теорії ядерних реакцій для вивчення процесу уповільнення нейтронів [29], в дифузії заряджених частинок у плазмі та в інших різноманітних задачах [18], [19], [21], [22], [23].

Розглядаємо нелінійні вироджувані параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними операторами типу Вольтерра. Їхнім типовим прикладом є рівняння

$$\big(b(x)u\big)_t-\sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i}+\widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u+$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K20, 35K35, 35K55, 35R09

$$+\int_0^t \widehat{h}_0(x,t,s)\widehat{h}_1(u(x,s))\,ds = f(x,t)\,, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \qquad (1)$$

де Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $T>0$ – дійсне число, $\widehat{a}_i>0$ $(i=\overline{0,n})$, $p_i>1$ $(i=\overline{0,n})$, $\widehat{h}_0$ — вимірні обмежені функції, $\widehat{h}_1$ — ліпшицева функція. Зауважимо, що величини p_i $(i=\overline{0,n})$, які називають показниками нелінійності, є змінними.

Нелінійні диференціальні рівняння подібні до (1) з $b\equiv1$ і $\widehat{h}_0\equiv0$ (зі змінними показниками нелінійності) вивчають дуже активно (див. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 9, 17, 31, 32]). Мішані задачі для цих рівнянь описують багато фізичних процесів (див. [13, 16]), зокрема, електромагнітні поля, електрореологічні рідини, процеси відновлення зображення, потік струму в змінних температурних полях. Розв'язки цих задач належать до відповідних узагальнених просторів Лебега і Соболєва. Вперше ці простори були введені у [15], а їхні властивості вивчали у [8, 11, 14, 15] та ін.

Вироджувані нелінійні параболічні рівняння вигляду (1) у випадку, коли $p_0\equiv$ const $>1,\ldots,p_n\equiv const>1$ і $\widehat{h}_0\equiv0$, розглядалися у [33, 34, 35, 36, 30]. Зауважимо, що мішані задачі для згадуваних рівнянь у випадку змінних показників нелінійності досліджені в [26].

Рівняння вигляду (1) зі сталими показниками нелінійності та інтегральними операторами досліджували у [24, 25, 27, 28] та ін. Зокрема, у [28] дослідили мішану задачу для інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$u_t-\triangle u+\int_0^t g(t-s,u(x,s))\,ds=f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty),$$

$$u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,+\infty), \qquad u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\Omega.$$

У праці [25] вивчається стійкість глобального розв'язку нелокального рівняння Вольтерра

$$u_t-\triangle u=(a-bu)u-\int_0^t K(t-s)u(x,s)\,ds, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty).$$

На відміну від відомих нам робіт, ми розглядаємо нелінійні вироджувані параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами, в яких невідома функція входить під знак інтеграла за часовою змінною, тобто, коли значення розв'язку в актуальний момент часу залежить і від значень розв'язку в попередні моменти. Досліджуємо питання про однозначну розв'язність задачі (2)-(4) в узагальнених просторах Лебега і Соболєва.

Робота складається зі вступу і трьох розділів. У першому розділі введено основні позначення та допоміжні факти. Формулювання задачі й основного результату містить другий розділ. У третьому розділі обґрунтовано основний результат.

1. Основні позначення та допоміжні факти

Нехай $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$; Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$; $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 — замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, $\Gamma_0 = \emptyset$ або $\Gamma_0 = \partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$; $T > 0$; $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$.

Введемо деякі потрібні нам далі функційні простори. Нехай $G = \Omega$ або $G = Q$. Припустимо, що функція $r \in L_\infty(\Omega)$ така, що $r(x) \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Через $L_{r(\cdot)}(G)$ позначимо лінійний простір, який складається з вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де

$$\rho_{G,r}(v) := \int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\, dx, \text{ якщо } G = \Omega,$$

і

$$\rho_{G,r}(v) := \iint\limits_Q |v(x,t)|^{r(x)}\, dxdt, \text{ якщо } G = Q.$$

Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\}$ (див. [11, p. 599]) і його називають *узагальненим простором Лебега*. Зауважимо таке: якщо $r(x) = r_0 = \text{const} \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$, то норма $|| \cdot ||_{L_{r(\cdot)}(G)}$ збігається зі стандартною нормою $||\cdot||_{L_{r_0}(G)}$ простору Лебега $L_{r_0}(G)$. Згідно з [11, p. 599], якщо $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ ототожнюється з простором $L_{r'(\cdot)}(G)$, де функція $r'(x)$, $x \in \Omega$, визначається рівністю $1/r(x) + 1/r'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Зауважимо, що множина $C(\overline{G})$ є щільною в $L_{r(\cdot)}(G)$ (див. [11, p. 603]).

Нехай $p = (p_0, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – функції, які задовольняють такі умови:

($\mathcal{P}$) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ вектор-функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ є вимірною і $p_i^- := \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} p_i(x) > 1$, $p_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} p_i(x) < +\infty$;

($\mathcal{B}$) функція b – вимірна, невід'ємна та обмежена на Ω, причому множина $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ – відкрита.

Через $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ позначимо узагальнений простір Соболєва, що складається з функцій $v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega)$ таких, що $v_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(\Omega)$, $\ldots$, $v_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(\Omega)$. Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} := ||v||_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||v_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ – розумітимемо замикання простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$ в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Приймемо $V_p(\Omega) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$. Легко переконатися, що $V_p(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$||v||_{V_p(\Omega)} := ||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} + ||v||_{L_2(\Omega)}\,.$$

Визначимо $\widetilde{b}(x) := b(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, та $\widetilde{b}(x) := 1$, якщо $x \in \Omega \backslash \Omega_0$, і приймемо $H_b(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна $| v = \widetilde{b}^{-1/2}w$, де $w \in L_2(\Omega)\}$. Цей простір є поповненням простору $V_p(\Omega)$ за півнормою

$$||v||_{H_b(\Omega)} := ||b^{1/2}v||_{L_2(\Omega)}.$$

Під $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ розумітимемо простір функцій $w \in L_{p_0(\cdot)}(Q)$ таких, що $w_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(Q), \ldots, w_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(Q)$. Розглядатимемо цей простір з нормою $||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} := ||w||_{L_{p_0(\cdot)}(Q)} + \sum_{i=1}^n ||w_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}$. Визначимо простір $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ як замикання простору $\widetilde{C}^{1,0}(\overline{Q}) := \big\{w \in C(\overline{Q}) \,\big|\, w_{x_i} \in C(\overline{Q}) \ (i = \overline{1,n}), \ w|_{\Sigma_0} = 0\big\}$ в $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$.

Приймемо

$$U_{p,b}(Q) := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C([0,T]; H_b(\Omega)).$$

Легко переконатися, що це банахів простір з нормою

$$||w||_{U_{p,b}(Q)} := ||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} + ||w||_{L_2(Q)} + \max_{t\in[0,T]} ||w(\cdot,t)||_{H_b(\Omega)}\,.$$

Очевидно, що для будь-якої функції $w \in U_{p,b}(Q)$ маємо $w(\cdot,t) \in V_p(\Omega)$ для м.в. $t \in [0,T]$.

Зрештою, визначимо простори

$$F_{p'}(Q) := \big\{(f_0, f_1, \ldots, f_n) \ \mid \ f_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q) \ \ (i = \overline{0,n}),$$

$$f_i = 0 \quad \text{в деякому околі поверхні} \quad \Sigma_1 \text{ для кожного } i \in \{1, ..., n\}\big\},$$

де $1/p_i(x) + 1/p_i'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$,

$$C^1_c(0,T) := \{\varphi \in C^1([0,T]) \ \mid \ \operatorname{supp}\varphi \subset (0,T)\}.$$

2. Постановка задачі та формулювання основного результату

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\big(b(x)u\big)_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) +$$

$$+ \int\limits_0^t h(x,t,s,u(x,s))\, ds = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,t) + f_0(x,t)\,, \quad (x,t) \in Q\,, \tag{2}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{3}$$

і початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{якщо } x \in \Omega \text{ і } b(x) > 0. \tag{4}$$

Тут $b : \Omega \to \mathbb{R}$, $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$, $h : Q \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції, причому $b(x) \geqslant 0$ для майже всіх $x \in \Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu_a}(x,t) := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i,\ (x,\,t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі".

Зауважимо, що рівність $b = 0$ може виконуватись на довільній підмножині Ω і просторова частина виразу в лівій частині рівняння (2) є еліптичною. Тому такі рівняння ще називають еліптично-параболічними (див. [30]).

Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (2)-(4). Для їхнього означення спочатку введемо відповідні класи вихідних даних.

Нехай p – вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Позначимо через $\mathbb{AH}_p$ множину наборів дійснозначних функцій $(a_0, a_1, \ldots, a_n, h)$, які мають такі властивості:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $Q \times \mathbb{R}^{1+n} \ni (x,t,\rho,\xi) \mapsto a_i(x,t,\rho,\xi) \in \mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $a_i(x,t,0,0) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$ $(i = \overline{0,n})$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \le C_1\big(|\rho|^{2/p_i'(x)} + |\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big) + h_i(x,t),$$

де $C_1 = \mathrm{const} > 0$, $h_i \in L_{p'_i(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і всіх (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$
$$+ \big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \ge K_1|\rho_1 - \rho_2|^2\,, \tag{5}$$

де $K_1 = \mathrm{const} > 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\rho \ge K_2\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{p_i(x)} + |\rho|^{p_0(x)}\Big) - g(x,t)\,,$$

де $K_2 = \mathrm{const} > 0$, $g \in L_1(Q)$ (очевидно, що $g \ge 0$);

$(\mathcal{H}_1)$ функція $Q \times (0,T) \times \mathbb{R} \ni (x,t,s,\rho) \mapsto h(x,t,s,\rho) \in \mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (0,T)$ функція $h(x,t,s,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\rho \in \mathbb{R}$ функція $h(\cdot,\cdot,\cdot,\rho) : Q \times (0,T) \to \mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $h(x,t,s,0) = 0$ для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (0,T)$;

$(\mathcal{H}_2)$ для майже всіх $(x,t,s) \in Q \times (0,T)$ і будь-яких $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ маємо

$$|h(x,t,s,\rho_1) - h(x,t,s,\rho_2)| \leqslant M|\rho_1 - \rho_2|, \tag{6}$$

де $M = \mathrm{const} > 0$.

Тепер подамо означення узагальненого розв'язку задачі (2)–(4).

Означення 1. *Нехай p та b задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{P})$ та $(\mathcal{B})$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n, h) \in \mathbb{AH}_p$, $(f_0, f_1, ..., f_n) \in F_{p'}(Q)$, $u_0 \in H_b(\Omega)$. Функцію $u \in U_{p,b}(Q)$ називають узагальненим розв'язком задачі (2)–(4), якщо вона задовольняє умову*

$$\|u(\cdot, 0) - u_0(\cdot)\|_{H_b(\Omega)} = 0$$

і виконується інтегральна рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \nabla u) v_{x_i} \varphi + a_0(x, t, u, \nabla u) v\varphi +$$

$$+ v\varphi \int\limits_0^t h(x, t, s, u(x, s))\, ds - b(x) u v \varphi' \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i} \varphi + f_0 v \varphi \Big\}\, dxdt \qquad (7)$$

для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і $\varphi \in C_c^1(0, T)$.

Теорема 1. *Нехай p та b задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{P})$ та $(\mathcal{B})$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n, h) \in \mathbb{AH}_p$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{p'}(Q)$, $u_0 \in H_b(\Omega)$. Крім того, припустимо, що*

$$K_1 - MT > 0. \qquad (8)$$

Тоді задача (2)–(4) має єдиний узагальнений розв'язок і для нього правильна оцінка

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b(x)|u(x, t)|^2\, dx + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big|u_{x_i}(x, t)\big|^{p_i(x)} + |u(x, t)|^{p_0(x)} + |u(x, t)|^2 \Big\}\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \Big[\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{j=1}^n \big|f_j(x, t)\big|^{p'_j(x)} + g(x, t) \Big\} dxdt + \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\, dx \Big], \qquad (9)$$

де C_2 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i = \overline{0, n})$.

3. Обґрунтування основного результату

Спочатку введемо позначення:

$$\partial_0 w := w,\ \ \partial_i w := w_{x_i}\ \ (i = \overline{1, n}),$$
$$a_j(w)(x, t) := a_j(x, t, w(x, t), \nabla w(x, t)), \quad (x, t) \in Q \quad (j = \overline{0, n}),$$
$$h(w)(x, t, s) := h(x, t, s, w(x, s)), \ \ (x, t, s) \in \Omega \times (0, T) \times (0, T).$$

Нам буде потрібне таке твердження (див.[26, лема 2]).

Лема 1. *Нехай b задовольняє умову $(\mathcal{B})$, $w \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ така, що $b^{1/2} w \in L_2(Q)$ і для деяких функцій $g_i \in L_{p'_i(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0, n})$ виконується тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n g_i \partial_i v \varphi - b w v \varphi' \Big\}\, dxdt = 0, \quad v \in V_p(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(0, T). \qquad (10)$$

Тоді $w \in C([0,T]; H_b(\Omega))$ *і для всіх* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in V_p(\Omega)$ *і* $t_1, t_2 \in [0,T]$ $(t_1 < t_2)$ *правильні рівності*

$$\theta(t_2)\int\limits_{\Omega} b(x)w(x,t_2)v(x)\,dx - \theta(t_1)\int\limits_{\Omega} b(x)w(x,t_1)v(x)\,dx + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i v\theta - bwv\theta'\Big\}\,dxdt = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\int\limits_{\Omega} b(x)|w(x,t_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\theta(t_1)\int\limits_{\Omega} b(x)|w(x,t_1)|^2\,dx - \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} b|w|^2\theta'\,dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i w\Big\}\theta\,dxdt = 0\,, \tag{12}$$

а також нерівність

$$\max_{t\in[0,T]} ||b^{1/2}(\cdot)w(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)} \le C_2\big(||b^{1/2}w||^2_{L_2(Q)} + \sum_{i=0}^{n} ||g_i||_{L_{p_i'(\cdot)}(Q)}\,||\partial_i w||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}\big)\,, \tag{13}$$

де $C_2 > 0$ *– стала, яка не залежить від* w *і* $g_0, \ldots, g_n$.

Доведення теореми 1. Спершу доведемо *єдиність* узагальненого розв'язку задачі (2)–(4). Припустимо протилежне і нехай u_1 та u_2 – різні узагальнені розв'язки даної задачі. Розглянемо різницю між тотожностями, які отримали з (7) підстановкою замість u спочатку u_1, а потім – u_2. Із здобутої тотожності на підставі леми 1 при $w = u_1 - u_2$, $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$ матимемо (див. (12)) рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b(x)|w(x,T)|^2\,dx + \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2) + \\ +(u_1 - u_2)\int\limits_{0}^{t}\Big(h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)\Big)ds\Big\}\,dxdt = 0. \tag{14}$$

Розглянемо члени лівої частини рівності (14). З умови $(\mathcal{A}_3)$ одержимо нерівність

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2)\Big\}\,dxdt \geqslant K_1\iint\limits_{Q}|u_1 - u_2|^2\,dxdt. \tag{15}$$

На підставі умови $(\mathcal{H}_2)$ (див. (6)) отримаємо

$$|h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)| \leqslant M|u_1(x,s) - u_2(x,s)| \tag{16}$$

для м.в. $(x,t,s) \in \Omega \times (0,T) \times (0,T)$.

Використавши нерівність Коші-Буняковського та оцінку (16), матимемо

$$\Big|\iint\limits_{Q}\Big\{\big(u_1(x,t)-u_2(x,t)\big)\int\limits_0^t\big(h(u_1)(x,t,s)-h(u_2)(x,t,s)\big)ds\Big\}dxdt\Big|\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_0^T|w(x,t)|dt\Big)\Big(\int\limits_0^T|w(x,s)|ds\Big)dx=M\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_0^T|w(x,t)|dt\Big)^2dx\leqslant$$

$$\leqslant MT\iint\limits_{Q}|w(x,t)|^2dxdt\,. \tag{17}$$

На підставі оцінок (15) і (17) з (14) отримаємо

$$\big(K_1-MT\big)\iint\limits_{Q}|w(x,t)|^2\,dxdt\leqslant 0\,.$$

Звідси, врахувавши нерівність (6), отримаємо рівність $\iint\limits_{Q}|w(x,t)|^2\,dxdt = 0$, тобто, рівність $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ для м.в. $(x,t)\in Q$. Це суперечить нашому припущенню, що і доводить єдиність узагальненого розв'язку задачі (2)–(4).

Тепер доведемо *існування* узагальненого розв'язку задачі (2)–(4), використавши метод Фаедо-Гальоркіна. Отож, нехай $\{w_j\in V_p(\Omega)\,|\,j\in\mathbb{N}\}$ – лінійно незалежна сім'я функцій, яка є повною в просторі $V_p(\Omega)$. Очевидно, що ця сім'я функцій є повною і в $H_b(\Omega)$. Приймемо $V_{p,m}(\Omega)=\Big\{\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k w_k\;\Big|\;\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathbb{R}\Big\}$, $\quad m\in\mathbb{N}$. Очевидно, що замикання $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}V_{p,m}(\Omega)$ в $V_p(\Omega)$ збігається з $V_p(\Omega)$.

Оскільки сім'я функцій $\big\{w_j\,|\;j\in\mathbb{N}\big\}$ є повною в $H_b(\Omega)$, то можна вибрати послідовність функцій $\{u_{0,m}\}_{m=1}^{\infty}$ таку, що $u_{0,m}\in V_{p,m}(\Omega)$ для всіх $m\in\mathbb{N}$ і

$$||u_0-u_{0,m}||_{H_b(\Omega)}=||b^{1/2}u_0-b^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0\,. \tag{18}$$

Тепер зауважимо, що для м.в. $x\in\Omega$ і для будь-якого $\eta\in[0,1]$ матимемо

$$|b^{1/2}(x)-(b(x)+\eta)^{1/2}|^2|u_{0,m}(x)|^2\leq 4(b(x)+1)|u_{0,m}(x)|^2.$$

Звідси на підставі теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла (див. [30]) для будь-якого $m\in\mathbb{N}$ отримаємо

$$||b^{1/2}u_{0,m}-(b+\eta)^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)}\underset{\eta\to+0}{\longrightarrow}0\,.$$

Отож, існує послідовність $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$ чисел з інтервалу $(0,1)$ така, що $\eta_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$ і

$$||b^{1/2}u_{0,m}-(b+\eta_m)^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0\,. \tag{19}$$

Приймемо

$$b_m(x):=b(x)+\eta_m,\quad x\in\Omega,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

На підставі (18) та (19) одержимо

$$||b^{1/2}u_0 - b_m^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{21}$$

Тепер перейдемо безпосередньо до використання методу Фаедо-Гальоркіна. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ гальоркінське наближення u_m шукаємо у вигляді

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_{m,k}(t) w_k(x)\,, \quad (x,t) \in \overline{Q}\,,$$

де $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ – абсолютно неперервні функції, які є розв'язками задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_{\Omega_t} b_m u_{m,t} w_j \, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_m) - f_i)\partial_i w_j + \tag{22}$$

$$+ w_j \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dx = 0, \ \ t \in [0,T], \quad j = \overline{1,m}\,,$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0,m}\,, \tag{23}$$

де $\Omega_t := \{(x,t) |\, x \in \Omega\}$, $t \in [0,T]$.

Доведемо існування та єдиність розв'язку задачі (22), (23). Оскільки функції $w_1, \ldots, w_m$ – лінійно незалежні, то матриця $\Big(a_{k,j}^m := \int\limits_{\Omega} b_m w_k w_j \, dx \Big)_{k,j=1}^{m}$ – додатно визначена. Отже, систему звичайних диференціальних рівнянь (22) можна записати в нормальній формі. За теоремою Каратеодорі (див. [1]) отримаємо існування та єдиність глобального розв'язку $c_{1,m}, \ldots., c_{m,m}$ задачі (22), (23). Цей розв'язок визначений на проміжку $[0, T_m\rangle$, де $T_m \le T$. Тут кутова дужка "$\rangle$" означає або круглу ")", або квадратну "]" дужку. Далі ми отримаємо оцінки, з яких, зокрема, випливатиме, що $[0, T_m\rangle = [0, T]$.

Для кожного $j \in \{1, ..., m\}$ і майже кожного $t \in (0, T)$ домножимо рівність з номером j системи (22) на $c_{m,j}(t)$ і підсумуємо отримані рівності. У результаті для м.в. $t \in (0,T)$ одержимо

$$\int\limits_{\Omega_t} b_m u_{m,t} u_m \, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_m) - f_i)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dx = 0. \tag{24}$$

Проінтегруємо рівність (24) за $t \in [0,\tau] \subset [0, T_m\rangle$, використавши формулу інтегрування частинами. У результаті отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} b_m(x) |u_m(x,\tau)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} b_m(x) |u_{0,m}(x)|^2 \, dx +$$

$$+ [\delta + (1-\delta)] \int\limits_0^{\tau}\!\! \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i(u_m) \partial_i u_m \Big\}\, dxdt +$$

$$+\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{u_m\int_0^t h(u_m)\,ds\Big\}\,dxdt = \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n f_i\partial_i u_m\Big\}\,dxdt, \tag{25}$$

де $\tau \in (0, T_m\rangle$, $\delta \in (0,1)$ – довільні числа.

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (25). На підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_3)$ матимемо таку оцінку:

$$\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m\Big\}\,dxdt \geqslant K_1\int_0^\tau\int_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dxdt, \tag{26}$$

а з умови $(\mathcal{A}_4)$ одержимо

$$\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m\Big\}dxdt \geqslant K_2\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}dxdt - \int_0^\tau\int_\Omega g(x,t)dxdt. \tag{27}$$

З умов $(\mathcal{H}_1)$ і $(\mathcal{H}_2)$ легко випливає нерівність

$$|h(u_m)(x,t,s)| \leqslant M|u_m(x,s)| \tag{28}$$

для м.в. $(x,t,s) \in \Omega\times(0,T)\times(0,T)$.

Врахувавши оцінку (28) та використавши нерівність Коші-Буняковського, матимемо

$$\Big|\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{u_m(x,t)\int_0^t h(u_m)(x,t,s)ds\Big\}dxdt\Big| \leqslant \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{|u_m(x,t)|\cdot\int_0^t |h(u_m)(x,t,s)|ds\Big\}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant M\int_\Omega \Big\{\Big(\int_0^\tau |u_m(x,t)|dt\Big)\Big(\int_0^\tau |u_m(x,s)|ds\Big)\Big\}dx \leqslant MT\int_0^\tau\int_\Omega |u_m(x,t)|^2dxdt\,. \tag{29}$$

Далі використовуватимемо нерівність Юнга

$$ab \le \varepsilon|a|^q + \varepsilon^{-\frac{1}{q-1}}|b|^{q'}, \quad a,b\in\mathbb{R},\ q>1,\ \varepsilon>0, \tag{30}$$

де $q' = q/(q-1)$.

Виберемо довільно значення $\varepsilon \in (0,1)$. Використовуючи нерівність (30), отримаємо

$$\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n f_i(x,t)\partial_i u_m(x,t)\Big\}\,dxdt \leqslant \varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt +$$

$$+\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- - 1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}\,dxdt. \tag{31}$$

З (25) на підставі (26), (27), (29) та (31) одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_m(x,\tau)|^2\,dx+\delta K_1\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt+$$

$$+(1-\delta)K_2\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt\leqslant MT\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2 dxdt+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt+\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\Big\}+$$

$$+(1-\delta)\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega} g(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx, \tag{32}$$

де $\tau\in(0,T_m\rangle$.

З (32) безпосередньо отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_m(x,\tau)|^2\,dx+(\delta K_1-MT)\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt+$$

$$+[(1-\delta)K_2-\varepsilon]\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}dxdt\leqslant\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\Big\}+$$

$$+(1-\delta)\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega} g(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx,\quad \tau\in(0,T_m\rangle\,. \tag{33}$$

Виберемо і зафіксуємо значення $\delta\in(0,1)$ таке, що $\delta K_1-MT>0$ (це можна зробити на підставі (8)), а потім – значення $\varepsilon\in(0,1)$ таке, що $(1-\delta)K_2-\varepsilon>0$, і підставимо їх в (33). У результаті здобудемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_m(x,\tau)|^2\,dx+C_3\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}dxdt+C_4\int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big[\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}+g(x,t)\Big\}\,dxdt+\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big], \tag{34}$$

де $\tau\in(0,T_m\rangle$ – довільне, а C_3,C_4,C_5 – додатні сталі, які залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

З (19) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{\Omega} b(x)|u_0(x)|^2\,dx\,. \tag{35}$$

Отже, послідовність $\Big\{ \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx \Big\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою, тому на підставі нерівності (34) можна зробити висновок, що існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функцію $t \mapsto \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,t)|^2\,dx$ на $[0,T_m\rangle$, а отже, існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функції $c_{m,1},\dots,c_{m,m}$ на $[0,T_m\rangle$. Внаслідок цього отримаємо, що $[0,T_m\rangle = [0,T]$. Враховуючи це, з (34) отримаємо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} + |u_m(x,t)|^2 \Big\}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \Big[\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n |f_i(x,t)|^{p_i'(x)} + g(x,t) \Big\}\,dxdt + \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx \Big], \qquad (36)$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

На підставі (35) і (36) одержуємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,t)|^2\,dx \le C_7\,, \qquad (37)$$

$$\iint\limits_Q |u_m(x,t)|^2\,dxdt \le C_7\,, \qquad (38)$$

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} \Big\}\,dxdt \le C_7\,, \qquad (39)$$

де $C_7 > 0$ – стала, що не залежить від m.

З умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, (28) та оцінок (38) і (39) отримаємо

$$\iint\limits_Q |a_i(u_m)(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt \le C_8\,, \quad i=\overline{0,n}\,, \qquad (40)$$

$$\iint\limits_Q \Big| \int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\,ds \Big|^2\,dxdt \leqslant C_9, \qquad (41)$$

де сталі C_8 і C_9 – додатні, що не залежать від m.

Оскільки простори $L_2(Q)$, $L_{p_i(\cdot)}(Q)$, $L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ рефлексивні (див. [11, с. 600]), то з оцінок (37)–(41) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}$ (позначатимемо її так само, як і саму послідовність) та функцій $v_* \in L_2(\Omega)$, $u \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$, $\chi_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ і $\zeta \in L_2(Q)$ таких, що

$$b_m^{1/2}(\cdot)u_m(\cdot,T) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v_*(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega), \qquad (42)$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q) \ \text{ і слабко в } \ \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q), \qquad (43)$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i'(\cdot)}(Q) \quad (i=\overline{0,n}), \qquad (44)$$

$$\int_0^t h(u_m)\,ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q). \tag{45}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (2)–(4). Спочатку зауважимо, що для будь-яких функцій $v \in L_2(\Omega)$, $\zeta \in L_2(0,T)$ на підставі означення b_m і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла маємо

$$b_m^{1/2} v \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2} v \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{і майже скрізь на} \quad \Omega, \tag{46}$$

$$b_m v\zeta \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} bv\zeta \quad \text{сильно в} \quad L_2(Q). \tag{47}$$

Тепер виберемо довільно та зафіксуємо числа $j, m \in \mathbb{N}$ такі, що $m \geq j$. Рівність системи (22) під номером j помножимо на довільну функцію $\theta \in C^1([0,T])$ і проінтегруємо здобуту рівність по $t \in [0,T]$. У результаті після нескладних перетворень, використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\theta(T)\int_\Omega b_m(x)u_m(x,T)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int_\Omega b_m(x)u_{0,m}(x)w_j(x)\,dx -$$

$$-\iint_Q b_m u_m w_j \theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_m) - f_i)\partial_i w_j + w_j \int_0^t h(u_m)ds\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{48}$$

Спрямувавши m до ∞ в (48) і врахувавши (21), (42), (43), (44)–(47), отримаємо

$$\theta(T)\int_Q b^{1/2}(x)v_*(x)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int_Q b(x)u_0(x)w_j(x)\,dx -$$

$$-\iint_Q buw_j\theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i w_j + \zeta w_j\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{49}$$

Оскільки j – довільне число, а система функцій $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ повна в просторі $V_p(\Omega)$, то з (49) матимемо, що для всіх $v \in V_p(\Omega)$ і $\theta \in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int_\Omega b^{1/2}(x)v_*(x)v(x)\,dx - \theta(0)\int_\Omega b(x)u_0(x)v(x)\,dx -$$

$$-\iint_Q buv\theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v + \zeta v\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{50}$$

Зауважимо таке: оскільки $C_c^1(0,T) \subset C^1([0,T])$, то з (50) отримаємо тотожність

$$\iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v\varphi + \zeta v\varphi - buv\varphi'\Big\}dxdt = 0, \quad \text{де} \ \ v \in V_p(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(0,T). \tag{51}$$

На підставі леми 1 з (51) одержимо, що

$$u \in C([0,T]; H_b(\Omega)) \tag{52}$$

і для всіх $v \in V_p(\Omega)$, $\theta \in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int\limits_{\Omega} b(x)u(x,T)v(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_{\Omega} b(x)u(x,0)v(x)\,dx -$$
$$-\iint\limits_{Q} buv\theta'\,dxdt + \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(\chi_i - f_i)\partial_i v + \zeta v\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{53}$$

Порівнюючи (50) і (53), отримаємо рівності

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{для м. в.} \quad x \in \Omega_0\,, \tag{54}$$
$$b^{1/2}(x)u(x,T) = v_*(x) \quad \text{для м. в.} \quad x \in \Omega. \tag{55}$$

Отож, ми встановили, що функція u належить простору $U_p^b(Q)$ (див.(43) і (52)), задовольняє початкову умову (4) (див. (54)) та інтегральну тотожність (51). З тотожності (51) випливатиме тотожність (7), якщо для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і майже всіх $t \in (0,T)$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\chi_i\partial_i v + \zeta v\Big\}\,dx = \int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}a_i(u)\partial_i v + \Big(\int\limits_0^t h(u)\,ds\Big)v\Big\}\,dx\,. \tag{56}$$

Отже, якщо тотожність (56) правильна, то u – узагальнений розв'язок задачі (2)–(4) .

Для доведення тотожності (56) використаємо метод монотонності (див. [12]). Нехай w – довільна функція з простору $\in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ визначимо

$$W_m := \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m) - a_i(w))(\partial_i u_m - \partial_i w) +$$
$$+ (u_m - w)\Big(\int\limits_0^t h(u_m)\,ds - \int\limits_0^t h(w)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt. \tag{57}$$

Використавши умову $(\mathcal{A}_3)$, для довільного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо таку оцінку

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m) - a_i(w))(\partial_i u_m - \partial_i w)\Big\}\,dxdt \geqslant K_1\iint\limits_{Q}|u_m - w|^2\,dxdt. \tag{58}$$

Провівши міркування, аналогічні до тих, які привели нас до (17), отримаємо оцінку

$$\Big|\iint\limits_{Q}\Big\{(u_m(x,t) - w(x,t))\Big(\int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\,ds - \int\limits_0^t h(w)(x,t,s)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant MT\iint\limits_{Q}|u_m - w|^2\,dxdt, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{59}$$

Отже, врахувавши (8), одержимо

$$W_m \geqslant \big(K_1 - MT\big) \iint\limits_Q |u_m - w|^2 \, dxdt \geqslant 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{60}$$

Запишемо (57) у вигляді

$$W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\} \, dxdt -$$
$$- \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$
$$+ w \int\limits_0^t h(u_m)\, ds + (u_m - w) \int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\} \, dxdt, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{61}$$

Приймемо $\tau = T$ в (25). Отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m) ds \Big\} \, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\} \, dxdt -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,T)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2 \, dx, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{62}$$

З (61) на підставі (62) отримаємо

$$0 \leqslant W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\} \, dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,T)|^2 \, dx +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2 \, dx - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$
$$+ w \int\limits_0^t h(u_m) \, ds + (u_m - w) \int\limits_0^t h(w) \, ds \Big\} \, dxdt, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{63}$$

На підставі (42) та (55) матимемо

$$\liminf_{m\to\infty} ||b_m^{1/2}(\cdot) u_m(\cdot, T)||_{L_2(\Omega)} \geq ||b^{1/2}(\cdot) u(\cdot, T)||_{L_2(\Omega)}\,. \tag{64}$$

Зважаючи на (21), (43) – (45), (64), з (63) одержуємо

$$0 \leq \limsup_{m\to\infty} W_m \leq \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\} dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,T)|^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2 dx -$$
$$- \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[\chi_i \partial_i w + a_i(w)(\partial_i u - \partial_i w)\big] + w\zeta + (u - w) \int\limits_0^t h(w) \, ds \Big\} dxdt\,. \tag{65}$$

Із (51), використовуючи лему 1 при $\theta \equiv 1$ і рівність (54), отримаємо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \chi_i \partial_i u + \zeta u \Big\}\, dxdt = \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} b(x)|u(x,T)|^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} b(x)|u_0(x)|^2\, dx\,. \tag{66}$$

Отже, з (65) і (66) одержимо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (\chi_i - a_i(w))(\partial_i u - \partial_i w) + \Big(\zeta - \int\limits_0^t h(w)\, ds\Big)(u-w)\Big\} dxdt \geq 0\,. \tag{67}$$

Приймемо $w = u - \lambda v\varphi$ в (67), де $v \in V_p(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\lambda > 0$, і поділимо отриману нерівність на λ. У підсумку матимемо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (\chi_i - a_i(u - \lambda v\varphi))\partial_i v\varphi + \big(\zeta - \int\limits_0^t h(u - \lambda v\varphi)\, ds\big) v\varphi \Big\}\, dxdt \geq 0\,. \tag{68}$$

Перейдемо в (68) до границі при $\lambda \to 0+$, використавши умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ і теорему Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла. У результаті отримаємо рівність

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (\chi_i - a_i(u))\partial_i v + \big(\zeta - \int\limits_0^t h(u)\, ds\big) v \Big\} \varphi\, dxdt = 0$$

для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$. Звідси легко випливає тотожність (56).

Доведемо, що виконується оцінка (9). На підставі леми 1 з інтегральної тотожності (7), враховуючи (4), отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} b(x)|u(x,\tau)|^2\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} b(x)|u_0(x)|^2\, dx + [\delta + (1-\delta)] \int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i(u)\partial_i u \Big\}\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega} \Big\{ u \int\limits_0^t h(u)\, ds \Big\}\, dxdt = \int\limits_0^{\tau}\!\!\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt, \quad \tau \in [0,T]. \tag{69}$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне число. Далі, міркуючи цілком аналогічно, як для переходу від (25) до (36), здобудемо (9). Теорема повністю доведена. $\square$

4. Висновки

Ми дослідили мішані задачі для вироджуваних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності, що збурені інтегральним оператором. Збурюючий оператор інколи називають оператором пам'яті, оскільки значення образу при дії цього оператора залежить від значень шуканої функції в моменти часу, які передують актуальному. Такого типу рівняння раніше не вивчалися. При цьому на частині межі задано крайову умову першого роду, а на іншій — другого. Введено поняття узагальненого розв'язку мішаної задачі для розглядуваних рівнянь, використавши узагальнені простори Лебега та Соболєва. Встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків досліджуваних задач. При доведенні існування розв'язку використано модифікації методів Фаедо-Гальоркіна та монотонності.

Список використаної літератури

1. *Alexiewicz A., Orlicz W.* On a theorem of C. Caratheodory // Ann. Pol. Math. — 1955. — **1**, №2. — P. 414–417.
2. *Alkhutov Y., Antontsev S., Zhikov V.* Parabolic equations with variable order of nonlinearity // Collection of works of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. — 2009. — **6**. — P. 23–50.
3. *Antontsev S., Shmarev S.* Extinction of solutions of parabolic equations with variable anisotropic nonlinearities // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — **261**, №1. — P. 11–21.
4. *Bokalo M.M., Domanska O.V.,* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces // Mat. Stud. — 2007. — **28**, №1. — P. 77–91.
5. *Bokalo M.M., Pauchok I.B.* On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity // Mat. Stud. — 2006. — **24**, №1. – P. 25–48.
6. *Buhrii O.M., Lavrenyuk, S.P.* On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration // Ukr. Math. J. — 2001. — **53**, №7. — P. 1027–1042.
7. *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 2009. — **70**, №6. — P. 2331–2335.
8. *Fan X., Zhao D.* On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — **263**, №2. — P. 424–446.
9. *Fu Y., Pan N.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — **362**, №2. — P. 313–326.
10. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ // Fasc. Math. — 1995. — **25**. — P. 87–94.
11. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$ // Czech. Math. J. — 1991. — **41(116)**, №4. — P. 592–618.
12. *Lions J.* Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. — Paris: Dunod Gauthier-Villars. — 1969.
13. *Mashiyev R.A., Buhrii O.M.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — **377**, №2. — P. 450-463.
14. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces // Lect. Notes Math. — Berlin-Heidelberg: Springer. — 1983. — **1034**. — 222 p.
15. *Orlicz W.* Über konjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math. — 1931. — **3**, №1. — P. 200–211.
16. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory // Lect. Notes Math. — Berlin-Heidelberg: Springer. — 2000. — **1748**. — 176 p.
17. *Zhikov V.V., Pastukhova, S.E.* Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations // Proc. Steklov Inst. Math. — 2010. — 270, №1. – P. 104–131.

18. *Abbasbandy S., Ghehsareh H.R.* The He's variational iteration method for solving the integro-differential parabolic problem with integral conditions // Appl. Appl. Math. — 2010. — **Special Issue**, №1. — P. 12–23.
19. *Colombo F.* Direct and inverse problems for a phase-field model with memory // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — 260, №2. — P. 517–545.
20. *Kozhanov A.I.* Parabolic equations with nonlocal nonlinear source // Sib. Math. J. — 1994. — **35**, №5. — P. 945–956.
21. *Kumar K., Kumar R., Shukla R.K.* Nonlocal parabolic integro-differential equations with delays // Int. J. Appl. Math. Res. — 2012. — **1**, №4. — P. 549–564.
22. *Loayza M.* Asymptotic behavior of solutions to parabolic problems with nonlinear nonlocal terms // Electron. J. Differ. Equ. — 2013. — **2013**, №228. — P. 1–12.
23. *Souplet P.* Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source // J. Differ. Equations. — 1999. — **153**, №2. — P. 374–406.
24. *Yamada Y.* Asymptotic stability for some system of semilinear Volterra diffusion equations // J. Differ. Equations. — 1984. — **52**, №3. — P. 295–326.
25. *Yamada Y.* On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations // J. Math. Anal. Appl. – 1982. — **88**, №2. — P. 443–457.
26. *Bokalo M.M., Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // J. Nonlinear Evol. Equ. Appl. — 2014. — 2013, №6. — P. 67–87.
27. *Engler H.* On some parabolic integro-differential equations: existence and asymptotics of solutions // Lect. Notes Math. — 1983. — **1017**. – P. 161–167.
28. *Heard M., Rankin S.* A semilinear parabolic Volterra integro-differential equation // J. Differential Equations. — 1988. — **71**, №2. — P. 201–233.
29. *Liut D., Mu C.* Blow-up analysis for a semilinear perabolic equation with nonlinear memory and nonlocal nonlinear boundary condition // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2010. — №51. — P. 1–17.
30. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. — Providence: Amer. Math. Soc. – 1997.
31. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ // Fasc. Math. — 1995. — **25**. — P. 87–94.
32. *Buhrii O., Domans'ka G., Protsakh N.* Initial boundary value problem for nonlinear differential equation of the third order in generalized Sobolev spaces // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 2005. — **64**. – P. 44–61.
33. *Andreu F., Igbida, N. Mazón J., Toledo J.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions // Interfaces Free Bound. — 2006. — **8**, №4. — P. 447–479.
34. *Bokalo M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations / *M. Bokalo* // J. Math. Sci. — 2011. — **178**, №1. — P. 41–64.
35. *Ivanov A.* Quasilinear degenerate and nonuniformly elliptic and parabolic second-order equations // Proc. Steklov Inst. Math. — 1984. — **160**. — P. 1-–288
36. *Showalter R.E.* Degenerate evolution equations and applications // Indiana Univ. Math. J. — 1974. – *23*, №. 8. — P. 655–677.

Стаття: надійшла до редколегії 27.02.2017
прийнята до друку 13.03.2017

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH INTEGRAL OPERATORS TYPE VOLTERRA

Mykola BOKALO, Olga SUS

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str. 1, Lviv, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, oliasus@gmail.com

This paper is devoted to the results of investigation of initial-boundary value problems for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity. We consider weak solutions which belong to the generalized Sobolev and Lebesgue spaces. Under certain conditions on data-in the uniqueness and existence of the solutions are proved. Also estimates of the solutions are obtained.

Key words: elliptic-parabolic equations, variable exponents of nonlinearity, Galerkin's and monotone procedures.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 75–93
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 75–93

УДК 517.956.4; 517.977.5

OPTIMAL CONTROL IN PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR WEAKLY NONLINEAR EVOLUTION VARIATIONAL INEQUALITIES

Mykola BOKALO, Andrii TSEBENKO

Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., 79000, Lviv
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, amtseb@gmail.com

An optimal control problem for systems described by Fourier problem (problem without initial conditions) for weakly nonlinear evolution variational inequalities is studied. A control function occurs in the coefficients of the variational inequality which describes the state of control system. Different types of observation are considered. The existence of the optimal control is proved.

Key words: optimal control, problem without initial conditions, variational inequality.

1. Introduction

Optimal control problems for systems governed by variational inequalities are quite popular nowadays. A large number of such problems were considered in the monograph [3] and other publications (see, e.g., [1, 10, 16, 17]).

In particular, in [1] an optimal control problem for a parabolic variational inequality is considered. Existence and necessary conditions for the optimal control are established.

In [16] the optimal control of parabolic variational inequalities is studied in the case where the spatial domain is not necessarily bounded. An optimal control problem with the control appearing in the coefficient of the leading term is investigated and a first order optimality system in a Lagrangian framework is derived. In [17] the author proves an existence result for optimal control problem in coefficients of a nonlinear elliptic variational inequality using the direct method of calculus of variation and the compensated compactness lemma.

In this paper, we study an optimal control problem for systems whose states are described by problems without initial conditions for evolutionary variational inequalities. A particular case of the problem for the evolution variational inequalities is a problem for evolutionary equations. The research of the problem without initial conditions for the evolution equations and variational inequalities were conducted in the papers [9, 13, 15,

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 49J40, 49J21, 47J20, 47J22

18, 19, 20, 22, 26] and others. In particular, R.E. Showalter [25] proved the existence of a unique solution $u \in \mathrm{e}^{2\omega\cdot}W^{1,2}(-\infty,0;H)$, where H is a Hilbert space, of the problem without initial condition

$$u'(t) + \mu u(t) + A\big(u(t)\big) \ni f(t), \quad t \in (-\infty, 0),$$

for every $\omega + \mu > 0$ and $f \in \mathrm{e}^{2\omega\cdot}W^{1,2}(-\infty,0;H)$, in case when $A : H \to 2^H$ is maximal monotone operator such that $0 \in A(0)$. Moreover, if $A = \partial\varphi$, where $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ is proper, convex, and lower-semi-continuous functional such that $\varphi(0) = 0 = \min\{\varphi(v) : v \in H\}$, then this problem is uniquely solvable for each $\mu > 0$, $f \in L^2(-\infty, 0; H)$ and $\omega = 0$.

Note that the uniqueness of the solutions of such problem for linear parabolic equations and variational inequalities is possible only under some restrictions on the behavior of solutions when $t \to -\infty$. For the first time in the case of heat equation it was strictly justified by A.N. Tikhonov [27]. However, as it was shown by M.M. Bokalo [9], the problem without initial conditions for some nonlinear parabolic equations has a unique solution in the class of functions with arbitrary behavior when $t \to -\infty$. Similar results were also obtained for evolutionary variational inequalities in [9].

Previously, optimal control problems of evolution equations without initial conditions were studied by the authors (see., e.g., [8, 7]). But as far as we know, optimal control problems for variational inequalities without initial conditions were not considered yet, which serves as one of the motivations for the study of such problems.

The outline of this paper is as follows. In Section 1, we provide notations, definitions of function spaces and auxiliary results. In Section 2, we formulate the optimal control problem. In Section 3, we prove existence and uniqueness of the solutions of problem without initial conditions which describe the state of control system. Furthermore, we obtain estimates for the solutions of the state equations. Finally, the existence of the optimal control is presented in Section 4.

2. Preliminaries

Set $S := (-\infty, 0]$. Let V and H be separable Hilbert spaces with the scalar products $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)$ and norms $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, respectively. Suppose that $V \subset H$ with continuous injection and V is dense and compact in H, i.e., the closure of V in H coincides with H, and there exists a constant $\lambda > 0$ such that

$$\lambda|v|^2 \leqslant \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

and for every bounded sequence $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ in V there exist an element $w \in H$ and a subsequence $\{w_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ of sequence $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ such that $w_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ strongly in H.

Let V' and H' be the dual spaces to V and H, respectively. We suppose (after appropriate identification of functionals), that the space H' is a subspace of V'. Identifying (by the Riesz–Fréchet representation theorem) spaces H and H', we obtain continuous and dense embeddings

$$V \subset H \subset V'. \tag{2}$$

Note, that in this case $\langle g, v\rangle_V = (g, v)$ for every $v \in V, g \in H$, where $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ is the scalar product for the duality V', V. Therefore, further we use the notation $(\cdot,\cdot)$ instead of

$\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Also we use the notation $\|\cdot\|_*$ for the norm in V'. Note that

$$\lambda\|h\|_*^2 \leqslant |h|^2 \quad \forall h\in H, \tag{3}$$

where λ is the constant from the equality (1). Indeed, under (1) we have

$$\|h\|_* = \sup_{v\in V,\|v\|=1} |(h,v)| \leqslant \sup_{v\in V,\|v\|=1} |h||v| \leqslant \lambda^{-1/2}|h|.$$

We introduce some spaces of functions and distributions. Let X be an arbitrary Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)_X$ and the norm $\|\cdot\|_X$. Under $C(S;X)$ we mean the linear space of continuous functions defined on S with values in X. We say that $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ in $C(S;X)$ if for each $t_1,t_2\in S$ $(t_1<t_2)$ we have $\|z-z_m\|_{C([t_1,t_2];X)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Let $q\in[1,\infty]$, q' be dual to q, i.e., $1/q+1/q'=1$. Denote by $L^2_{\mathrm{loc}}(S;X)$ the linear space of measurable functions defined on S with values in X, whose restrictions to any segment $[t_1,t_2]\subset S$ belong to the space $L^q(t_1,t_2;X)$. We say that a sequence $\{z_m\}$ is bounded (respectively, strongly, weakly or $*$-weakly convergent to z) in $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$, if for each $t_1,t_2\in S$ $(t_1<t_2)$ the sequence of restrictions of $\{z_m\}$ to the segment $[t_1,t_2]$ is bounded (respectively, strongly, weakly or $*$-weakly convergent to the restrictions of z to this segment) in $L^q(t_1,t_2;X)$.

Let $\nu\in\mathbb{R}$. Put by definition

$$L^2_\nu(S;X) := \Big\{ f\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) \;\Big|\; \int_S e^{-2\nu t}\|f(t)\|_X^2\,dt < \infty \Big\}.$$

This space is a Hilbert space with the scalar product

$$(f,g)_{L^2_\nu(S;X)} = \int_S e^{-2\nu t}(f(t),g(t))_X\,dt$$

and the corresponding norm

$$\|f\|_{L^2_\nu(S;X)} := \Big(\int_S e^{-2\nu t}\|f(t)\|_X^2\,dt\Big)^{1/2}.$$

Also we introduce the space $L^\infty_\nu(S;X) := \{f\in L^\infty(S;X) \mid \operatorname*{ess\,sup}_{t\in S}\big[e^{-\nu t}\|f(t)\|_X\big]<\infty\}$.

Under $D'(-\infty,0;V'_w)$ we mean the space of defined on $D(-\infty,0)$ with values in V' distributions, i.e., the space of continuous linear functionals on $D(-\infty,0)$ with values in V'_w (hereafter $D(-\infty,0)$ is the space of test functions, that is, the space of infinitely differentiable on $(-\infty,0)$ functions with compact support, equipped with corresponding topology, and V_w is the linear space V' equipped with weak topology). It is easy to see (using (2)), that the spaces $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ can be identified with the corresponding subspaces of $D'(-\infty,0;V'_w)$. This, in particular, allows us to talk about the derivatives z' of the functions z from $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$ or $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ in the sense of distributions $D'(-\infty,0;V'_w)$ and belonging of such derivatives to $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ or $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$.

Denote by $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)$ the space of functions $z\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ such that $z'\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. Let us define the space

$$W_{2,\mathrm{loc}}(S) := \{z\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V) \,|\, z'\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')\}. \tag{4}$$

From known results (see., for example, [14, P. 177-179]) it follows that $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H) \subset C(S;H)$ and $W_{2,\mathrm{loc}}(S) \subset C(S;H)$. Moreover, for every z in $W_{2,\mathrm{loc}}(S)$ or in $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)$ function $t \to |z(t)|^2$ is absolutely continuous on any segment of the ray S and the following equality holds

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = 2(z'(t), z(t)) \quad \text{for a.e.} \quad t \in S. \tag{5}$$

Denote

$$H^1_\nu(S) := \{z \in L^2_\nu(S;H) \,|\, z' \in L^2_\nu(S;H)\}, \quad \nu \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

In this paper we use the following well-known facts.

Proposition 1 (Cauchy-Schwarz inequality [14, p. 158])**.** *Suppose that $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$, and X is a Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)_X$. Then, if $v \in L^2(t_1,t_2;X)$ and $w \in L^2(t_1,t_2;X)$, we have $(w(\cdot),v(\cdot))_X \in L^1\big(t_1,t_2\big)$ and*

$$\int_{t_1}^{t_2} (w(t),v(t))_X \, dt \leqslant \|w\|_{L^2(t_1,t_2;X)} \|v\|_{L^2(t_1,t_2;X)}.$$

Proposition 2 ([28, p. 173,179])**.** *Let X be a Banach space with the norm $\|\cdot\|_X$, and $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ be the sequence of elements of X which is weakly or $*$-weakly convergent to v in X. Then $\varliminf_{k\to\infty} \|v_k\|_X \geqslant \|v\|_X$.*

Proposition 3 ([2, Aubin theorem], [4, p. 393])**.** *Suppose that $q > 1, r > 1$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$, and $\mathcal{W},\mathcal{L},\mathcal{B}$ are Banach spaces such that $\mathcal{W} \overset{c}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$ (here $\overset{c}{\subset}$ means compact embedding and $\circlearrowleft$ means continuous embedding). Then*

$$\{z \in L^q(t_1,t_2;\mathcal{W}) \mid z' \in L^r(t_1,t_2;\mathcal{B})\} \overset{c}{\subset} \Big(L^q(t_1,t_2;\mathcal{L}) \cap C([t_1,t_2];\mathcal{B})\Big). \tag{7}$$

Remark 1. We understand embedding (7) as follows: if a sequence $\{z_m\}$ is bounded in the space $L^q(t_1,t_2;\mathcal{W})$ and the sequence $\{z'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ is bounded in the space $L^r(t_1,t_2;\mathcal{B})$, then there exist a function $z \in C([t_1,t_2];\mathcal{B}) \cap L^q(t_1,t_2;\mathcal{L})$ and a subsequence $\{z_{m_j}\}$ of the sequence $\{z_m\}$ such that $z_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$ in $C([t_1,t_2];\mathcal{B})$ and strongly in $L^q(t_1,t_2;\mathcal{L})$.

Proposition 4. *If a sequence $\{z_m\}$ is bounded in the space $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$ and the sequence $\{z'_m\}$ is bounded in the space $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$, then there exist a function $z \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$, $z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ and a subsequence $\{z_{m_j}\}$ of the sequence $\{z_m\}$ such that $z_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$ in $C(S;H)$ and weakly in $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$, and $z'_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z'$ weakly in $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$.*

Proof. Proposition 3 when $q = 2$, $r = 2$, $\mathcal{W} = V$, $\mathcal{L} = \mathcal{B} = H$ yields, for every $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ from the sequence of restrictions of the elements of $\{z_m\}$ to the segment $[t_1,t_2]$ one can choose subsequence which is convergent in $C([t_1,t_2];H)$ and weakly in $L^2(t_1,t_2;V)$, and the sequence of derivatives of elements of this subsequence is weakly convergent in $L^2(t_1,t_2;H)$. For each $k \in \mathbb{N}$ we choose a subsequence $\{z_{m(k,j)}\}_{j=1}^\infty$ of a given sequence, which is convergent in $C([-k,0];H)$ and weakly in $L^2(-k,0;V)$ to some function $\widehat{z}_k \in C([-k,0];H) \cap L^2(-k,0;V)$, and the sequence $\{z'_{m(k,j)}\}_{j=1}^\infty$ is weakly convergent to the derivative $\widehat{z}'_k$ in $L^2(-k,0;H)$. Making this choice we ensure that the sequence $\{z_{m(k+1,j)}\}_{j=1}^{\infty}$ be a subsequence of the sequence $\{z_{m(k,j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Now, according to the diagonal process we select the desired subsequence as $\{z_{m(j,j)}\}_{j=1}^{\infty}$, and we define the function z as follows: for each $k \in \mathbb{N}$ we take $z(t) := \widehat{z}_k(t)$ for $t \in (-k, -k+1]$. □

Let $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ be a proper functional, which satisfies the conditions:

$(\mathcal{A}_1)$: $\Phi\big(\alpha v + (1-\alpha)w\big) \leqslant \alpha\Phi(v) + (1-\alpha)\Phi(w) \quad \forall\, v, w \in V,\ \forall\, \alpha \in [0,1]$,

i.e., the functional Φ is *convex*,

$(\mathcal{A}_2)$: $v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ in $V \quad \Longrightarrow \quad \varliminf_{k\to\infty} \Phi(v_k) \geqslant \Phi(v)$,

i.e., the functional Φ is *lower semicontinuous.*

Denote by $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V : \ \Phi(v) < +\infty\}$ the *effective domain* of the functional Φ.

Recall that the *subdifferential* of a functional Φ is a mapping $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, defined as follows

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w-v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V,$$

and the *domain* of the subdifferential $\partial\Phi$ is the set $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \varnothing\}$. We identify the subdifferential $\partial\Phi$ with its graph assuming that $[v, v^*] \in \partial\Phi$ if and only if $v^* \in \partial\Phi(v)$, i.e., $\partial\Phi = \{[v, v^*] \mid v \in D(\partial\Phi),\ v^* \in \partial\Phi(v))\}$. Rockafellar in [23, Theorem A] proves that the subdifferential $\partial\Phi$ is a *maximal monotone operator*, that is,

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi$$

and for every element $[v_1, v_1^*] \in V \times V'$ we have the implication

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi \quad \Longrightarrow \quad [v_1, v_1^*] \in \partial\Phi.$$

Additionally, assume that the following conditions hold:

$(\mathcal{A}_3)$: there exist constant $K_1 > 0$ such that

$$\Phi(v) \geqslant K_1 \|v\|^2 \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

moreover, $\Phi(0) = 0$;

$(\mathcal{A}_4)$: there exists a constant $K_2 > 0$ such that

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2 |v_1 - v_2|^2 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi.$$

Remark 2. Condition $(\mathcal{A}_3)$ implies that $\Phi(v) \geqslant \Phi(0) + (0, v-0)\ \forall v \in V$, hence $0 \in \partial\Phi(0)$. From this and condition $(\mathcal{A}_4)$ we have

$$(v^*, v) \geqslant K_2 |v|^2 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi. \tag{8}$$

Let us consider the evolutionary variational inequality

$$y'(t) + \partial\Phi\big(y(t)\big) + u(t)y(t) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{9}$$

where $f : S \to V'$ and $u : S \to \mathbb{R}$ are given measurable functions.

Definition 1. *Let conditions $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ hold and $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S)$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V')$. A function y is called a* solution *of variational inequality* (9)*, if it satisfies the following conditions:*

1) *$y \in W_{2,\mathrm{loc}}(S)$;*

2) *$y(t) \in D(\partial\Phi)$ for a.e. $t \in S$;*

3) *there exists a function $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ such that for a.e. $t \in S$ we have $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ and*

$$y'(t) + g(t) + u(t)y(t) = f(t) \quad \textit{in } V'.$$

For variational inequality (9) consider the problem: find its solution which satisfies the condition

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\gamma t}|y(t)| = 0, \tag{10}$$

where $\gamma \in \mathbb{R}$ is given.

The problem of finding a solution of variational inequality (9) for given Φ, u, f, satisfying the condition (10) for given γ, is called the problem without initial conditions for the evolution variational inequality (9) or, in short, the problem $\mathbf{P}(\Phi,u,f,\gamma)$, and the function y is called its solution.

Remark 3. The problem $\mathbf{P}(\Phi,u,f,\gamma)$ can be replaced by the following problem. Let K be a convex and closed set in V, $A: V \to V'$ be a monotone, bounded and semi-continuous operator such that $(A(v),v) \geqslant \widetilde{K}_1\|v\|^2 \quad \forall v \in V$, where $\widetilde{K}_1 = \mathrm{const} > 0$. The problem is to find a function $y \in W_{2,\mathrm{loc}}(S)$, satisfying the condition (10) and for a.e. $t \in S$

$$y(t) \in K \quad \text{and} \quad (y'(t) + A(y(t)) + u(t)y(t), v - y(t)) \geqslant (f(t), v - y(t)) \quad \forall\, v \in K.$$

Theorem 1. *Let conditions $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$ hold. Suppose that*

$$(\mathcal{F}){:}\quad -\infty < \widetilde{m} := \operatorname*{ess\,inf}_{t\in S} u(t) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} u(t) =: \widetilde{M} < +\infty, \quad f \in L^2_\gamma(S;H),$$

where $\gamma \in \mathbb{R}$ is a constant which satisfies the inequality

$$K_2 + \widetilde{m} + \gamma > 0. \tag{11}$$

Then the problem $\mathbf{P}(\Phi,u,f,\gamma)$ has a unique solution, it belongs to the space $L^\infty_\gamma(S;V) \cap L^2_\gamma(S;V) \cap H^1_\gamma(S;H)$ and satisfies the estimate:

$$e^{-2\gamma\tau}\|y(\tau)\|^2 + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\|y(t)\|^2\,dt + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y'(t)|^2\,dt \leqslant C_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\,dt, \quad \tau \in S \tag{12}$$

where C_1 is a positive constant which depends on K_1, K_2, γ, λ and $\widetilde{m}$, $\widetilde{M}$ only.

The proof of this theorem is given in Section 3.

3. Statement of the main problem and results

Let U be a closed linear subspace of $L^\infty(S)$, for example, $U := L^\infty(S)$ or $U := \{u \in L^\infty(S) \mid u(t) = 0 \text{ for a.e. } t \in S \setminus [t^*,0]\}$, where $t^* < 0$ is arbitrary fixed. Assume that U is the space of controls and for given constants $m, M \in \mathbb{R}$ the set $U_\partial := \Big\{u \in U \,\Big|\, m \leqslant u(t) \leqslant M \quad \text{for a.e.} \quad t \in S\Big\}$ is the set of admissible controls.

We assume that the state of the investigated evolutionary system $y(u) = y(\cdot;u)$ for a given control $u \in U_\partial$ is described by a solution of a problem $\mathbf{P}(\Phi,u,f,\gamma)$, when the following condition holds:

($\mathcal{P}$) Φ satisfies conditions $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$, $f \in L^2_\gamma(S;H)$ and

$$K_2 + m + \gamma > 0. \tag{13}$$

From Theorem 1 we infer that there exists a unique function $y(u) = y(t;u)$, $t \in S$ which is the solution of problem $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$, and this function belongs to the space $L^\infty_\gamma(S;V) \cap L^2_\gamma(S;V) \cap H^1_\gamma(S;H)$.

Let $G\colon C(S;H) \to \mathbb{R}$ be a functional which satisfies condition:

($\mathcal{G}$) G is lower semi-continuous in $C(S;H)$ and, moreover, $\inf\limits_{z\in C(S;H)} G(z) > -\infty$.

We assume that the cost functional $J : U \to \mathbb{R}$ has the form

$$J(u) := G(y(u)) + \mu\|u\|^2_U, \quad u \in U, \tag{14}$$

where $\mu > 0$ is a constant.

We consider the following **optimal control problem**: find a control $u^* \in U_\partial$ such that

$$J(u^*) = \inf_{u\in U_\partial} J(u). \tag{15}$$

We briefly call this problem (15), and its solutions will be called the *optimal controls*.

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 2. *Let conditions ($\mathcal{P}$) and ($\mathcal{G}$) hold. Then problem (15) has a solution.*

The proof of this theorem is given in Section 4.

4. Well-posedness of the problem without initial conditions for weakly nonlinear variational inequality

We now turn to the question of existence and uniqueness of the solution of the problem $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$.

First, we define the functional $\Phi_H : H \to \mathbb{R}_\infty$ by the rule: $\Phi_H(v) := \Phi(v)$, if $v \in V$, and $\Phi_H(v) := +\infty$ otherwise. Note that conditions $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, Lemma IV.5.2 and Proposition IV.5.2 of the monograph [24] imply that Φ_H is proper, convex, and lower-semi-continuous functional on H, $\operatorname{dom}(\Phi_H) = \operatorname{dom}(\Phi) \subset V$ and $\partial\Phi_H = \partial\Phi \cap (V \times H)$, where $\partial\Phi_H : H \to 2^H$ is the subdifferential of the functional Φ_H. Moreover, condition $(\mathcal{A}_3)$ yields $0 \in \partial\Phi_H(0)$.

Proposition 5 ([24, Lemma IV.4.3])**.** *Assume that $z \in H^1(a,b;H)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, and there exists $g \in L^2(a,b;H)$ such that $g(t) \in \partial\Phi_H\big(z(t)\big)$ for a.e. $t \in (a,b)$. Then the function $\Phi_H\big(z(\cdot)\big)$ is absolutely continuous on the interval $[a,b]$ and for any function $h : [a,b] \to H$ such that $h(t) \in \partial\Phi_H\big(z(t)\big)$ the following equality holds*

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(z(t)\big) = (h(t), z'(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (a,b).$$

Proposition 6 ([12, Proposition 3.12], [24, Proposition IV.5.2])**.** *Suppose that $T > 0$, $\widetilde{f} \in L^2(0,T;H)$ and $z_0 \in \operatorname{dom}(\Phi)$. Then there exists a unique function $z \in H^1(0,T;H)$ such that $z(0) = z_0$ and for a.e. $t \in (0,T)$ we have $z(t) \in D(\partial\Phi_H)$ and*

$$z'(t) + \partial\Phi_H\big(z(t)\big) \ni \widetilde{f}(t) \quad \text{in } H. \tag{16}$$

Proposition 7. *Suppose that $T > 0$, $\widetilde{f} \in L^2(0,T;H), \widetilde{u} \in L^\infty(0,T)$ and $z_0 \in \mathrm{dom}(\Phi)$. Then there exists a unique function $z \in H^1(0,T;H)$ such that $z(0) = z_0$ and for a.e. $t \in (0,T)$ we have $z(t) \in D(\partial\Phi_H)$ and*

$$z'(t) + \partial\Phi_H\big(z(t)\big) + \widetilde{u}(t)z(t) \ni \widetilde{f}(t) \quad \text{in } H. \tag{17}$$

Proof. Let $\alpha > 0$ be an arbitrary fixed number and let

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{t\in[0,T]} \left[e^{-\alpha t}|z_1(t) - z_2(t)|\right], \quad z_1, z_2 \in C([0,T];H),$$

be a metric on $C([0,T];H)$. It is obvious that the space $C([0,T];H)$ with this metric is complete. Now let us consider an operator $A : C([0,T];H) \to C([0,T];H)$ defined as follows: to any given function $\widetilde{z} \in C([0,T];H)$, it assigns a function $\widehat{z} \in H^1(0,T;H) \subset C([0,T];H)$ such that $\widehat{z}(0) = z_0$ and for a.e. $t \in (0,T)$ the following inclusions hold: $\widehat{z}(t) \in D(\Phi_H)$ and

$$\widehat{z}'(t) + \partial\Phi_H(\widehat{z}(t)) \ni \widetilde{f}(t) - \widetilde{u}(t)\widetilde{z}(t) \quad \text{in} \quad H. \tag{18}$$

Clearly, variational inequality (18) coincides with variational inequality (16) after replacing $\widetilde{f}$ by $\widetilde{f} - \widetilde{u}\widetilde{z}$, thus using Proposition 6 we get that the operator A is well-defined. Let us show that the operator A is a contraction. Indeed, let $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2$ be arbitrary function from $C([0,T];H)$ and $\widehat{z}_1 := A\widetilde{z}_1$, $\widehat{z}_2 = A\widetilde{z}_2$. According to (18) there exist functions $\widetilde{g}_1$ and $\widetilde{g}_2$ from $L^2(0,T;H)$ such that for every $k \in \{1,2\}$ and for a.e. $t \in (0,T)$ we have $\widetilde{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{z}_k(t))$ and

$$\widehat{z}_k'(t) + \widetilde{g}_k(t) = \widetilde{f}(t) - \widetilde{u}(t)\widetilde{z}_k(t), \tag{19}$$

while $\widehat{z}_k(0) = z_0$.

Subtracting identity (19) with $k = 2$ from identity (19) with $k = 1$, and, for a.e. $t \in (0,T)$, multiplying the obtained identity by $\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)$, we get

$$\begin{aligned}\big((\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))', \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)\big) + (\widetilde{g}_1(t) - \widetilde{g}_2(t), \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))&\\ = -\widetilde{u}(t)(\widetilde{z}_1(t) - \widetilde{z}_2(t), \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)) \quad \text{for a.e.} \quad t \in (0,T),&\\ \widehat{z}_1(0) - \widehat{z}_2(0) = 0.&\end{aligned} \tag{20}$$

We integrate equality (20) by t from 0 to $\tau \in (0,T]$, taking into account that for a.e. $t \in (0,T)$ we have

$$\big((\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))', \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)\big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)|^2.$$

As a result we get the equality

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)|^2 + \int_0^\tau (\widetilde{g}_1(t) - \widetilde{g}_2(t), \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))\, dt&\\ = -\int_0^\tau \widetilde{u}(t)(\widetilde{z}_1(t) - \widetilde{z}_2(t), \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))\, dt.&\end{aligned} \tag{21}$$

Taking into account condition $(\mathcal{A}_4)$, for a.e. $t \in (0,T)$ we have the inequality

$$(\widetilde{g}_1(t) - \widetilde{g}_2(t), \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)) \geqslant K_2|\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))|^2. \tag{22}$$

Since $\widetilde{u} \in L^\infty(0,T)$ then there exists a constant $\widetilde{M} \geqslant 0$ such that $|\widetilde{u}(t)| \leqslant \widetilde{M}$ for a.e. $t \in (0,T)$. From this, taking into account the Cauchy inequality, for a.e. $t \in (0,T)$ we obtain

$$\begin{aligned} \big|\widetilde{u}(t)\big(\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t),\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)\big)\big| &\leqslant \widetilde{M}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)||\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon\widetilde{M}}{2}|\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)|^2+\frac{\widetilde{M}}{2\varepsilon}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2, \end{aligned} \tag{23}$$

where $\varepsilon > 0$ is arbitrary.

From (21), according to (22) and (23), we have

$$|\widehat{z}_1(\tau)-\widehat{z}_2(\tau)|^2+(2K_2-\varepsilon\widetilde{M})\int_0^\tau|\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)|^2\,dt \leqslant \widetilde{M}\varepsilon^{-1}\int_0^\tau|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\,dt. \tag{24}$$

Choosing $\varepsilon > 0$ such that $2K_2-\varepsilon\widetilde{M} \geqslant 0$, from (24) we obtain

$$|\widehat{z}_1(\tau)-\widehat{z}_2(\tau)|^2 \leqslant C_2\int_0^\tau|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\,dt, \quad \tau \in (0,T], \tag{25}$$

where $C_2 > 0$ is a constant.

After multiplying inequality (25) by $e^{-2\alpha\tau}$ we obtain

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha\tau}|\widehat{z}_1(\tau)-\widehat{z}_2(\tau)|^2 &\leqslant C_2e^{-2\alpha\tau}\int_0^\tau e^{2\alpha t}e^{-2\alpha t}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\,dt \\ &\leqslant C_2e^{-2\alpha\tau}\max_{t\in[0,T]}\big[e^{-2\alpha t}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\big]\int_0^\tau e^{2\alpha t}\,dt \\ =\frac{C_2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha\tau})\big(\rho(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)\big)^2 &\leqslant \frac{C_2}{2\alpha}\big(\rho(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)\big)^2, \quad \tau \in [0,T]. \end{aligned} \tag{26}$$

From (26) it easily follows that

$$\rho(\widehat{z}_1,\widehat{z}_2) \leqslant \sqrt{C_2/(2\alpha)}\rho(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2).$$

From this, choosing $\alpha > 0$ such that the inequality $C_2/(2\alpha) < 1$ holds, we obtain that the operator A is a contraction. Hence, we may apply the Banach fixed-point theorem (the contraction mapping principle) [11, Theorem 5.7] and deduce that there exists a unique function $z \in C([0,T];H)$ such that $Az = z$. Thus, Proposition 7 is proved. □

Now let us prove Theorem 1.

Proof. The uniqueness of the solution. Assume the opposite. Let y_1, y_2 be two solutions of the problem $\mathbf{P}(\Phi,u,f,\gamma)$. Then for every $i \in \{1,2\}$ there exists a function $g_i \in L^2_{\rm loc}(S;V')$ such that for a.e. $t \in S$ we have $g_i(t) \in \partial\Phi\big(y_i(t)\big)$ and

$$y_i'(t)+g_i(t)+u(t)y_i(t) = f(t) \quad \text{in } V'. \tag{27}$$

Denote $z := y_1 - y_2$. From equalities (27) for a.e. $t \in S$ we obtain

$$z'(t)+g_1(t)-g_2(t)+u(t)z(t) = 0 \quad \text{in } V'. \tag{28}$$

From (10) it follows that the following condition holds

$$e^{-2\gamma t}|z(t)|^2 \to 0 \quad \text{as} \quad t \to -\infty. \tag{29}$$

Multiplying equality (28) for almost every $t \in S$ on $z(t)$, we obtain

$$(z'(t), z(t)) + (g_1(t) - g_2(t), y_1(t) - y_2(t)) + u(t)|z(t)|^2 = 0. \tag{30}$$

According to equality (5), condition $(\mathcal{A}_4)$ and the fact that $g_i(t) \in \partial\Phi(y_i(t))$ $(i = 1, 2)$ for a.e. $t \in S$, we obtain the differential inequality

$$\frac{1}{2}\frac{d|z(t)|^2}{dt} + (K_2 + \widetilde{m})|z(t)|^2 \leqslant 0 \quad \text{for a.e.} \quad t \in S. \tag{31}$$

Let us take arbitrary numbers $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$. Multiplying inequality (31) by $e^{-2\gamma t}$, integrating from τ_1 to τ_2 and using the integration-by-parts formula, we obtain

$$\frac{1}{2}e^{-2\gamma t}|z(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + (K_2 + \widetilde{m} + \gamma)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|z(t)|^2\,dt \leqslant 0. \tag{32}$$

Since condition (11) hold, then from (32) we obtain

$$e^{-2\gamma\tau_2}|z(\tau_2)|^2 \leqslant e^{-2\gamma\tau_1}|z(\tau_1)|^2. \tag{33}$$

In (33) we fix τ_2 and pass to the limit as $\tau_1 \to -\infty$. According to condition (29) we obtain the equality $e^{-2\gamma\tau_2}|z(\tau_2)|^2 = 0$. Since $\tau_2 \in S$ is an arbitrary number, we have $z(t) = 0$ for a. e. $t \in S$, that is, $y_1(t) = y_2(t)$ for a. e. $t \in S$. The resulting contradiction proves the uniqueness of the solution of problem (15).

The existence of the solution. We divide the proof into three steps.

Step 1 (*Solution approximation*). We construct a sequence of functions which, in some sense, approximate the solution of the problem $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$.

Let $\widehat{f}_k(t) := f(t)$ for $t \in S_k := [-k, 0]$, where $k \in \mathbb{N}$. For each $k \in \mathbb{N}$ let us consider the problem of finding a function $\widehat{y}_k \in H^1(S_k; H) := \{z \in L^2(S_k; H) \mid z' \in L^2(S_k; H)\}$ such that for a.e. $t \in S_k$ we have $\widehat{y}_k(t) \in D(\partial\Phi_H)$ and

$$\widehat{y}_k'(t) + \partial\Phi_H\big(\widehat{y}_k(t)\big) + u(t)\widehat{y}_k(t) \ni \widehat{f}_k(t) \quad \text{in} \quad H, \tag{34a}$$

$$\widehat{y}_k(-k) = 0. \tag{34b}$$

Variational inequality (34a) means that there exists a function $\widehat{g}_k \in L^2(S_k; H)$ such that for a.e. $t \in S_k$ we have $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{u}_k(t))$ and

$$\widehat{y}_k'(t) + \widehat{g}_k(t) + u(t)\widehat{y}_k(t) = \widehat{f}_k(t) \quad \text{in} \quad H. \tag{35}$$

Note that $D(\partial\Phi_H) \subset \mathrm{dom}(\Phi_H)$, therefore $\widehat{y}_k(t) \in V$ for a.e. $t \in S_k$. According to the definition of the subdifferential of a functional and the fact that $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi(\widehat{y}(t))$ for a.e. $t \in S_k$, we have

$$\Phi(0) \geqslant \Phi(\widehat{y}_k(t)) + (\widehat{g}_k(t), 0 - \widehat{y}_k(t)) \quad \text{for a.e.} \quad t \in S_k.$$

Using this and condition $(\mathcal{A}_3)$ we obtain

$$(\widehat{g}_k(t), \widehat{y}_k(t)) \geqslant \Phi(\widehat{y}_k(t)) \geqslant K_1\|\widehat{y}_k(t)\|^2 \quad \text{for a.e.} \quad t \in S_k. \tag{36}$$

Since the left side of this chain of inequalities belongs to $L^1(S_k)$, then $\widehat{y}_k$ belongs to $L^2(S_k; V)$.

For each $k \in \mathbb{N}$ we extend the functions $\widehat{f}_k, \widehat{y}_k$ and $\widehat{g}_k$ by zero over the entire interval S, and denote these extensions by f_k, y_k and g_k respectively. From the above it follows that for each $k \in \mathbb{N}$ the function y_k belongs to $L^2(S; V)$, its derivative y_k' belongs to

$L^2(S;H)$ and for a.e. $t\in S$ the inclusion $g_k(t)\in\partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ and the following equality hold (see (35))

$$y_k'+g_k(t)+u(t)y_k=f_k(t)\quad\text{in}\quad H. \tag{37}$$

In order to show the convergence of $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ to the solution of the problem $\mathbf{P}(\Phi,u,f,\gamma)$ we need some estimates of the functions y_k $(k\in\mathbb{N})$.

Step 2 (*Estimates of approximating solutions*).

Multiplying identity (37), for a.e. $t\in S$, by $e^{-2\gamma t}y_k(t)$ and integrating if from τ_1 to τ_2 $(\tau_1,\tau_2\in S$ are arbitrary numbers, $\tau_1<\tau_2)$, we obtain

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(y_k'(t),y_k(t))\,dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(g_k(t),y_k(t))\,dt$$
$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}u(t)|y_k(t)|^2\,dt=\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(f_k(t),y_k(t))\,dt.$$

From this, taking into account (5) and using the integration-by-parts formula, we obtain

$$e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+2\gamma\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt+2\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(g_k(t),y_k(t))\,dt \tag{38}$$
$$+2\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}u(t)|y_k(t)|^2\,dt=2\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(f_k(t),y_k(t))\,dt.$$

According to the definition of y_k and (36), we obtain

$$(g_k(t),y_k(t))\geqslant\Phi\big(y_k(t)\big)\geqslant K_1\|y_k(t)\|^2\quad\text{for a.e. } t\in S. \tag{39}$$

Let us estimate the third term on the left-hand side of inequality (38). From (8) and (39) for arbitrary $\delta\in(0,1)$, we obtain

$$\begin{aligned}2\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(g_k(t),y_k(t))\,dt&=2(\delta+(1-\delta))\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(g_k(t),y_k(t))\,dt\\&\geqslant 2\delta K_2\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt+(1-\delta)K_1\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt\\&\quad+(1-\delta)\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt.\end{aligned} \tag{40}$$

Using the Cauchy inequality we estimate the right-hand side of (38), as follows

$$2\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}(f_k(t),y_k(t))\,dt\leqslant\varepsilon\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt+\varepsilon^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{41}$$

where $\varepsilon>0$ is arbitrary.

From (38), taking into account (40), (41) and the notation $\widetilde{m}:=\inf\limits_{t\in S}u(t)$, we obtain

$$\begin{aligned}&e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+[2(\delta K_2+\widetilde{m}+\gamma)-\varepsilon]\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt\\&+(1-\delta)K_1\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt+(1-\delta)\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt\\&\leqslant\varepsilon^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt,\quad\delta\in(0,1),\ \varepsilon>0.\end{aligned} \tag{42}$$

Since $K_1 > 0$, $K_2 + \widetilde{m} + \gamma > 0$ and $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ are arbitrary, then we first choose δ such that $\delta K_2 + m + \gamma > 0$, and then we choose ε such that $2(\delta K_2 + m + \gamma) - \varepsilon > 0$. As a result we obtain the estimate

$$e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt \leqslant C_3 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{43}$$

where C_3 is a positive constant depending on $K_1, K_2, \widetilde{m}$ and γ only.

We take $\tau_2 = \tau$, when $\tau \in S$ is arbitrary, and pass to the limit in (43) as $\tau_1 \to -\infty$. Taking into account $(\mathcal{F})$ and the definition of y_k and f_k, we obtain

$$\begin{aligned} &e^{-2\gamma\tau}|y_k(\tau)|^2 + \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt \leqslant C_3 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \quad \tau \in S. \end{aligned} \tag{44}$$

Since $\tau \in S$ is arbitrary, from (44) it follows that

$$\text{sequence } \{e^{-\gamma\cdot}y_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty} \text{ is bounded in } L^\infty(S;H) \text{ and in } L^2(S;V), \tag{45}$$

$$\text{sequence } \big\{e^{-2\gamma\cdot}\Phi\big(y_k(\cdot)\big)\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ is bounded in } L^1(S). \tag{46}$$

Now let us find estimates of $y_k'(t)$. For almost every $t \in S$ we multiply equality (37) by $e^{-2\gamma t}y_k'(t)$ and integrate the resulting equality from τ_1 to τ_2 ($\tau_1, \tau_2 \in S$ are arbitrary numbers, $\tau_1 < \tau_2$). Then we obtain

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k'(t))\,dt \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(f_k(t), y_k'(t))\,dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}u(t)(y_k(t), y_k'(t))\,dt. \end{aligned} \tag{47}$$

From (47) using the Cauchy-Schwarz inequality and the fact that $\sup\limits_{t\in S} u(t) =: \widetilde{M} < \infty$ we obtain

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k'(t))\,dt \\ &\leqslant \widetilde{M}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)||y_k'(t)|\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)||y_k'(t)|\,dt. \end{aligned} \tag{48}$$

Since $g_k \in L^2(\tau_1, \tau_2; H)$, Statement 5 implies that the function $\Phi_H\big(y_k(\cdot)\big)$ is absolutely continuous on $[\tau_1, \tau_2]$ and

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big) = (g_k(t), y_k'(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (\tau_1, \tau_2). \tag{49}$$

Taking into account (49), we estimate the second term on the left side of (48) as follows

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k'(t))\,dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt \\ &= e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + 2\gamma\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt. \end{aligned} \tag{50}$$

Using the Cauchy inequality to the right-hand side of (48) and estimate (44), we obtain

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{M}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)||y_k'(t)|\,dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)||y_k'(t)|\,dt\\
&\leqslant \widetilde{M}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt+\frac14\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt\\
&+\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt+\frac14\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt\\
&\leqslant \widetilde{M}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt+\frac12\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

From (48), taking into account (50), (51), we obtain

$$
\begin{aligned}
&\frac12\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt+e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}\\
&\leqslant \widetilde{M}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt+2|\gamma|\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Taking into account the definitions of y_k and f_k, condition $(\mathcal{A}_3)$, (1) and (44), we pass to the limit as $\tau_1\to-\infty$ in (52). As a result, taking $\tau_2=\tau\in S$, we obtain

$$
e^{-2\gamma\tau}\Phi_H\big(y_k(\tau)\big)+\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt\leqslant C_4\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \qquad (53)
$$

where C_4 is a positive constant depending on K_1,γ,λ and $\widetilde{m},\widetilde{M}$ only.

According to the definitions of the functional Φ_H and the function f_k, and condition $(\mathcal{A}_3)$ (recall that $y_k(t)\in V$ for a.e. $t\in S$), we obtain

$$
e^{-2\gamma\tau}\|y_k(\tau)\|^2+\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt\leqslant C_5\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \qquad (54)
$$

where $C_5>0$ is a constant depending on K_1,γ,λ and $\widetilde{m},\widetilde{M}$ only.

Estimate (54) and the definition of f_k imply that

$$
\text{the sequence } \{y_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ is bounded in } L^\infty_\gamma(S;V), \qquad (55)
$$

$$
\text{the sequence } \{y_k'\}_{k=1}^{+\infty} \text{ is bounded in } L^2_\gamma(S;H). \qquad (56)
$$

From (37), (44), (56), $(\mathcal{F})$ and the definition of f_k we obtain

$$
\text{the sequence } \{g_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ is bounded in } L^2_\gamma(S;H). \qquad (57)
$$

Step 3 (*Passing to the limit*). Since V and H are Hilbert spaces, and V embeds in H with compact injection, then (45), (55)–(57) and Statement 4 imply that there exist functions $y\in L^\infty_\gamma(S;V)\cap L^2_\gamma(S;V)\cap H^1_\gamma(S;H)\subset C(S;H)$, $g\in L^2_\gamma(S;H)$ and a subsequence of sequence $\{y_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (still denoted by $\{y_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$) such that

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad *\text{-weakly in } L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(S;V), \text{ weakly in } L^2_{\gamma}(S;V) \text{ and weakly in } H^1_{\gamma}(S;H), \tag{58}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{in } C(S;H), \tag{59}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{weakly in } L^2_{\gamma}(S;H). \tag{60}$$

Note that (58) and (60) imply

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y, \quad y_k' \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y', \quad g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{weakly in} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{61}$$

Let $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ be arbitrary. For a.e. $t \in S$ we multiply equality (37) by v, and then we multiply the obtained equality by φ and integrate in t on S. As a result, we obtain the equality

$$\int\limits_S (y_k'(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S (g_k(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S u(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt$$
$$= \int\limits_S (f_k(t), v\varphi(t))\,dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{62}$$

We pass to the limit in (62) as $k \to \infty$, taking into account (61) and convergence $\{f_k\}$ to f in $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. As a result, since $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ are arbitrary, for a.e. $t \in S$, we obtain the equality

$$y'(t) + g(t) + u(t)y(t) = f(t) \quad \text{in } H.$$

In order to complete the proof of the theorem it remains only to show that $y(t) \in D(\partial\Phi)$ and $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ for a.e. $t \in S$.

Let $k \in \mathbb{N}$ be an arbitrary number. Since $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ for every $t \in S \setminus \widetilde{S}_k$, where $\widetilde{S}_k \subset S$ is a set of measure zero, applying the monotonicity of subdifferential $\partial\Phi_H$ we obtain that for every $t \in S \setminus \widetilde{S}_k$ the following equality holds:

$$(g_k(t) - v^*, y_k(t) - v) \geqslant 0 \quad \forall\,[v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{63}$$

Let $\tau \in S$, $h > 0$ be arbitrary numbers. We integrate (63) on $(\tau - h; \tau)$:

$$\int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(t) - v^*, y_k(t) - v)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\,[v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{64}$$

Now according to (59) and (60) we pass to the limit in (64) as $k \to \infty$. As a result we obtain

$$0 \leqslant \int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(\tau) - v^*, y_k(t) - v)\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\tau-h}^{\tau} (g(t) - v^*, y(t) - v)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\,[v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{65}$$

The monograph [28, Theorem 2, P. 192] and (65) imply that for every $[v, v^*] \in \partial\Phi_H$ there exists a set $R_{[v,v_*]} \subset S$ of measure zero such that for all $\tau \in S \setminus R_{[v,v_*]}$ we have

$$0 \leqslant \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} \big(g(t) - v^*, y(t) - v\big)\,dt = \big(g(\tau) - v^*, y(\tau) - v\big). \tag{66}$$

Let us show that there exists a set of measure zero $R \subset S$ such that for every $\tau \in S \setminus R$ the following inequality holds

$$\big(g(\tau) - v^*, y(\tau) - v\big) \geqslant 0 \quad \forall [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{67}$$

Since V and H are separable spaces, there exists a countable set $F \subset \partial\Phi_H$, which is dense in $\partial\Phi_H$. Let us denote $R := \bigcup\limits_{[v,v^*]\in F} R_{[v,v_*]}$. Since the set F is countable, and countable union of sets of measure zero is a set of measure zero, R is a set of measure zero. Therefore, for any $\tau \in S \setminus R$ inequality (67) holds for every $[v, v^*] \in F$. Let $[\widehat{v}, \widehat{v}^*]$ be an arbitrary element from $\partial\Phi_H$. Since F is dense in $\partial\Phi_H$, we have the existence of the sequence $\{[v_l, v_l^*]\}_{l=1}^{\infty}$ such that $v_l \to \widehat{v}$ in V, $v_l^* \to \widehat{v}^*$ in H and for every $\tau \in S \setminus R$ we have

$$(g(\tau) - v_l^*, y(\tau) - v_l) \geqslant 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

So, passing to the limit in this equality as $l \to \infty$, we get $(g(\tau) - \widehat{v}^*, y(\tau) - \widehat{v}) \geqslant 0$. Thus, for a.e. $\tau \in S$ inequality (67) holds. From this, according to maximal monotonicity of $\partial\Phi_H$, we obtain that $[y(t), g(t)] \in \partial\Phi_H$ for a.e. $t \in S$.

Estimate (12) of the solution of the problem $\mathbf{P}(\Phi, u^*, f, \gamma)$ follows directly from (44), (54), (58) and (59), and Proposition 2. From (44), (59), (12) according to (1) we have

$$e^{-2\gamma\tau}|y_k(\tau)|^2 \leqslant C_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\, dt.$$

From this we obtain that y satisfies condition (10). □

5. Proof of the main result

Proof of Theorem 2. Let $\{u_k\}$ be a minimizing sequence for functional J in U_∂: $J(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_{u\in U_\partial} J(u)$. According to the definition of U_∂ we obtain that

$$\text{the sequence } \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ is bounded in } L^\infty(S). \tag{69}$$

Assume that for every $k \in \mathbb{N}$ the function $y_k := y(u_k)$ is a solution of the problem $\mathbf{P}(\Phi, u_k, f, \gamma)$, that is, the following variational inequality and condition at the infinity hold

$$y_k'(t) + \partial\Phi\big(y_k(t)\big) + u_k(t)y_k(t) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{70}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\gamma t}|y_k(t)| = 0. \tag{71}$$

According to Definition 1 and Theorem 1, taking into account $(\mathcal{F})$, for every $k \in \mathbb{N}$ we have $y_k \in L^\infty_\gamma(S;V) \cap L^2_\gamma(S;V) \cap H^1_\gamma(S;H) \subset C(S;H)$, $y_k(t) \in D(\partial\Phi)$ for a.e. $t \in S$, and the existence of a function $g_k \in L^2_\gamma(S;H)$ such that for a.e. $t \in S$, $g_k(t) \in \partial\Phi(y_k(t))$, and

$$y_k'(t) + g_k(t) + u_k(t)y_k(t) = f(t) \quad \text{in} \quad H \tag{72}$$

and condition (71) holds.

Moreover, for arbitrary $k \in \mathbb{N}$ and $\tau \in S$ the following estimate holds

$$e^{-2\gamma\tau}\|y_k(\tau)\|^2 + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\, dt \leqslant C_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\, dt, \tag{73}$$

where C_1 is a positive constant depending on K_1, K_2, γ, λ and m, M only.

Estimate (73) implies that

$$\text{the sequence } \{e^{-\gamma\cdot} y_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \text{ is bounded in } L^{\infty}(S;V), \tag{74}$$

$$\text{the sequence } \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ is bounded in } L^2_{\gamma}(S;V), \tag{75}$$

$$\text{the sequence } \{y_k'\}_{k=1}^{\infty} \text{ is bounded in } L^2_{\gamma}(S;H). \tag{76}$$

From (72), taking into account (69), (75), (76) we obtain that

$$\text{the sequence } \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ is bounded in } L^2_{\gamma}(S;H). \tag{77}$$

Since V and H are reflexive spaces, and V embeds in H densely, continuously and compactly, then (69), (74)–(77), taking into account Statement 3, imply that there exist a subsequence of the sequence $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ (still denoted by $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$) and functions $u^* \in U_{\partial}$, $y \in L^{\infty}_{\gamma}(S;V) \cap L^2_{\gamma}(S;V) \cap H^1_{\gamma}(S;H) \subset C(S;H)$ and $g \in L^2_{\gamma}(S;H)$ such that

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^* \quad *\text{-weakly in} \quad L^{\infty}(S), \tag{78}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \ *\text{-weakly in } L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(S;V), \text{ weakly in } L^2_{\gamma}(S;V) \text{ and weakly in } H^1_{\gamma}(S;H), \tag{79}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{in} \quad C(S;H), \tag{80}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{weakly in} \quad L^2_{\gamma}(S;H). \tag{81}$$

Similarly, as in the proof of Theorem 1, for a.e. $t \in S$ we multiply equality (72) by v, and then multiply the resulting equality by φ and integrate on S, where $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ are arbitrary. As a result, we obtain the equality

$$\int\limits_S (y_k'(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S (g_k(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S u_k(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt$$
$$= \int\limits_S (f(t), v\varphi(t))\,dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{82}$$

Let us show that (78) and (80) yield

$$\int\limits_S u_k(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_S u^*(t)(y(t), v\varphi(t))\,dt \quad \forall v \in H,\ \forall \varphi \in D(-\infty,0). \tag{83}$$

Indeed, let $t_1, t_2 \in S$ be such that $\operatorname{supp}\varphi \subset [t_1, t_2]$. Then we have

$$\int\limits_S u_k(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y_k(t) - y(t) + y(t), v\varphi(t))\,dt$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y_k(t) - y(t), v\varphi(t))\,dt. \tag{84}$$

From (69), (80) and the Cauchy-Schwarz inequality it follows

$$\Big|\int_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y_k(t)-y(t), v\varphi(t))\,dt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant M\Big(\int_{t_1}^{t_2} |\varphi(t)v|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{t_1}^{t_2} |y_k(t)-y(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{85}$$

Since $(y(\cdot), v)\varphi(\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(S)$, (78) implies

$$\int_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y(t), v\varphi(t))\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} u^*(t)(y(t), v\varphi(t))\,dt. \tag{86}$$

From (84), taking into account (85) and (86), we obtain (83).

Taking into account (79), (81) and (83) we pass to the limit in (82) as $k \to \infty$. As a result, for a.e. $t \in S$ we obtain the equality

$$y'(t) + g(t) + u^*(t)y(t) = f(t) \quad \text{in } H.$$

Similarly, as in the proof of Theorem 1, we show that $y(t) \in D(\partial\Phi)$ and $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ for a.e. $t \in S$. From (1), (73) and (80) we have $e^{-2\gamma\tau|y(\tau)|^2} \leqslant C_1\lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\,dt$, $\tau \in S$. This means that condition (10) holds. Thus, the function y is a solution of the problem $\mathbf{P}(\Phi, u^*, f, \gamma)$.

It remains to show that u^* is a minimizing element of the functional J. Indeed, since the functional G is lower semicontinuous in $C(S; H)$, then (80) implies that

$$\varliminf_{k\to\infty} G(y_k) \geqslant G(y). \tag{87}$$

Also (78) and Proposition 2 yield

$$\varliminf_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geqslant \|u^*\|_U. \tag{88}$$

From (14), (87), (88) we obtain that $\inf\limits_{u\in U_\partial} J(u) = \lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} G(y_k) + \mu \varliminf\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geqslant J(u^*)$. Thus, we have shown that u^* is a solution of problem (15), i.e., the optimal control. □

References

1. *Adams D.R., Lenhart S.* Optimal control of the obstacle for a parabolic variational inequality // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **268**, №2. — P. 602–614.
2. *Aubin J.-P.* Un théorème de compacité // C. R. Acad. Sci., Paris — 1963. — **256**, №24. — P. 5042–5044.
3. *Barbu V.* Optimal Control of Variational Inequalities. — London: Pitman, 1983.
4. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. — 1988. — **279**, №3. — P. 373–394.
5. *Bokalo M.* Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities // Nonlinear Bound. Value Probl. — 1998. — **8**. — P. 58–63.

6. *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions // Milan J. Math — 2009. — **77**. — P. 437–494.
7. *Bokalo M., Tsebenko A.* Existence of optimal control in the coefficients for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations // Mat. Stud. — 2016. — **45**, №1. — P. 40–56.
8. *Bokalo M.* Optimal control of evolution systems without initial conditions // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 2010. — **73**. — P. 85–113.
9. *Bokalo M.M.* Problem without initial conditions for classes of nonlinear parabolic equations // J. Sov. Math. — 1990. — **51**, №3. — P. 2291–2322.
10. *Boukrouche M., Tarzia D.A.* Existence, uniqueness, and convergence of optimal control problems associated with parabolic variational inequalities of the second kind // Nonlinear Anal., Real World Appl. — 2011. — **12**, №4. — P. 2211–2224
11. *Brezis H.* Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. — New York: Springer, 2011.
12. *Brezis H.* Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. — Amsterdam, London: North-Holland Publishing Comp., 1973.
13. *Buhrii O.M.* Some parabolic variational inequalities without initial conditions // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 1998. — **49**. — P. 113–121.
14. *Gayevskyy H., Greger K., Zaharias K.* Nonlinear operator equations and operator differential equations. — Mjscow: Mir, 1978 (in Russian).
15. *Ivasishen S.D.* Parabolic boundary-value problems without initial conditions // Ukr. Math. J. — 1982. — **34**, №5. — P. 439—443.
16. *Kazufumi I., Kunisch K.* Optimal control of parabolic variational inequalities // J. Math. Pures Appl. — 2010. — **93**, №4. — P. 329–360.
17. *Kogut O.* On optimal control problem in coefficients for nonlinear elliptic variational inequalities // Visnik Dnipropetrovsk. Univ.. Ser. Modelyuvannya — 2011. — **19**, №8. — P. 86–98 (in Russian).
18. *Lavrenyuk S., Ptashnyk M.* Problem without initial conditions for a nonlinear pseudoparabolic system // Differ. Equ. — 2000. — **36**, №5. — P. 739–748.
19. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. — Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.
20. *Oleinik O., Iosifjan G.* An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains // Usp. Mat. Nauk. — 1976. — **31**, №6. — P. 142–166 (in Russian).
21. *Pankov A.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. — Dordrecht: Kluwer, 1990.
22. *Pukach P.Ya.* On problem without initial conditions for some nonlinear degenarated parabolic system // Ukr. Math. J. — 1994. — **46**, №4. — P. 484–487.
23. *Rockafellar R.* On the maximal monotonicity of subdifferential mappings // Pacific J. Math. — 1970. — **33**, №1. — P. 209–216.
24. *Showalter R.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997. — xiv+278 p.
25. *Showalter R.E.* Singular nonlinear evolution equations // Rocky Mt. J. Math. — 1980. — **10**, №3. — P. 499–507.
26. *Tikhonov A., Samarskii A.* Equations of mathematical physics. — Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
27. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Mat. Sb. — 1935. — **42**, №2. — P. 199–216.

28. *Yoshida K.* Functional analysis. — Moscow: Mir, 1967 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 02.02.2017
прийнята до друку 13.03.2017

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Микола БОКАЛО, Андрій ЦЕБЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, amtseb@gmail.com

Вивчаємо задачу оптимального керування системами, яка описується задачею Фур'є для слабко нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей. Керування є коефіцієнтом у нерівності, що описує стан керованої системи. Доведено існування оптимального керування.

Ключові слова: оптимальне керування, задача без початкових умов, варіаційна нерівність.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 94–97
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 94–97

УДК 539.3:338.45:622.32

PLACEMENT OF WELLS AS A METHOD OF OIL FIELD DEVELOPMENT CONTROL

Tahir GADJIEV, Soltan ALIEV, Geylani PANAHOV, Eldar ABBASOV

Institute of Mathematics and Mechanics
of Azerbaijan National Academy of Sciences,
F. Agaev, 9, AZ1141, Baku, Azerbaijan
e-mail: eldarab@gmail.com

Maintaining a profitable production on the depleted fields with high water cut production is one of the challenges encountered in the oil industry. The main objective of well placement optimization which provide a minimizing the economic costs is the recognition of the technological state of the object state under limited information. The present article is concerned with initial boundary value problem for nonlinear parabolic equations using the Leray-Schauder theorem and shows the existence and uniqueness of solutions of a finite mathematical programming problem with constraints of a special kind equality and inequalities.

Key words: oil and gaswell, well placement, oil reservoir, optimality criterion, uniqueness.

1. Introduction. Maintaining profitable production on the mature oil fields with high water production is one of the contemporary challenges faced by the oil industry. Ensuring adequate investments return by using a traditional (heuristic) methods of production control is a difficult task.

One of the most effective ways that can improve the oil production and provide the development of weak drainable oil reservoirs is infill development deposits by drilling new wells. Such activities include decision-making elements in order to ensure the justification of the information to find the optimal solution of optimizing new wells placement.

This paper is focusing on maximizing oil revenues during reservoir flooding, optimizing the medium and long term management of well placement, and operating wells.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 76N25

This work performed under the Research Program of the Azerbaijan National Academy of Sciences on "Complex theoretical and experimental studies of interdisciplinary problems of geomechanics" approved by Decree of the Presidium of the Azerbaijan National Academy of Sciences of №5/3, February 11, 2015 (2015 - 2017).

Within the framework of existing procedures, determination of the wells placement, its control is usually performed sequentially. In some cases, the strategy of reactive control, which depends on oil prices and the cost of the water production is implemented. This strategy entails the shutting-in wells for economic threshold criterion, but cannot provide the satisfactory solution since it does not take into account the relationship between the wells placement and related controls.

The paper proposes a joint approach to optimize well placement and conditions of their control. Two different optimizations in embedded mode are the well placement optimization repeatedly which alternates with optimization of well control.

The suite of methods used in optimization problems allows to specify a reservoir heterogeneity pattern, both geologically and in the hydrodynamic aspects, to identify areas where wells are competing for the same volume of fluid.

2. Problem Statement. To describe the two-dimensional flow weakly compressible oil in porous media was formulated as boundary value problem [1, 2]:

$$c(x)\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x,\nabla p)\nabla p) + \sum_{l=1}^{L} q^l(t)\delta(x-x^l) = 0, \tag{1}$$

$$x \in \Omega^0 \subset E^2, \quad t \in (0,T],$$
$$p(x,0) = p_0(x), \quad x \in \Omega;$$

$$p(x,t)\big|_{x\in\Gamma_1} = p_1(x,t), \quad \left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial n}\right|_{x\in\Gamma_2} = p_2(x,t), \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

$$a(x) = \frac{k(x)h(x)}{\mu}, \quad c(x) = h(m_0\beta_j + \beta_n), \tag{3}$$

where $p = p(x,t)$ is the pressure at the point $x \in \Omega$ at time t; Ω the flow area with boundary Γ, consisting of disjoint parts Γ_1, Γ_2; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$; $\Omega^0 = \Omega \backslash \Gamma$; $k(x)$ the permeability; $h(x)$ the bed thickness; μ the fluid viscosity; m the porosity; β_j, β_n the coefficients of fluid and porous medium compressibility; $x^l = (x_1^l, x_2^l)$ the coordinates of l-th well placements with a flow rate $q^l(t)$, $l = 1, 2, \ldots, L$, L the number of wells; $\delta(\cdot)$ the the generalized two-dimensional Dirac delta function; T the planning period.

3. Problem-solving procedure. It is assumed that all functions, reservoir, and the fluid parameters involved in the initial-boundary value problem (1)–(3), including the coordinates of the wells x^l, $l = 1, ..., L_1$, are defined. Wells L_2 with unknown coordinates x_i, where $i = L_1 + 1, ..., L_1 + L_2 = L$, is necessary to put into exploration, keeping the following performance, geological and scheduled targets as:

$$p(x,t)\big|_{x\in\Gamma_1} = p_1(x,t), \quad \left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial n}\right|_{x\in\Gamma_2} = p_2(x,t), \quad t \in (0,T], \tag{4}$$

$$(x_1^i, x_2^i) \in \Omega, \quad i = L_1 + 1, \ldots, L; \tag{5}$$

$$\|x^i - x^j\| \geqslant D, \quad i,j = 1, \ldots, L, \quad i \neq j; \tag{6}$$

$$0 \leqslant q^l \leqslant q^l(t) \leqslant q^{-l}, \quad l = 1, \ldots, L; \tag{7}$$

$$\sum_{l=1}^{L}\int_0^T q^l(t)dt \geqslant q, \tag{8}$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm on the plane; D the minimum distance between wells; q_p the target for oil production. As can be seen from (5)–(7), in the performance of a problem with new wells placement, operational conditions must be considered and also optimized. Although some of the working flow rates of wells are set, it is not recommended to change them.

As a condition let us write

$$a(x,\zeta)\zeta > C_1|\zeta|^2; \;\; C_1 = \text{const}, \;\; \zeta \in E^2. \tag{9}$$

Equations (5)–(8) show that in addition to the problem of new wells placement, it is also taken into account the possibility of wells optimization. It should also be noted that the performance of some wells is pre-defined and there is no need to assign them new flow rates performance.

As optimum, the reservoir pressure, minimizing changes in the porous medium permeability, reservoir fluid viscosity, and maximizing oil production criteria are accepted, including their combinations and multi-criteria cases.

4. Conclusions. Thus, in this study, the initial boundary value problem for a nonlinear parabolic equation was defined. This ensures that the imposed conditions and the boundary conditions are mixed, i.e. on the one side is the Dirichlet conditions, on the other the Neumann conditions. Under conditions (5)–(9) with the aid of Leray-Schauder theorem [6, 7], the existence and uniqueness of (1)–(3) problem solution was proven.

The theoretical analysis, presented in this paper, provides minimization of the deviations from the average residual reservoir energy. The appropriate functional finite-difference approximation of the whole problem is performed. Thus, the goal – to obtain a finite mathematical programming problem with constraints of special kind of equality — was achieved, and inequalities, which belongs to a class of optimization problems of network structure. We also use the combination of the method of exterior penalty functions for the account of constraints (4), (5) and the projection of conjugate gradient of the penalty functional taking into account accommodate linear and positional constraints (6) and (7) to solve the resulting problem of mathematical programming. The boundary value problem is approximated using the nets technique and the numerical results for this problem is presented.

References

1. *Bellout M.C., Echeverría Ciaurri D., Durlofsky L.J., Foss B., Kleppe J.* Joint optimization of oil well placement and controls // Comput. Geosci. — 2012. — **16**, №4. — P. 1061–1079.
2. *Klie H., Bangerth W. , Wheeler M.F., Parashar M., Matossian V.* Parallel well location optimization using stochastic algorithms on the grid computational framework // 9th European

Conference on the Mathematics of Oil Recovery-Cannes: France, 30 August – 2 September 2004.
3. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. — Москва: Гостоптехиздат, 1963. — 397 с.
4. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. — Москва: Nedra, 1982. — 407 с.
5. *Айда-заде К.Р., Багиров А.Г.* Численная оптимизация размещения скважин // Вычислительные технологии. — 2006. — **11**, №3, — С. 3–13.
6. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. — 576 с.
7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — Москва: Наука, 1967. — 736 с.

Стаття: надійшла до редколегії 18.11.2015
прийнята до друку 14.12.2016

ОПТИМАЛЬНЕ РОЗТАШУВАННЯ СВЕРДЛОВИН ДЛЯ УПРАВЛІННЯ ПРОДУКТИВНІСТЮ НАФТОВОГО ПОЛЯ

Тагір ГАДЖИЄВ, Солтан АЛІЄВ,
Ґейлан ПАНАХОВ, Ельдар АББАСОВ

Institute of Mathematics and Mechanics
of Azerbaijan National Academy of Sciences,
F. Agaev, 9, AZ1141, Baku, Azerbaijan
e-mail: eldarab@gmail.com

Найважливіша прблема нафтовидобутку – забезпечити економічно вигідну експлуатацію вироблених нафтових полів в умовах обмеженої поінформованості. Відповідна проблема формулюється як двовимірна мішана крайова задача механіки пористих середовищ, у якій параметрами є пористість нафтомісткого середовища, в'язкість і тиск нафти. Оптимізується розташування свердловин і параметри контролю за їхньою експлуатацією. Для застосованих оптимізаційних процедур із обмеженнями з використанням теореми Лере-Шаудера доведено існування та єдиність розв'язку.

Ключові слова: нафтові та газові свердловини, оптимальне розташування свердловин, нафтові родовища, оптимальні критерії, єдиність.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 98–108
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 98–108

УДК 512.536

ON SEMITOPOLOGICAL INTERASSOCIATES OF THE BICYCLIC MONOID

Oleg GUTIK, Kateryna MAKSYMYK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv,
e-mails: o_ gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, kate.maksymyk15@gmail.com

Semitopological interassociates $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ are studied. In particular, we show that for arbitrary non-negative integers m, n and every Hausdorff topology τ on $\mathscr{C}_{m,n}$ such that $(\mathscr{C}_{m,n},\tau)$ is a semitopological semigroup, is discrete. Also, we prove that if an interassociate of the bicyclic monoid $\mathscr{C}_{m,n}$ is a dense subsemigroup of a Hausdorff semitopological semigroup $(S,\cdot)$ and $I = S\setminus\mathscr{C}_{m,n}\neq\varnothing$ then I is a two-sided ideal of the semigroup S and show that for arbitrary non-negative integers m, n, any Hausdorff locally compact semitopological semigroup $\mathscr{C}^0_{m,n}=\mathscr{C}_{m,n}\sqcup\{0\}$ is either discrete or compact.

Key words: semigroup, interassociate of a semigroup, semitopological semigroup, topological semigroup, bicyclic extension, locally compact space, discrete space, remainder.

We shall follow the terminology of [9, 10, 14, 27]. In this paper all spaces will be assumed to be Hausdorff. By $\mathbb{N}_0$ and $\mathbb{N}$ we denote the sets of non-negative integers and positive integers, respectively. If A is a subset of a topological space X then by $\operatorname{cl}_X(A)$ and $\operatorname{int}_X(A)$ we denote the closure and interior of A in X, respectively.

A *semigroup* is a non-empty set with a binary associative operation.

The *bicyclic semigroup* (or the *bicyclic monoid*) $\mathscr{C}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q subject only to the condition $pq=1$. The bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is a combinatorial bisimple F-inverse semigroup (see [23]) and it plays an important role in the algebraic theory of semigroups and in the theory of topological semigroups. For example the well-known O. Andersen's result [1] states that a (0–)simple semigroup is completely (0–)simple if and only if it does not contain the bicyclic semigroup. The bicyclic semigroup cannot be embedded into the stable semigroups [22].

2010 Mathematics Subject Classification: 20M10, 22A15, 54D40, 54D45, 54H10.

An interassociate of a semigroup $(S, \cdot)$ is a semigroup $(S, *)$ such that for all $a, b, c \in S$, $a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * c$ and $a * (b \cdot c) = (a * b) \cdot c$. This definition of interassociativity was studied extensively in 1996 by Boyd et al [8]. Certain classes of semigroups are known to give rise to interassociates with various properties. For example, it is very easy to show that if S is a monoid, every interassociate must satisfy the condition $a * b = acb$ for some fixed element $c \in S$ (see [8]). This type of interassociate was called a variant by Hickey [20]. In addition, every interassociate of a completely simple semigroup is completely simple [8]. Finally, it is relatively easy to show that every interassociate of a group is isomorphic to the group itself.

In the paper [16] the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ and its interassociates are investigated. In particular, if p and q are generators of the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ and m and n are fixed nonnegative integers, the operation $a *_{m,n} b = aq^m p^n b$ is known to be an interassociate. It was shown that for distinct pairs (m,n) and (s,t), the interassociates $(\mathscr{C}(p,q), *_{m,n})$ and $(\mathscr{C}(p,q), *_{s,t})$ are not isomorphic. Also in [16] the authors generalized a result regarding homomorphisms on $\mathscr{C}(p,q)$ to homomorphisms on its interassociates.

Later for fixed non-negative integers m and n the interassociate $(\mathscr{C}(p,q), *_{m,n})$ of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ will be denoted by $\mathscr{C}_{m,n}$.

A (*semi*)*topological semigroup* is a topological space with a (separately) continuous semigroup operation.

The bicyclic semigroup admits only the discrete semigroup topology and if a topological semigroup S contains it as a dense subsemigroup then $\mathscr{C}(p,q)$ is an open subset of S [13]. Bertman and West in [7] extend this result for the case of Hausdorff semitopological semigroups. Stable and Γ-compact topological semigroups do not contain the bicyclic semigroup [2, 21]. The problem of an embedding of the bicyclic monoid into compact-like topological semigroups studied in [5, 6, 19]. Also in the paper [15] it was proved that the discrete topology is the unique topology on the extended bicyclic semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ such that the semigroup operation on $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ is separately continuous. Amazing dichotomy for the bicyclic monoid with adjoined zero $\mathscr{C}^0 = \mathscr{C}(p,q) \sqcup \{0\}$ was proved in [18]: every Hausdorff locally compact semitopological bicyclic semigroup with adjoined zero $\mathscr{C}^0$ is either compact or discrete.

In this paper we study semitopological interassociates $(\mathscr{C}(p,q), *_{m,n})$ of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ for arbitrary non-negative integers m and n. Some results from [7, 13, 18] obtained for the bicyclic semigroup are extended to its interassociate $(\mathscr{C}(p,q), *_{m,n})$. In particular, we show that for arbitrary non-negative integers m, n and every Hausdorff topology τ on $\mathscr{C}_{m,n}$ such that $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$ is a semitopological semigroup, is discrete. Also, we prove that if an interassociate of the bicyclic monoid $\mathscr{C}_{m,n}$ is a dense subsemigroup of a Hausdorff semitopological semigroup $(S, \cdot)$ and $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n} \neq \varnothing$ then I is a two-sided ideal of the semigroup S and show that for arbitrary non-negative integers m, n, any Hausdorff locally compact semitopological semigroup $\mathscr{C}^0_{m,n}$ ($\mathscr{C}^0_{m,n} = \mathscr{C}_{m,n} \sqcup \{0\}$) is either discrete or compact.

For arbitrary $m, n \in N$ we denote

$$\mathscr{C}^*_{m,n} = \left\{ q^{n+k} p^{m+l} \in \mathscr{C}_{m,n} \colon k.l \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

The semigroup operation $*_{m,n}$ of $\mathscr{C}_{m,n}$ implies that $\mathscr{C}^*_{m,n}$ is a subsemigroup of $\mathscr{C}_{m,n}$.

We need the following trivial lemma.

Lemma 1. *For arbitrary non-negative integers m and n the subsemigroup $\mathscr{C}^*_{m,n}$ of $\mathscr{C}_{m,n}$ is isomorphic to the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ under the map $\iota\colon \mathscr{C}(p,q)\to\mathscr{C}^*_{m,n}\colon q^ip^j\mapsto q^{n+i}p^{m+j}$, $i,j\in\mathbb{N}_0$.*

Proof. It is sufficient to show that the map $\iota\colon \mathscr{C}(p,q)\to\mathscr{C}^*_{m,n}$ is a homomorphism, because ι is bijective. Then for arbitrary $i,j,k,l\in\mathbb{N}_0$ we have that

$$\iota(q^ip^j\cdot q^kp^l)=\begin{cases}\iota(q^{i-j+k}p^l), & \text{if } j<k;\\ \iota(q^ip^{j-k+l}), & \text{if } j\geqslant k\end{cases}=\begin{cases}q^{n+i-j+k}p^{m+l}, & \text{if } j<k;\\ q^{n+i}p^{m+j-k+l}, & \text{if } j\geqslant k\end{cases}$$

and

$$\begin{aligned}\iota(q^ip^j)*_{m,n}\iota(q^kp^l)&=q^{n+i}p^{m+j}*_{m,n}q^{n+k}p^{m+l}=\\ &=q^{n+i}p^{m+j}\cdot q^mp^n\cdot q^{n+k}p^{m+l}=\\ &=q^{n+i}p^j\cdot q^kp^{m+l}=\\ &=\begin{cases}q^{n+i-j+k}p^{m+l}, & \text{if } j<k;\\ q^{n+i}p^{m+j-k+l}, & \text{if } j\geqslant k,\end{cases}\end{aligned}$$

which completes the proof of the lemma. □

Lemma I.1 from [13] and the definition of the semigroup operation in $\mathscr{C}_{m,n}$ imply the following:

Lemma 2. *For arbitrary non-negative integers m and n and for each elements $a,b\in\mathscr{C}_{m,n}$ both sets*

$$\{x\in\mathscr{C}_{m,n}\colon a*_{m,n}x=b\}\qquad\text{and}\qquad\{x\in\mathscr{C}_{m,n}\colon x*_{m,n}a=b\}$$

are finite; that is, both left and right translation by a are finite-to-one maps.

The following theorem generalizes the Eberhart–Selden result on semigroup topologization of the bicyclic semigroup (see [13, Corollary I.1]) and the corresponding statement for the case semitopological semigroups in [7].

Theorem 1. *For arbitrary non-negative integers m, n, every Hausdorff semitopological semigroup $(\mathscr{C}_{m,n},\tau)$ is discrete.*

Proof. By Proposition 1 of [7] every Hausdorff semitopological semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ is discrete. Hence Lemma 1 implies that for any element $x\in\mathscr{C}^*_{m,n}$ there exists an open neighbourhood $U(x)$ of the point x in $(\mathscr{C}_{m,n},\tau)$ such that $U(x)\cap\mathscr{C}^*_{m,n}=\{x\}$. Fix an arbitrary open neighbourhood $U(q^np^m)$ of the point q^np^m in $(\mathscr{C}_{m,n},\tau)$ such that $U(q^np^m)\cap\mathscr{C}^*_{m,n}=\{q^np^m\}$. Then the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}_{m,n},\tau)$ implies that there exists an open neighbourhood $V(q^np^m)\subseteq U(q^np^m)$ of the point q^np^m in the space $(\mathscr{C}_{m,n},\tau)$ such that

$$V(q^np^m)*_{m,n}q^np^m\subseteq U(q^np^m)\qquad\text{and}\qquad q^np^m*_{m,n}V(q^np^m)\subseteq U(q^np^m).$$

Suppose to the contrary that the neighbourhood $V(q^np^m)$ is an infinite set. Then at least one of the following conditions holds:

(i) there exists a non-negative integer $i_0<n$ such that the set $A=\{q^{i_0}p^l\colon l\in N\}\cap V(q^np^m)$ is infinite;

(ii) there exists a non-negative integer $j_0<m$ such that the set $B=\{q^lp^{j_0}\colon l\in N\}\cap V(q^np^m)$ is infinite.

In case (i) for arbitrary $q^{i_0}p^l \in A$ we have that

$$\begin{aligned} q^n p^m *_{m,n} q^{i_0}p^l &= q^n p^m q^m p^n q^{i_0} p^l = q^n p^n q^{i_0} p^l = \\ &= q^n p^{n-i_0+l} \notin U(q^n p^m) \quad \text{for sufficiently large } l; \end{aligned}$$

and similarly in case (ii) we obtain that

$$\begin{aligned} q^l p^{j_0} *_{m,n} q^n p^m &= q^l p^{j_0} q^m p^n q^n p^m = q^l p^{j_0} q^m p^m = \\ &= q^{m-j_0+l} p^m \notin U(q^n p^m) \quad \text{for sufficiently large } l; \end{aligned}$$

for each $q^l p^{j_0} \in B$, which contradicts the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$. The obtained contradiction implies that $q^n p^m$ is an isolated point in the space $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$.

Now, since the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$ is simple (see [16, Section 2]) for arbitrary $a, b \in \mathscr{C}_{m,n}$ there exist $x, y \in \mathscr{C}_{m,n}$ such that $xay = b$. The above argument implies that for arbitrary element $u \in \mathscr{C}_{m,n}$ there exist $x_u, y_u \in \mathscr{C}_{m,n}$ such that $x_u u y_u = q^n p^m$. Now, by Lemma 2 we get that the equation $x_u x y_u = q^n p^m$ has finitely many solutions. This and the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$ imply that the point u has an open finite neighbourhood in $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$, and hence, by the Hausdorffness of $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$, u is an isolated point in $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$. Then the choice of u implies that all elements of the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$ are isolated points in $(\mathscr{C}_{m,n}, \tau)$. □

The following theorem generalizes Theorem I.3 from [13].

Theorem 2. *If m and n are arbitrary non-negative integers, the interassociate $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is a dense subsemigroup of a Hausdorff semitopological semigroup $(S, \cdot)$, and $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n} \neq \varnothing$ then I is a two-sided ideal of the semigroup S.*

Proof. Fix an arbitrary element $y \in I$. If $x \cdot y = z \notin I$ for some $x \in \mathscr{C}_{m,n}$ then there exists an open neighbourhood $U(y)$ of the point y in the space S such that $\{x\} \cdot U(y) = \{z\} \subset \mathscr{C}_{m,n}$. The neighbourhood $U(y)$ contains infinitely many elements of the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$ which contradicts Lemma 2. The obtained contradiction implies that $x \cdot y \in I$ for all $x \in \mathscr{C}_{m,n}$ and $y \in I$. The proof of the statement that $y \cdot x \in I$ for all $x \in \mathscr{C}_{m,n}$ and $y \in I$ is similar.

Suppose to the contrary that $x \cdot y = w \notin I$ for some $x, y \in I$. Then $w \in \mathscr{C}_{m,n}$ and the separate continuity of the semigroup operation in S implies that there exist open neighbourhoods $U(x)$ and $U(y)$ of the points x and y in S, respectively, such that $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ and $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$. Since both neighbourhoods $U(x)$ and $U(y)$ contain infinitely many elements of the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$, both equalities $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ and $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$ contradict the mentioned above part of the proof, because $\{x\} \cdot (U(y) \cap \mathscr{C}_{m,n}) \subseteq I$. The obtained contradiction implies that $x \cdot y \in I$. □

We recall that a topological space X is said to be:

- *compact* if every open cover of X contains a finite subcover;
- *countably compact* if each closed discrete subspace of X is finite;
- *feebly compact* if each locally finite open cover of X is finite;
- *pseudocompact* if X is Tychonoff and each continuous real-valued function on X is bounded;

- *locally compact* if every point x of X has an open neighbourhood $U(x)$ with the compact closure $\operatorname{cl}_X(U(x))$;
- *Čech-complete* if X is Tychonoff and there exists a compactification cX of X such that the remainder of X is an F_σ-set in cX.

According to Theorem 3.10.22 of [14], a Tychonoff topological space X is feebly compact if and only if X is pseudocompact. Also, a Hausdorff topological space X is feebly compact if and only if every locally finite family of non-empty open subsets of X is finite. Every compact space and every sequentially compact space are countably compact, every countably compact space is feebly compact (see [4]).

A topological semigroup S is called Γ-*compact* if for every $x \in S$ the closure of the set $\{x, x^2, x^3, \ldots\}$ is compact in S (see [21]). Since by Lemma 1 the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$ contains the bicyclic semigroup as a subsemigroup the results obtained in [2], [5], [6], [19], [21] imply the following corollary

Corollary 1. *Let m and n be arbitrary non-negative integers. If a Hausdorff topological semigroup S satisfies one of the following conditions:*

(*i*) *S is compact;*
(*ii*) *S is Γ-compact;*
(*iii*) *the square $S \times S$ is countably compact; or*
(*iv*) *the square $S \times S$ is a Tychonoff pseudocompact space,*

then S does not contain the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$.

Proposition 1. *Let m and n be arbitrary non-negative integers. Let S be a Hausdorff topological semigroup which contains a dense subsemigroup $\mathscr{C}_{m,n}$. Then for every $c \in \mathscr{C}_{m,n}$ the set*

$$D_c = \{(x, y) \in \mathscr{C}_{m,n} \times \mathscr{C}_{m,n} : x *_{m,n} y = c\}$$

is an open-and-closed subset of $S \times S$.

Proof. By Theorem 1, $\mathscr{C}_{m,n}$ is a discrete subspace of S and hence Theorem 3.3.9 of [14] implies that $\mathscr{C}_{m,n}$ is an open subspace of S. Then the continuity of the semigroup operation of S implies that D_c is an open subset of $S \times S$ for every $c \in \mathscr{C}_{m,n}$.

Suppose that there exists $c \in \mathscr{C}_{m,n}$ such that D_c is a non-closed subset of $S \times S$. Then there exists an accumulation point $(a, b) \in S \times S$ of the set D_c. The continuity of the semigroup operation in S implies that $a \cdot b = c$. But $\mathscr{C}_{m,n} \times \mathscr{C}_{m,n}$ is a discrete subspace of $S \times S$ and hence by Theorem 2 the points a and b belong to the two-sided ideal $I = S \setminus \mathscr{C}_{m,n}$ and hence the product $a \cdot b \in S \setminus \mathscr{C}_{m,n}$ cannot be equal to the element c. $\square$

Theorem 3. *Let m and n be arbitrary non-negative integers. If a Hausdorff topological semigroup S contains $\mathscr{C}_{m,n}$ as a dense subsemigroup then the square $S \times S$ is not feebly compact.*

Proof. By Proposition 1 for every $c \in \mathscr{C}_{m,n}$ the square $S \times S$ contains an open-and-closed discrete subspace D_c. In the case when $c = q^n p^m$, the subspace D_c contains an infinite subset $\left\{\left(q^n p^{m+i}, q^{n+i} p^m\right) : i \in \mathbb{N}_0\right\}$ and hence D_c is infinite. This implies that the square $S \times S$ is not feebly compact. $\square$

For arbitrary non-positive integers m and n by $\mathscr{C}^0_{m,n}$ we denote the interassociate $\mathscr{C}_{m,n}$ with an adjoined zero 0 of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$, i.e., $\mathscr{C}^0_{m,n} = \mathscr{C}_{m,n} \sqcup \{0\}$.

Example 1. On the semigroup $\mathscr{C}^0_{m,n}$ we define a topology τ_{Ac} in the following way:

(i) every element of the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$ is an isolated point in the space $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_{\mathsf{Ac}})$;
(ii) the family $\mathscr{B}(0) = \{U \subseteq \mathscr{C}^0_{m,n} \colon U \ni 0 \text{ and } \mathscr{C}_{m,n} \setminus U \text{ is finite}\}$ determines a base of the topology τ_{Ac} at zero $0 \in \mathscr{C}^0_{m,n}$,

i.e., τ_{Ac} is the topology of the Alexandroff one-point compactification of the discrete space $\mathscr{C}_{m,n}$ with the remainder $\{0\}$. The semigroup operation in $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_{\mathsf{Ac}})$ is separately continuous, because all elements of the interassociate $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ are isolated points in the space $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_{\mathsf{Ac}})$ and the left and right translations in the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$ are finite-to-one maps (see Lemma 2).

Remark 1. By Theorem 1 the discrete topology τ_{d} is a unique Hausdorff topology on the interassociate $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$, $m,n \in \mathbb{N}_0$, such that $\mathscr{C}_{m,n}$ is a semitopological semigroup. So τ_{Ac} is the unique compact topology on $\mathscr{C}^0_{m,n}$ such that $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_{\mathsf{Ac}})$ is a Hausdorff compact semitopological semigroup for any non-negative integers m and n.

The following theorem generalized Theorem 1 from [18].

Theorem 4. *Let m and n be arbitrary non-negative integers. If $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ is a Hausdorff locally compact semitopological semigroup, then τ is either discrete or $\tau = \tau_{\mathsf{Ac}}$.*

Proof. Let τ be a Hausdorff locally compact topology on $\mathscr{C}^0_{m,n}$ such that $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ is a semitopological semigroup and the zero 0 of $\mathscr{C}^0_{m,n}$ is not an isolated point of the space $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$. By Lemma 1 the subsemigroup $\mathscr{C}^*_{m,n}$ of $\mathscr{C}_{m,n}$ is isomorphic to the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ and hence the subsemigroup $(\mathscr{C}^*_{m,n})^0 = \mathscr{C}^*_{m,n} \sqcup \{0\}$ of $\mathscr{C}^0_{m,n}$ is isomorphic to the bicyclic semigroup with adjoined zero $\mathscr{C}^0 = \mathscr{C}(p,q) \sqcup \{0\}$. Theorem 1 implies that $\mathscr{C}_{m,n}$ is a dense discrete subspace of $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$, so it is open by Corollary 3.3.10 of [14]. This Corollary also implies that the subspace $(\mathscr{C}^*_{m,n})^0$ of $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ is locally compact.

We claim that for every open neighbourhood $V(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ the set $V(0) \cap (\mathscr{C}^*_{m,n})^0$ is infinite. Suppose to the contrary that there exists an open neighbourhood $V(0)$ of zero 0 in $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ such that the set $V(0) \cap (\mathscr{C}^*_{m,n})^0$ is finite. Since the space $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ is Hausdorff, without loss of generality we may assume that $V(0) \cap (\mathscr{C}^*_{m,n})^0 = \{0\}$. Then by the separate continuity of the semigroup operation of $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ there exists an open neighbourhood $W(0)$ of zero in $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$ such that $W(0) \subseteq V(0)$ and

$$(q^n p^m *_{m,n} W(0)) \cup (W(0) *_{m,n} q^n p^m) \subseteq V(0).$$

Since 0 is a non-isolated point of $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau)$, at least one of the following conditions holds:

(a) the set $W(0) \cap \{q^i p^j \colon i \in \mathbb{N}_0, j = 0, 1, \ldots, m-1\}$ is infinite;
(b) the set $W(0) \cap \{q^i p^j \colon i = 0, 1, \ldots, n-1, j \in \mathbb{N}_0\}$ is infinite.

If (a) holds then the neighbourhood $W(0)$ contains infinitely many elements of the form q^ip^j, where $j<m$, for which we have that

$$q^ip^j *_{m,n} q^np^m = q^ip^jq^mp^nq^np^m = q^ip^jq^mp^m = q^{i-j+m}p^m \in \mathscr{C}^*_{m,n}.$$

Similarly, if (b) holds then the neighbourhood $W(0)$ contains infinitely many elements of the form q^ip^j, where $i<n$, for which we have that

$$q^np^m *_{m,n} q^ip^j = q^np^mq^mp^nq^ip^j = q^np^nq^ip^j = q^np^{n-i+j} \in \mathscr{C}^*_{m,n}.$$

The above arguments imply that the set $V(0)\cap\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0$ is infinite. Hence we have that the zero 0 is a non-isolated point in the subspace $\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0$ of $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$.

By Lemma 1 the subsemigroup $\mathscr{C}^*_{m,n}$ of $\mathscr{C}_{m,n}$ is isomorphic to the bicyclic semigroup and hence by Theorem 1 from [18] we obtain that the space $\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0$ is compact. Then for every open neighbourhood $U(0)$ of the zero 0 in $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$ we have that the set $\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0\setminus U(0)$ is finite.

Now, the semigroup operation of $\mathscr{C}^0_{m,n}$ implies that

$$p^m *_{m,n} q^ip^j = p^mq^mp^nq^ip^j = p^nq^ip^j = q^{i-n}p^j$$

and

$$q^ip^j *_{m,n} q^n = q^ip^jq^mp^nq^n = q^ip^jq^m = q^ip^{j-m},$$

for arbitrary element $q^ip^j\in\mathscr{C}^*_{m,n}$. This and the definition of $\mathscr{C}^*_{m,n}$ imply that

$$p^m *_{m,n} \mathscr{C}^*_{m,n} = \left\{q^{i-n}p^j \colon i\geqslant n, j\geqslant m\right\}$$

and

$$\mathscr{C}^*_{m,n} *_{m,n} q^n = \left\{q^ip^{j-m} \colon i\geqslant n, j\geqslant m\right\}.$$

Thus the set $\mathscr{C}^0_{m,n}\setminus\left(p^m *_{m,n}\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0\cup\left(\mathscr{C}^*_{m,n}\right)^0 *_{m,n} q^n\right)$ is finite, and hence the above arguments imply that every open neighbourhood $U(0)$ of the zero 0 in $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$ has a finite complement in the space $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$. Thus the space $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau\right)$ is compact and by Remark 1 the semitopological semigroup $\mathscr{C}^0_{m,n}$ is topologically isomorphic to the semitopological semigroup $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau_{\mathsf{Ac}}\right)$. $\square$

Since by Corollary 1 the interassociate $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ does not embed into any Hausdorff compact topological semigroup, Theorem 4 implies the following corollary.

Corollary 2. *If m and n are arbitrary non-negative integers and $\mathscr{C}^0_{m,n}$ is a Hausdorff locally compact topological semigroup, then $\mathscr{C}^0_{m,n}$ is discrete.*

The following example shows that a counterpart of the statement of Corollary 2 does not hold when $\mathscr{C}^0_{m,n}$ is a Čech-complete metrizable topological semigroup for any non-negative integers m and n.

Example 2. Fix arbitrary non-negative integers m and n. On the semigroup $\mathscr{C}^0_{m,n}$ we define a topology τ_1 in the following way:

(i) every element of the interassociate $\mathscr{C}_{m,n}$ of the bicyclic monoid is an isolated point in the space $\left(\mathscr{C}^0_{m,n},\tau_1\right)$;

(ii) the family $\mathscr{B}_1(0) = \{U_s : s \in \mathbb{N}_0\}$, where
$$U_s = \{0\} \cup \left\{q^{n+i}p^{m+j} \in \mathscr{C}^0_{m,n} : i, j > s\right\},$$
is a base of the topology τ_1 at the zero.

It is obvious that $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ is first countable. Then the definition of the semigroup operation of $\mathscr{C}^0_{m,n}$ and the arguments presented in [17, p. 68] show that $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ is a Hausdorff topological semigroup.

First we observe that each element of the family $\mathscr{B}_1(0)$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$, and hence the space $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ is regular. Since the space $\mathscr{C}^0_{m,n}$ is countable and first countable, it is second countable and hence by Theorem 4.2.9 from [14] it is metrizable. Also, by Theorem 4.3.26 from [14] the space $(\mathscr{C}^0_{m,n}, \tau_1)$ is Čech-complete, as a completely metrizable space.

Also the following example presents an interassociate of the bicyclic semigroup with adjoined zero $\mathscr{C}^0 = \mathscr{C}(p,q) \sqcup \{0\}$ for which a counterpart of the statements of Theorem 4 and of Corollary 2 do not hold.

Example 3. The interassociate of the bicyclic semigroup with adjoined zero $\mathscr{C}^0$ with the operation $a * b = a \cdot 0 \cdot b$ is a countable semigroup with zero-multiplication. It is well known that this semigroup endowed with any topology is a topological semigroup (see [9, Vol. 1, Chapter 1]).

Later we shall need the following notions. A continuous map $f : X \to Y$ from a topological space X into a topological space Y is called:

- *quotient* if the set $f^{-1}(U)$ is open in X if and only if U is open in Y (see [26] and [14, Section 2.4]);
- *hereditarily quotient* or *pseudoopen* if for every $B \subset Y$ the restriction $f|_B : f^{-1}(B) \to B$ of f is a quotient map (see [24, 25, 3] and [14, Section 2.4]);
- *closed* if $f(F)$ is closed in Y for every closed subset F in X;
- *perfect* if X is Hausdorff, f is a closed map and all fibers $f^{-1}(y)$ are compact subsets of X (see [28] and [14, Section 3.7]).

Every closed map and every hereditarily quotient map are quotient [14]. Moreover, a continuous map $f : X \to Y$ from a topological space X onto a topological space Y is hereditarily quotient if and only if for every $y \in Y$ and every open subset U in X which contains $f^{-1}(y)$ we have that $y \in \operatorname{int}_Y(f(U))$ (see [14, 2.4.F]).

We need the following trivial lemma, which follows from separate continuity of the semigroup operation in semitopological semigroups.

Lemma 3. *Let S be a Hausdorff semitopological semigroup and I be a compact ideal in S. Then the Rees-quotient semigroup S/I with the quotient topology is a Hausdorff semitopological semigroup.*

The following theorem generalizes Theorem 2 from [18].

Theorem 5. *Let $(\mathscr{C}^I_{m,n}, \tau)$ be a Hausdorff locally compact semitopological semigroup, $\mathscr{C}^I_{m,n} = \mathscr{C}_{m,n} \sqcup I$ and I is a compact ideal of $\mathscr{C}^I_{m,n}$. Then either $(\mathscr{C}^I_{m,n}, \tau)$ is a compact semitopological semigroup or the ideal I is open.*

Proof. Suppose that I is not open. By Lemma 3 the Rees-quotient semigroup $\mathscr{C}_{m,n}^I/I$ with the quotient topology τ_{q} is a semitopological semigroup. Let $\pi\colon \mathscr{C}_{m,n}^I \to \mathscr{C}_{m,n}^I/I$ be the natural homomorphism, which is a quotient map. It is obvious that the Rees-quotient semigroup $\mathscr{C}_{m,n}^I/I$ is isomorphic to the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}^0$ and the image $\pi(I)$ is zero of $\mathscr{C}_{m,n}^I/I$. Now we shall show that the natural homomorphism $\pi\colon \mathscr{C}_{m,n}^I \to \mathscr{C}_{m,n}^I/I$ is a hereditarily quotient map. Since $\pi(\mathscr{C}_{m,n})$ is a discrete subspace of $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$, it is sufficient to show that for every open neighbourhood $U(I)$ of the ideal I in the space $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ the image $\pi(U(I))$ is an open neighbourhood of the zero 0 in the space $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$. Indeed, $\mathscr{C}_{m,n}^I \setminus U(I)$ is an open subset of $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$, because the elements of the semigroup $\mathscr{C}_{m,n}$ are isolated points of the space $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$. Also, since the restriction $\pi|_{\mathscr{C}_{m,n}}\colon \mathscr{C}_{m,n} \to \pi(\mathscr{C}_{m,n})$ of the natural homomorphism $\pi\colon \mathscr{C}_{m,n}^I \to \mathscr{C}_{m,n}^I/I$ is one-to-one, $\pi(\mathscr{C}_{m,n}^I \setminus U(I))$ is a closed subset of $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$. So $\pi(U(I))$ is an open neighbourhood of the zero 0 of the semigroup $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$, and hence the natural homomorphism $\pi\colon \mathscr{C}_{m,n}^I \to \mathscr{C}_{m,n}^I/I$ is a hereditarily quotient map. Since I is a compact ideal of the semitopological semigroup $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$, $\pi^{-1}(y)$ is a compact subset of $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ for every $y \in \mathscr{C}_{m,n}^I/I$. By Din' N'e T'ong's Theorem (see [12] or [14, 3.7.E]), $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$ is a Hausdorff locally compact space. Since I is not open, by Theorem 4 the semitopological semigroup $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$ is topologically isomorphic to $(\mathscr{C}_{m,n}^0, \tau_{\mathsf{Ac}})$ and hence it is compact. We claim that the space $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ is compact. Indeed, let $\mathscr{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \mathscr{I}\}$ be an arbitrary open cover of the topological space $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$. Since I is compact, there exists a finite family $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\} \subset \mathscr{U}$ such that $I \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$. Put $U = U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$. Then $\mathscr{C}_{m,n}^I \setminus U$ is a closed-and-open subset of $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$. Also, since the restriction $\pi|_{\mathscr{C}_{m,n}}\colon \mathscr{C}_{m,n} \to \pi(\mathscr{C}_{m,n})$ of the natural homomorphism π is one-to-one, $\pi(\mathscr{C}_{m,n}^I \setminus U(I))$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$, and hence the image $\pi(\mathscr{C}_{m,n}^I \setminus U(I))$ is finite, because the semigroup $(\mathscr{C}_{m,n}^I/I, \tau_{\mathsf{q}})$ is compact. Thus, the set $\mathscr{C}_{m,n}^I \setminus U$ is finite as well and hence the space $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ is also compact. □

Corollary 3. *If $(\mathscr{C}_{m,n}^I, \tau)$ is a Hausdorff locally compact topological semigroup, $\mathscr{C}_{m,n}^I = \mathscr{C}_{m,n} \sqcup I$ and I is a compact ideal of $\mathscr{C}_{m,n}^I$, then the ideal I is open.*

Acknowledgements. We acknowledge the referee for useful important comments and suggestions.

References

1. *Andersen O. Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis, Hamburg, 1952.
2. *Anderson L.W., Hunter R.P, Koch R.J.* Some results on stability in semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — **117**. — P. 521–529.
3. *Arkhangel'skiĭ A.V.* Bicompact sets and the topology of spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1963. — **150**, №1. — P. 9–12 (in Russian); English version in: Soviet Math. Dokl. — 1963. — **4**. — P. 561–564.
4. *Arkhangel'skiĭ A.V.* Topological function spaces. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. — ix+205 p.

5. *Banakh T., Dimitrova S., Gutik O.* The Rees-Suschkiewitsch Theorem for simple topological semigroups // Mat. Stud. — 2009. — **31**, №2. — P. 211–218.
6. *Banakh T., Dimitrova S., Gutik O.* Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups // Topology Appl. — 2010. — **157**, №18. — P. 2803–2814.
7. *Bertman M.O., West T.T.* Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups // Proc. Roy. Irish Acad. — 1976. — **A76**, №21–23. — P. 219–226.
8. *Boyd S.J., Gould M., Nelson A.* Interassociativity of semigroups // Proceedings of the Tennessee topology conference, Misra, P. R. (ed.) et al., Nashville, TN, USA, June 10–11, 1996. — Singapore: World Scientific, 1997, P. 33–51.
9. *Carruth J. H., Hildebrant J. A., Koch R. J.* The theory of topological semigroups. — New York–Basel: Marcell Dekker Inc., 1983. — Vol. 1. — 244 p.; 1986. — Vol. 2. — 195 p.
10. *Clifford A. H., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. — Providence: Amer. Math. Soc., 1961. — Vol. 1. — xv+224 p.; 1967. — Vol. 2. — xv+350 p.
11. *Colmez J.* Sur les espaces précompacts // C. R. Acad. Paris. — 1951. — **233**. — P. 1552–1553.
12. *T'ong Din' N'e.* Preclosed mappings and A. D. Taĭmanov's theorem // Dokl. Akad. Nauk SSSR . — 1963. — **152**. — P. 525–528 (in Russian); English version in: Soviet Math. Dokl. — 1963. — **4**. — P. 1335–1338.
13. *Eberhart C., Selden J.* On the closure of the bicyclic semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — **144**. — P. 115–126.
14. *Engelking R.* General topology. — Berlin: Heldermann, 1989. — 539 p.
15. *Fihel I.R., Gutik O.V.* On the closure of the extended bicyclic semigroup // Carpathian Math. Publ. — 2011. — **3**, №2. — P. 131–157.
16. *Givens B.N., Rosin A., Linton K.* Interassociates of the bicyclic semigroup // Semigroup Forum. — 2017. — **94**, №1. — P. 104–122
17. *Gutik O.V.* Any topological semigroup topologically isomorphically embeds into a simple path-connected topological semigroup // Algebra and Topology, Lviv: Lviv Univ. Press, 1996, P. 65–73, (in Ukrainian).
18. *Gutik O.* On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 2015. — **80**. — P. 33–41.
19. *Gutik O., Repovš D.* On countably compact 0-simple topological inverse semigroups // Semigroup Forum. — 2007. — **75**, №2. — P. 464–469.
20. *Hickey J. B.* Semigroups under a sandwich operation // Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. — 1983. — **26**, №3. — P. 371–382.
21. *Hildebrant J.A., Koch R.J.* Swelling actions of Γ-compact semigroups // Semigroup Forum. — 1986. — **33**, №1. — P. 65–85.
22. *Koch R.J., Wallace A.D.* Stability in semigroups // Duke Math. J. — 1957. — **24**, №2. — P. 193–195.
23. *Lawson M.* Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. — Singapore: World Scientific, 1998. — 411 p.
24. *McDougle P.* A theorem on quasi-compact mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1958. — **9**, №3. — P. 474–477.
25. *McDougle P.* Mapping and space relations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — **10**, №2. — P. 320–323.
26. *Moore R.L.* Concerning upper semi-continuous collections of continua // Trans. Amer. Math. Soc. — 1925. — **27**, №4. — P. 416–428.
27. *Ruppert W.* Compact semitopological semigroups: An intrinsic theory // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer, 1984. — 1079. — 259 p.

28. *Vaĭnšteĭn I. A.* On closed mappings of metrc spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1947. — **57**. — P. 319–321 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 25.09.2016
доопрацьована 11.01.2017
прийнята до друку 13.03.2017

ПРО НАПІВТОПОЛОГІЧНІ ІНТЕРАСОЦІАТИВНОСТІ БІЦИКЛІЧНОГО МОНОЇДА

Олег ГУТІК, Катерина МАКСИМИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000,
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, kate.maksymyk15@gmail.com

Вивчаємо напівтопологічні інтерасоціативності $\mathscr{C}_{m,n}$ біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$. Доведено, що для довільних невід'ємних цілих чисел m, n кожна гаусдорфова топологія τ на $\mathscr{C}_{m,n}$ така, що $(\mathscr{C}_{m,n},\tau)$ — напівтопологічна напівгрупа, є дискретною. Доведено таке: якщо інтерасоціативність біциклічного моноїда $\mathscr{C}_{m,n}$ є щільною піднапівгрупою гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи $(S,\cdot)$ та $I=S\setminus\mathscr{C}_{m,n}\neq\varnothing$, то I — двобічний ідеал в S, а також, що для довільних невід'ємних цілих чисел m, n кожна гаусдорфова локально компактна напівтопологічна напівгрупа $\mathscr{C}^0_{m,n}=\mathscr{C}_{m,n}\sqcup\{0\}$ є або дискретною, або компактною.

Ключові слова: напівгрупа, інтерасоціативність напівгрупи, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, біциклічний моноїд, локально компактний простір, дискретний простір, наріст.

ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 109–127*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 109–127

УДК 512.534.5

ON THE MONOID OF MONOTONE INJECTIVE PARTIAL SELFMAPS OF $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ WITH COFINITE DOMAINS AND IMAGES, II

Oleg GUTIK, Inna POZDNIAKOVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv,
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, pozdnyakova.inna@gmail.com

Let $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ be the set $\mathbb{N}^2$ with the partial order defined as the product of usual order $\leqslant$ on the set of positive integers $\mathbb{N}$. We study the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ having cofinite domain and image. We describe the natural partial order on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and show that it coincides with the natural partial order which is induced from symmetric inverse monoid $\mathscr{I}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ over the set $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ onto the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. We proved that the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is isomorphic to the semidirect product $\mathscr{P\!O}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ of the monoid $\mathscr{P\!O}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ of orientation-preserving monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images by the cyclic group $\mathbb{Z}_2$ of the order two. Also we describe the congruence σ on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ which is generated by the natural order $\preccurlyeq$ on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$: $\alpha\sigma\beta$ if and only if α and β are comparable in $\left(\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}),\preccurlyeq\right)$. We prove that the quotient semigroup $\mathscr{P\!O}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ is isomorphic to the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_{\omega}$ over an infinite countable set and show that the quotient semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ is isomorphic to the semidirect product of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_{\omega}$ by the group $\mathbb{Z}_2$.

Key words: Semigroup of bijective partial transformations, natural partial order, semidirect product, minimum group congruence, free commutative monoid.

We shall follow the terminology of [2] and [10].

In this paper we shall denote the first infinite cardinal by ω and the cardinality of the set A by $|A|$. We shall identify every set X with its cardinality $|X|$. By $\mathbb{Z}_2$ we shall denote the cyclic group of order two. Also, for infinite subsets A and B of an infinite set X we shall write $A\subseteq^* B$ if and only if there exists a finite subset A_0 of A such that $A\setminus A_0\subseteq B$.

2010 Mathematics Subject Classification: 20M20, 20M18

An algebraic semigroup S is called *inverse* if for any element $x \in S$ there exists a unique $x^{-1} \in S$ such that $xx^{-1}x = x$ and $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. The element x^{-1} is called the *inverse of* $x \in S$.

If S is a semigroup, then we shall denote the subset of idempotents in S by $E(S)$. If S is an inverse semigroup, then $E(S)$ is closed under multiplication and we shall refer to $E(S)$ a *band* (or the *band of* S). If the band $E(S)$ is a non-empty subset of S, then the semigroup operation on S determines the following partial order $\leqslant$ on $E(S)$: $e \leqslant f$ if and only if $ef = fe = e$. This order is called the *natural partial order* on $E(S)$. A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents.

If $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ is a partial map, then by $\operatorname{dom}\alpha$ and $\operatorname{ran}\alpha$ we denote the domain and the range of α, respectively.

Let $\mathscr{I}_\lambda$ denote the set of all partial one-to-one transformations of an infinite set X of cardinality λ together with the following semigroup operation: $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ if $x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}$, for $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda$. The semigroup $\mathscr{I}_\lambda$ is called the *symmetric inverse semigroup* over the set X (see [2, Section 1.9]). The symmetric inverse semigroup was introduced by Vagner [18] and it plays a major role in the theory of semigroups. An element $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda$ is called *cofinite*, if the sets $\lambda \setminus \operatorname{dom}\alpha$ and $\lambda \setminus \operatorname{ran}\alpha$ are finite.

Let $(X, \leqslant)$ be a partially ordered set (a poset). For an arbitrary $x \in X$ we denote

$$\uparrow x = \{y \in X : x \leqslant y\}.$$

We shall say that a partial map $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ is *monotone* if $x \leqslant y$ implies $(x)\alpha \leqslant (y)\alpha$ for $x, y \in \operatorname{dom}\alpha$.

Let $\mathbb{N}$ be the set of positive integers with the usual linear order $\le$. On the Cartesian product $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ we define the product partial order, i.e.,

$$(i,m) \leqslant (j,n) \qquad \text{if and only if} \qquad (i \leqslant j) \quad \text{and} \quad (m \leqslant n).$$

Later the set $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ with so defined partial order will be denoted by $\mathbb{N}^2_\leqslant$.

By $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we denote the semigroup of injective partial monotone selfmaps of $\mathbb{N}^2_\leqslant$ with cofinite domains and images. Obviously, $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is a submonoid of the symmetric inverse semigroup $\mathscr{I}_\omega$ and $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is a countable semigroup.

Furthermore, we shall denote the identity of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ by $\mathbb{I}$ and the group of units of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ by $H(\mathbb{I})$.

For any positive integer n and an arbitrary $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we denote:

$$\begin{array}{ll}
\mathsf{V}^n = \{(n,j) : j \in \mathbb{N}\}; & \mathsf{H}^n = \{(j,n) : j \in \mathbb{N}\};\\
\mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{V}^n \cap \operatorname{dom}\alpha; & \mathsf{V}^n_{\operatorname{ran}\alpha} = \mathsf{V}^n \cap \operatorname{ran}\alpha;\\
\mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha} = \mathsf{H}^n \cap \operatorname{dom}\alpha; & \mathsf{H}^n_{\operatorname{ran}\alpha} = \mathsf{H}^n \cap \operatorname{ran}\alpha,
\end{array}$$

and

$$(i_{\alpha[*,j]}, j_{\alpha[i,*]}) = (i,j)\alpha, \qquad \text{for every} \quad (i,j) \in \operatorname{dom}\alpha.$$

It well known that each partial injective cofinite selfmap f of λ induces a homeomorphism $f^*\colon \lambda^* \to \lambda^*$ of the remainder $\lambda^* = \beta\lambda \setminus \lambda$ of the Stone-Čech compactification of the discrete space λ. Moreover, under some set theoretic axioms (like **PFA** or **OCA**), each homeomorphism of ω^* is induced by some partial injective cofinite selfmap of ω (see [12]–[17]). So, the inverse semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ of injective partial selfmaps of an infinite cardinal λ with cofinite domains and images admits a natural homomorphism $\mathfrak{h}\colon \mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}} \to \mathscr{H}(\lambda^*)$ to the homeomorphism group $\mathscr{H}(\lambda^*)$ of λ^* and this homomorphism is surjective under certain set theoretic assumptions.

In the paper [9] algebraic properties of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ are studied. It is showed that $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ is a bisimple inverse semigroup and that for every non-empty chain L in $E(\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}})$ there exists an inverse subsemigroup S of $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ such that S is isomorphic to the bicyclic semigroup and $L \subseteq E(S)$, the Green relations on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ are described and it is proved that every non-trivial congruence on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ is a group congruence. Also, the structure of the quotient semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}/\sigma$ is described, where σ is the least group congruence on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$.

The semigroups $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ of injective isotone partial selfmaps with cofinite domains and images of positive integers and integers are studied in [7] and [8], respectively. It was proved that the semigroups $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ have similar properties to the bicyclic semigroup: they are bisimple and every non-trivial homomorphic image $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ is a group, and moreover the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ has $\mathbb{Z}(+)$ as a maximal group image and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ has $\mathbb{Z}(+)\times\mathbb{Z}(+)$, respectively.

In the paper [6] we studied the semigroup $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ of monotone injective partial selfmaps of the set of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ having cofinite domain and image, where $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ is the lexicographic product of n-elements chain and the set of integers with the usual linear order. In this paper we described Green's relations on $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$, showed that the semigroup $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ is bisimple and established its projective congruences. Also, we proved that $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ is finitely generated, every automorphism of $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z})$ is inner and showed that in the case $n \geqslant 2$ the semigroup $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ has non-inner automorphisms. In [6] we also proved that for every positive integer n the quotient semigroup $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})/\sigma$, where σ is a least group congruence on $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$, is isomorphic to the direct power $(\mathbb{Z}(+))^{2n}$. The structure of the sublattice of congruences on $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ that are contained in the least group congruence is described in [4].

In the paper [5] we studied algebraic properties of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. We described properties of elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ as monotone partial bijection of $\mathbb{N}^2_\leqslant$ and showed that the group of units of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is isomorphic to the cyclic group of order two. Also in [5] the subsemigroup of idempotents of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and the Green relations on $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ are described. In particular, here we proved that $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

The present paper is a continuation of [5]. We describe the natural partial order $\preccurlyeq$ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and show that it coincides with the natural partial order which is induced from symmetric inverse monoid $\mathscr{I}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ over the set $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ onto the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. We proved that the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is isomorphic to the semidirect product $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \rtimes \mathbb{Z}_2$ of the monoid $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ of orientation-preserving monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_\leqslant$ with cofinite domains and images by the cyclic group $\mathbb{Z}_2$ of the order two. Also we describe the congruence σ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$, which is generated by the natural order $\preccurlyeq$ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$: $\alpha\sigma\beta$ if and only if α and β are comparable in $\big(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant), \preccurlyeq\big)$. We prove that the quotient semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$ is isomorphic to the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$ over an infinite countable set and show that quotient semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ is isomorphic to the semidirect product of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_{\omega}$ by the group $\mathbb{Z}_2$.

The following proposition implies that the equations of the form $a \cdot x = b$ and $x \cdot c = d$ in the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ have finitely many solutions. This property holds for the bicyclic monoid, many its generalizations and other semigroups (see corresponding results in [1, 3, 6, 7, 8, 9]).

Proposition 1. *For every $\alpha, \beta \in \mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, both sets*

$$\left\{\chi \in \mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}) \mid \alpha \cdot \chi = \beta\right\} \qquad \textit{and} \qquad \left\{\chi \in \mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}) \mid \chi \cdot \alpha = \beta\right\}$$

are finite. Consequently, every right translation and every left translation by an element of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is a finite-to-one map.

Proof. We consider the case of the equation $\alpha \cdot \chi = \beta$. In the case of the equation $\chi \cdot \alpha = \beta$ the proof is similar.

The definition of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and the equality $\alpha \cdot \chi = \beta$ imply that $\operatorname{dom} \beta \subseteq \operatorname{dom} \alpha$ and $\operatorname{ran} \chi \subseteq \operatorname{ran} \alpha$. Since any element of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ has a cofinite domain and a cofinite image in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, we conclude that if an element χ_0 satisfies the equality $\alpha \cdot \chi = \beta$ then for every other root χ of the equation $\alpha \cdot \chi = \beta$ there exist finitely many $(i, j) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \operatorname{ran} \beta$ such that one of the following conditions holds:

(1) $(i, j)\chi \neq (i, j)\chi_0$;
(2) $(i, j)\chi$ is determined and $(i, j)\chi_0$ is undetermined;
(3) $(i, j)\chi_0$ is determined and $(i, j)\chi$ is undetermined.

This implies that the equation $\alpha \cdot \chi = \beta$ has finitely many solutions, which completes the proof of the proposition. □

Later we shall describe the natural partial order "$\preccurlyeq$" on the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. For $\alpha, \beta \in \mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ we put

$$\alpha \preccurlyeq \beta \qquad \text{if and only if} \qquad \alpha = \beta\varepsilon \quad \text{for some} \quad \varepsilon \in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})).$$

We need the following proposition from [11].

Proposition 2 ([11, p. 387, Corollary])**.** *For any semigroup S and its natural partial order $\preccurlyeq$ the following conditions are equivalent:*

(i) *$a \preccurlyeq b$;*
(ii) *$a = wb = bz$, $az = a$ for some $w, z \in S^1$;*
(iii) *$a = xb = by$, $xa = ay = a$ for some $x, y \in S^1$.*

Proposition 3. *The relation $\preccurlyeq$ is the natural partial order on the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.*

Proof. Suppose that $\alpha = \beta\varepsilon$ for some idempotent $\varepsilon \in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$. Then we have that

$$\alpha\varepsilon = (\beta\varepsilon)\varepsilon = \beta(\varepsilon\varepsilon) = \beta\varepsilon = \alpha.$$

Let $\iota\colon \operatorname{dom}(\beta\varepsilon) \to \operatorname{dom}(\beta\varepsilon)$ be the identity map of the set $\operatorname{dom}(\beta\varepsilon)$. Then $\iota \in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ and the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ implies that $\operatorname{dom}(\beta\varepsilon) = \operatorname{dom}(\iota\beta)$, because ε is an idempotent of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. This implies that $(i, j)\iota\beta = (i, j)\beta\varepsilon$ for each $(i, j) \in \operatorname{dom}(\iota\beta)$ and hence we get that $\alpha = \beta\varepsilon = \iota\beta$. Next we apply Proposition 2. □

Remark 1. Proposition 3 implies that the natural partial order on the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ coincides with the natural partial order which is induced from symmetric inverse monoid $\mathscr{I}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ over the set $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ onto the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.

We define a relation σ on the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ in the following way:

$$\alpha\sigma\beta \quad \text{if and only if there exists} \quad \varepsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})) \quad \text{such that} \quad \alpha\varepsilon=\beta\varepsilon,$$

for $\alpha,\beta\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.

Proposition 4. *For $\alpha,\beta\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ the following conditions are equivalent:*

(i) *$\alpha\sigma\beta$;*

(ii) *there exist $\varsigma,\upsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ such that $\alpha\varsigma=\beta\upsilon$;*

(iii) *there exist $\varsigma,\upsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ such that $\alpha\varsigma=\upsilon\beta$;*

(iv) *there exists $\iota\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ such that $\iota\alpha=\iota\beta$;*

(v) *there exist $\varsigma,\upsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ such that $\varsigma\alpha=\upsilon\beta$.*

Thus σ is a congruence on the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.

Proof. Implication $(i)\Rightarrow(ii)$ is trivial.

$(ii)\Rightarrow(i)$ If we have that $\alpha\varsigma=\beta\upsilon$ for some $\varsigma,\upsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ then $\alpha\varsigma(\varsigma\upsilon)=\beta\upsilon(\varsigma\upsilon)$. Since $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is a subsemigroup of the symmetric inverse monoid $\mathscr{I}_{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|}$, the idempotents in the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ commute and hence $\alpha(\varsigma\upsilon)=\beta(\varsigma\upsilon)$. This implies that $\alpha\sigma\beta$.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Suppose that $\alpha\varsigma=\beta\upsilon$ for some $\varsigma,\upsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$. Let $\iota\colon\operatorname{dom}(\beta\upsilon)\to\operatorname{dom}(\beta\upsilon)$ be the identity map of the set $\operatorname{dom}(\beta\upsilon)$. Then $\iota\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ and the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ implies that $\operatorname{dom}(\beta\upsilon)=\operatorname{dom}(\iota\beta)$, because υ is an idempotent of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. This implies that $(i,j)\iota\beta=(i,j)\beta\upsilon$ for each $(i,j)\in\operatorname{dom}(\iota\beta)$ and hence we get that $\alpha\varsigma=\beta\upsilon=\iota\beta$.

$(iii)\Rightarrow(ii)$ Suppose that $\alpha\varsigma=\upsilon\beta$ for some $\varsigma,\upsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$. Let $\iota\colon\operatorname{ran}(\upsilon\beta)\to\operatorname{ran}(\upsilon\beta)$ be the identity map of the set $\operatorname{ran}(\upsilon\beta)$. Then $\iota\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ and the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ implies that $\operatorname{ran}(\upsilon\beta)=\operatorname{ran}(\beta\iota)$, because υ is an idempotent of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Since all elements of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ are partial bijections of $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ we get that $\operatorname{dom}(\upsilon\beta)=\operatorname{dom}(\beta\iota)$. This implies that $(i,j)\beta\iota=(i,j)\upsilon\beta$ for each $(i,j)\in\operatorname{dom}(\beta\iota)$ and hence we get that $\alpha\varsigma=\upsilon\beta=\beta\iota$.

The proofs of equivalences $(iii)\Leftrightarrow(iv)$ and $(iv)\Leftrightarrow(v)$ are similar.

It is obvious that σ is a reflexive and symmetric relation on $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Suppose that $\alpha\sigma\beta$ and $\beta\sigma\gamma$ in $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Then there exist $\varsigma,\upsilon\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ such that $\alpha\varsigma=\beta\varsigma$ and $\beta\upsilon=\gamma\upsilon$. This implies that $\alpha\varsigma\upsilon=\beta\varsigma\upsilon$ and $\beta\upsilon\varsigma=\gamma\upsilon\varsigma$, and since the idempotents in $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ commute we get that $\alpha\varsigma\upsilon=\beta\varsigma\upsilon=\beta\upsilon\varsigma=\gamma\upsilon\varsigma$, and hence $\alpha\sigma\gamma$.

Suppose that $\alpha\sigma\beta$ for some $\alpha,\beta\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Then by (iv) there exists $\iota\in E(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}))$ such that $\iota\alpha=\iota\beta$. This implies that $\iota\alpha\gamma=\iota\beta\gamma$ for each $\gamma\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and hence by item (iv) we get that $(\alpha\gamma)\sigma(\beta\gamma)$. The proof of the statement that $(\gamma\alpha)\sigma(\gamma\beta)$ for each $\gamma\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is similar, and hence σ is a congruence on the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. □

Corollary 1. *For $\alpha,\beta\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ the following condition are equivalent:*

(i) *$\alpha\sigma\beta$;*

(ii) *$\alpha\varpi\sigma\beta\varpi$;*

(iii) *$\varpi\alpha\sigma\varpi\beta$.*

Proof. $(i)\Leftrightarrow(ii)$ If $\alpha\sigma\beta$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ then by Proposition 4 there exists $\iota\in E(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant))$ such that $\iota\alpha=\iota\beta$. This implies that $\iota\alpha\varpi=\iota\beta\varpi$ and hence $(\alpha\varpi)\sigma(\beta\varpi)$. Conversely, if $(\alpha\varpi)\sigma(\beta\varpi)$ then by Proposition 4 we have that $\nu\alpha\varpi=\nu\beta\varpi$ for some $\nu\in E(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant))$, and hence $\nu\alpha=\nu\alpha\varpi\varpi=\nu\beta\varpi\varpi=\nu\beta$, which implies that $\alpha\sigma\beta$.

The proof of $(i)\Leftrightarrow(ii)$ is similar. □

Also the definition of the congruence σ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies the following simple property of σ-equivalent elements of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$:

Corollary 2. *Let α,β be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $\alpha\sigma\beta$. Then the following assertions hold:*

(i) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\subseteq\mathsf{H}^1$ *if and only if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta\subseteq\mathsf{H}^1$*;*

(ii) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\subseteq\mathsf{V}^1$ *if and only if* $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta})\beta\subseteq\mathsf{V}^1$*.*

We define

$$\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)=\left\{\alpha\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)\colon(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha\subseteq\mathsf{H}^1\right\}.$$

Then Lemma 3 and Theorem 1 from [5] imply that $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is a subsemigroup of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. The subsemigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is called the *monoid of orientation-preserving monotone injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}^2_\leqslant$ with cofinite domains and images. Moreover it is obvious that $E(\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)=E(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant))$. Also, later by $\preccurlyeq$ and σ we denote the corresponding induced relations of the relations $\preccurlyeq$ and σ from the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ onto its subsemigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

The proofs of the following propositions are similar to those of Propositions 3 and 4, respectively.

Proposition 5. *The relation $\preccurlyeq$ is the natural partial order on the semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.*

Proposition 6. *The relation σ is a congruence on the semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.*

By ϖ we denote the bijective transformation of $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ defined by the formula $(i,j)\varpi=(j,i)$, for any $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. It is obvious that ϖ is an element of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and $\varpi\varpi=\mathbb{I}$.

Remark 2. We observe that

(i) $\alpha\in\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ if and only if $\alpha\varpi,\varpi\alpha\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)\setminus\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$;

(ii) $\alpha\in\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ if and only if $\varpi\alpha\varpi\in\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

We define a map $\mathfrak{h}\colon\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)\to\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ by the formula $(\alpha)\mathfrak{h}=\varpi\alpha\varpi$, for $\alpha\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

Proposition 7. *The map $\mathfrak{h}\colon\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)\to\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is an automorphism of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Moreover its restriction $\mathfrak{h}|_{\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)}\colon\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)\to\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is an automorphism of the subsemigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.*

Proof. First we show that $\mathfrak{h}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is a homomorphism. Fix arbitrary $\alpha, \beta \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then we have that

$$(\alpha\beta)\mathfrak{h} = \varpi(\alpha\beta)\varpi = \varpi(\alpha\mathbb{I}\beta)\varpi = \varpi(\alpha\varpi\varpi\beta)\varpi = (\varpi\alpha\varpi)(\varpi\beta\varpi) = (\alpha)\mathfrak{h}(\beta)\mathfrak{h},$$

and hence $\mathfrak{h}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is a homomorphism.

Fix an arbitrary $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then the definition of $\mathfrak{h}$ implies that

$$(\varpi\alpha\varpi)\mathfrak{h} = \varpi\varpi\alpha\varpi\varpi = \mathbb{I}\alpha\mathbb{I} = \alpha,$$

and hence the map $\mathfrak{h}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is surjective. Suppose that $(\alpha)\mathfrak{h} = (\beta)\mathfrak{h}$ for some $\alpha, \beta \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then

$$\alpha = \mathbb{I}\alpha\mathbb{I} = \varpi\varpi\alpha\varpi\varpi = ((\alpha)\mathfrak{h})\mathfrak{h} = ((\beta)\mathfrak{h})\mathfrak{h} = \varpi\varpi\beta\varpi\varpi = \mathbb{I}\beta\mathbb{I} = \beta,$$

and hence the map $\mathfrak{h}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is injective. Thus the map $\mathfrak{h}$ is an automorphism of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$.

Now, Remark 2 implies that the restriction $\mathfrak{h}|_{\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)}\colon \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is an automorphism of the semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$, too. □

For the automorphism $\mathfrak{h}\colon \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ of the semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we have that $\mathfrak{h}^2 = \mathsf{Id}_{\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)}$ is the identity automorphism of $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. This implies that the element $\mathfrak{h}$ generates the group which is isomorphic to the cyclic group of order two $\mathbb{Z}_2$. By Proposition 4 from [5] the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$. We define a map $\mathfrak{Q}$ from $H(\mathbb{I})$ into the group $\mathrm{Aut}(\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant))$ of automorphisms of the semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ in the following way $(\mathbb{I})\mathfrak{Q} = \mathsf{Id}_{\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)}$ and $(\varpi)\mathfrak{Q} = \mathfrak{h}$. It is obvious that so defined map $\mathfrak{Q}\colon H(\mathbb{I}) \to \mathrm{Aut}(\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant))$ is an injective homomorphism.

Let S and T be semigroups and let $\mathfrak{H}$ be a homomorphism from T into the semigroup of endomorphisms $\mathsf{End}(S)$ of S, $\mathfrak{H}\colon t \mapsto \mathfrak{h}_t$. Then the Cartesian product $S \times T$ with the following semigroup operation

$$(s_1, t_1) \cdot (s_2, t_2) = (s_1 \cdot (s_2)\mathfrak{h}_{t_1}, t_1 \cdot t_2), \qquad s_1, s_2 \in S,\ t_1, t_2 \in T,$$

is called a *semidirect product* of the semigroup S by T and is denoted by $S \rtimes_{\mathfrak{H}} T$. We remark that if 1_T is the unit of the semigroup T then $(1_T)\mathfrak{H} = \mathfrak{h}_{1_T}$ is the identity homomorphism of S and in the case when T is a group then $(t)\mathfrak{H} = \mathfrak{h}_t$ is an automorphism of S for any $t \in T$.

Theorem 1. *The semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is isomorphic to the semidirect product $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \rtimes_{\mathfrak{Q}} H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ by the group $H(\mathbb{I})$.*

Proof. We define a map $\mathfrak{I}\colon \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \rtimes_{\mathfrak{Q}} H(\mathbb{I}) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ by the formula $(\alpha, g)\mathfrak{I} = \alpha g$. Then for all $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and $g_1, g_2 \in H(\mathbb{I})$ we have that

$$\begin{aligned}((\alpha_1, g_1) \cdot (\alpha_2, g_2))\,\mathfrak{I} &= (\alpha_1 \cdot (\alpha_2)(g_1)\mathfrak{Q}, g_1 \cdot g_2)\,\mathfrak{I} = (\alpha_1 \cdot g_1 \cdot \alpha_2 \cdot g_1, g_1 \cdot g_2)\,\mathfrak{I} = \\ &= \alpha_1 \cdot g_1 \cdot \alpha_2 \cdot g_1 \cdot g_1 \cdot g_2 = \alpha_1 \cdot g_1 \cdot \alpha_2 \cdot g_2 = \\ &= (\alpha_1, g_1)\mathfrak{I} \cdot (\alpha_2, g_2)\mathfrak{I},\end{aligned}$$

because $g^2 = \mathbb{I}$ for any $g \in H(\mathbb{I})$, and hence the map $\mathfrak{I}\colon \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \rtimes_{\mathfrak{Q}} H(\mathbb{I}) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is a homomorphism.

By Lemma 3 from [5] for every $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ there exist $\alpha^+ \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and $g_\alpha \in H(\mathbb{I})$ such that $\alpha = \alpha^+ g_\alpha$. Indeed,

(a) in the case when $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{H}^1$ we put $\alpha^+ = \alpha$ and $g_\alpha = \mathbb{I}$;

(b) in the case when $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq \mathsf{V}^1$ we put $\alpha^+ = \alpha\omega$ and $g_\alpha = \omega$.

Let $\alpha^+, \beta^+ \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and $g_\alpha, g_\beta \in H(\mathbb{I})$ be such that $\alpha^+ g_\alpha = (\alpha^+, g_\alpha)\mathfrak{I} = (\beta^+, g_\beta)\mathfrak{I} = \beta^+ g_\beta$. Since $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha^+})\alpha^+ \subseteq \mathsf{H}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\beta^+})\beta^+ \subseteq \mathsf{H}^1$, Lemma 3 from [5] implies that $g_\alpha = g_\beta$. By Proposition 4 from [5] the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$ and hence $\alpha^+ = \alpha^+ g_\alpha^2 = \alpha^+ g_\alpha g_\beta = \beta^+ g_\beta^2 = \beta^+$. Therefore, we get that so defined map $\mathfrak{I}\colon \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \rtimes_{\mathfrak{Q}} H(\mathbb{I}) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is an isomorphism. □

By Theorem $2(ii_1)$ from [5] for every $\alpha \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ there exists a smallest positive integer n_α such that $(i,j)\alpha = (i,j)$ for each $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(n_\alpha, n_\alpha)$.

Lemma 1. *For every $\alpha \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ there exists $\alpha_{\mathtt{f}} \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that the following assertions hold:*

(i) $\alpha\sigma\alpha_{\mathtt{f}}$;

(ii) $(i+1)_{\alpha_{\mathtt{f}}[*,j]} - (i+1) = i_{\alpha_{\mathtt{f}}[*,j]} - i$ *for arbitrary* $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha_{\mathtt{f}}$ *with* $j < n_\alpha$, $(i,j)\alpha_{\mathtt{f}} = \big(i_{\alpha_{\mathtt{f}}[*,j]}, j_{\alpha_{\mathtt{f}}[i,*]}\big)$ *and* $(i+1,j)\alpha_{\mathtt{f}} = \big((i+1)_{\alpha_{\mathtt{f}}[*,j]}, j_{\alpha_{\mathtt{f}}[i+1,*]}\big)$, *i.e.,* $\alpha_{\mathtt{f}}$ *acts as a partial shift on the set* H^j;

(iii) $(j+1)_{\alpha_{\mathtt{f}}[i,*]} - (j+1) = j_{\alpha_{\mathtt{f}}[i,*]} - j$ *for arbitrary* $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha_{\mathtt{f}}$ *with* $i < n_\alpha$, $(i,j)\alpha_{\mathtt{f}} = \big(i_{\alpha_{\mathtt{f}}[*,j]}, j_{\alpha_{\mathtt{f}}[i,*]}\big)$ *and* $(i,j+1)\alpha_{\mathtt{f}} = \big(i_{\alpha_{\mathtt{f}}[*,j+1]}, (j+1)_{\alpha_{\mathtt{f}}[i,*]}\big)$, *i.e.,* $\alpha_{\mathtt{f}}$ *acts as a partial shift on the set* V^i.

Moreover, there exist smallest positive integers $\widehat{h}_\alpha, \widehat{v}_\alpha \leqslant n_\alpha$ *such that* $(i,j)\alpha_{\mathtt{f}} = (i,j)$ *for arbitrary* $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha_{\mathtt{f}}$ *with* $i \geqslant \widehat{h}_\alpha$ *and* $(k,l)\alpha_{\mathtt{f}} = (k,l)$ *for arbitrary* $(k,l) \in \operatorname{dom}\alpha_{\mathtt{f}}$ *with* $l \geqslant \widehat{v}_\alpha$.

Proof. Fix an arbitrary element α of the semigroup $\mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then by Theorem 1(1) from [5] we get that $(\mathsf{H}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{H}^n$ and $(\mathsf{V}^n_{\operatorname{dom}\alpha})\alpha \subseteq^* \mathsf{V}^n$ for any positive integer n. Also, the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and Theorem $2(ii_1)$ of [5] imply that there exists a smallest positive integer n_α such that $(i,j)\alpha = (i,j)$ for each $(i,j) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(n_\alpha, n_\alpha)$, and hence for arbitrary positive integers $i, j < n_\alpha$ there exist smallest positive integers h^i_α and v^j_α such that the following conditions hold:

$$\mathsf{H}^i_{\operatorname{ran}\alpha} \cap \big\{(p,i)\colon p \geqslant h^i_\alpha\big\} = \big\{(p,i)\colon p \geqslant h^i_\alpha\big\};$$
$$\mathsf{V}^j_{\operatorname{ran}\alpha} \cap \big\{(j,q)\colon q \geqslant v^j_\alpha\big\} = \big\{(j,q)\colon q \geqslant v^j_\alpha\big\},$$

and

$$(k,i), (j,l) \in \operatorname{dom}\alpha, \qquad (k,i)\alpha \in \mathsf{H}^i, \qquad (j,l)\alpha \in \mathsf{V}^j,$$

for all positive integers $k \geqslant h^i_\alpha$ and $l \geqslant v^j_\alpha$.

We put

$$\bar{h}_\alpha = \max\big\{h^i_\alpha\colon i = 1, \ldots, n_\alpha - 1\big\} \qquad \text{and} \qquad \bar{v}_\alpha = \max\big\{v^j_\alpha\colon j = 1, \ldots, n_\alpha - 1\big\}.$$

The above arguments imply that

$$\mathsf{H}^i_{\operatorname{ran}\alpha} \cap \big\{(p,i)\colon p \geqslant \bar{h}_\alpha\big\} = \big\{(p,i)\colon p \geqslant \bar{h}_\alpha\big\}; \tag{1}$$

$$\mathsf{V}^{j}_{\operatorname{ran}\alpha} \cap \{(j,q)\colon q \geqslant \bar{v}_\alpha\} = \{(j,q)\colon q \geqslant \bar{v}_\alpha\}\,, \tag{2}$$

and

$$(k,i),(j,l) \in \operatorname{dom}\alpha, \qquad (k,i)\alpha \in \mathsf{H}^{i}, \qquad (j,l)\alpha \in \mathsf{V}^{j},$$

for all positive integers $k \geqslant \bar{h}_\alpha$ and $l \geqslant \bar{v}_\alpha$.

Next we put

$$D_\alpha = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus \big(\{(i,j)\colon i \leqslant \bar{h}_\alpha \text{ and } j \leqslant n_\alpha\} \cup \{(i,j)\colon i \leqslant n_\alpha \text{ and } j \leqslant \bar{v}_\alpha\}\big)\,. \tag{3}$$

We define $\alpha_{\mathfrak{f}} = \alpha|_{D_\alpha}$, i.e.,

$$\operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}} = D_\alpha, \qquad \operatorname{ran}\alpha_{\mathfrak{f}} = (D_\alpha)\alpha \qquad \text{and} \qquad (i,j)\alpha_{\mathfrak{f}} = (i,j)\alpha \quad \text{for all} \quad (i,j) \in \operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}}.$$

Since $\alpha_{\mathfrak{f}} = \varepsilon_\alpha\alpha_{\mathfrak{f}} = \varepsilon_\alpha\alpha$ for the identity partial map $\varepsilon_\alpha\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ with $\operatorname{dom}\varepsilon_\alpha = \operatorname{ran}\varepsilon_\alpha = D_\alpha$, Proposition 4 implies that $\alpha\sigma\alpha_{\mathfrak{f}}$.

Then condition (1) and the definition of the positive integer $\bar{h}_\alpha$ imply that

$$\big(\bar{h}_\alpha + 2\big)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,1]} = \big(\bar{h}_\alpha + 1\big)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,1]} + 1,$$

and by similar arguments and induction we have that $(i+1)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,1]} = (i,1)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,1]} + 1$ for arbitrary $i \geqslant \bar{h}_\alpha + 1$. Next, if we apply condition (1) and induction for arbitrary $j < n_\alpha$ then we get that $(i+1)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,j]} = (i)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,j]} + 1$ for arbitrary $i \geqslant \bar{h}_\alpha + 1$. This implies assertion (ii).

The proof of item (iii) is similar to (ii).

The last statement of the lemma follows from the above arguments and Theorem 2(1) from [5]. □

For every positive integer n we define partial maps $\gamma_n\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ and $\upsilon_n\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ in the following way:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dom}\gamma_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus \{(1,i)\colon i = 1,\ldots,n\}\,,\\
&\operatorname{dom}\upsilon_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus \{(i,1)\colon i = 1,\ldots,n\}\,,\\
&\operatorname{ran}\gamma_n = \operatorname{ran}\upsilon_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}
\end{aligned}$$

and

$$(i,j)\gamma_n = \begin{cases} (i-1,j), & \text{if } j \leqslant n;\\ (i,j), & \text{if } j > n \end{cases} \qquad \text{for} \quad (i,j) \in \operatorname{dom}\gamma_n,$$

$$(i,j)\upsilon_n = \begin{cases} (i,j-1), & \text{if } i \leqslant n;\\ (i,j), & \text{if } i > n \end{cases} \qquad \text{for} \quad (i,j) \in \operatorname{dom}\upsilon_n.$$

Simple verifications show that $\gamma_n, \upsilon_n \in \mathscr{PO}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ for every positive integer n, and moreover the subsemigroups $\langle \gamma_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ and $\langle \upsilon_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ of the semigroup $\mathscr{PO}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, generated by the sets $\{\gamma_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ and $\{\upsilon_k\colon k \in \mathbb{N}\}$, respectively, are isomorphic to the free Abelian semigroup over an infinite countable set.

Lemma 2. *For every $\alpha \in \mathscr{PO}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ there exist finitely many elements $\gamma_{k_1},\ldots,\gamma_{k_i}$ and $\upsilon_{l_1},\ldots,\upsilon_{l_j}$ of the semigroup $\mathscr{PO}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, with $k_1 < \ldots < k_i$, $l_1 < \ldots < l_j$, such that*

$$\alpha\sigma\big(\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\big), \tag{4}$$

for some positive integers $p_1,\ldots,p_i,q_1,\ldots,q_j$. Moreover if

$$\alpha\sigma\big(\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\big) \qquad \textit{and} \qquad \beta\sigma\big(\gamma_{a_1}^{b_1}\ldots\gamma_{a_i}^{b_i}\upsilon_{c_1}^{d_1}\ldots\upsilon_{c_j}^{d_j}\big)$$

for some $\alpha,\beta\in\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ *then* $(\alpha,\beta)\notin\sigma$ *if and only if*

$$\iota\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\neq\iota\gamma_{a_1}^{b_1}\ldots\gamma_{a_i}^{b_i}\upsilon_{c_1}^{d_1}\ldots\upsilon_{c_j}^{d_j}$$

for any idempotent $\iota\in\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.

Proof. Fix an arbitrary element α of the semigroup $\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Let $\alpha_{\mathfrak{f}}$ be the element of $\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ defined in the proof of Lemma 1. By Theorem 3 from [5] and the second statement of Lemma 1 there exist smallest positive integers $\widehat{h}_\alpha,\widehat{v}_\alpha\leqslant n_\alpha$ such that $(i,j)\alpha_{\mathfrak{f}}=(i,j)$ for arbitrary $(i,j)\in\operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}}$ with $i\geqslant\widehat{h}_\alpha$ and $(k,l)\alpha_{\mathfrak{f}}=(k,l)$ for arbitrary $(k,l)\in\operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}}$ with $l\geqslant\widehat{v}_\alpha$.

By Lemma 1 and Theorem 1(1) of [5] we have that

$$(j,\widehat{h}_\alpha-1)\alpha_{\mathfrak{f}}=\big(j_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,\widehat{h}_\alpha-1]},\widehat{h}_\alpha-1\big)<(j,\widehat{h}_\alpha-1)\quad\text{and}\quad(j+1)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,\widehat{h}_\alpha-1]}-j_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,\widehat{h}_\alpha-1]}=1,$$

for arbitrary $(j,\widehat{h}_\alpha-1),(j+1,\widehat{h}_\alpha-1)\in\operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}}$. Then we put $p_{\widehat{h}_\alpha-1}=j-j_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,\widehat{h}_\alpha-1]}$. Next, for $s=2,\ldots,\widehat{h}_\alpha-2$ we define integers $p_{\widehat{h}_\alpha-s},\ldots,p_1$ by induction,

$$p_{\widehat{h}_\alpha-s}=j-j_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,\widehat{h}_\alpha-s]}-\Big(p_{\widehat{h}_\alpha-1}+\ldots+p_{\widehat{h}_\alpha-s+1}\Big),$$

where $(j,\widehat{h}_\alpha-s)\alpha_{\mathfrak{f}}=\big(j_{\alpha_{\mathfrak{f}}[*,\widehat{h}_\alpha-s]},\widehat{h}_\alpha-s\big)\leqslant(j,\widehat{h}_\alpha-s)$ for arbitrary $(j,\widehat{h}_\alpha-s)\in\operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}}$.

Similarly, by Lemma 1 and Theorem 1(1) of [5] we have that

$$(\widehat{v}_\alpha-1,i)\alpha_{\mathfrak{f}}=\big(\widehat{v}_\alpha-1,i_{\alpha_{\mathfrak{f}}[\widehat{v}_\alpha-1,*]}\big)<(\widehat{v}_\alpha-1,i)\quad\text{and}\quad(i+1)_{\alpha_{\mathfrak{f}}[\widehat{v}_\alpha-1,*]}-i_{\alpha_{\mathfrak{f}}[\widehat{v}_\alpha-1,*]}=1,$$

for arbitrary $(\widehat{v}_\alpha-1,i),(\widehat{v}_\alpha-1,i+1)\in\operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}}$. Then we put $q_{\widehat{v}_\alpha-1}=i-i_{\alpha_{\mathfrak{f}}[\widehat{v}_\alpha-1,*]}$. Next, for $t=2,\ldots,\widehat{v}_\alpha-2$ we define integers $q_{\widehat{v}_\alpha-t},\ldots,q_1$ by induction

$$q_{\widehat{v}_\alpha-t}=i-i_{\alpha_{\mathfrak{f}}[\widehat{v}_\alpha-t,*]}-\big(q_{\widehat{v}_\alpha-1}+\ldots+q_{\widehat{v}_\alpha-t+1}\big),$$

where $(\widehat{v}_\alpha-t,i)\alpha_{\mathfrak{f}}=\big(\widehat{v}_\alpha-t,i_{\alpha_{\mathfrak{f}}[\widehat{v}_\alpha-t,*]}\big)\leqslant(\widehat{v}_\alpha-t,i)$ for arbitrary $(\widehat{v}_\alpha-t,i)\in\operatorname{dom}\alpha_{\mathfrak{f}}$.

For any $\alpha\in\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ put $\varepsilon_\alpha\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ be the identity partial map with $\operatorname{dom}\varepsilon_\alpha=\operatorname{ran}\varepsilon_\alpha=D_\alpha$, where the set D_α is defined by formula (3). Simple verification shows that $\varepsilon_\alpha\alpha=\varepsilon_\alpha\big(\gamma_1^{p_1}\ldots\gamma_{\widehat{h}_\alpha-1}^{p_{\widehat{h}_\alpha-1}}\upsilon_1^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_{\widehat{v}_\alpha-1}}\big)$ and hence

$$\alpha\sigma\big(\gamma_1^{p_1}\ldots\gamma_{\widehat{h}_\alpha-1}^{p_{\widehat{h}_\alpha-1}}\upsilon_1^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_{\widehat{v}_\alpha-1}}\big),$$

which implies that relation (4) holds.

Since $\gamma_m^0=\upsilon_m^0=\mathbb{I}$ for any positive integer m, without loss of generality we may assume that $p_1,\ldots,p_i,q_1,\ldots,q_j$ are positive integers in formula (4).

Also, the last statement of the lemma follows from the definition of the congruence σ on the semigroup $\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. □

Lemma 3. *Let be* $\alpha\sigma\big(\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\big)$ *for* $\alpha\in\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ *and positive integers* $p_1,\ldots,p_i$, $q_1,\ldots,q_j$, $k_1<\ldots<k_i$, $l_1<\ldots<l_j$. *Then there exists an idempotent* $\widehat{\varepsilon}_\alpha\in\mathscr{P}\!\mathscr{O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ *such that*

$$\widehat{\varepsilon}_\alpha\alpha=\widehat{\varepsilon}_\alpha\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}=\widehat{\varepsilon}_\alpha\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}.$$

Proof. Put

$$\overline{m}_\alpha = n_\alpha + \bar{h}_\alpha + \bar{v}_\alpha + p_1 + \ldots + p_i + q_1 + \ldots + q_j,$$

where $\bar{h}_\alpha$ and $\bar{v}_\alpha$ are the positive integers defined in the proof of Lemma 1. We define the identity partial map $\widehat{\varepsilon}_\alpha \colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ with $\operatorname{dom}\widehat{\varepsilon}_\alpha = \operatorname{ran}\widehat{\varepsilon}_\alpha = M_\alpha$, where

$$M_\alpha = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus (\{(i,j)\colon i \leqslant \overline{m}_\alpha \text{ and } j \leqslant \overline{m}_\alpha\}).$$

Then $\widehat{\varepsilon}_\alpha \preccurlyeq \varepsilon_\alpha$ where ε_α is the idempotent of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ defined in the proof of Lemma 1. This implies that

$$\widehat{\varepsilon}_\alpha\alpha = \widehat{\varepsilon}_\alpha\varepsilon_\alpha\alpha = \widehat{\varepsilon}_\alpha\varepsilon_\alpha\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j} = \widehat{\varepsilon}_\alpha\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j},$$

and the equlity

$$\widehat{\varepsilon}_\alpha\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j} = \widehat{\varepsilon}_\alpha\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}$$

follows from the definition of the idempotent $\widehat{\varepsilon}_\alpha \in \mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. □

The following theorem describes the quotient semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$.

Theorem 2. *The quotient semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ is isomorphic to the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$ over an infinite countable set.*

Proof. Let $X = \{a_i \colon i \in \mathbb{N}\} \cup \{b_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ be a countable infinite set.

We define the map $\mathfrak{H}_\sigma \colon \mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}) \to \mathfrak{AM}_X$ in the following way:

(a) if $\alpha\sigma\big(\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\big)$ for some positive integers $p_1,\ldots,p_i$, $q_1,\ldots,q_j$, $k_1 < \ldots < k_i$, $l_1 < \ldots < l_j$, then

$$(\alpha)\mathfrak{H}_\sigma = \big(\gamma_{k_1}^{p_1}\ldots\gamma_{k_i}^{p_i}\upsilon_{l_1}^{q_1}\ldots\upsilon_{l_j}^{q_j}\big)\mathfrak{H}_\sigma = a_{k_1}^{p_1}\ldots a_{k_i}^{p_i}b_{l_1}^{q_1}\ldots b_{l_j}^{q_j};$$

(b) $(\mathbb{I})\mathfrak{H}_\sigma = e$, where e is the unit of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_X$.

Then Lemmas 2 and 3 imply that $(\alpha)\mathfrak{H}_\sigma = (\beta)\mathfrak{H}_\sigma$ if and only if $\alpha\sigma\beta$ in $\mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and hence the quotient semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ is isomorphic to the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_X$. □

The following corollary of Theorem 2 shows that the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ has infinitely many congruences similar as the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$ over an infinite countable set.

Corollary 3. *Every countable (infinite or finite) commutative monoid is a homomorphic image of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}^{+}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$.*

Its obvious that every non-unit element u of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$ over the infinite countable set $\{a_i \colon i \in \omega\} \cup \{b_j \colon j \in \omega\}$ can be represented in the form $u = a_1^{i_1}\ldots a_k^{i_k}b_1^{j_1}\ldots b_l^{j_l}$, where $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,l_l$ are positive integers. We define a map $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{AM}_\omega \to \mathfrak{AM}_\omega$ by the formula

$$(a_1^{i_1}\ldots a_k^{i_k}b_1^{j_1}\ldots b_l^{j_l})\mathfrak{f} = a_1^{j_1}\ldots a_l^{j_l}b_1^{i_1}\ldots b_k^{i_k}, \tag{5}$$

for $u = a_1^{i_1}\ldots a_k^{i_k}b_1^{j_1}\ldots b_l^{j_l} \in \mathfrak{AM}_\omega$ and $(e)\mathfrak{f} = e$, for unit element e of $\mathfrak{AM}_\omega$.

Proposition 8. *The map $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{AM}_\omega \to \mathfrak{AM}_\omega$ is an automorphism of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$.*

Proof. First we show that $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{AM}_\omega \to \mathfrak{AM}_\omega$ is a homomorphism. Fix arbitrary elements $u, v \in \mathfrak{AM}_\omega$. Without loss of generality we may assume that

$$u = a_1^{i_1} \dots a_p^{i_p} b_1^{j_1} \dots b_p^{j_p} \qquad \text{and} \qquad v = a_1^{s_1} \dots a_p^{s_p} b_1^{t_1} \dots b_p^{t_p}$$

for some non-negative integers $p, i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p, s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$, where $a^i = b^i = e$ for $i = 0$.

Then we have that

$$\begin{aligned}
(uv)\mathfrak{f} &= (a_1^{i_1} \dots a_p^{i_p} b_1^{j_1} \dots b_p^{j_p} a_1^{s_1} \dots a_p^{s_p} b_1^{t_1} \dots b_p^{t_p})\mathfrak{f} = \\
&= (a_1^{i_1+s_1} \dots a_p^{i_p+s_p} b_1^{j_1+t_1} \dots b_p^{j_p+t_p})\mathfrak{f} = \\
&= a_1^{j_1+t_1} \dots a_p^{j_p+t_p} b_1^{i_1+s_1} \dots b_p^{i_p+s_p} = \\
&= a_1^{j_1} \dots a_p^{j_p} b_1^{i_1} \dots b_p^{i_p} a_1^{t_1} \dots a_p^{t_p} b_1^{s_1} \dots b_p^{s_p} = \\
&= (a_1^{i_1} \dots a_p^{i_p} b_p^{j_1} \dots b_l^{j_p})\mathfrak{h}(a_1^{s_1} \dots a_p^{s_p} b_1^{t_1} \dots b_p^{t_p})\mathfrak{f} = \\
&= (u)\mathfrak{f}(v)\mathfrak{f}.
\end{aligned}$$

It is obvious that $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{AM}_\omega \to \mathfrak{AM}_\omega$ is a bijective map and hence $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{AM}_\omega \to \mathfrak{AM}_\omega$ is an automorphism. □

The relationships between elements of the subsemigroup $\langle \gamma_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ and of the subsemigroup $\langle \upsilon_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ in $\mathscr{PO}_\infty^+(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ is described by the following proposition.

We observe that the cyclic group $\mathbb{Z}_2$ acts on the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$ over the infinite countable set $\{a_i \colon i \in \omega\} \cup \{b_j \colon j \in \omega\}$ in the following way

$$\mathfrak{AM}_\omega \times \mathbb{Z}_2 \to \mathfrak{AM}_\omega \colon (u, g) \mapsto v = \begin{cases} u, & \text{if } g = \bar{0}; \\ (u)\mathfrak{f}, & \text{if } g = \bar{1}, \end{cases}$$

where the map $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{AM}_\omega \to \mathfrak{AM}_\omega$ is defined by formula(5). By Proposition 8 the map $\mathfrak{f}$ is an automorphism of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$.

Proposition 9. *Let $p_1, \dots, p_i$, $k_1, \dots, k_i$ be some positive integers such that $k_1 < \dots < k_i$. Then the following assertions hold:*

(*i*) $\varpi \gamma_{k_1}^{p_1} \dots \gamma_{k_i}^{p_i} \varpi = \upsilon_{k_1}^{p_1} \dots \upsilon_{k_i}^{p_i}$;
(*ii*) $\gamma_{k_1}^{p_1} \dots \gamma_{k_i}^{p_i} \varpi = \varpi \upsilon_{k_1}^{p_1} \dots \upsilon_{k_i}^{p_i}$;
(*iii*) $\varpi \gamma_{k_1}^{p_1} \dots \gamma_{k_i}^{p_i} = \upsilon_{k_1}^{p_1} \dots \upsilon_{k_i}^{p_i} \varpi$;
(*iv*) $\varpi \upsilon_{k_1}^{p_1} \dots \upsilon_{k_i}^{p_i} \varpi = \gamma_{k_1}^{p_1} \dots \gamma_{k_i}^{p_i}$.

Proof. Assertion (i) follows from the definitions of the elements of the semigroups $\langle \gamma_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ and $\langle \upsilon_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$. Other assertions follow from (i) and the equality $\varpi\varpi = \mathbb{I}$. □

Later we assume that $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

The following theorem describes the quotient semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$.

Theorem 3. *The semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$ is isomorphic to the semidirect product $\mathfrak{AM}_\omega \rtimes_{\mathfrak{Q}} \mathbb{Z}_2$ of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_\omega$ over an infinite countable set by the cyclic group $\mathbb{Z}_2$.*

Proof. We define a map $\mathfrak{I}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma \to \mathfrak{AM}_\omega \rtimes_{\mathfrak{Q}} \mathbb{Z}_2\colon x \mapsto (u,g)$ in the following way. Let $\mathfrak{P}_\sigma\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$ be the natural homomorphism generated by the congruence σ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then for every $x \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$ for any $\alpha_x \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma = x$ only one of the following conditions holds:

(1) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1$;
(2) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1$.

We put

$$(x)\mathfrak{I} = \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1. \end{cases} \tag{6}$$

for all $\alpha_x \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ with $(\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma = x$. Then the definition of the congruence σ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and Corollary 2 imply that the map $\mathfrak{I}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma \to \mathfrak{AM}_\omega \times \mathbb{Z}_2$ is well defined.

We observe that formula (6) implies that $(x_{\mathbb{I}})\mathfrak{I} = (e,\bar{0})$ for $x_{\mathbb{I}} = (\mathbb{I})\mathfrak{P}_\sigma$ and $(x_\varpi)\mathfrak{I} = (e,\bar{1})$ for $x_\varpi = (\varpi)\mathfrak{P}_\sigma$. Hence we have that

$$\begin{aligned}
(x)\mathfrak{I}\cdot(x_{\mathbb{I}})\mathfrak{I} &= \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0})\cdot(e,\bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1})\cdot(e,\bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma\cdot e, \bar{0}\cdot\bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma\cdot e, \bar{1}\cdot\bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= (x)\mathfrak{I}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(x_{\mathbb{I}})\mathfrak{I}\cdot(x)\mathfrak{I} &= \begin{cases} (e,\bar{0})\cdot((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ (e,\bar{0})\cdot((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} (e\cdot(\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\cdot\bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ (e\cdot(\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\cdot\bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= (x)\mathfrak{I}.
\end{aligned}$$

Also, since σ is congruence on $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$, we get

$$\begin{aligned}
(x)\mathfrak{I}\cdot(x_\varpi)\mathfrak{I} &= \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0})\cdot(e,\bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1})\cdot(e,\bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma\cdot e, \bar{0}\cdot\bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma\cdot e, \bar{1}\cdot\bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} ((\alpha_x\varpi\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1;\\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1 \end{cases} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (((\alpha_x\varpi)\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\alpha_x\varpi)})\alpha_x\varpi \subseteq \mathsf{V}^1; \\ ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}), & \text{if } (\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\alpha_x\varpi)})\alpha_x\varpi \subseteq \mathsf{H}^1 \end{cases} = \\ = (x\cdot x_\varpi)\mathfrak{I}$$

and

(i) in the case when $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1$ for $\alpha_x = \gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}$, for some non-negative integers $p, i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p$, where $\gamma^0 = \upsilon^0 = \mathbb{I}$, we get that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\varpi\alpha_x)})\varpi\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1$,

$$\begin{aligned}
(x_\varpi)\mathfrak{I}\cdot(x)\mathfrak{I} &= (e,\bar{1})\cdot((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma,\bar{0}) = \\
&= (e,\bar{1})\cdot\Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma,\bar{0}\Big) = \\
&= (e,\bar{1})\cdot\Big(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p},\bar{0}\Big) = \\
&= \Big(e\cdot(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p})\mathfrak{f},\bar{1}\cdot\bar{0}\Big) = \\
&= \Big((a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p})\mathfrak{f},\bar{1}\Big) = \\
&= \Big(a_1^{j_1}\ldots a_p^{j_p}b_1^{i_1}\ldots b_p^{i_p},\bar{1}\Big)
\end{aligned}$$

and by Proposition 9,

$$\begin{aligned}
(x_\varpi\cdot x)\mathfrak{I} &= ((\varpi\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma,\bar{1}) = \\
&= \Big((\varpi\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi)\mathfrak{H}_\sigma,\bar{1}\Big) = \\
&= \Big((\upsilon_1^{i_1}\ldots\upsilon_p^{i_p}\varpi\varpi\gamma_1^{j_1}\ldots\gamma_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma,\bar{1}\Big) = \\
&= \Big((\upsilon_1^{i_1}\ldots\upsilon_p^{i_p}\gamma_1^{j_1}\ldots\gamma_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma,\bar{1}\Big) = \\
&= \Big(b_1^{i_1}\ldots b_p^{i_p}a_1^{j_1}\ldots a_p^{j_p},\bar{1}\Big) = \\
&= \Big(a_1^{j_1}\ldots a_p^{j_p}b_1^{i_1}\ldots b_p^{i_p},\bar{1}\Big);
\end{aligned}$$

(ii) in the case when $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1$ we get for $\alpha_x = \gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi$, for some non-negative integers $p, i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p$, where $\gamma^0 = \upsilon^0 = \mathbb{I}$, we get that $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}(\varpi\alpha_x\varpi)})\varpi\alpha_x\varpi \subseteq \mathsf{H}^1$,

$$\begin{aligned}
(x_\varpi)\mathfrak{I}\cdot(x)\mathfrak{I} &= (e,\bar{1})\cdot((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma,\bar{1}) = \\
&= (e,\bar{1})\cdot\Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi\varpi)\mathfrak{H}_\sigma,\bar{1}\Big) = \\
&= (e,\bar{1})\cdot\Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma,\bar{1}\Big) = \\
&= (e,\bar{1})\cdot\Big(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p},\bar{1}\Big) = \\
&= \Big(e\cdot(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p})\mathfrak{f},\bar{1}\cdot\bar{1}\Big) = \\
&= \Big((a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p})\mathfrak{f},\bar{0}\Big) =
\end{aligned}$$

$$= \left(a_1^{j_1}\dots a_p^{j_p} b_1^{i_1}\dots b_p^{i_p}, \bar{0}\right)$$

and by Proposition 9,

$$\begin{aligned}(x_{\varpi}\cdot x)\mathfrak{I} &= ((\varpi\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}) = \\ &= \left((\varpi\gamma_1^{i_1}\dots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\dots\upsilon_p^{j_p}\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\right) = \\ &= \left((\upsilon_1^{i_1}\dots\upsilon_p^{i_p}\varpi\varpi\gamma_1^{j_1}\dots\gamma_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\right) = \\ &= \left((\upsilon_1^{i_1}\dots\upsilon_p^{i_p}\gamma_1^{j_1}\dots\gamma_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\right) = \\ &= \left(b_1^{i_1}\dots b_p^{i_p} a_1^{j_1}\dots a_p^{j_p}, \bar{0}\right) = \\ &= \left(a_1^{j_1}\dots a_p^{j_p} b_1^{i_1}\dots b_p^{i_p}, \bar{0}\right),\end{aligned}$$

which implies that $(x_{\varpi}\cdot x)\mathfrak{I} = (x_{\varpi})\mathfrak{I}\cdot(x)\mathfrak{I}$.

Therefore we have showed that $(x_{\mathbb{I}})\mathfrak{I}$ is the identity element of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$ and $(x_{\varpi})\mathfrak{I}\cdot(x_{\varpi})\mathfrak{I} = (x_{\mathbb{I}})\mathfrak{I}$.

Next we shall show that so defined map $\mathfrak{I}$ is a homomorphism from $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$ into the semigroup $\mathfrak{AM}_\omega \rtimes_{\mathfrak{Q}} \mathbb{Z}_2$. Fix arbitrary elements x and y of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$. We consider the following four possible cases:

- (i) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_y})\alpha_y \subseteq \mathsf{H}^1$ for any $\alpha_x, \alpha_y \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma = x$ and $(\alpha_y)\mathfrak{P}_\sigma = y$;
- (ii) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_y})\alpha_y \subseteq \mathsf{H}^1$ for any $\alpha_x, \alpha_y \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma = x$ and $(\alpha_y)\mathfrak{P}_\sigma = y$;
- (iii) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{H}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_y})\alpha_y \subseteq \mathsf{V}^1$ for any $\alpha_x, \alpha_y \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma = x$ and $(\alpha_y)\mathfrak{P}_\sigma = y$;
- (iv) $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_x})\alpha_x \subseteq \mathsf{V}^1$ and $(\mathsf{H}^1_{\operatorname{dom}\alpha_y})\alpha_y \subseteq \mathsf{V}^1$ for any $\alpha_x, \alpha_y \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma = x$ and $(\alpha_y)\mathfrak{P}_\sigma = y$.

Assume that (i) hods. Then we have that $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_x\alpha_y \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Since σ is a congruence on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$, we may choose an element $\alpha_{xy} = \alpha_x\alpha_y \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$. Then $(\alpha_{xy})\mathfrak{P}_\sigma = xy$ Also, since $\mathfrak{P}_\sigma\colon \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \to \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$ is the natural homomorphism generated by the congruence σ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ we get that

$$\begin{aligned}(xy)\mathfrak{I} &= ((\alpha_{xy})\mathfrak{P}_\sigma)\mathfrak{I} = ((\alpha_{xy})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}) = ((\alpha_x\alpha_y)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}) = ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma\cdot(\alpha_y)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\cdot\bar{0}) = \\ &= ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0})\cdot((\alpha_y)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}) = (x)\mathfrak{I}\cdot(y)\mathfrak{I}.\end{aligned}$$

If (ii) hods then by Propositions 1 and 3 from [5], $\alpha_x\varpi, \alpha_y, \alpha_x\alpha_y\varpi \in \mathscr{PO}^+_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and by Lemma 2 without loss of generality we may assume that

$$\alpha_x = \gamma_1^{i_1}\dots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\dots\upsilon_p^{j_p}\varpi \qquad \text{and} \qquad \alpha_y = \gamma_1^{s_1}\dots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\dots\upsilon_p^{t_p},$$

for some non-negative integers $p, i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p, s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$, where $\gamma^0 = \upsilon^0 = \mathbb{I}$. This and the fact that σ is a congruence on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, Proposition 9 imply that

$$\begin{aligned}
(xy)\mathfrak{I} &= ((\alpha_x\alpha_y\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p}\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\upsilon_1^{s_1}\ldots\upsilon_p^{s_p}\varpi\varpi\gamma_1^{t_1}\ldots\gamma_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\upsilon_1^{s_1}\ldots\upsilon_p^{s_p}\gamma_1^{t_1}\ldots\gamma_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right) = \\
&= \left(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}b_1^{s_1}\ldots b_p^{s_p}a_1^{t_1}\ldots a_p^{t_p}, \bar{1}\right) = \\
&= \left(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}(a_1^{s_1}\ldots a_p^{s_p}b_1^{t_1}\ldots b_p^{t_p})\mathfrak{f}, \bar{1}\cdot\bar{0}\right) = \\
&= \left(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}, \bar{1}\right)\cdot\left(a_1^{s_1}\ldots a_p^{s_p}b_1^{t_1}\ldots b_p^{t_p}, \bar{0}\right) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right)\cdot\left((\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\right) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right)\cdot\left((\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\right) = \\
&= ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1})\cdot((\alpha_y)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}) = \\
&= (x)\mathfrak{I}\cdot(y)\mathfrak{I}.
\end{aligned}$$

If (iii) hods then by Propositions 1 and 3 from [5], $\alpha_x, \alpha_y\varpi, \alpha_x\alpha_y\varpi \in \mathscr{P\!O}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and by Lemma 2 without loss of generality we may assume that

$$\alpha_x = \gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p} \qquad \text{and} \qquad \alpha_y = \gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p}\varpi,$$

for some non-negative integers $p, i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p, s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$, where $\gamma^0 = \upsilon^0 = \mathbb{I}$. Since σ is a congruence on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, this and Proposition 9 imply that

$$\begin{aligned}
(xy)\mathfrak{I} &= ((\alpha_x\alpha_y\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p}\varpi\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right) = \\
&= \left(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}a_1^{s_1}\ldots a_p^{s_p}b_1^{t_1}\ldots b_p^{t_p}, \bar{0}\cdot\bar{1}\right) = \\
&= \left(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}, \bar{0}\right)\cdot\left(a_1^{s_1}\ldots a_p^{s_p}b_1^{t_1}\ldots b_p^{t_p}, \bar{1}\right) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\right)\cdot\left((\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right) = \\
&= \left((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\right)\cdot\left((\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p}\varpi\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\right) = \\
&= ((\alpha_x)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0})\cdot((\alpha_y\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}) = \\
&= (x)\mathfrak{I}\cdot(y)\mathfrak{I}.
\end{aligned}$$

Assume that (*iv*) hods. Then by Propositions 1 and 3 from [5] we have that $\alpha_x\varpi, \alpha_y\varpi, \alpha_x\alpha_y$, $\alpha_x\varpi\alpha_y\varpi \in \mathscr{PO}_\infty^+(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and by Lemma 2 without loss of generality we may assume that

$$\alpha_x = \gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi \qquad \text{and} \qquad \alpha_y = \gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p}\varpi,$$

for some non-negative integers $p, i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p, s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$, where $\gamma^0 = \upsilon^0 = \mathbb{I}$. Since σ is a congruence on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)$, this and Proposition 9 imply that

$$\begin{aligned}
(xy)\mathfrak{I} &= ((\alpha_x\alpha_y)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}) = \\
&= \Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p}\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\Big) = \\
&= \Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\upsilon_1^{s_1}\ldots\upsilon_p^{s_p}\varpi\varpi\gamma_1^{t_1}\ldots\gamma_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\Big) = \\
&= \Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\upsilon_1^{s_1}\ldots\upsilon_p^{s_p}\gamma_1^{t_1}\ldots\gamma_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{0}\Big) = \\
&= \Big(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}b_1^{s_1}\ldots b_p^{s_p}a_1^{t_1}\ldots a_p^{t_p}, \bar{0}\Big) = \\
&= \Big(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}\cdot(a_1^{s_1}\ldots a_p^{s_p}b_1^{t_1}\ldots b_p^{t_p})\mathfrak{f}, \bar{1}\cdot\bar{1}\Big) \\
&= \Big(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}\ldots b_p^{j_p}, \bar{1}\Big)\cdot\Big(a_1^{s_1}\ldots a_p^{s_p}b_1^{t_1}\ldots b_p^{t_p}, \bar{1}\Big) = \\
&= \Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\Big)\cdot\Big((\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p})\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\Big) = \\
&= \Big((\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}\varpi\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\Big)\cdot\Big((\gamma_1^{s_1}\ldots\gamma_p^{s_p}\upsilon_1^{t_1}\ldots\upsilon_p^{t_p}\varpi\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}\Big) = \\
&= ((\alpha_x\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1})\cdot((\alpha_y\varpi)\mathfrak{H}_\sigma, \bar{1}) = \\
&= (x)\mathfrak{I}\cdot(y)\mathfrak{I}.
\end{aligned}$$

Thus the map $\mathfrak{I}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma \to \mathfrak{AM}_\omega \rtimes_{\mathfrak{Q}} \mathbb{Z}_2$ is a homomorphism. Also, since $(x_\mathbb{I})\mathfrak{I} = (e, \bar{0})$, $(x_\varpi)\mathfrak{I} = (e, \bar{1})$ and for any $\alpha_x = \gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_p^{i_p}\upsilon_1^{j_1}\ldots\upsilon_p^{j_p}$, where $p, i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p$ are some positive integers, our above arguments imply that

$$(x)\mathfrak{I} = \Big(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}, \bar{0}\Big) \qquad \text{and} \qquad (y)\mathfrak{I} = \Big(a_1^{i_1}\ldots a_p^{i_p}b_1^{j_1}, \bar{1}\Big),$$

where $x = (\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma$ and $y = (\alpha_x\varpi)\mathfrak{P}_\sigma$. This implies that the homomorphism $\mathfrak{I}$ is surjective.

Now suppose that $(x)\mathfrak{I} = (y)\mathfrak{I} = (u, g)$ for some $x, y \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma$. Then there exist $\alpha_x, \alpha_y \in \mathscr{PO}_\infty^+(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ such that $(\alpha_x)\mathfrak{P}_\sigma = x$ and $(\alpha_y)\mathfrak{P}_\sigma = y$ in the case when $g = \bar{0}$, and $(\alpha_x\varpi)\mathfrak{P}_\sigma = x$ and $(\alpha_y\varpi)\mathfrak{P}_\sigma = y$ in the case when $g = \bar{1}$. If $g = \bar{0}$ then $x, y \in \mathscr{PO}_\infty^+(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and the condition $\alpha_x\sigma\alpha_y$ in $\mathscr{PO}_\infty^+(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies the equality $x = y$. Similarly, if $g = \bar{1}$ then $x, y \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant) \setminus \mathscr{PO}_\infty^+(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ and the condition $\alpha_x\varpi\sigma\alpha_y\varpi$ in $\mathscr{PO}_\infty^+(\mathbb{N}^2_\leqslant)$ implies the equality $x = y$. Hence $\mathfrak{I}\colon \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^2_\leqslant)/\sigma \to \mathfrak{AM}_\omega \rtimes_{\mathfrak{Q}} \mathbb{Z}_2$ is an isomorphism. $\square$

Acknowledgements. The authors acknowledge Taras Banakh and Alex Ravsky for their comments and suggestions.

References

1. *Bardyla S., Gutik O.* On a semitopological polycyclic monoid // Algebra Discr. Math. — 2016. — **21**, №2. — P. 163–183.
2. *Clifford A. H., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. — Providence: Amer. Math. Soc., 1961. — Vol. 1. — xv+224 p.; 1967. — Vol. 2. — xv+350 p.
3. *Eberhart C., Selden J.* On the closure of the bicyclic semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — **144**. — P. 115–126.
4. *Gutik O., Pozdniakova I.* Congruences on the monoid of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images // J. Math. Sci. — 2016. — **217**, №2. — P. 139–148.
5. *Gutik O., Pozdniakova I.* On the monoid of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 2016. — **81**. — P. 101–116.
6. *Gutik O., Pozdnyakova I.* On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images // Algebra Discr. Math. — 2014. — **17**, №2. — P. 256–279.
7. *Gutik O., Repovš D.* Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image // Stud. Sci. Math. Hungar. — 2011. — **48**, №3. — P. 342–353.
8. *Gutik O., Repovš D.* On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images // Georgian Math. J. — 2012. — **19**, №3. — P. 511–532.
9. *Gutik O., Repovš D.* On monoids of injective partial cofinite selfmaps // Math. Slovaca. — 2015. — **65**, №5. — P. 981–992.
10. *Howie J.M.* Foundations of semigroup theory. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. — x+356 p.
11. *Mitsch H.* A natural partial order for semigroups // Proc. Am. Math. Soc. — 1986. — **97**, №3. — P. 384–388.
12. *Shelah S., Steprāns J.* Non-trivial homeomorphisms of $\beta N \setminus N$ without the Continuum Hypothesis // Fund. Math. — 1989. — **132**. — P. 135–141.
13. *Shelah S., Steprāns J.* Somewhere trivial autohomeomorphisms // J. London Math. Soc. Ser. 3. — 1994. — **49**, №3. — P. 569–580.
14. *Shelah S., Steprāns J.* Martin's axiom is consistent with the existence of nowhere trivial automorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — **130**, №7. — P. 2097–2106.
15. *Veličković B.* Definable automorphisms of $\mathscr{P}(\omega)/\operatorname{fin}$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — **96**, №1. — P. 130–135.
16. *Veličković B.* Applications of the Open Coloring Axiom // Set Theory of the Continuum, H. Judah, W. Just et H. Woodin, eds., Pap. Math. Sci. Res. Inst. Workshop, Berkeley, 1989, — Berlin: MSRI Publications. Springer-Verlag. Vol. **26**, 1992. — P. 137–154.
17. *Veličković B.* OCA and automorphisms of $\mathscr{P}(\omega)/\operatorname{fin}$ // Topology Appl. — 1993. — **49**, №1. — P. 1–13.
18. *Vagner V.V.* Generalized groups // Dokl. Akad. Nauk SSSR — 1952. — **84**. — P. 1119–1122 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 31.01.2017
прийнята до друку 27.02.2017

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82

ПРО МОНОЇД МОНОТОННИХ ІН'ЄКТИВНИХ ЧАСТКОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ МНОЖИНИ $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ З КОСКІНЧЕННИМИ ОБЛАСТЯМИ ВИЗНАЧЕНЬ І ЗНАЧЕНЬ, II

Олег ГУТІК, Інна ПОЗДНЯКОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000,
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, pozdnyakova.inna@gmail.com

Нехай $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ — множина $\mathbb{N}^2$ з частковим порядком, визначеним як добуток звичайного лінійного порядку $\leqslant$ на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Вивчаємо напівгрупу $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ монотонних ін'єктивних часткових перетворень частково впорядкованої множини $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$, які мають коскінченні області визначення та значення. Описуємо природний частковий порядок на напівгрупі $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ і доводимо, що він збігається з природним частковим порядком, який індукується з симетичного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ над множиною $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на напівгрупу $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Доводимо, що напівгрупа $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathscr{PO}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ моноїда $\mathscr{PO}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ орієнтованих монотонних ін'єктивних часткових перетворень частково впорядкованої множини $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$, які мають коскінченні області визначення та значення, циклічною групою $\mathbb{Z}_2$ другого порядку. Також описуємо конгруенцію σ на напівгрупі $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, яка породжується природним частковим порядком $\preccurlyeq$ на напівгрупі $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$: $\alpha\sigma\beta$ тоді і лише тоді, коли α та β є порівняльними в $\left(\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}), \preccurlyeq\right)$. Доводимо, що фактор-напівгрупа $\mathscr{PO}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ ізоморфна вільному комутативному моноїду $\mathfrak{AM}_{\omega}$ над нескінченною зліченною множиною і, що фактор-напівгрупа $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ ізоморфна напівпрямому добутку вільного комутативного моноїда $\mathfrak{AM}_{\omega}$ групою $\mathbb{Z}_2$.

Ключові слова: напівгрупа часткових бієкцій, монотонне часткове відображення, природний частковий порядок, напівпрямий добуток, найменша групова конгруенція, вільний комутативний моноїд.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 128–136
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 128–136

УДК 512.536.7+512.568.2

ON FEEBLY COMPACT SHIFT-CONTINUOUS TOPOLOGIES ON THE SEMILATTICE $\exp_n \lambda$

Oleg GUTIK, Oleksandra SOBOL

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska 1, 79000, Lviv
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, olesyasobol@mail.ru

We study feebly compact topologies τ on the semilattice $(\exp_n \lambda, \cap)$ such that $(\exp_n \lambda, \tau)$ is a semitopological semilattice and prove that for any shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n \lambda$ the following conditions are equivalent: (i) τ is countably pracompact; (ii) τ is feebly compact; (iii) τ is d-feebly compact; (iv) $(\exp_n \lambda, \tau)$ is an H-closed space.

Key words: topological semilattice, semitopological semilattice, countably pracompact, feebly compact, d-feebly compact, H-closed, semiregular space, regular space.

Dedicated to the memory of Professor Vitaly Sushchanskyy

We shall follow the terminology of [6, 8, 9, 13]. If X is a topological space and $A \subseteq X$, then by $\operatorname{cl}_X(A)$ and $\operatorname{int}_X(A)$ we denote the closure and the interior of A in X, respectively. By ω we denote the first infinite cardinal and by $\mathbb{N}$ the set of positive integers.

A subset A of a topological space X is called *regular open* if $\operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(A)) = A$.

We recall that a topological space X is said to be

- *quasiregular* if for any non-empty open set $U \subset X$ there exists a non-empty open set $V \subset U$ such that $\operatorname{cl}_X(V) \subseteq U$;
- *semiregular* if X has a base consisting of regular open subsets;
- *compact* if each open cover of X has a finite subcover;
- *countably compact* if each open countable cover of X has a finite subcover;
- *countably compact at a subset* $A \subseteq X$ if every infinite subset $B \subseteq A$ has an accumulation point x in X;
- *countably pracompact* if there exists a dense subset A in X such that X is countably compact at A;

2010 Mathematics Subject Classification: 22A26, 22A15, 54D10, 54D30, 54H12.

- *feebly compact* (or *lightly compact*) if each locally finite open cover of X is finite [3];
- *d-feebly compact* (or *DFCC*) if every discrete family of open subsets in X is finite (see [12]);
- *pseudocompact* if X is Tychonoff and each continuous real-valued function on X is bounded.

According to Theorem 3.10.22 of [8], a Tychonoff topological space X is feebly compact if and only if X is pseudocompact. Also, a Hausdorff topological space X is feebly compact if and only if every locally finite family of non-empty open subsets of X is finite [3]. Every compact space and every sequentially compact space are countably compact, every countably compact space is countably pracompact, and every countably pracompact space is feebly compact (see [2]), and every H-closed space is feebly compact too (see [10]). Also, it is obvious that every feebly compact space is d-feebly compact.

A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents. On a semilattice S there exists a natural partial order: $e \leqslant f$ *if and only if* $ef = fe = e$. For any element e of a semilattice S we put

$$\uparrow e = \{f \in S \colon e \leqslant f\}.$$

A *topological* (*semitopological*) *semilattice* is a topological space together with a continuous (separately continuous) semilattice operation. If S is a semilattice and τ is a topology on S such that (S, τ) is a topological semilattice, then we shall call τ a *semilattice topology* on S, and if τ is a topology on S such that (S, τ) is a semitopological semilattice, then we shall call τ a *shift-continuous topology* on S.

For an arbitrary positive integer n and an arbitrary non-zero cardinal λ we put

$$\exp_n \lambda = \{A \subseteq \lambda \colon |A| \leqslant n\}.$$

It is obvious that for any positive integer n and any non-zero cardinal λ the set $\exp_n \lambda$ with the binary operation $\cap$ is a semilattice. Later in this paper by $\exp_n \lambda$ we shall denote the semilattice $(\exp_n \lambda, \cap)$.

This paper is a continuation of [11] where we study feebly compact topologies τ on the semilattice $\exp_n \lambda$ such that $(\exp_n \lambda, \tau)$ is a semitopological semilattice. Therein, all compact semilattice T_1-topologies on $\exp_n \lambda$ were described. In [11] it was proved that for an arbitrary positive integer n and an arbitrary infinite cardinal λ every T_1-semitopological countably compact semilattice $(\exp_n \lambda, \tau)$ is a compact topological semilattice. Also, there we construct a countably pracompact H-closed quasiregular non-semiregular topology τ_{fc}^2 such that $\left(\exp_2 \lambda, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is a semitopological semilattice with the discontinuous semilattice operation and show that for an arbitrary positive integer n and an arbitrary infinite cardinal λ a semiregular feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$ is a compact topological semilattice.

In this paper we show that for any shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n \lambda$ the following conditions are equivalent: (i) τ is countably pracompact; (ii) τ is feebly compact; (iii) τ is d-feebly compact; (iv) $(\exp_n \lambda, \tau)$ is an H-closed space.

The proof of the following lemma is similar to Lemma 4.5 of [5] or Proposition 1 from [1].

Lemma 1. *Every Hausdorff d-feebly compact topological space with a dense discrete subspace is countably pracompact.*

We observe that by Proposition 1 from [11] for an arbitrary positive integer n and an arbitrary infinite cardinal λ every shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n\lambda$ is functionally Hausdorff and quasiregular, and hence it is Hausdorff.

Proposition 1. *Let n be an arbitrary positive integer and λ be an arbitrary infinite cardinal. Then for every d-feebly compact shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n\lambda$ the subset $\exp_n\lambda\setminus\exp_{n-1}\lambda$ is dense in $(\exp_n\lambda,\tau)$.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists a d-feebly compact shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n\lambda$ such that $\exp_n\lambda\setminus\exp_{n-1}\lambda$ is not dense in $(\exp_n\lambda,\tau)$. Then there exists a point $x\in\exp_{n-1}\lambda$ of the space $(\exp_n\lambda,\tau)$ such that $x\notin\operatorname{cl}_{\exp_n\lambda}(\exp_n\lambda\setminus\exp_{n-1}\lambda)$. This implies that there exists an open neighbourhood $U(x)$ of x in $(\exp_n\lambda,\tau)$ such that $U(x)\cap\big(\exp_n\lambda\setminus\exp_{n-1}\lambda\big)=\varnothing$. The definition of the semilattice $\exp_n\lambda$ implies that every maximal chain in $\exp_n\lambda$ is finite and hence there exists a point $y\in U(x)$ such that ${\uparrow}y\cap U(x)=\{y\}$. By Proposition 1$(iii)$ from [11], ${\uparrow}y$ is an open-and-closed subset of $(\exp_n\lambda,\tau)$ and hence ${\uparrow}y$ is a d-feebly compact subspace of $(\exp_n\lambda,\tau)$.

It is obvious that the subsemilattice ${\uparrow}y$ of $\exp_n\lambda$ is algebraically isomorphic to the semilattice $\exp_k\lambda$ for some positive integer $k\leqslant n$. This and above arguments imply that without loss of generality we may assume that y is the isolated zero of the d-feebly compact semitopological semilattice $(\exp_n\lambda,\tau)$.

Hence we assume that τ is a d-feebly compact shift-continuous topology on $\exp_n\lambda$ such that the zero 0 of $\exp_n\lambda$ is an isolated point of $(\exp_n\lambda,\tau)$. Next we fix an arbitrary infinite sequence $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of distinct elements of cardinal λ. For every positive integer j we put

$$a_j=\left\{x_{n(j-1)+1},x_{n(j-1)+2},\ldots,x_{nj}\right\}.$$

Then $a_j\in\exp_n\lambda$ and moreover a_j is a greatest element of the semilattice $\exp_n\lambda$ for each positive integer j. Also, the definition of the semilattice $\exp_n\lambda$ implies that for every non-zero element a of $\exp_n\lambda$ there exists at most one element a_j such that $a_j\in{\uparrow}a$. Then for every positive integer j by Proposition 1(iii) of [11], a_j is an isolated point of $(\exp_n\lambda,\tau)$, and hence the above arguments imply that $\{a_1,a_2,\ldots,a_j,\ldots\}$ is an infinite discrete family of open subset in the space $(\exp_n\lambda,\tau)$. This contradicts the d-feeble compactness of the semitopological semilattice $(\exp_n\lambda,\tau)$. The obtained contradiction implies the statement of our proposition. □

The following example show that the converse statement to Proposition 1 is not true in the case of topological semilattices.

Example 1. Fix an arbitrary cardinal λ and an infinite subset A in λ such that $|\lambda\setminus A|\geqslant\omega$. By $\pi\colon\lambda\to\exp_1\lambda\colon a\mapsto\{a\}$ we denote the natural embedding of λ into $\exp_1\lambda$. On $\exp_1\lambda$ we define a topology τ_{dm} in the following way:

- (i) all non-zero elements of the semilattice $\exp_1\lambda$ are isolated points in $(\exp_1\lambda,\tau_{\mathsf{dm}})$; and
- (ii) the family $\mathscr{B}_{\mathsf{dm}}=\{U_B=\{0\}\cup\pi(B)\colon B\subseteq A \text{ and } A\setminus B \text{ is finite}\}$ is the base of the topology τ_{dm} at zero 0 of $\exp_1\lambda$.

Simple verifications show that τ_{dm} is a Hausdorff locally compact semilattice topology on $\exp_1\lambda$ which is not compact and hence by Corollary 8 of [11] it is not feebly compact.

Remark 1. We observe that in the case when $\lambda = \omega$ by Proposition 13 of [11] the topological space $(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{dm}})$ is collectionwise normal and it has a countable base, and hence $(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{dm}})$ is metrizable by the Urysohn Metrization Theorem [14]. Moreover, if $|B| = \omega$ then the space $(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{dm}})$ is metrizable for any infinite cardinal λ, as a topological sum of the metrizable space $(\exp_1 \omega, \tau_{\mathsf{dm}})$ and the discrete space of cardinality λ.

Remark 2. If n is an arbitrary positive integer $\geqslant 3$, λ is any infinite cardinal and τ_{c}^n is the unique compact semilattice topology on the semilattice $\exp_n \lambda$ defined in Example 4 of [11], then we construct more stronger topology τ_{dm}^n on $\exp_n \lambda$ them τ_{c}^n in the following way. Fix an arbitrary element $x \in \exp_n \lambda$ such that $|x| = n-1$. It is easy to see that the subsemilattice ${\uparrow}x$ of $\exp_n \lambda$ is isomorphic to $\exp_1 \lambda$, and by $h\colon \exp_1 \lambda \to {\uparrow}x$ we denote this isomorphism.

Fix an arbitrary subset A in λ such that $|\lambda \setminus A| \geqslant \omega$. For every zero element $y \in \exp_n \lambda \setminus {\uparrow}x$ we assume that the base $\mathscr{B}_{\mathsf{dm}}^n(y)$ of the topology τ_{dm}^n at the point y coincides with the base of the topology τ_{c}^n at y, and assume that ${\uparrow}x$ is an open-and-closed subset and the topology on ${\uparrow}x$ is generated by the map $h\colon \left(\exp_2 \lambda, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right) \to {\uparrow}x$. We observe that $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$ is a Hausdorff locally compact topological space, because it is the topological sum of a Hausdorff locally compact space ${\uparrow}x$ (which is homeomorphic to the Hausdorff locally compact space $(\exp_1 \lambda, \tau_{\mathsf{dm}})$ from Example 1) and an open-and-closed subspace $\exp_n \lambda \setminus {\uparrow}x$ of $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$. It is obvious that the set $\exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ is dense in $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$. Also, since ${\uparrow}x$ is an open-and-closed subsemilattice with zero x of $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$, the continuity of the semilattice operations in $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$ and $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{c}}^n)$ and the property that the topology τ_{dm}^n is more stronger them τ_{c}^n, imply that $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$ is a topological semilattice. Moreover, the space $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$ is not d-feebly compact, because it contains an open-and-closed non-d-feebly compact subspace ${\uparrow}x$.

Arguments presented in the proof of Proposition 1 and Proposition 1(iii) of [11] imply the following corollary.

Corollary 1. *Let n be an arbitrary positive integer and λ be an arbitrary infinite cardinal. Then for every d-feebly compact shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n \lambda$ a point x is isolated in $(\exp_n \lambda, \tau)$ if and only if $x \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$.*

Remark 3. We observe that the example presented in Remark 2 implies there exists a locally compact non-d-feebly compact semitopological semilattice $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$ with the following property: *a point x is isolated in $(\exp_n \lambda, \tau_{\mathsf{dm}}^n)$ if and only if $x \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$.*

The following proposition gives an amazing property of the system of neighbourhoodd of zero in a T_1-feebly compact semitopological semilattice $\exp_n \lambda$.

Proposition 2. *Let n be an arbitrary positive integer, λ be an arbitrary infinite cardinal and τ be a shift-continuous feebly compact T_1-topology on the semilattice $\exp_n \lambda$. Then for every open neighbourhood $U(0)$ of zero 0 in $(\exp_n \lambda, \tau)$ there exist finitely many $x_1, \ldots, x_m \in \lambda$ such that*

$$\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0)) \subseteq {\uparrow}x_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}x_m.$$

Proof. Suppose to the contrary that there exists an open neighbourhood $U(0)$ of zero in a Hausdorff feebly compact semitopological semilattice $(\exp_n \lambda, \tau)$ such that

$$\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0)) \nsubseteq {\uparrow}x_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}x_m$$

for any finitely many $x_1, \ldots, x_m \in \lambda$.

We fix an arbitrary $y_1 \in \lambda$ such that $\left(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\right) \cap {\uparrow}y_1 \neq \varnothing$. By Proposition 1(*iii*) of [11] the set ${\uparrow}y_1$ is open in $(\exp_n \lambda, \tau)$ and hence the set $\left(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\right) \cap {\uparrow}y_1$ is open in $(\exp_n \lambda, \tau)$ too. Then by Proposition 1 there exists an isolated point $m_1 \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ in $(\exp_n \lambda, \tau)$ such that $m_1 \in \left(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\right) \cap {\uparrow}y_1$. Now, by the assumption there exists $y_2 \in \lambda$ such that

$$\left(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\right) \cap ({\uparrow}y_2 \setminus {\uparrow}y_1) \neq \varnothing.$$

Again, since by Proposition 1(*iii*) of [11] both sets ${\uparrow}y_1$ and ${\uparrow}y_2$ are open-and-closed in $(\exp_n \lambda, \tau)$, Proposition 1 implies that there exists an isolated point $m_2 \in \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ in $(\exp_n \lambda, \tau)$ such that

$$m_2 \in \left(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\right) \cap ({\uparrow}y_2 \setminus {\uparrow}y_1).$$

Hence by induction we can construct a sequence $\{y_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ of distinct points of λ and a sequence of isolated points $\{m_i : i = 1, 2, 3, \ldots\} \subset \exp_n \lambda \setminus \exp_{n-1} \lambda$ in $(\exp_n \lambda, \tau)$ such that for any positive integer k the following conditions hold:

(*i*) $\left(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\right) \cap ({\uparrow}y_k \setminus ({\uparrow}y_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}y_{k-1})) \neq \varnothing$; and

(*ii*) $m_k \in \left(\exp_n \lambda \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(0))\right) \cap ({\uparrow}y_k \setminus ({\uparrow}y_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}y_{k-1}))$.

Then similar arguments as in the proof of Proposition 1 imply that the following family

$$\{\{m_i\} : i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

is infinite and locally finite, which contradicts the feeble compactness of $(\exp_n \lambda, \tau)$. The obtained contradiction implies the statement of the proposition. □

Proposition 1(*iii*) of [11] implies that for any element $x \in \exp_n \lambda$ the set ${\uparrow}x$ is open-and-closed in a T_1-semitopological semilattice $(\exp_n \lambda, \tau)$ and hence by Theorem 14 from [3] we have that for any $x \in \exp_n \lambda$ the space ${\uparrow}x$ is feebly compact in a feebly compact T_1-semitopological semilattice $(\exp_n \lambda, \tau)$. Hence Proposition 2 implies the following proposition.

Proposition 3. *Let n be an arbitrary positive integer, λ be an arbitrary infinite cardinal and τ be a shift-continuous feebly compact T_1-topology on the semilattice $\exp_n \lambda$. Then for any point $x \in \exp_n \lambda$ and any open neighbourhood $U(x)$ of x in $(\exp_n \lambda, \tau)$ there exist finitely many $x_1, \ldots, x_m \in {\uparrow}x \setminus \{x\}$ such that*

$$ {\uparrow}x \setminus \mathrm{cl}_{\exp_n \lambda}(U(x)) \subseteq {\uparrow}x_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}x_m.$$

The main results of this paper is the following theorem.

Theorem 1. *Let n be an arbitrary positive integer and λ be an arbitrary infinite cardinal. Then for any shift-continuous T_1-topology τ on $\exp_n \lambda$ the following conditions are equivalent:*

(*i*) *τ is countably pracompact;*

(*ii*) *τ is feebly compact;*

(*iii*) *τ is d-feebly compact;*

(iv) *the space* $(\exp_n \lambda, \tau)$ *is* H*-closed.*

Proof. Implications $(i) \Rightarrow (ii)$ and $(ii) \Rightarrow (iii)$ are trivial and implication $(iii) \Rightarrow (i)$ follows from Proposition 1 of [11], Lemma 1 and Proposition 1.

Implication $(iv) \Rightarrow (ii)$ follows from Proposition 4 of [10].

$(ii) \Rightarrow (iv)$ We shall prove this implication by induction.

By Corollary 2 from [11] every feebly compact T_1-topology τ on the semilattice $\exp_1 \lambda$ such that $(\exp_1 \lambda, \tau)$ is a semitopological semilattice, is compact, and hence $(\exp_1 \lambda, \tau)$ is an H-closed topological space.

Next we shall show that if our statements holds for all positive integers $j < k \leqslant n$ then it holds for $j = k$. Suppose that a feebly compact T_1-semitopological semilattice $(\exp_k \lambda, \tau)$ is a subspace of Hausdorff topological space X. Fix an arbitrary point $x \in X$ and an arbitrary open neighbourhood $V(x)$ of x in X. Since X is Hausdorff, there exist disjoint open neighbourhoods $U(x) \subseteq V(x)$ and $U(0)$ of x and zero 0 of the semilattice $\exp_k \lambda$ in X, respectively. Then $\operatorname{cl}_X(U(0)) \cap U(x) = \varnothing$ and hence by Proposition 2 there exists finitely many $x_1, \ldots, x_m \in \lambda$ such that

$$\exp_k \lambda \cap U(x) \subseteq {\uparrow}x_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}x_m.$$

But for any $x \in \lambda$ the subsemilattice ${\uparrow}x$ of $\exp_k \lambda$ is algebraically isomorphic to the semilattice $\exp_{k-1} \lambda$. Then by Proposition 1(iii) of [11] and Theorem 14 from [3], ${\uparrow}x$ is a feebly compact T_1-semitopological semilattice, and the assumption of our induction implies that ${\uparrow}x_1, \cdots, {\uparrow}x_m$ are closed subsets of X. This implies that

$$W(x) = U(x) \setminus ({\uparrow}x_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}x_m)$$

is an open neighbourhood of x in X such that $W(x) \cap \exp_k \lambda = \varnothing$. Thus, $(\exp_k \lambda, \tau)$ is an H-closed space. This completes the proof of the requested implication. $\square$

The following theorem gives a sufficient condition when a d-feebly compact space is feebly compact.

Theorem 2. *Every quasiregular d-feebly compact space is feebly compact.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists a quasiregular d-feebly compact space X which is not feebly compact. Then there exists an infinite locally finite family $\mathscr{U}_0$ of non-empty open subsets of X.

By induction we shall construct an infinite discrete family of non-empty open subsets of X.

Fix an arbitrary $U_1 \in \mathscr{U}_0$ and an arbitrary point $x_1 \in U_1$. Since the family $\mathscr{U}_0$ is locally finite there exists an open neighbourhood $U(x_1) \subseteq U_1$ of the point x_1 in X such that $U(x_1)$ intersects finitely many elements of $\mathscr{U}_0$. Also, the quasiregularity of X implies that there exists a non-empty open subset $V_1 \subseteq U(x_1)$ such that $\operatorname{cl}_X(V_1) \subseteq U(x_1)$. Put

$$\mathscr{U}_1 = \{U \in \mathscr{U}_0 \colon U(x_1) \cap U = \varnothing\}.$$

Since the family $\mathscr{U}_0$ is locally finite and infinite, so is $\mathscr{U}_1$. Fix an arbitrary $U_2 \in \mathscr{U}_1$ and an arbitrary point $x_2 \in U_2$. Since the family $\mathscr{U}_1$ is locally finite, there exists an open neighbourhood $U(x_2) \subseteq U_2$ of the point x_2 in X such that $U(x_2)$ intersects finitely many elements of $\mathscr{U}_1$. Since X is quasiregular, there exists a non-empty open subset $V_2 \subseteq U(x_2)$

such that $\mathrm{cl}_X(V_2) \subseteq U(x_2)$. Our construction implies that the closed sets $\mathrm{cl}_X(V_1)$ and $\mathrm{cl}_X(V_2)$ are disjoint and hence so are V_1 and V_2. Next we put

$$\mathscr{U}_2 = \{U \in \mathscr{U}_1 \colon U(x_2) \cap U = \varnothing\}.$$

Also, we observe that it is obvious that $U(x_1) \cap U = \varnothing$ for each $U \in \mathscr{U}_1$.

Suppose for some positive integer $k > 1$ we construct:

(a) a sequence of infinite locally finite subfamilies $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_{k-1}$ in $\mathscr{U}_0$ of non-empty open subsets in the space X;

(b) a sequence of open subsets $U_1, \ldots, U_k$ in X;

(c) a sequence of points $x_1, \ldots, x_k$ in X and a sequence of their corresponding open neighbourhoods $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ in X;

(d) a sequence of disjoint non-empty subsets $V_1, \ldots, V_k$ in X

such that the following conditions hold:

(i) $\mathscr{U}_i$ is a proper subfamily of $\mathscr{U}_{i-1}$;

(ii) $U_i \in \mathscr{U}_{i-1}$ and $U_i \cap U = \varnothing$ for each $U \in \mathscr{U}_j$ with $i \leqslant j \leqslant k$;

(iii) $x_i \in U_i$ and $U(x_i) \subseteq U_i$;

(iv) V_i is an open subset of U_i with $\mathrm{cl}_X(V_i) \subseteq U(x_i)$,

for all $i = 1, \ldots, k$, and

(v) $\mathrm{cl}_X(V_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V_k)$ are disjoint.

Next we put

$$\mathscr{U}_k = \{U \in \mathscr{U}_{k-1} \colon U(x_1) \cap U = \ldots = U(x_k) \cap U = \varnothing\}.$$

Since the family $\mathscr{U}_{k-1}$ is infinite and locally finite, there exists a subfamily $\mathscr{U}_k$ in $\mathscr{U}_{k-1}$ which is infinite and locally finite. Fix an arbitrary $U_{k+1} \in \mathscr{U}_k$ and an arbitrary point $x_{k+1} \in U_{k+1}$. Since the family $\mathscr{U}_k$ is locally finite, there exists an open neighbourhood $U(x_{k+1}) \subseteq U_{k+1}$ of the point x_{k+1} in X such that $U(x_{k+1})$ intersects finitely many elements of $\mathscr{U}_k$. Since the space X is quasiregular, there exists a non-empty open subset $V_{k+1} \subseteq U(x_{k+1})$ such that $\mathrm{cl}_X(V_{k+1}) \subseteq U(x_{k+1})$. Simple verifications show that the conditions $(i) - (iv)$ hold in the case of the positive integer $k+1$.

Hence by induction we construct the following two infinite countable families of open non-empty subsets of X:

$$\mathscr{U} = \{U_i \colon i = 1,2,3,\ldots\} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{V} = \{V_i \colon i = 1,2,3,\ldots\}$$

such that $\mathrm{cl}_X(V_i) \subseteq U_i$ for each positive integer i. Since $\mathscr{U}$ is a subfamily of $\mathscr{U}_0$ and $\mathscr{U}_0$ is locally finite in X, $\mathscr{U}$ is locally finite in X as well. Also, above arguments imply that $\mathscr{V}$ and

$$\overline{\mathscr{V}} = \{\mathrm{cl}_X(V_i) \colon i = 1,2,3,\ldots\}$$

are locally finite families in X too.

Next we shall show that the family $\mathscr{V}$ is discrete in X. Indeed, since the family $\overline{\mathscr{V}}$ is locally finite in X, by Theorem 1.1.11 of [8] the union $\bigcup \overline{\mathscr{V}}$ is a closed subset of X, and hence any point $x \in X \setminus \bigcup \overline{\mathscr{V}}$ has an open neighbourhood $O(x) = X \setminus \bigcup \overline{\mathscr{V}}$ which does not intersect the elements of the family $\mathscr{V}$. If $x \in \mathrm{cl}_X(V_i)$ for some positive integer i, then our construction implies that $U(x_i)$ is an open neighbourhood of x which intersects only the set $V_i \in \mathscr{V}$. Hence X has an infinite discrete family $\mathscr{V}$ of non-empty open subsets in

X, which contradicts the assumption that the space X is d-feebly compact. The obtained contradiction implies the statement of the theorem. □

We finish this note by some simple remarks about dense embedding of an infinite semigroup of matrix units and a polycyclic monoid into d-feebly compact topological semigroups which follow from the results of the paper [5].

Let λ be a non-zero cardinal. On the set $B_\lambda = (\lambda \times \lambda) \cup \{0\}$, where $0 \notin \lambda \times \lambda$, we define the semigroup operation "$\cdot$" as follows

$$(a,b) \cdot (c,d) = \begin{cases} (a,d), & \text{if } b = c; \\ 0, & \text{if } b \neq c, \end{cases}$$

and $(a,b) \cdot 0 = 0 \cdot (a,b) = 0 \cdot 0 = 0$ for $a,b,c,d \in \lambda$. The semigroup B_λ is called the *semigroup of* $\lambda{\times}\lambda$*-matrix units* (see [7]).

The bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q subjected only to the condition $pq = 1$ [7]. For a non-zero cardinal λ, the polycyclic monoid P_λ on λ generators is the semigroup with zero given by the presentation:

$$P_\lambda = \left\langle \{p_i\}_{i\in\lambda}, \{p_i^{-1}\}_{i\in\lambda} \mid p_i p_i^{-1} = 1, p_i p_j^{-1} = 0 \text{ for } i \neq j \right\rangle$$

(see [5]). It is obvious that in the case when $\lambda = 1$ the semigroup P_1 is isomorphic to the bicyclic semigroup with adjoined zero.

By Theorem 4.4 from [5] for every infinite cardinal λ the semigroup of $\lambda{\times}\lambda$-matrix units B_λ does not densely embed into a Hausdorff feebly compact topological semigroup, and by Theorem 4.5 from [5] for arbitrary cardinal $\lambda \geqslant 2$ there exists no Hausdorff feebly compact topological semigroup which contains the λ-polycyclic monoid P_λ as a dense subsemigroup. These theorems and Lemma 1 imply the following two corollaries.

Corollary 2. *For every infinite cardinal λ the semigroup of $\lambda{\times}\lambda$-matrix units B_λ does not densely embed into a Hausdorff d-feebly compact topological semigroup.*

Corollary 3. *For arbitrary cardinal $\lambda \geqslant 2$ there exists no Hausdorff d-feebly compact topological semigroup which contains the λ-polycyclic monoid P_λ as a dense subsemigroup.*

The proof of the following corollary is similar to Theorem 5.1(5) from [4].

Corollary 4. *There exists no Hausdorff topological semigroup with the d-feebly compact square which contains the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ as a dense subsemigroup.*

Acknowledgements. We acknowledge Alex Ravsky and the referee for their comments and suggestions.

References

1. *Arhangel'skii A.V.* On spaces with point-countable base // Topological spaces and their mappings. Riga, 1985. — P. 3–7 (in Russian).
2. *Arkhangel'skiĭ A.V.* Topological function spaces. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. — ix+205 p.
3. *Bagley R.W., Connell E.H., McKnight J.D., Jr.* On properties characterizing pseudo-compact spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1958. — **9**, №3. — P. 500–506.

4. *Banakh T., Dimitrova S., Gutik O.* Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups // Topology Appl. — 2010. — **157**, №18. — P. 2803–2814.
5. *Bardyla S., Gutik O.* On a semitopological polycyclic monoid // Algebra Discr. Math. — 2016. — **21**, №2. — P. 163–183.
6. *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* The theory of topological semigroups. — New York–Basel: Marcell Dekker Inc., 1983. — Vol. 1. — 244 p.; 1986. — Vol. 2. — 195 p.
7. *Clifford A.H., Preston G.B.* The algebraic theory of semigroups. — Providence: Amer. Math. Soc., 1961. — Vol. 1. — xv+224 p.; 1967. — Vol. 2. — xv+350 p.
8. *Engelking R.* General topology. — Berlin: Heldermann, 1989. — 539 p.
9. *Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M.W., Scott D.S.* Continuous lattices and domains. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
10. *Gutik O.V., Ravsky O.V.* Pseudocompactness, products and topological Brandt λ^0–extensions of semitopological monoids // Math. Methods and Phys.-Mech. Fields. — 2015. — **58**, №2. — P. 20–37; reprinted version: J. Math. Sci. — 2017. — **223**, №2. — P. 18-38.
11. *Gutik O., Sobol O.* On feebly compact topologies on the semilattice $\exp_n\lambda$ // Mat. Stud. — 2016. — **46**, №1. — P. 29–43.
12. *Matveev M.* A survey of star covering properties. — Topology Atlas Preprint, April 15, 1998. — 138 p.
13. *Ruppert W.* Compact semitopological semigroups: An intrinsic theory // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer, 1984. — **1079**. — 259 p.
14. *Urysohn P.* Zum Metrisationsproblem // Math. Ann. — 1925. — **94**. — S. 309–315.

Стаття: надійшла до редколегії 25.09.2016
прийнята до друку 20.02.2017

ПРО СЛАБКО КОМПАКТНІ ТОПОЛОГІЇ, СТОСОВНО ЯКИХ НАПІҐРАТКА $\exp_n\lambda$ МАЄ НЕПЕРЕРВНІ ЗСУВИ

Олег ГУТІК, Олександра СОБОЛЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: o_gutik@franko.lviv.ua,
ovgutik@yahoo.com, olesyasobol@mail.ru

Вивчаємо слабко компактні топології τ на напівґратці $(\exp_n\lambda,\cap)$ такі, що $(\exp_n\lambda,\tau)$ є напівтопологічною напівґраткою і доведено, що для довільної T_1-топології τ на $\exp_n\lambda$, стосовно якої зсуви в $(\exp_n\lambda,\tau)$ є неперервними, такі умови еквівалентні: (i) τ – зліченно пракомпактна; (ii) τ – слабко компактна; (iii) τ – d-слабко компактна; (iv) $(\exp_n\lambda,\tau)$ – H-замнений простір.

Ключові слова: топологічна напівґратка, напівтопологічна напівґратка, зліченно пракомпактний. слабко компактний, d-слабко компактний, H-замкнений простір, напіврегулярний простір, регулярний простір.

ISSN 2078-3744. *Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 137–150*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 137–150

УДК 517.9

THE FOURIER PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH A TIME-DEPENDENT DELAY

Olga Ilnytska

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: ol.ilnytska@gmail.com

The existence and uniqueness of a weak solution of the Fourier problem for nonlinear parabolic equations with a variable delay are investigated and its a priori estimate is obtained.

Key words: Fourier problem, problem without initial condition, equation with delay, nonlinear parabolic equation.

1. Introduction

The boundary value problems for the nonlinear parabolic equations with a time depended delay are considered. A typical example of the equations being studied here is

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \widehat{a}_0(x,t)u + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c_0(x,t,s)u(x,s)ds = f(x,t), \tag{1}$$

$(x,t) \in Q := \Omega \times (-\infty, 0]$, where $n \in \mathbb{N}$, Ω is a domain in $\mathbb{R}^n$, $\widehat{a}_{ij} = \widehat{a}_{ji}(i,j = \overline{1,n})$, $\widehat{a}_0, c_0$ are measurable bounded functions, and there exists $\nu = \mathrm{const} > 0$ such that $\sum_{i,j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ for a.e. $(x,t) \in Q$ and for all $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0(x,t) > 0$, τ is a nonnegative continuous function, f is an integrable function, u is un unknown function.

Fourier problems for evolution equations arise in modeling different nonstationary processes in nature that started a long time ago and initial conditions do not affect on them in the actual time moment, but boundary conditions do affect it. Thus, we can assume that the initial time is $-\infty$, while 0 is the final time, and initial conditions can be replaced with the behaviour of the solution as time variable tends to $-\infty$. The Fourier problem for evolution equations has been widely studied. They appear in modeling in many fields of science such as economics, physics, ecology, cybernetics, etc. (see, e.g.,

---

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35D30, 35R10, 35B45

[3], [4], [5], [9], [10], [11], [18], [19], [20], [24], [22], [23]). A lot of information concerning results on problems without initial conditions can be found in [9].

Equations with time delay arise in modelling population dynamics, in non-Newtonian filtration, heat flux, etc. ([13]). The equations of type (1) on finite time interval with constant delay were investigated in [1], [2], [17], [14], [15], etc. Good reference overview on such papers can be found in [17]. We remark that in these papers the semigroup theory is used.

Partial differential equations with a variable delay are less studied, and we known only publications of Rezounenko and Chueshov (in particular, [12], [21]), where equations of type (1) on finite time interval, with $\tau = \tau(u)$, are considered. In [12], a certain abstract parabolic problem with the state dependent delay term of a rather general structure is considered. In [21], the nonlinear partial functional differential equations with main linear elliptic operator and non-local nonlinear term are considered. For proving existence of solutions of problems considered in [12], [21] the Galerkin approximations are used.

Fourier problems for parabolic equations with constant time delay were investigated in [16], [7] (see also references therein).

To the best of our knowledge, the Fourier problems for parabolic equations with time depended delay is an untreated topic in the literature. These problems are considered in our paper. Existence and uniqueness of solution of the problem are proved. The methods of investigation as in [6] are used.

The paper is organized in the following way. In Section 2, the main notations and functional spaces are introduced. The statement of the problem and formulation of the main result are given in Section 3. The main result is proved in Section 4.

2. Notation and auxiliary facts

Let n be a positive integer number, $\mathbb{R}^n$ be the standard linear space of ordered collections $x = (x_1, ..., x_n)$ of real numbers with the norm $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$. Suppose that $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with the piecewise smooth boundary $\partial\Omega$. Also, we denote $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\overline{Q} := \overline{\Omega} \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$.

Let us define some functional spaces. Firstly, denote by $C_c^\infty(\Omega)$ the space of infinite differentiable functions on Ω with compact supports. Denote by $H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega)\ (i = \overline{1,n})\}$ the Sobolev space, which is a Hilbert space with the scalar product $(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \big\{\nabla v \nabla w + vw\big\}\,dx$, where $\nabla v := (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$ and the corresponding norm $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \big(\int\limits_\Omega \big\{|\nabla v|^2 + |v|^2\big\}\,dx\big)^{1/2}$. By $H_0^1(\Omega)$ we denote the closure of $C_c^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

Let us remind Friedrichs' inequality

$$\int\limits_\Omega |v|^2\,dx \leqslant K_0 \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

where K_0 is a positive constant independent of v. It is known that $1/K_0$ is the first eigenvalue of the problem: $-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$.

From Friedrichs' inequality it follows that the norm in $H_0^1(\Omega)$ can also be written as $||v||_{H_0^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx$.

For an arbitrary Banach space X by $L^2_{\rm loc}(S;X)$ we denote the linear space of (classes of) measurable functions defined on S with values in X such that their restrictions on any interval $[a,b]\subset S$ belong to $L^2(a,b;X)$. Denote by $L^p_{\rm loc}(\overline{Q})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ the linear space of (classes of) measurable functions defined on Q such that their restrictions on any bounded measurable set $Q'\subset Q$ belongs to $L^p(Q')$.

Denote by $C^1_c(I)$, where I is an interval, the linear space continuously differentiable finite functions defined on I, moreover, if $I=(t_1,t_2)$, then we will write $C^1_c(t_1,t_2)$ instead of $C^1_c((t_1,t_2))$.

Denote by $F(Q)$ the space of vector-functions $(f_0,f_1,\dots,f_n)$ such that $f_i\in L^2_{\rm loc}(Q)$ for each $i\in\{0,1,...,n\}$.

Let $\omega\in\mathbb{R}$, X be a Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)_X$ and the corresponding norm $\|\cdot\|_X$. Denote

$$L^2_\omega(S;X):=\Big\{f\in L^2_{\rm loc}(S;X)\;\Big|\;\int_S e^{2\omega t}\|f(t)\|^2_X dt<\infty\Big\}.$$

$L^2_\omega(S;X)$ is a Hilbert space with the scalar product

$$(f,g)_{L^2_\omega(S;X)}=\int_S e^{2\omega t}(f(t),g(t))_X\,dt$$

and the norm

$$\|f\|_{L^2_\omega(S;X)}:=\Big(\int_S e^{2\omega t}\|f(t)\|^2_X\,dt\Big)^{1/2}. \tag{3}$$

The following auxiliary result, which had been proved in [6], will be used in the sequel.

Lemma 1. *Let $w\in L^2(t_1,t_2;H^1_0(\Omega))$, where $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ $(t_1<t_2)$, satisfing the following identity*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega\Big\{-wv\varphi'+(g_0v+\sum_{i=1}^n g_iv_{x_i})\varphi\Big\}\,dxdt=0,\quad v\in H^1_0(\Omega),\ \varphi\in C^1_c(t_1,t_2), \tag{4}$$

for some $g_i\in L^2(\Omega\times(t_1,t_2))$ $(i=\overline{0,n})$. Then $w\in C([t_1,t_2];L^2(\Omega))$ and

$$\frac12\theta(t)\int\limits_\Omega|w(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\sigma_1}^{t=\sigma_2}-\frac12\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_\Omega|w|^2\theta'\,dxdt+\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_\Omega\Big\{g_0w+\sum_{i=1}^n g_iw_{x_i}\Big\}\theta\,dxdt=0 \tag{5}$$

for any $\sigma_1,\sigma_2\in[t_1,t_2]$ $(\sigma_1<\sigma_2)$, for every $\theta\in C^1([t_1,t_2])$.

3. Statement of the problem and main result

In this paper we consider weak solutions $u:\overline{Q}\to\mathbb{R}$ of the problem

$$\begin{aligned}u_t-\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}\,a_i(x,t,u,\nabla u)+a_0(x,t,u,\nabla u)+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(x,t,s,u(x,s))ds=\\=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,t)+f_0(x,t),\qquad (x,t)\in Q,\end{aligned} \tag{6}$$

$$u\big|_\Sigma=0, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{2\omega t}\int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx = 0, \tag{8}$$

for some $\omega\in\mathbb{R}$. Here $\tau : S\to\mathbb{R}$ is a continuous bounded function such that $\tau(t)\geqslant 0$ for all $t\in S$, and $a_i : Q\times\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$, $c : Q\times S\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_i : Q\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{0,n})$ are given real-valued functions from the corresponding classes of initial data.

We introduce the following classes of the initial data.

Define $\mathcal{A}$ to be the set of the collections $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ of the functions $a_i : Q\times\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$ $(i\in\{0,1,\dots,n\})$ which satisfy the following conditions:

($\mathcal{A}_1$) for every $i\in\{0,1,\dots,n\}$, a_i is a Caratheodory function (i.e., $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$ is a continuous for a.e. $(x,t)\in Q$, and $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) : Q\to\mathbb{R}$ is measurable for every $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$), and $a_i(x,t,0,0)=0$ for a.e. $(x,t)\in Q$;

($\mathcal{A}_2$) for every $i\in\{0,1,\dots,n\}$, for a.e. $(x,t)\in Q$ and for every $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ the estimate

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)|\le C_1\big(|\rho|+\sum_{j=1}^n|\xi_j|\big)+h_i(x,t)$$

is valid, where $C_1>0$ is constant and $h_i\in L^2_{\rm loc}(Q)$;

($\mathcal{A}_3$) for a.e. $(x,t)\in Q$ and for every (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2)\in\mathbb{R}^{1+n}$ the inequality

$$\sum_{i=1}^n\big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1-\xi_i^2)+\big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1)-$$
$$-a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1-\rho_2)\ge K_1\sum_{i=1}^n|\xi_i^1-\xi_i^2|^2+K_2|\rho_1-\rho_2|^2 \tag{9}$$

holds, where $K_1>0, K_2\in\mathbb{R}$ are constants.

Define $\mathcal{C}$ to be the set of the real-value functions $c : Q\times S\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ which satisfy the following conditions:

($\mathcal{C}_1$) c is a Caratheodory function (i.e., $c(x,t,s,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a continuous function for a.e. $(x,t,s)\in Q\times S$, and $c(\cdot,\cdot,\cdot,\rho) : Q\times S\to\mathbb{R}$ is a measurable function for every $\rho\in\mathbb{R}$), in addition, $c(x,t,s,0)=0$ for a.e. $(x,t,s)\in Q\times S$;

($\mathcal{C}_2$) there exists a constant $L>0$ such that for a.e. $(x,t,s)\in Q\times S$ and for every ρ_1, $\rho_2\in\mathbb{R}$ the inequality

$$\big|c(x,t,s,\rho_1)-c(x,t,s,\rho_2)\big|\le L|\rho_1-\rho_2| \tag{10}$$

holds.

Remark 1. The condition ($\mathcal{C}_1$) (more precisely, $c(x,t,s,0)=0$) and ($\mathcal{C}_2$) imply that for a.e. $(x,t,s)\in Q\times S$, and for every $\rho\in\mathbb{R}$ the following estimate is valid:

$$|c(x,t,s,\rho)|\le L|\rho|. \tag{11}$$

Now we can give a definition of the weak solution of problem (6)–(8).

Definition 1. *Let* $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F(Q)$. *A function* $u\in L^2_{\rm loc}(S;H^1_0(\Omega))\cap C\big(S;L^2(\Omega)\big)$ *is called a weak solution of problem* (6)–(8) *if it* *satisfies condition* (8), *and the integral equality*

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)v\varphi + v\varphi \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))\,ds - uv\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i}\varphi + f_0 v\varphi\Big\}\,dxdt \tag{12}$$

holds for every $v \in H_0^1(\Omega)$ *and* $\varphi \in C_c^1(-\infty,0)$.

Denote

$$\tau^+ := \sup_{t\in S}\tau(t), \qquad \chi(\omega) := \begin{cases} \tau^+, & \text{if } \omega = 0,\\ \frac{1}{2\omega}(e^{2\omega\tau^+}-1), & \text{if } \omega \neq 0. \end{cases} \tag{13}$$

We consider the inequality

$$\omega + 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)} < K_1/K_0 + K_2, \tag{14}$$

where K_2 is from (9).

It is obvious that $\omega + 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)} \to -\infty$ when $\omega \to -\infty$, because $\chi(\omega) \to 0$ when $\omega \to -\infty$. Hence, inequality (14) has solutions.

Theorem 1. *Let* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F(Q)$, *and let* ω *satisfies* (14). *If problem* (6)–(8) *has a solution, then it is unique.*

Theorem 2. *Let the assumptions of Theorem 1 be fulfilled, and* $f_i \in L^2_\omega(S; L^2(\Omega))$ $(i = \overline{0,n})$. *Then there exists a unique solution of problem* (6)–(8), *and it satisfies the following estimates:*

$$e^{2\omega\sigma}\int\limits_{\Omega}|u(x,\sigma)|^2\,dx \leqslant C_2 \int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\omega t}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad \sigma \in S, \tag{15}$$

$$\|u\|_{L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))} \leqslant C_3\,\|f\|_{L^2_\omega(S;L^2(\Omega))}, \tag{16}$$

where C_2, C_3 *are positive constants depending on* $\tau^+, \omega, L, K_0, K_1, K_2$ *only.*

4. Proof of the main results

For a function $w : Q \to \mathbb{R}$ we denote

$$a_j(w)(x,t) := a_j(x,t,w(x,t),\nabla w(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \quad j = \overline{0,n},$$

$$c(w)(x,t,s) := c(x,t,s,w(x,s)), \quad (x,t,s) \in Q \times S. \tag{17}$$

Proof of Theorem 1. Suppose the contrary. Let u_1 and u_2 be two distinct weak solutions of the problem. Denote $w := u_1 - u_2$. Considering the difference between (12) for $u = u_2$

and $u = u_1$, we obtain

$$- \iint_Q wv\varphi' \, dxdt + \iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2)) v_{x_i} + \big(a_0(u_1) - a_0(u_2)\big) v \\ + v \int_{t-\tau(t)}^t \big(c(u_1) - c(u_2)\big) ds \Big] \varphi \, dxdt = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \forall \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{18}$$

It is clear that from (8) for $u = u_2$ and $u = u_1$ we have

$$e^{2\omega t} \int_\Omega |w(x,t)|^2 \, dx \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{19}$$

According to Lemma 1, setting $\theta(t) = e^{2\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$, from equality (18) we get

$$\frac{1}{2} e^{2\omega\sigma_2} \int_\Omega |w(x,\sigma_2)|^2 \, dx - \frac{1}{2} e^{2\omega\sigma_1} \int_\Omega |w(x,\sigma_1)|^2 \, dx - \ \omega \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\!\!\int_\Omega e^{2\omega t} |w(x,t)|^2 \, dxdt + \\ + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\!\!\int_\Omega e^{2\omega t} \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))(u_{1,x_i} - u_{2,x_i}) + (a_0(u_1) - a_0(u_2))(u_1 - u_2) + \\ + w \int_{t-\tau(t)}^t \big(c(u_1) - c(u_2)\big) ds \Big] \, dxdt = 0, \tag{20}$$

for arbitrary $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$.

From condition $(\mathcal{A}_3)$, for a.e. $(x,t) \in Q$ we have

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\!\!\int_\Omega e^{2\omega t} \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))(u_{1,x_i} - u_{2,x_i}) + (a_0(u_1) - a_0(u_2))(u_1 - u_2) \Big] \, dxdt \geqslant \\ \geqslant \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\!\!\int_\Omega e^{2\omega t} \Big[K_1 |\nabla w|^2 + K_2 |w|^2 \Big] \, dxdt. \tag{21}$$

Now, we consider the last term from equality (20). Using condition $(\mathcal{C}_2)$, the Fubini Theorem and the Cauchy–Schwarz inequality, for a.e. $x \in \Omega$ we obtain

$$\left| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t} w(x,t) \Big(\int_{t-\tau(t)}^t \big(c(u_1)(x,t,s) - c(u_2)(x,t,s)\big) ds \Big) dt \right| \leqslant \\ \leqslant L \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t} |w(x,t)| \left(\int_{t-\tau^+}^t |w(x,s)| ds \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant L\sqrt{\tau^+}\left(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}|w(x,t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)dt\right)^{1/2}. \qquad (22)$$

Changing order of integration and assuming $w(x,t)=0$ for $x\in\Omega,\ t>0$, for a.e. $x\in\Omega$ we have

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)dt \leqslant \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_2}|w(x,s)|^2ds\int\limits_{s}^{s+\tau^+}e^{2\omega t}dt =$$

$$= \chi(\omega)\Big(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}e^{2\omega s}|w(x,s)|^2ds + \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}e^{2\omega s}|w(x,s)|^2ds\Big), \qquad (23)$$

where $\chi(\omega)$ is defined in (13).

Substituting in (22) the last term from the obtained above chain of relations instead of the first one, and using the inequalities: $\sqrt{ab}\leqslant a+b,\ \sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$, we obtain

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}e^{2\omega t}w(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\big(c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)\big)dsdt\Big|$$

$$\leqslant L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\Big(2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2dt + \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2dt\Big). \qquad (24)$$

Using (21), (24), from (20) we obtain

$$\frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx \;-\; \frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_1)|^2\,dx \;+K_1\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|\nabla w(x,t)|^2\,dxdt$$

$$+(K_2-2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}-\omega)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt - L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt\leqslant 0.$$

From this, using (2), we get

$$\frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx \;-\; \frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_1)|^2\,dx$$

$$+\;\big(K_1/K_0+K_2-2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}-\omega\big)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt$$

$$-L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt\leqslant 0.$$

Since ω is a solution of inequality (14),

$$e^{2\omega\sigma_2}\int_\Omega |w(x,\sigma_2)|^2\,dx \leqslant e^{2\omega\sigma_1}\int_\Omega |w(x,\sigma_1)|^2\,dx + 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\int_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int_\Omega e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt. \tag{25}$$

Let as fix an arbitrary σ_2 in (25), and let σ_1 tends to $-\infty$. According to condition (19), the first term from the right side of inequality (25) tends to 0. Obviously, the second term from the right side of inequality (25) also tends to 0. Indeed,

$$0 \leqslant \int_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int_\Omega e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt \leqslant \tau^+ \max_{t\in[\sigma_1,\sigma_1-\tau^+]}\Big(e^{2\omega t}\int_\Omega |w(x,t)|^2\,dx\Big) \underset{\sigma_1\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Thus, we get the equality $e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_\Omega |w(x,\sigma_2)|^2\,dx = 0$. Since $\sigma_2 \in S$ is arbitrary, we obtain $w(x,t) = 0$ for a.e. $(x,t) \in Q$, this contradicts our assumption. Therefore, the solution of problem (6)–(8) is unique. □

Proof of Theorem 2. For each $m \in N$ denote $Q_m := \Omega\times(-m,0]$, $\tau_m := \min\limits_{-m\leqslant t\leqslant 0}(t-\tau(t))$. Denote $f_{i,m}(\cdot,t) := f_i(\cdot,t)$ if $-m < t \leqslant 0$, and $f_{i,m}(\cdot,t) := 0$ if $t \leqslant -m$. We consider the problem: to find a function $u_m \in L^2(-m,0;H_0^1(\Omega)) \cap C([-\tau_m,0];L^2(\Omega))$ which satisfies the initial condition

$$u_m(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}\times[-\tau_m,-m], \tag{26}$$

and equation (6) in Q_m in the sense of integral equality, i.e.,

$$\iint_{Q_m}\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u_m,\nabla u_m)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u_m,\nabla u_m)v\varphi + v\varphi\int_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)\,ds - u_m v\varphi'\Big\}dxdt$$
$$= \iint_{Q_m}\Big\{\sum_{i=1}^n f_{i,m}v_{x_i}\varphi + f_{0,m}v\varphi\Big\}\,dxdt, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \in C_c^1(-m,0). \tag{27}$$

Existence and uniqueness of a solution of this problem follows from the paper [8]. For each $m \in \mathbb{N}$ we extend u_m by 0 onto Q and denote this extension by u_m again.

Now, we shall get estimates of u_m for each $m \in \mathbb{N}$. First, remark that for each $m \in \mathbb{N}$ the function u_m belongs to $L^2(S;H_0^1(\Omega)) \cap C(S;L^2(\Omega))$ and satisfies integral equality (12) with $f_{i,m}$ instead of f_i $(i = \overline{1,n})$, i.e., the following equality holds:

$$\iint_Q\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u_m,\nabla u_m)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u_m,\nabla u_m)v\varphi +$$
$$+v\varphi\int_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)ds - u_m v\varphi'\Big\}dxdt$$
$$= \iint_Q\Big\{\sum_{i=1}^n f_{i,m}v_{x_i}\varphi + f_{0,m}v\varphi\Big\}\,dxdt, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \in C_c^1(-\infty,0). \tag{28}$$

Applying Lemma 1 with $\theta(t) = 2e^{2\omega t}$, $t \in S$, and $[\sigma_1, \sigma_2] \subset S$, $\sigma_1 < -m$, to equality (28), we obtain

$$e^{2\omega\sigma_2} \int\limits_{\Omega} |u_m(x, \sigma_2)|^2\, dx - e^{2\omega\sigma_1} \int\limits_{\Omega} |u_m(x, \sigma_1)|^2\, dx -$$
$$-2\omega \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2\, dxdt + 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u_m)u_{m,x_i} + a_0(u_m)u_m +$$
$$+u_m \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)ds\Big]\, dxdt = 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_{i,m}u_{m,x_i} + f_{0,m}u_m\Big\}\, dxdt. \tag{29}$$

According to the Cauchy inequality for a.e. $t \in S$ we have

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_{i,m}u_{m,x_i} + f_{0,m}u_m\Big\}\, dxdt$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{|\nabla u_m|^2 + |u_m|^2\Big\}dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}|^2 dxdt, \tag{30}$$

for arbitrary $\varepsilon > 0$.

Similar to (24), from (11) for a.e. $x \in \Omega$ we can get

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}u_m(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)dsdt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\Big(2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2 dt + \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1} e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2 dt\Big). \tag{31}$$

By $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ and (2) we obtain that

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(u_m)u_{m,x_i} + a_0(u_m)u_m\Big\}\, dxdt \geq \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{K_1|\nabla u_m|^2 + K_2|u_m|^2\Big\}\, dxdt$$
$$= \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{(\delta + 1 - \delta)K_1|\nabla u_m|^2 + K_2|u_m|^2\Big\}\, dxdt$$
$$\geqslant \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{(1-\delta)K_1|\nabla u_m|^2 + (\delta K_1/K_0 + K_2)\,|u_m|^2\Big\}\, dxdt, \tag{32}$$

where $\delta > 0$ is a constant close to 1.

By (29) using estimates (30), (31) and (4), and condition (26), and taking $\sigma_1 < -m$ we obtain

$$e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma_2)|^2\,dx + (2(1-\delta)K_1-\varepsilon)\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|\nabla u_m(x,t)|^2 dxdt$$

$$+\Big(2\big(\delta K_1/K_0 + K_2 - \omega - 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\big)-\varepsilon\Big)\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2 dxdt$$

$$\leqslant \varepsilon^{-1}\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}(x,t)|^2 dxdt. \tag{33}$$

If we take $\varepsilon = \min\{\delta K_1/K_0 + K_2 - \omega - 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}, (1-\delta)K_1\}$, then

$$e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma_2)|^2\,dx + C_4\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|\nabla u_m|^2\,dxdt \leqslant C_5\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}|^2 dxdt, \tag{34}$$

where C_4 and C_5 are positive constants depending on K_0, K_1, K_2, L, τ^+ and ω only.

It is clear that u_m belongs to $L^2_\omega(S; H^1_0(\Omega))$. Therefore, from (34) we obtain

$$e^{2\omega\sigma}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma)|^2\,dx + C_4\int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|\nabla u_m|^2\,dxdt \leqslant C_5\int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}|^2 dxdt, \quad \sigma\in S. \tag{35}$$

By the definition of $f_{i,m}$, from (35) we have

$$e^{2\omega\sigma}||u_m(\cdot,\sigma)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_5\int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}||f_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad \sigma\in S, \tag{36}$$

$$\|u_m\|_{L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))} \leqslant C_6\sum_{i=0}^{n}\|f_i\|_{L^2_\omega(S;L^2(\Omega))}, \tag{37}$$

where $C_5>0, C_6>0$ are positive constants depending on $\omega, \tau^+, K_0, K_1, K_2$ and L only.

Let us show that $\{u_m\}$ is a Cauchy sequence. Taking arbitrary $k, l \in \mathbb{N}$ such that $k<l$ and considering difference between u_k and u_l, similarly as estimate (35), for any $\sigma\in S$ such that $-k\leqslant\sigma\leqslant 0$ one can obtain

$$e^{2\omega\sigma}\int\limits_{\Omega}|u_k(x,\sigma)-u_l(x,\sigma)|^2\,dx + C_7\int\limits_{-l}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|\nabla(u_k-u_l)|^2\,dxdt$$

$$\leqslant C_8\int\limits_{-l}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,k}-f_{i,l}|^2 dxdt, \tag{38}$$

where C_7 and C_8 are positive constants independent of k, l. Thus

$$e^{2\omega\sigma}\|u_k(\cdot,\sigma)-u_l(\cdot,\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_8\int\limits_{-l}^{-k} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}\|f_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad -k\leqslant\sigma\leqslant 0, \tag{39}$$

$$\|u_k-u_l\|_{L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))} \leqslant C_9\int\limits_{-l}^{-k} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}\|f_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \tag{40}$$

The condition $f_i \in L^2_\omega(S;L^2(\Omega))$ implies that the right-hand sides of inequalities (39) and (40) tend to zero when k and l tend to $+\infty$. This means that the sequence $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in the space $L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$. Consequently, we obtain the existence of the function $u\in L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$ such that

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{strongly in} \quad L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega)). \tag{41}$$

Using condition $(\mathcal{C}_2)$, the Cauchy-Schwarz inequality and (41) we get

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u)(x,t,s)ds\Big|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \tau^+\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|c(u_m)(x,t,s)-c(u)(x,t,s)|^2ds\Big)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L^2\tau^+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|u_m(x,s)-u(x,s)|^2ds\,dtdx \leqslant$$

$$\leqslant L^2\tau^+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_2}\int\limits_{s}^{s+\tau^+}|u_m(x,s)-u(x,s)|^2dt\,dsdx =$$

$$= L^2\tau^{+2}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)-u(x,t)|^2dtdx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Thus, we obtain

$$\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u)ds \quad \text{strongly in} \quad L^2_{\rm loc}(\overline{Q}). \tag{42}$$

By $(\mathcal{A}_2)$ and estimate (37) we have that for each $\sigma_1,\sigma_2\in S(\sigma_1<\sigma_2)$ the estimate

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|a_i(u_m)|^2\,dxdt \leqslant C_{10}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}\big(|u_m|^2+|\nabla u_m|^2+|h_i|^2\big)\,dxdt \leqslant C_{11} \tag{43}$$

is correct, where C_{10} and C_{11} are positive constants independent of m.

Hence, from (43) we obtain that the function $a_i(u_m)$ is bounded in $L^2_{\rm loc}(\overline{Q})$. This and (41) yield that there exists a subsequence of $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ (denoted also by $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$) and functions $\chi_i \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q})$ $(i=\overline{0,n})$ such that

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad u_{m,x_i} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{a.e. on} \quad Q, \quad i=\overline{0,n}, \tag{44}$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{weakly in} \quad L^2_{\rm loc}(\overline{Q}), \quad i=\overline{0,n}, \tag{45}$$

Condition $(\mathcal{A}_1)$ and (44) yield

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{a.e. on Q}, \quad i=\overline{0,n}. \tag{46}$$

By Lemma 1.3 from [18], (45) and (46) we obtain

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{weakly in} \quad L^2_{\rm loc}(\overline{Q}), \quad i=\overline{0,n}. \tag{47}$$

Let us show that the function u is a weak solution of problem (6), (7), (8). For this purpose, we tend $m\to\infty$ in identity (27), taking into account (41), (42), (47) and the definition of the function $f_{i,m}$. As a result we obtain identity (12). Now, taking into account (41), we let $m\to+\infty$ in (36). From the resulting inequality and condition $f\in L^2_\omega(S;L^2(\Omega))$, we obtain condition (8). Hence, we have proven that u is a weak solution of problem (6), (7), (8).

It is easy to show that inequalities similar to (36), (37), with u instead of u_m hold. Thus, estimates (15), (16) hold. $\square$

References

1. *Bátkai A., Piazzera S.* Semigroups for delay equations // Resarch Notes in Mathematics, 10, A.K. Peters: Wellesley MA., 2005.
2. *Bátkai A., Schnaubelt R.* Asymptotic behaviour of parabolic problems with delays in the highest order derivatives // Semigroup Forum. — 2004. — **69**, №3. — P. 369-399.
3. *Bokalo M.M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations // Ukr. Mat. Visn. — 2011. — **8**, №1. — P. 55–86 (in Ukrainian); English version in: J. Math. Sci. — 2011. — **178**, №1. — P. 41–64.
4. *Bokalo M.* Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains // Electron. J. Differ. Equ. — 2010. — **2010**, №178. — P. 1–24.
5. *Bokalo N.M.* Problem without initial conditions for some classes of nonlinear parabolic equations // J. Sov. Math. — 1990. — **51**, №3. — P. 2291–2322.
6. *Bokalo M.M., Buhrii O.M.,. Mashiyev R.A* Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // J. Nonlinear Evol. Equ. Appl. — 2014 – **2013**, №6. – P. 67–87.
7. *Bokalo M., Dmytriv V.* On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with integral time delays // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 2002. — **60**. — P. 32–49.
8. *Bokalo M., Ilnytska O.* Unique solvability of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time depended delay // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 2016. — **81**. — P. 24–39.
9. *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions // Milan J. Math. — 2009. — **77**. — P. 437–494.

10. *Bokalo M.M., Pauchok I.B.* On the well-posedness of the Fourier problem for higher-order nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // Mat. Stud. — 2006. – **26**, №1. — P. 25–48.
11. *Bokalo M.M., Sikorskyy V.M.* On properties of solutions of problem without initial conditions for equations generalizing polytropic filtration equation// Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 1998. — **51**. — P. 85–98.
12. *Chueshov I., Rezounenko A.* Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay // Commun. Pure Appl. Anal. — 2015. — **14**, №5. — P. 1685–1704.
13. *Jin Ch., Yin J.* Traveling wavefronts for a time delayed non-Newtonian filtration equation // Physica D. — 2012. — **241**, №21. – P. 1789–1803.
14. *Ezzinbi K., Liu J.H.* Periodic solutions of non-densely defined delay evolution equations // J. Appl. Math. Stochastic Anal. — 2002. — **15**, №2. — P. 105–114.
15. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — **102**, №1. — P. 38–57.
16. *Dmytriv V.M.* On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with time delays // Mat. Stud. — 2001. — **16**, №2. —- P. 141-–156.
17. *Khusainov D., Pokojovy M., Racke R.* Strong and Mild Extrapolated L^2 -Solutions to the Heat Equation with Constant Delay // SIAM J. Math. Anal. — 2015. — **47**, №1. — P. 427–454.
18. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. — Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.
19. *Oleinik O.A., Iosifjan G.A.* An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains // Russian Math. Surveys. — 1976. — **31**, №6. — P. 153—178
20. *Pankov A.A.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. — Dordrecht: Kluwer, 1990.
21. *Rezounenko A.V., Wu J.* A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: Local theory and global attractors // J. Comp. App. Math. — 2006. — **190**. — P. 99-–113.
22. *Showalter R.E.* Singular nonlinear evolution equations // Rocky Mt. J. Math. — 1980. — **10**, №3. — P. 499–507.
23. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997, xi+278 p.
24. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Mat. Sb. – 1935. – 42, №2. – P. 199–216.

Стаття: надійшла до редколегії 24.12.2016
доопрацьована 02.02.2017
прийнята до друку 13.03.2017

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ МАЙЖЕ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Ольга Ільницька

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна
e-mail: ol.ilnytska@gmail.com

Досліджено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі без початкових умов для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням. Також отримано апріорні оцінки розв'язків розглянутої задачі.

Ключові слова: задача Фур'є, задача без початкових умов, рівняння з запізненням, нелінійне параболічне рівняння.

ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 151–162*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 151–162

УДК 517.95

AN INITIAL VALUE PROBLEM $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$: SOLVABILITY, NUMBER OF SOLUTIONS, ASYMPTOTICS

Giuseppe CONTI[1], **Yuliya KUZINA**[2], **O. ZERNOV**[3]

[1] *Florence University, Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini", Piazza Ghiberti, 27, Firenze, Italy*
e-mail: gconty@unifi.it
[2] *Military Academy, Fontanska dor., 10, Odesa, Ukraine*
e-mail: yuliak@te.net.ua
[3] *South Ukrainian National Pedagogical University, Staroportofrankivska str., 26, Odesa, Ukraine*
e-mail: o.zernov@gmail.com

We find a nonempty set of continuously differentiable solutions $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ each of which possesses required asymptotical properties when $t \to +0$. Also we establish uniqueness conditions.

Key words: implicit differential equation, initial value problem, solvability, uniqueness, asymptotic property.

The general solvability and solutions number problem for implicit ordinary differential equations was under consideration in [1], [2], [3], [6]. In [7], [9], [10] conditions for convergence of successive approximations to implicit equations solutions were found. At the same time asymptotic properties of implicit differential equations are still only partially understood; there are only isolated results obtained, for example, [11]. This article presents an investigation of the initial value problem $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$. The asymptotic behaviour of solutions is being discussed. We describe an approach which makes it possible to consider implicit initial value problems. Our approach to the problem seems to be very much different from the usual ones. We use qualitative methods (see, for instance, [4], [5], [8], and also [11]) together with fixed point methods. We establish general schemes of investigation which may be applied to many various problems of local analysis. In this paper existence of continuously differentiable solutions is being proved. Asymptotic properties of each of these solutions is discussed and if certain conditions are fulfilled then the uniqueness of solution is established.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A09, 34A99

1. First the following initial value problem

$$x'(t) = f(t, x(t), x'(t)), \tag{1}$$

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

is under consideration, where $t \in (0, \tau)$ is a real variable, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ is a real unknown function, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ is a continuous function,

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau), \ |x - \xi(t)| < r_1 t\alpha(t), \ |y - \xi'(t)| < r_2 \alpha(t)\};$$

here $\xi : (0, \tau) \to (0, +\infty)$, $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ are continuously differentiable functions,

$$|\xi'(t) - f(t, \xi(t), \xi'(t))| \le \alpha(t), \ t \in (0, \tau),$$

$$\lim_{t \to +0} \alpha(t) = 0, \ \lim_{t \to +0} \xi(t) = 0, \ \lim_{t \to +0} \xi'(t) = \xi_0, \ 0 \le \xi_0 < +\infty,$$

$$\lim_{t \to +0} \frac{\alpha(t)}{\xi'(t)} = 0, \lim_{t \to +0} t \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \alpha_0, 0 \le \alpha_0 < +\infty.$$

Suppose that

$$|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \le l_y |y_1 - y_2|, \ (t, x, y_i) \in \mathcal{D}, \ i \in \{1, 2\},$$

where l_y is a constant, $0 < l_y < 1$, $(1 - l_y)^{-1} < \min\{(1 + \alpha_0) r_1, l_y r_2\}$.

Definition 1. *For any $\rho \in (0, \tau)$ a continuously differentiable function $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ is said to be a ρ-solution of the problem* (1), (2), *if*

1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$, $t \in (0, \rho]$;
2) *x identically satisfies equation (1) for all $t \in (0, \rho]$;*
3) $\lim_{t \to +0} x(t) = 0$.

We denote by $\mathcal{U}(\rho, M, q)$ the set of all continuously differentiable functions $u\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ such that

$$|u(t) - \xi(t)| \le M t \alpha(t), \ |u'(t) - \xi'(t)| \le q M \alpha(t), \ t \in (0, \rho]; \tag{3}$$

here ρ, M, q are constants, $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$, $q > 0$.

Theorem 1. *Suppose that the following conditions hold:*

$$|f(t_1, x, y) - f(t_2, x, y)| \le l_t(\mu) |t_1 - t_2|, \ (t_i, x, y) \in \mathcal{D}, \ 0 < \mu \le t_1, \ t_2 < \tau, \tag{4}$$

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \le l_x(t) |x_1 - x_2|, \ (t, x_i, y) \in \mathcal{D}, \ i \in \{1, 2\}, \tag{5}$$

where $l_t\colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$, $l_x\colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ are continuous functions, $0 < t_1 < t_2 < \tau \Rightarrow l_t(t_1) \ge l_t(t_2)$, $\lim_{t \to +0} t l_x(t) = 0$. Then there exist ρ, M, q such that the problem (1), (2) *has a nonempty set of ρ-solutions $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ each of which belongs to $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.*

Theorem 2. *Suppose that the following condition holds:*

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \le l_x |x_1 - x_2|, (t, x_i, y) \in \mathcal{D}, i \in \{1, 2\}, \tag{6}$$

where l_x is a constant, $l_x + l_y < 1$. Then there exist ρ, M, q such that the problem (1), (2) *has a unique ρ-solution $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ which belongs to $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.*

Proof of Theorem 1. First of all we select constants ρ, M, q. Let the following conditions hold:

$$1+\alpha_0 < q < \frac{m_0(1+\alpha_0)-1}{m_0 l_y}, \ (1+\alpha_0 - q l_y)^{-1} < M < m_0,$$

where $m_0 = ((1+\alpha_0)(1-l_y))^{-1}$. We do not present here the conditions for selection of ρ to keep the size of this paper reasonable. We now indicate nothing but ρ is small enough, M, q are large enough and our selection of ρ, M, q ensures the validity of all our reasoning given below. Let $\mathcal{B}$ be the space of continuously differentiable functions $x\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$ with the norm

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t\in[0,\rho]} (|x(t)| + |x'(t)|). \tag{7}$$

Let $\mathcal{U}$ be the subset of $\mathcal{B}$ such that every its element $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ satisfies inequalities (3), and also $u(0) = 0$, $u'(0) = \xi_0$ and, moreover,

$$\forall \mu \in (0,\rho], \ \forall t_1, \, t_2 \in [\mu,\rho] : |u'(t_1) - u'(t_2)| \le K(\mu) |t_1 - t_2|, \tag{8}$$

where

$$K(\mu) = (1-l_y)^{-1} \left(l_t(\mu) + \mu^{-1} \right).$$

It is easy to see that $\mathcal{U}$ is a closed, bounded and convex set. Moreover, $\mathcal{U}$ is a compact set (in view of the Arzelá Theorem). We will consider the differential equation

$$x'(t) = f(t, u(t), u'(t)), \tag{9}$$

where $u \in \mathcal{U}$ is an arbitrary fixed function. Let

$$\mathcal{D}_0 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], x \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathcal{D}$ for equation (9) conditions of the Existence and Uniqueness Theorem and conditions of the Continuous Dependence of the Initial Data Theorem are fulfilled. Let

$$\Phi_1 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - \xi(t)| = M t\alpha(t)\},$$
$$\mathcal{D}_1 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - \xi(t)| < M t\alpha(t)\},$$
$$H = \{(t,x) : t = \rho, |x - \xi(\rho)| < M\rho\alpha(\rho)\}.$$

Let the function $A_1\colon \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$ be defined by the equality

$$A_1(t,x) = (x - \xi(t))^2 (t\alpha(t))^{-2}$$

and let $a_1\colon \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_1 by virtue of equation (9). It is easy to see that $a_1(t,x) < 0$ when $(t,x) \in \Phi_1$. Let us prove that any integral curve of equation (9) which intersects Φ_1 at an arbitrary point (t_0,x_0) for small enough $|t-t_0|$ (where $t \le \rho$) lies in $\mathcal{D}_1$ if $t > t_0$ and lies outside of $\overline{\mathcal{D}}_1$ if $t < t_0$. In fact, let $P(t_0,x_0)$ be an arbitrary point belonging to Φ_1 and let $J_p : (t, x_P(t))$ be an integral curve of equation (9) which passes through the point P. Then

$$A_1(t_0, x_P(t_0)) = M^2, \ a_1(t_0, x_P(t_0)) < 0.$$

Therefore if $t_0 \in (0,\rho)$ then there exists $\delta > 0$ such that

$$\operatorname{sign}\left(A_1(t, x_P(t)) - A_1(t_0, x_P(t_0))\right) = \operatorname{sign}(\mathrm{t}_0 - t), \ |t - t_0| < \delta,$$

or

$$\operatorname{sign}\left(|x_P(t) - \xi(t)| (t\alpha(t))^{-1} - M\right) = \operatorname{sign}(\mathrm{t}_0 - t), \ |t - t_0| < \delta.$$

What this means is $(t, x_P(t)) \in \mathcal{D}_1$ if $t \in (t_0, t_0+\delta)$ and $(t, x_P(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$ if $t \in (t_0-\delta, t_0)$. If $t_0 = \rho$ then there exists $\delta > 0$ such that

$$A_1(t, x_P(t)) > A_1(t_0, x_P(t_0)), \ t \in (\rho-\delta, \rho),$$

or

$$|x_P(t) - \xi(t)| (t\alpha(t))^{-1} > M, \ t \in (\rho-\delta, \rho),$$

and this means that $(t, x_P(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$, $t \in (\rho-\delta, \rho)$.

This implies that at least one of integral curves of equation (9) which intersect H is defined for all $t \in (0, \rho]$ and lies in $\mathcal{D}_1$ if $t \in (0, \rho]$. In fact, having common points with Φ_1 when t increases is beyond the capabilities of any integral curve of equation (9) which intersects Φ_1. That is why all these curves have to intersect $\overline{H}$. Let the mapping $\psi\colon \Phi_1 \to \overline{H}$ be defined by the following way: the point $\psi(P) \in \overline{H}$ is assigned to $P \in \Phi_1$ if both P and $\psi(P)$ belong to the common integral curve of equation (9). Let

$$\psi(\Phi_1) = \{\psi(P) : P \in \Phi_1\}.$$

The set $\overline{H} \backslash \psi(\Phi_1)$ is nonempty ($\overline{H}$ is a closed set, but $\psi(\Phi_1)$ is not since $\psi(\Phi_1)$ is the image of the nonclosed set Φ_1). Let $J_u : (t, x_u(t))$ be an integral curve of equation (9) such that $(\rho, x_u(\rho)) \in \overline{H} \backslash \psi(\Phi_1)$. It is clear that $J_u : (t, x_u(t))$ has no common point with Φ_1. Therefore $J_u : (t, x_u(t))$ is defined for all $t \in (0, \rho]$ and $J_u : (t, x_u(t))$ comes into the point $(0,0)$ if $t \to +0$ and, moreover, $J_u : (t, x_u(t))$ lies in $\mathcal{D}_1$ if $t \in (0, \rho]$. It is easy to see that the following inequalities are fulfilled when $t \in (0, \rho]$:

$$|x_u(t) - \xi(t)| \le Mt\alpha(t), |x'_u(t) - \xi'(t)| \le qM\alpha(t). \tag{10}$$

Let $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = \xi_0$. Let us prove that

$$\forall \mu \in (0, \rho] \, \forall t_1, \, t_2 \in [\mu, \rho] : |x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \le K(\mu) |t_1 - t_2|. \tag{11}$$

Select $\mu \in (0, \rho]$ and $t_i \in [\mu, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$; let $t_1 < t_2$. From the identities

$$x'_u(t_i) = f(t_i, u(t_i), u'(t_i)), i \in \{1, 2\} \tag{12}$$

we obtain

$$\begin{aligned} |x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| &\le l_t(\mu) |t_1 - t_2| + l_x(t_1) |u(t_1) - u(t_2)| + l_y |u'(t_1) - u'(t_2)| \le \\ &\le \left(l_t(\mu) + \mu^{-1}\right) |t_1 - t_2| + l_y K(\mu) |t_1 - t_2| = \\ &= (1 - l_y) K(\mu) |t_1 - t_2| + l_y K(\mu) |t_1 - t_2| = \\ &= K(\mu) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

This means that $x_u \in \mathcal{U}$. Let us prove that if $t \to +0$ then all integral curves of equation (9) leave the set $\overline{D}_1 \backslash \{(0,0)\}$, with the only exception $J_u : (t, x_u(t))$. Indeed, let

$$\Phi_2(\mu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_u(t)| = \mu t\alpha(t)(-\ln t)\},$$
$$\mathcal{D}_2(\mu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_u(t)| < \mu t\alpha(t)(-\ln t)\},$$

where μ is a parameter, $\mu \in (0, 1]$. Let the function $A_2\colon \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ be defined by the equality

$$A_2(t, x) = (x - x_u(t))^2 (t\alpha(t)(-\ln t))^{-2}$$

and let $a_2\colon \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_2 by virtue of equation (9). It is easy to see that $a_2(t, x) < 0$ when $(t, x) \in \mathcal{D}_0$, $x \ne x_u(t)$. In particular, $a_2(t, x) < 0$ when $(t, x) \in \Phi_2(\mu)$ for each $\mu \in (0, 1]$. Therefore for each $\mu \in (0, 1]$ an integral curve of equation (9) which intersects $\Phi_2(\mu)$ at an arbitrary point (t_0, x_0), for small enough $|t - t_0|$ (where $t \le \rho$): lies in $\mathcal{D}_2(\mu)$ when $t > t_0$ and lies outside of $\overline{\mathcal{D}_2(\mu)}$ when $t < t_0$ (the proof is similar to that for Φ_1). Let $P_*(t_*, x_*) \in \overline{D}_1 \setminus \{(0,0)\}$, $x_* \ne x_u(t_*)$. Then there exists $\mu_* \in (0,1]$ such that $P_* \in \Phi_2(\mu_*)$. As follows from the above, the integral curve of equation (9) $J_* : (t, x^*(t))$ which passes through P_* lies outside of $\overline{\mathcal{D}_2(\mu_*)}$ if $t \in (t_-, t_*)$, where (t_-, t_*) is the left maximal existence interval for the solution x^*. From the other hand there exists $t_{**} \in (0, \rho)$ such that if $(t,x) \in \overline{D}_1$ and if $t \in (0, t_{**})$ then $(t,x) \in D_2(\mu_*)$. Let

$$t^* = \min\{t_*, t_{**}\}.$$

As appears from the above $J_* : (t, x^*(t))$ lies outside of $\overline{\mathcal{D}_1}$ when $t \in (t_-, t^*)$. Introduce an operator $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ by $Tu = x_u$. Let us prove that $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a continuous operator. Let $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$, be arbitrary functions and let $Tu_i = x_i$, $i \in \{1,2\}$. Then $x_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$, and if $t \in (0, \rho]$ then the following identities are valid:

$$x_i'(t) = f(t, u_i(t), u'_i(t)), i \in \{1,2\}. \tag{13}$$

If $u_1 = u_2$ then $x_1 = x_2$. Suppose $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Let

$$\Phi_3 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| = h^\nu (t\alpha(t))^{1-\nu}\right\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| < h^\nu (t\alpha(t))^{1-\nu}\right\},$$

where ν is a constant such that $0 < \nu < 0$. Let the function $A_3\colon \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ be defined by the equality

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 (t\alpha(t))^{-2(1-\nu)}$$

and let $a_3 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_3 by virtue of equation

$$x'(t) = f(t, u_1(t), u'_1(t)). \tag{14}$$

Since

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)| &= |u_1(t) - u_2(t)|^\nu |u_1(t) - u_2(t)|^{1-\nu} \le \\ &\le \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}^\nu (|u_1(t) - \xi(t)| + |u_2(t) - \xi(t)|)^{1-\nu} \le \\ &\le h^\nu (2Mt\alpha(t))^{1-\nu}, \qquad t \in (0,\rho], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u'_1(t) - u'_2(t)| &= |u'_1(t) - u'_2(t)|^\nu |u'_1(t) - u'_2(t)|^{1-\nu} \le \\ &\le \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}^\nu (|u'_1(t) - \xi'(t)| + |u'_2(t) - \xi'(t)|)^{1-\nu} \le \\ &\le h^\nu (2qM\alpha(t))^{1-\nu}, \qquad t \in (0,\rho], \end{aligned}$$

it is easy to see that $a_3(t,x) < 0$ when $(t,x) \in \Phi_3$. Therefore an integral curve of equation (14) which intersects Φ_3 at an arbitrary point (t_0, x_0), for small enough $|t - t_0|$ (where $t \le \rho$): lies in $\mathcal{D}_3$ when $t > t_0$ and lies outside of $\overline{\mathcal{D}_3}$ when $t < t_0$ (the proof is similar to that for Φ_1). Moreover, we obtain

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - \xi(t)| + |x_2(t) - \xi(t)| \le 2Mt\alpha(t) < h^\nu (t\alpha(t))^{1-\nu},$$

when $t \in (0, t(h)]$, where $t(h) \in (0, \rho]$ is small enough. Therefore if $t \in (0, t(h)]$ then the integral curve $J : (t, x_1(t))$ of equation (14) lies in $\mathcal{D}_3$. As follows from the above, if t increases monotonically from $t = t(h)$ to $t = \rho$ then the integral curve $J : (t, x_1(t))$ cannot intersect Φ_3 and therefore this curve remains in $\mathcal{D}_3$ for all $t \in (0, \rho]$. We obtain

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le h^{\nu} (t\alpha(t))^{1-\nu}, \qquad t \in (0, \rho]. \tag{15}$$

From (13) we see that

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| \le \frac{h^{\nu}}{t} (t\alpha(t))^{1-\nu}, \qquad t \in (0, \rho]. \tag{16}$$

Since ρ is small sufficiently it follows from (15), (16) that

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \frac{h^{\nu}}{t}, \qquad t \in (0, \rho]. \tag{17}$$

We now turn to a direct proof of the continuity of the operator $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Let there be given $\varepsilon > 0$. There exists $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ such that

$$2Mt\alpha(t) + 2qM\alpha(t) \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad t \in (0, t_\varepsilon].$$

Then

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le |x_1(t) - \xi(t)| + |x_2(t) - \xi(t)| +$$
$$|x_1{}'(t) - \xi'(t)| + |x'_2(t) - \xi'(t)| \le 2Mt\alpha(t) + 2qM\alpha(t) \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad t \in (0, t_\varepsilon]. \tag{18}$$

Suppose $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. We find from (17) that

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \frac{h^{\nu}}{t_\varepsilon}, \qquad t \in [t_\varepsilon, \rho]. \tag{19}$$

Let

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon t_\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

If $h < \delta(\varepsilon)$ then it follows from (19) that

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad t \in [t_\varepsilon, \rho]. \tag{20}$$

Since $x_i(0) = 0$, $x'_i(0) = \xi_0$, $i \in \{1, 2\}$, it follows from (18), (20) that

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, t \in [0, \rho]$$

and therefore

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Thus, for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that if $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$ then

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{\mathcal{B}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

The reasoning given above is independent of selection $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Therefore $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a continuous operator.

To complete the proof of Theorem 1 it suffices to apply the Schauder Fixed Point Theorem to the operator $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. □

It may be noted that the condition $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\alpha(t)}{\xi'(t)} = 0$ is not necessary; we use this condition only for obtaining asymptotic form of estimates (3).

Proof of Theorem 2. At the beginning we select the constants ρ, M, q identical to those for the proof of Theorem 1. Let $\mathcal{B}$ be the space of continuously differentiable functions $x\colon [0,\rho] \to \mathbb{R}$ with norm (7). Let $\mathcal{U}$ be the subset of $\mathcal{B}$ such that every its element $u\colon [0,\rho] \to \mathbb{R}$ satisfies inequalities (3) and also $u(0) = 0$, $u'(0) = \xi_0$. It is obvious that $\mathcal{U}$ is a bounded closed set. Let us consider the initial value problem (9), (2) where $u \in \mathcal{U}$ is an arbitrary fixed function. Let us consider precisely the same sets $\mathcal{D}_0$, Φ_1, $\mathcal{D}_1$, H as in the proof of Theorem 1. In $\mathcal{D}_0$ for equation (9) conditions of the Existence and Uniqueness Theorem and conditions of the Continuous Dependence of the Initial Data Theorem are fulfilled. By using a reasoning as in the proof of Theorem 1 we make sure that among integral curves of equation (9) which intersect H there exists a unique integral curve (e.g. $J_0 : (t, x_u(t)))$ which is defined for all $t \in (0,\rho]$ and lies in $\mathcal{D}_1$ when $t \in (0,\rho]$. It is easy to see that inequalities (10) are fulfilled if $t \in (0,\rho]$. Let $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = \xi_0$. Then $x_u \in \mathcal{U}$. Introduce an operator $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ by $Tu = x_u$.

Let us prove that $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a contraction operator. Let $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$ be arbitrary functions and let $Tu_i = x_i$, $i \in \{1,2\}$. Then $x_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$, and if $t \in (0,\rho]$ then the identities (13) are fulfilled. If $u_1 = u_2$ then $x_1 = x_2$. Suppose that $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Let

$$\Phi_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho]\,,\ |x - x_2(t)| = \eta h t\}\,,$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho]\,,\ |x - x_2(t)| < \eta h t\}\,,$$

where η is a constant such that $\eta > l_x + l_y$. Let a function $A_3\colon \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$ be defined by the equality

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2}$$

and let $a_3\colon \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_3 by virtue of equation (14). It is easy to see that $a_3(t,x) < 0$ when $(t,x) \in \Phi_3$. Therefore an integral curve of equation (14) which intersects Φ_3 at an arbitrary point (t_0, x_0) for small enough $|t - t_0|$ (where $t \le \rho$) lies in $\mathcal{D}_3$ if $t > t_0$ and lies outside of $\overline{\mathcal{D}_3}$ if $t < t_0$ (the proof is similar to that for Φ_1 in the proof of Theorem 1). Thus

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - \xi(t)| + |x_2(t) - \xi(t)| \le 2Mt\alpha(t) < \eta h t,$$

if $t \in (0, t(h)]$; here $t(h) \in (0,\rho)$ is small enough. Therefore if $t \in (0, t(h)]$ then the integral curve $J : (t, x_1(t))$ of equation (14) lies in $\mathcal{D}_\ni$. As appears from the above, if t increases monotonically from $t = t(h)$ to $t = \rho$ then the integral curve $J : (t, x_1(t))$ cannot intersect Φ_3. Therefore $J : (t, x_1(t))$ remains in $\mathcal{D}_3$ for all $t \in (0,\rho]$. We obtain

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \eta h t, \qquad t \in (0,\rho]\,. \tag{21}$$

From (13) we see that

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| \le (l_x + l_y)\, h, \qquad t \in (0,\rho]$$

and therefore

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le (l_x + l_y + \eta t)\, h, \qquad t \in (0,\rho]\,. \tag{22}$$

Let $\theta = \frac{1}{2}(1 + l_x + l_y)$; it is obvious that $\theta \in (0,1)$. Since ρ is small enough and $x_i(0) = 0$, $x'_i(0) = \xi_0$, $i \in \{1,2\}$, it follows from (22) that

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \theta h, t \in (0,\rho]$$

and therefore

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \le \theta h,$$

or

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{\mathcal{B}} \le \theta \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}, \tag{23}$$

where $\theta \in (0,1)$. The reasoning given above is independent of selection $u_i \in U$, $i \in \{1,2\}$. Therefore $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a contraction operator.

To complete the proof of Theorem 2 it suffices to apply the Banach Contraction Mapping Theorem to the operator $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. □

2. Next, the initial value problem (1), (2) will be under consideration, where $t \in (0,\tau)$ a real variable, $x\colon (0,\tau) \to \mathbb{R}$ a real unknown function, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ is a continuous function,

$$\mathcal{D} = \{(t,x,y) : t \in (0,\tau), |x| < r_1 \xi(t), |y| < r_2 \xi'(t)\};$$

here $\xi\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ is a continuously differentiable function, $\xi'(t) > 0$, $t \in (0,\tau)$,

$$\lim_{t\to+0} \xi(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} \xi'(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} \frac{\xi(t)}{\xi'(t)} = 0,$$

$$|f(t,0,0)| \le K\xi'(t), \qquad t \in (0,\tau).$$

Suppose that

$$|f(t,x,y_1) - f(t,x,y_2)| \le l_y |y_1 - y_2|, \qquad (t,x,y_i) \in \mathcal{D}, \qquad i \in \{1,2\},$$

where l_y is a constant, $l_y < 1$.

Let us introduce the same definition of ρ-solution of problem (1), (2) as in the first part of the paper.

We denote by $\mathcal{U}(\rho,M,q)$ the set of all continuously differentiable functions $u\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$ such that

$$|u(t)| \le M\xi(t), \quad |u'(t)| \le qM\xi'(t), \quad t \in (0,\rho]; \tag{24}$$

here ρ, M, q are constants, $\rho \in (0,\tau)$, $M > 0$, $q > 0$.

Theorem 3. *Suppose that conditions* (4), (5) *hold, where* $l_t\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $l_x\colon (0,\tau) \to (0,+\infty)$ *are continuous nonincreasing functions,*

$$\lim_{t\to+0} \frac{\xi(t)}{\xi'(t)} l_x(t) = L_x, \qquad 0 \le L_x < +\infty$$

and

$$L_x + l_y < 1, \qquad K < (1 - L_x - l_y)\min\{r_1, r_2\}.$$

Then there exist ρ, M, q *such that problem* (1), (2) *has a nonempty set of* ρ*-solutions* $x\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$ *each of which belongs to* $\mathcal{U}(\rho,M,q)$.

Theorem 4. *Suppose that condition* (6) *be fulfilled, where* l_x *is a constant,*

$$l_x + l_y < 1, \qquad K < (1 - l_y)\min\{r_1, r_2\}.$$

Then there exist ρ, M, q *such that problem* (1), (2) *has a unique* ρ*-solution* $x\colon (0,\rho] \to \mathbb{R}$ *which belongs to* $\mathcal{U}(\rho,M,q)$.

Proof of Theorem 3. First of all we select constants ρ, M, q. Let the following conditions hold:

$$1 < q < \frac{(1 - L_x)\min\{r_1, r_2\}}{K + l_y \min\{r_1, r_2\}}, \qquad \frac{K}{1 - L_x - q l_y} < M < \frac{\min\{r_1, r_2\}}{q}.$$

We do not present here the conditions for selection of ρ, because the volume of this paper is resricted. We now note nothing but ρ is small enough, M, q are large enough and selection of ρ, M, q ensures the validity of all our reasoning given below. Let $\mathcal{B}$ be the space of continuously differentiable functions $x\colon [0, \rho] \to \mathbb{R}$ with norm (7). Let $\mathcal{U}$ be the subset of $\mathcal{B}$ such that every its element $u\colon [0, \rho] \to \mathbb{R}$ satisfies inequalities (24) and also $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ and, moreover, condition (8) holds, where

$$K(\mu) = (1 - l_y)^{-1}(l_t(\mu) + l_x(\mu)).$$

It is easy to see that $\mathcal{U}$ is a closed, bounded and convex set. Moreover, $\mathcal{U}$ is a compact set (according to the Arzelá Theorem). We will consider differential equation (9), where $u \in \mathcal{U}$ is an arbitrary fixed function. Let

$$\mathcal{D}_0 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], x \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathcal{D}_0$ for equation (9) conditions of the Existence and Uniqueness Theorem and conditions of the Continuous Dependence of the Initial Data Theorem hold. Let

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x| = M\xi(t)\},$$
$$\mathcal{D}_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x| < M\xi(t)\},$$
$$H = \{(t, x) : t = \rho,\ |x| < M\xi(\rho)\}.$$

Let a function $A_1\colon \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ be defined by the equality

$$A_1(t, x) = x^2(\xi(t))^{-2}$$

and let $a_1\colon \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_1 by virtue of equation (9). It is easy to see that $a_1(t, x) < 0$ when $(t, x) \in \Phi_1$. By using a reasoning as in the proof of Theorem 1 we make sure that among integral curves of equation (9) which intersect H there exists at least one integral curve (let it be $J_0 : (t, x_u(t))$) which is defined for all $t \in (0, \rho]$ and lies in $\mathcal{D}_1$ for all $t \in (0, \rho]$. Next we will prove that there is only one integral curve of such type; for this purpose we consider the families of sets

$$\Phi_2(\mu) = \left\{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| = \mu(\xi(t))^{\frac{1}{2}}\right\},$$
$$\mathcal{D}_2(\mu) = \left\{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| < \mu(\xi(t))^{\frac{1}{2}}\right\},$$

where μ is a parameter, $\mu \in (0, 1]$. Let a function $A_2\colon \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ be defined by the equality

$$A_2(t, x) = (x - x_u(t))^2(\xi(t))^{-1}$$

and let $a_2 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_2 by virtue of equation (9). It is easy to see that $a_2(t, x) < 0$ when $(t, x) \in \mathcal{D}_0$, $x \neq x_u(t)$. Then we can use a reasoning as in the proof of Theorem 1. It is easy to see that the following inequalities are valid:

$$|x_u(t)| \leq M\xi(t), |x'_u(t)| \leq qM\xi'(t), t \in (0, \rho] \tag{25}$$

and condition (11) is fulfilled. Let $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = 0$. Then $x_u \in \mathcal{U}$. Introduce an operator $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ by $Tu = x_u$. Let us prove that $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a continuous operator.

Let $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$ be arbitrary functions and let $Tu_i = x_i$, $i \in \{1,2\}$. Then $x_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$ and if $t \in (0,\rho]$ then identities (13) are valid. If $u_1 = u_2$ then $x_1 = x_2$. Assume $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Let

$$\Phi_3 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho]\,,\ |x - x_2(t)| = \eta h^{\nu} (\xi(t))^{1-\nu}\right\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho]\,,\ |x - x_2(t)| < \eta h^{\nu} (\xi(t))^{1-\nu}\right\},$$

where ν, η are constants such that

$$0 < \nu < 1, \quad \eta > 2(1-\nu)^{-1} (L_x + 1)(2M)^{1-\nu}.$$

Let a function $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ be defined by the equality

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 (\xi(t))^{-2(1-\nu)}$$

and let $a_3 \colon \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_3 by virtue of equation (14). It is easy to see that $a_3(t,x) < 0$ when $(t,x) \in \Phi_3$. Further our reasoning is identical with the corresponding part of the proof of Theorem 1. We obtain

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \eta h^{\nu} (\xi(t))^{1-\nu}, \qquad t \in (0,\rho]\,,$$

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| \le \omega(t)\, h^{\nu} (\xi(t))^{1-\nu}, \qquad t \in (0,\rho]\,,$$

where $\omega \colon (0,\rho] \to (0,+\infty)$ is a continuous function, $\lim\limits_{t\to+0} \omega(t) = 0$, and, lastly,

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le h^{\nu} (\xi(t))^{-1}, \qquad t \in (0,\rho]\,,$$

and

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{\mathcal{B}} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

if

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h < \left(\frac{\varepsilon}{2} \xi(t_\varepsilon)\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

The reasoning given above is independent of selection of $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1,2\}$. Therefore $T \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a continuous operator.

To complete the proof of Theorem 3 it is sufficient to apply the Schauder Fixed Point Theorem to the operator $T \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. □

Proof of Theorem 4. First of all we select constants ρ, M, q. Let the following conditions hold:

$$1 < q < \frac{(1 - L_x)\min\{r_1, r_2\}}{K + l_y \min\{r_1, r_2\}}, \qquad \frac{K}{1 - q l_y} < M < \frac{\min\{r_1, r_2\}}{q}.$$

The conditions for selection of ρ is not presented. ρ is small enough. Let $\mathcal{B}$ be the space of continuously differentiable functions $x \colon [0,\rho] \to \mathbb{R}$ with norm (7). Let $\mathcal{U}$ be the subset of $\mathcal{B}$, every element $u \colon [0,\rho] \to \mathbb{R}$ of which satisfies inequalities (24), and also $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. It is easy to see that $\mathcal{U}$ is a closed bounded set. Let us consider the initial value problem (9), (2) where $u \in \mathcal{U}$ is an arbitrary fixed function. Further let us consider precisely the same sets $\mathcal{D}_0$, Φ_1, $\mathcal{D}_1$, H and $\Phi_2(\mu)$, $\mathcal{D}_2(\mu)$ as in the proof of Theorem 3. In $\mathcal{D}_0$ for equation (9) conditions of the Existence and Uniqueness Theorem and conditions of the Continuous Dependence of the Initial Data Theorem hold. By using a reasoning as in the proof of Theorem 3 we establish that there is one and only one integral curve of equation (9) (let us denote it by $J_0 : (t, x_u(t))$) which intersects H and lies in $\mathcal{D}_1$ when

$t \in (0, \rho]$. It is easy to see that inequalities (25) hold. Let $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = 0$. Then $x_u \in \mathcal{U}$. Introduce an operator $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ by $Tu = x_u$. Let us prove that $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a contraction operator. Let $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$ be arbitrary functions and let $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Then $x_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$, and if $t \in (0, \rho]$ then identities (13) are fulfilled. If $u_1 = u_2$ then $x_1 = x_2$. Suppose that $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Let us consider the same sets $\Phi_3, \mathcal{D}_3$ and the function $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ as in the proof of Theorem 2. Let $a_3 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ be the derivative of the function A_3 by virtue of equation (14). It is easy to see that $a_3(t, x) < 0$ when $(t, x) \in \Phi_3$. Moreover,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t)| + |x_2(t)| \le 2M\xi(t) < \eta h t$$

when $t \in (0, t(h)]$, where $t(h) \in (0, \rho)$ is small enough. In the same way as in the proof of Theorem 2 it is easy to obtain (21), (22) and (23), where

$$\theta = \frac{1}{2}(1 + l_x + l_y).$$

It is obvious that $\theta \in (0, 1)$. The reasoning given above is independent of selection of $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Therefore $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a contraction operator.

To complete the proof of Theorem 4 it is sufficient to apply the Banach Contraction Mapping Theorem to the operator $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. $\square$

References

1. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case// Differ. Equ. Dyn. Syst. — 1999. — **7**, №4. — P. 437–459.
2. *Arnol'd V.I.* Additional chapters of the ordinary differential equations theory. — Moskow: Nauka, 1978. — 304 p. (in Russian).
3. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$ // Ann. Mat. Pura Appl. — 1959. — **48**. — P. 97–102.
4. *Demidovich B.P.* Lectures on the mathematical theory of stability. — Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)
5. *Erugin N.P.* Book for reading in a general course of differential equations. — Minsk: Nauka i Technika, 1972. (in Russian)
6. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1993. — **179**, №2. — P. 317–326.
7. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. Pol. Math. — 1965. — **16**, №2. — P. 121–148.
8. *Nemytsky V.V., Stepanov V.V.* The qualitative theory of differential equations. — Moskva-Leningrad: GITTL, 1948. (in Russian)
9. *Rudakov V.P.* On existence and uniqueness of solution of first order differential equations systems which are solved partially relative to derivatives // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. — 1971. — №9. — P. 79-84 (in Russian).
10. *Vitjuk A.N.* A generalized Cauchy problem for a system of differential equations not solved with respect to the derivatives // Differ. Uravn. — 1971. — **7**, №9. — P. 1575–1580 (in Russian).

11. *Zernov A.E.* A qualitative analysis of an implicit singular Cauchy problem // Ukr. Mat. Zh. — 2001. — **53**, No 3. — P. 302–310 (in Russian); English version in: Ukr. Math. J. — 2001. — **53**, No 3. — P. 344–353.

Стаття: надійшла до редколегії 05.05.2016
прийнята до друку 27.02.2017

ЗАДАЧА КОШІ $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$: РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, КІЛЬКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ, АСИМПТОТИКА

Джузеппе КОНТІ[1], Юлія КУЗІНА[2], Олександр ЗЕРНОВ[3]

[1] *Florence University, Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini", Piazza Ghiberti 27, Firenze, Italy*
e-mail: gconty@unifi.it
[2] *Військова академія, Фонтанська дорога 10, Одеса, Україна*
e-mail: yuliak@te.net.ua
[3] *Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського, Старопортофранківська, 26, Одеса, Україна*
e-mail: o.zernov@gmail.com

Розглядаємо задачу Коші $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$. Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків $x\colon\ (0, \rho] \to \mathbb{R}$ з потрібними асимптотичними властивостями.

Ключові слова: розв'язанність, кількість розв'язків, асимптотика.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 163–173
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 163–173

УДК 512.628.2

ON THE RADICAL OF A DIFFERENTIAL SEMIRING IDEAL

Ivanna MELNYK

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universytetska Str., 79000, Lviv
e-mail: ivannamelnyk@yahoo.com

Some new examples and properties of differential semiring ideals are given. Radical differential ideals of commutative differential semirings are studied. It is shown that a radical differential subtractive ideal is an intersection of prime differential subtractive ideals. Differential semirings in which the radical of every differential subtractive ideal is again differential are characterized.

Key words: Differential semiring, differential semiring ideal, radical differential ideal.

1. Introduction and preliminaries. In 1935 Vandiver [9] introduced a notion of semiring as a generalization of associative rings and distributive lattices. Semiring derivations, differential semirings and their differential ideals were considered by Golan in [4], where he gave few simple examples and properties. Thierrin [8] proved that the semiring of languages over some alphabet forms a differential additively idempotent semiring under the operations of union as the addition and catenation as the product. He gave a number of other interesting examples of differential semirings of languages and studied some of their properties, proving that differential semirings are of great interest due to their possible applications. Recently in [2] the authors investigated some further properties of semiring derivations and differential semiring ideals. This motivates a study of differential semirings as semirings, not necessarily idempotent, with an abstract derivation, not connected with formal languages.

The objective of this paper is to provide a study of differential semirings, mostly concerning basic properties of differential semiring ideals. A number of new examples and properties of differential semiring ideals are given. In the paper, radical differential ideals of commutative differential semirings are investigated. It is shown that a radical differential subtractive ideal is an intersection of prime differential subtractive ideals (Theorem 2). The paper also touches the question as to when the radical of every differential semiring ideal is differential. Theorem 3 lists conditions equivalent to the last-mentioned one. Differential semirings in which the previously stated property holds for every differential ideal are studied.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 16Y60, Secondary 13N99

For the sake of completeness some definitions and properties used in the paper will be given here. For more information on semirings see [4] or [5].

Let R be a nonempty set and let $+$ and $\cdot$ be binary operations on R named addition and multiplication respectively. An algebraic system $(R, +, \cdot)$ is called a *semiring* if $(R, +)$ is a commutative semigroup and $(R, \cdot)$ is a semigroup such that multiplication distributes over addition from either side. A semiring which is not a ring is called a *proper semiring.* A semiring $(R, +, \cdot)$ is called *commutative* if multiplication is commutative.

An element $0 \in R$ is called *zero* if $a + 0 = 0 + a = a$ for all $a \in R$. An element $1 \in R$ is called *identity* if $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for all $a \in R$. Zero $0 \in R$ is called (*multiplicatively*) *absorbing* if $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ for all $a \in R$.

A *semifield* is a semiring in which non-zero elements form a group under multiplication.

An element $a \in R$ is called *additively idempotent* if $a + a = a$. An element $a \in R$ is called *multiplicatively idempotent* if $a \cdot a = a$. Denote by $I^{+}(R)$ the set of all additively idempotent elements of R, and by $I^{\times}(R)$ the set of all multiplicatively idempotent elements of R. The set $I^{+}(R)$ is an ideal of R, and $I^{\times}(R)$ is a submonoid of $(R, \cdot)$, if $1 \in R$.

A semiring R is called *additively (multiplicatively) idempotent* if every element of R is additively (multiplicatively) idempotent. Additively idempotent semirings are of great interest due to their applications. They are widely known as idempotent semirings.

A non-empty subset of R, closed under addition and multiplication, is called a *subsemiring* of R. A nonempty subset $I \neq \emptyset$ of R is called a *(semiring) ideal* of R, if it is closed under addition and both $ra \in I$ and $ar \in I$ hold for any $r \in R$ and $a \in I$. Note that according to this definition a semiring ideal is not necessarily proper.

An ideal I of R is called a *subtractive ideal* (or *k-ideal*) if $a + b \in I$ and $a \in I$ imply that $b \in I$. The *k-closure* $cl(I)$ of an ideal I is defined as the set $cl(I) = \{a \in R | a + b \in I \text{ for some } b \in I\}$. It is an ideal of R satisfying $I \subseteq cl(I)$ and $cl(cl(I)) = cl(I)$. An ideal I of R is subtractive if and only if $I = cl(I)$.

An ideal I of the semiring R is called *strong* if $a + b \in I$ implies $a \in I$ and $b \in I$ for every $a, b \in R$. Every strong ideal is subtractive.

A *prime ideal* of R is a proper ideal P of R in which $a \in P$ or $b \in P$ whenever $ab \in P$. So P is prime if and only if for ideals A and B in R the inclusion $AB \subseteq P$ implies that $A \subseteq P$ or $B \subseteq P$, where $AB = \{ab | a \in A \text{ and } b \in B\} \subseteq A \bigcap B$.

A proper ideal I of R is called *maximal* if $I \subsetneqq J$ for any ideal J of R implies $J = R$.

In a commutative semiring R the *radical* of an ideal I is denoted by $\sqrt{I}$ and defined to be the set $\sqrt{I} = \{r \in R | r^n \in I \text{ for some } n \in \mathbb{N}_0\}$. According to [3] and [1] $I \subseteq \sqrt{I}$. If I is a subtractive ideal of R, then so is $\sqrt{I}$. Moreover, $\sqrt{I}$ is an intersection of all the prime ideals of R containing I, whenever $1 \in R$.

An ideal I of R is said to be *radical* (or *perfect*) if $I = \sqrt{I}$.

Throughout the paper R denotes a commutative semiring in the above sense with identity 1 and absorbing zero $0 \neq 1$, unless stated otherwise. $\mathbb{N}$ denotes the set of positive integers and $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ the set of non-negative integers.

2. Differential semiring ideals and homomorphisms. Let R be a semiring, not necessarily commutative. A map $\delta \colon R \to R$ is called a *derivation* [4] *on* R if $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ and $\delta(ab) = \delta(a) b + a \delta(b)$ for any $a, b \in R$. A semiring R equipped with a derivation δ is called *differential* with respect to the derivation δ, or a δ*-semiring*, and denoted by (R, δ) [2].

An ideal I of the δ-semiring R is called *differential* [4] if $\delta(a) \in I$ whenever $a \in I$.

It is easily seen that $\{0\}$ *is a differential subtractive ideal of any differential semiring* R. As noted in [2], in a differential semiring R with absorbing zero the set $V(R)$ of all additively invertible elements forms a differential ideal.

Example 1. The set $I^{+}(R)$ of all additively idempotent elements of a differential semiring (R, δ) is a differential ideal of R.

The set $I^{\times}(R)$ of all multiplicatively idempotent elements of the commutative differential semiring (R, δ) is generally not an ideal. Moreover, $I^{\times}(R)$ is not differentially closed, but it can be easily proved that *if R is a commutative differential semiring and $I^{\times}(R)$ is an ideal of R, then it is a differential ideal.*

Example 2. In a polynomial ring $R = \mathbb{N}_0[x]$ together with one derivation $\delta = \frac{d}{dx}$, defined by $\delta(n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}_0$ and $\delta(x) = 1$, the ideal $I = (x^n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, is differential.

In what follows R denotes a differential semiring under the derivation δ.

Proposition 1. *Every multiplicatively idempotent two-sided ideal I of a differential semiring R (i. e. such that $I^2 = I$) is differential.*

Proof. Let (R, δ) be a differential semiring and $I^2 = I$. If $a \in I$, then it is a finite sum $a = \sum_{i=1}^{k} r_i s_i$, where $r_i, s_i \in I$. Then $\delta(a) = \sum_{i=1}^{k} \delta(r_i) s_i + \sum_{i=1}^{k} r_i \delta(s_i) \in I$. Hence I is a differential ideal of R. □

Proposition 2. *If I is a differential ideal of R, then its k-closure $cl(I)$ is a differential subtractive ideal of R.*

Proof. It is well known that $cl(I)$ is a subtractive ideal. If $a \in cl(I)$, then there exists $b \in I$ such that $a + b \in I$. It follows that $\delta(a) + \delta(b) \in I$ and $\delta(b) \in I$. Therefore $\delta(a) \in cl(I)$, and $cl(I)$ is differential ideal. □

Proposition 3.
1. *An intersection of any family of subtractive differential ideals of R is a subtractive differential ideal of R;*
2. *A sum of any family of differential ideals of R is a differential ideal of R;*
3. *A product of any finite family of differential ideals of R is a differential ideal of R.*

A semiring R is called *ideally differential* if all of its ideals are differential.

Every additively idempotent differential semiring is ideally differential. Proposition 1 implies that every multiplicatively idempotent commutative differential semiring is ideally differential.

In what follows let R be a commutative differential semiring with respect to the derivation δ.

Lemma 1. *If I is a radical differential subtractive ideal of R and $ab \in I$, then $\delta(a) b \in I$ and $a\delta(b) \in I$.*

Proof. It is clear that $\delta(ab) = \delta(a)\,b + a\delta(b) \in I$. Moreover, $\delta(a)b \in R$. By multiplicative commutativity we have that $\delta(a)b \cdot \delta(ab) = (\delta(a)b)^2 + ab \cdot \delta(a)\delta(b) \in I$. Since I is an ideal of R, $ab \in I$ implies $ab \cdot \delta(a)\,\delta(b) \in I$, and by subtractiveness $(\delta(a)b)^2 \in I$. Hence $\delta(a)b \in I$. As a result, the subtractiveness of I implies $a\delta(b) \in I$. □

Proposition 4. *If I is a radical differential subtractive ideal of R and A is an arbitrary nonempty subset of R, then*

$$(I : A) = \{r \in R \,|ra \in I \text{ for all } a \in A\}$$

is a radical differential subtractive ideal of R.

Proof. Under given conditions $(I : A)$ is an ideal of R [5]. If $r \in (I : A)$, then $ra \in I$ for all $a \in A$. Therefore $\delta(ra) = \delta(r)\,a + r\delta(a) \in I$. It follows $\delta(r)\,a \cdot \delta(ra) = (\delta(r)\,a)^2 + ra \cdot \delta(r)\,\delta(a) \in I$. It is clear that $ra \cdot \delta(r)\,\delta(a) \in I$. Since the ideal I is subtractive, we have $(\delta(r)\,a)^2 \in I$, and $\delta(r)\,a \in I$ for all $a \in A$. Therefore $\delta(r) \in (I : A)$. Hence $(I : A)$ is a differential ideal of R.

Let $r^n \in (I : A)$ for some $r \in R$, $n \in \mathbb{N}$. Then $r^n a \in I$ for all $a \in A$. It follows that $(ra)^n = (r^n a)\,a^{n-1} \in I$. Since I is radical, we have $ra \in I$ for all $a \in A$. Hence $r \in (I : A)$, and $(I : A)$ is radical.

Let $r, r+s \in (I : A)$. Then $ra \in I$ and $(r+s)a \in I$ for all $a \in A$. By subtractiveness of I, $ra + sa \in I$ and $ra \in I$ follow $sa \in I$. Hence $s \in (I : A)$, so $(I : A)$ is a subtractive ideal of R. □

A subset A of R is called *differentially closed*, if $a \in A$ implies $\delta(a) \in A$. Differential ideals are differentially closed.

Proposition 5. *Let (R, δ) be a differential semiring, not necessarily commutative. If I is a differential subtractive left ideal of R and $A \subseteq R$ is a nonempty differentially closed subset of R, then $(I : A) = \{r \in R \,|ra \in I\}$ is a differential subtractive left ideal of R.*

Proof. Under given conditions $(I : A)$ is a subtractive left ideal of R [5]. Let $r \in (I : A)$. Then $ra \in I$ for all $a \in A$. Since I and A are differentially closed $\delta(a) \in A$ and $\delta(ra) = \delta(r)a + r\delta(a) \in I$. It follows that $\delta(r)a \in I$, since I is subtractive and $r\delta(a) \in I$. Hence $\delta(r) \in (I : A)$, and $(I : A)$ is differential. □

Let $A \subseteq R$ be a non-empty subset of a semiring R. The *annihilator ideal of* A is defined as the set $(0 : A) = \{r \in R \,|ra = 0 \text{ for all } a \in A\}$.

Corollary 1. *Let (R, δ) be a differential semiring, not necessarily commutative. If $A \subseteq R$ is a nonempty differentially closed subset of R, then $(0 : A)$ is a differential subtractive ideal of R.*

For an element $a \in R$ denote $a^{(0)} = a$, $a' = \delta(a)$, $a'' = \delta(\delta(a))$, $\dots a^{(n)} = \delta(a^{(n-1)})$, $n \in \mathbb{N}_0$, and $a^{(\infty)} = \{a^{(n)} | n \in \mathbb{N}_0\}$. The set $a^{(\infty)}$ of all derivatives of $a \in R$ is differentially closed in R, so we have the following result.

Corollary 2. *Let (R, δ) be a differential semiring, not necessarily commutative. If I is a differential subtractive left ideal of R and $a \in R$, then $\left(I : a^{(\infty)}\right)$ is a differential subtractive left ideal of R.*

Note the following properties, which are straightforward to prove.

Proposition 6. *Let (R,δ) be a differential semiring, not necessarily commutative.*

(1) *If $I \subseteq J$, then $\left(I : a^{(\infty)}\right) \subseteq \left(J : a^{(\infty)}\right)$ for any $a \in R$.*
(2) *$\left(I : a^{(\infty)}\right) \subseteq (I : a)$ for any $a \in R$.*
(3) *$\left(\left(I : a^{(\infty)}\right) : b^{(\infty)}\right) = \left(I : (ab)^{(\infty)}\right)$ for any $a, b \in R$.*

Proposition 7. *An intersection of an arbitrary family of radical (resp. subtractive) differential ideals of R is a radical (resp. subtractive) differential ideal of R.*

Proof. In any differential semiring R an intersection of an arbitrary family of (subtractive) differential ideals of R is a (subtractive) differential ideal of R by Proposition 3. In any commutative semiring R an intersection of any family of radical semiring ideals is a radical ideal of R. □

Let A be a subset of R. Denote the smallest differential ideal containing the set A by $[A]$, the smallest radical differential ideal containing A by $\{A\}$, the smallest differential subtractive ideal containing the set A by $|A|$, and the smallest radical differential subtractive ideal containing A by $\langle A\rangle$.

Lemma 2. *For any element $r \in R$ and any subset A of R, $r\langle A\rangle \subseteq \langle rA\rangle$.*

Proof. By Proposition 4, $(\langle rA\rangle : r)$ is a radical differential subtractive ideal of R. Since $rA \subseteq \langle rA\rangle$, then $A \subseteq (\langle rA\rangle : r)$. It follows $\langle A\rangle \subseteq (\langle rA\rangle : r)$. Hence $r\langle A\rangle \subseteq \langle rA\rangle$. □

Lemma 3. *For any subsets A and B of R, $\langle A\rangle\langle B\rangle \subseteq \langle AB\rangle$.*

Proof. By Lemma 2, $A \subseteq (\langle AB\rangle : \langle B\rangle) = \{x \in R | x\langle B\rangle \subseteq \langle AB\rangle\}$. By Proposition 4, $(\langle AB\rangle : \langle B\rangle)$ is a radical differential subtractive ideal of R. It all implies that $\langle A\rangle \subseteq (\langle AB\rangle : \langle B\rangle)$. Hence $\langle A\rangle\langle B\rangle \subseteq \langle AB\rangle$. □

Theorem 1. *Let S be a multiplicatively closed subset of R ($0 \notin S$). If I is a radical differential subtractive ideal of R maximal among radical differential subtractive ideals disjoint from S, then I is prime.*

Proof. Let $S \subseteq R$ be a multiplicatively closed subset of R and let I be a radical differential ideal of R maximal among those not meeting S. Suppose that there exist $a, b \in R$ such that $a \cdot b \in I$, $a \notin I$ and $b \notin I$. Then $I \subsetneqq \langle I, a\rangle$ and $I \subsetneqq \langle I, b\rangle$, moreover $\langle I, a\rangle \bigcap S \neq \varnothing$ and $\langle I, a\rangle \bigcap S \neq \varnothing$. Thus there exist $u, v \in S$ such that $u \in \langle I, a\rangle$ and $v \in \langle I, b\rangle$. Thus $uv \in \langle I, a\rangle\langle I, b\rangle \subseteq I$ by Lemma 3. Therefore $I \bigcap S \neq \varnothing$, which is a contradiction. □

Corollary 3. *Let $S \subseteq R$ be a multiplicatively closed subset of R and let I be any radical differential subtractive ideal disjoint from S. Then there exists a prime differential subtractive ideal P containing I which is disjoint from S.*

A semiring ideal I of R is called *quasi-prime* if it is maximal among the differential ideals disjoint from some multiplicatively closed subset S of R.

Every prime differential ideal is quasi-prime.

Theorem 2. *If I is a radical differential subtractive ideal of R, then it is an intersection of all the prime differential subtractive ideals containing I.*

Proof. Let I be a radical differential subtractive ideal of R. It is clear that any radical differential subtractive ideal is contained in the intersection of all the prime differential subtractive ideals containing it.

To prove the inclusion $\bigcap_{I \subseteq P} P \subseteq I$ take some $a \notin I$ and denote $S = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$. Since I is radical, $S \bigcap I = \varnothing$. There exists some radical differential subtractive ideal P of R which is maximal among radical differential subtractive ideals disjoint from S. By Theorem 1, P is a prime differential subtractive ideal of R containing I and $S \bigcap P = \varnothing$. It follows that $a^n \notin P$ for any $n \in \mathbb{N}_0$, and therefore $a \notin P$. Hence $a \notin \bigcap_{I \subseteq P} P$. □

Corollary 4. *Let A be a non-empty subset of R. Then $\langle A \rangle$ is the intersection of all the prime differential subtractive ideals P containing A.*

A map $f \colon R_1 \to R_2$ is called a semiring *homomorphism* if $f(a+b) = f(a) + f(b)$ and $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$ for all $a, b \in R$. The *kernel* of f is defined as the set $\operatorname{Ker} f = \{r \in R | f(r) = 0_{R_2}\}$, and the image of f is the set $\operatorname{Im} f = \{r \in R_2 : \exists s \in R_1 \ f(s) = r\}$.

A homomorphism of differential semirings $f \colon R_1 \to R_2$ is called a *differential homomorphism* if $f(\delta(r)) = \delta(f(r))$ for all $r \in R_1$.

Proposition 8. *Let R_1 and R_2 be differential semirings, and let $f \colon R_1 \to R_2$ be a differential semiring homomorphism. Then*

(1) $\operatorname{Ker} f$ *is a differential subtractive ideal of R_1;*
(2) $\operatorname{Im} f$ *is a differential subsemiring of R_2;*
(3) *If I is a differential ideal of R_1, then I^e is a differential ideal of R_2;*
(4) *If I is a differential subtractive ideal of R_2, then I^c is a differential subtractive ideal of R_1.*

Proof. (1) Clearly, if $r \in \operatorname{Ker} f$, then $f(r) = 0_{R_2}$ and $f(\delta(r)) = \delta(f(r)) = \delta(0_{R_2}) = 0_{R_2}$. Hence $\delta(r) \in \operatorname{Ker} f$, and $\operatorname{Ker}(f)$ is differential.

(2) If $r \in \operatorname{Im} f$ then there exists $s \in R_1$ such that $f(s) = r$. It follows that $\delta(r) = \delta(f(s)) = f(\delta(s)) \in \operatorname{Im} f$.

(3) If $r \in I^e$ then $r = \sum_{i=1}^{k} r_i f(s_i)$, $s_i \in I$. Then we have $\delta(r) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} r_i f(s_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\delta(r_i) \cdot f(s_i) + r_i \cdot f(\delta(s_i))\right) \in I^e$, because $s_i \in I$.

(4) If $r \in I^c$ then $f(r) \in I$. Since $\delta(f(r)) = f(\delta(r)) \in I$, then $\delta(r) \in I^c$. □

Corollary 5. *Let R_1 and R_2 be differential semirings. If $f \colon R_1 \to R_2$ is a differential semiring homomorphism and P is a prime differential subtractive ideal of R_2, then $f^{-1}(P)$ is a prime differential subtractive ideal of R_1.*

Proof. Follows by [3, Proposition 3.2].

The following proposition is straightforward to prove.

Proposition 9. *Let R_1 and R_2 be differential semirings, and let $f \colon R_1 \to R_2$ be a differential semiring homomorphism. Then f induces a differential isomorphism $\bar{f} \colon R_1 / \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ for which $\bar{f}(r + \operatorname{Ker} f) = f(r)$ for all $r \in R_1$.*

3. Differential semirings in which the radical of each differential ideal is differential. For a subset A of R we define its *differential* $A_\#$ to be the set

$$A_\# = \left\{ a \in R \,\middle|\, a^{(n)} \in A \,\text{for all}\, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Proposition 10. *Let A, B, A_i, $i \in I$, be subsets of R. Then $(\quad)_\#$ has the following properties:*

(1) $A_\# \subseteq A$;
(2) $(A_\#)_\# = A_\#$;
(3) $A_\# = A$ *if and only if A is differentially closed in R;*
(4) *If $A \subseteq B$ then $A_\# \subseteq B_\#$;*
(5) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)_\# = \bigcap_{i\in I} (A_i)_\#$;
(6) $\bigcup_{i\in I} (A_i)_\# \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)_\#$;
(7) $A_\# + B_\# \subseteq (A+B)_\#$;
(8) $A_\# \cdot B_\# \subseteq (AB)_\#$.

Proposition 11. *The operator $(\quad)_\#$ has the following properties.*

(1) *If I is an ideal of R, then $I_\#$ is a differential ideal of R.*
(2) *If I is a strong ideal of R, then $I_\#$ is a differential strong ideal of R.*
(3) *If I is a subtractive ideal of R, then $I_\#$ is a differential subtractive ideal of R.*
(4) *If I is a subsemiring of R, then $I_\#$ is a differential subsemiring of R.*
(5) *If I is a differential ideal of R, then $I_\# = I$.*

Proof. (1) Let $a, b \in I_\#$. Then $a^{(n)} \in I$ and $b^{(n)} \in I$ for any $n \in \mathbb{N}_0$, thus $(a+b)^{(n)} = a^{(n)} + b^{(n)} \in I$. Hence $a+b \in I_\#$. If $a \in I_\#$ and $r \in R$ then $a^{(k)} \in I$ for any $k \in \mathbb{N}_0$. By the Leibniz rule, $(ra)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^{(n-k)} a^{(k)} \in I$. It means that $ra \in I_\#$. Hence $I_\#$ is an ideal of R. The ideal $I_\#$ is differential since $I_\#$ is differentially closed for any subset I of R.

(2) Suppose that $a + b \in I_\#$. Then $(a+b)^{(n)} = a^{(n)} + b^{(n)} \in I$ for any $n \in \mathbb{N}_0$. The ideal I being strong implies that $a^{(n)} \in I$ and $b^{(n)} \in I$. Thus $a \in I_\#$ and $b \in I_\#$, so $I_\#$ is strong.

(3) Follows from (2) since every strong ideal is subtractive. (4) Follows from (1). (5) follows from Proposition 10. □

Proposition 12. *Let I be an arbitrary subtractive semiring ideal of R and let A be a differentially closed subset of R. Then the following equality holds:*

$$(I : A)_\# = (I_\# : A).$$

Proof. Suppose $r \in (I : A)_\#$. Then $r^{(n)} \in (I : A)$ for all $n \in \mathbb{N}_0$, so $r^{(n)} a \in I$ for all $a \in A$. Since A is differentially closed, then $ra' \in I$. Therefore $(ra)' = r'a + ra' \in I$. By induction we obtain that $(ra)^{(n)} \in I$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Hence $r \in (I_\# : A)$.

Conversely, let $r \in (I_\# : A)$. Then $(ra)^{(n)} \in I$ for all $a \in A$, $n \in \mathbb{N}_0$, i. e. $ra \in I$, $(ra)' = r'a + ra' \in I$, $(ra)'' = r''a + 2r'a' + ra'' \in I, \ldots, (ra)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^{(n-k)} a^{(k)} \in I$. Since A is differentially closed, by subtractiveness of I, $(ra)' \in I$ and $ra' \in I$ imply $r'a \in I$. We may infer by induction that $r^{(n)} a \in I$ for all $a \in A$, $n \in \mathbb{N}_0$. It follows that $r^{(n)} \in (I : A)$, i. e. $r \in (I : A)_\#$. □

Corollary 6. *If I is a subtractive ideal of R and A is a differentially closed subset of R, then $(I_\# : A)$ is a differential subtractive ideal of R.*

Corollary 7. *Let I be an arbitrary subtractive ideal of R and $a \in R$. Then $\left(I : a^{(\infty)}\right)_\# = \left(I_\# : a^{(\infty)}\right)$.*

Proposition 13. *Let R_1 and R_2 be differential semirings, and let $f\colon R_1 \to R_2$ be a differential semiring homomorphism. Then $(\ \ )_\#$ has the following properties:*

(1) *If A is a subset of R_1, then $f(A_\#) \subseteq (f(A))_\#$;*
(2) *If A is a subset of R_1 and $f\colon R_1 \to R_2$ is a differential semiring monomorphism, then $f(A_\#) = (f(A))_\#$;*
(3) *If B is a subset of R_2 and $f\colon R_1 \to R_2$ is a differential semiring epimorphism, then $f^{-1}(B_\#) = \left(f^{-1}(B)\right)_\#$.*

Proposition 14. *In any differential semiring R for any prime ideal P of R the differential ideal $P_\#$ is quasi-prime.*

Proof. Suppose P is a prime ideal of R and $S = R \setminus P$. Then S is multiplicatively closed, and, by Propositions 10 and 11, $P_\#$ is a differential ideal of R disjoint from S. If I is any differential ideal disjoint from S, then $I \subseteq P$. Thus $I = I_\# \subseteq P_\#$. Hence $P_\#$ is quasi-prime. □

It is known even in the case of differential rings that the radical of a differential ideal is not necessarily differential. This is also true for semirings. For example, for an ideal (x^n, n) of the semiring $\mathbb{N}_0[x]$ its radical is not differential.

Theorem 3. *The following conditions are equivalent:*

(1) *If I is a differential subtractive ideal of R, then so is $\sqrt{I}$;*
(2) *If $S \subseteq R$ is a multiplicatively closed subset of R ($0 \notin S$) and I is a differential subtractive ideal of R disjoint from S, then every differential subtractive ideal of R which is maximal among differential subtractive ideals containing I and not meeting S is prime.*
(3) *If I is a prime subtractive ideal of R, then $I_\#$ is a differential prime subtractive ideal of R.*
(4) *Any prime subtractive ideal, minimal over some differential subtractive ideal, is differential.*
(5) *If A is any subset of R then $\langle A\rangle = \sqrt{|A|}$.*
(6) *Any quasi-prime subtractive ideal I in R is prime.*
(7) *Any quasi-prime subtractive ideal I in R is radical.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Let the radical of each differential subtractive ideal of R be differential. Suppose $S \subseteq R$ is a multiplicatively closed subset of R ($0 \notin S$), I is a differential subtractive ideal of R such that $I \cap S = \varnothing$, and K is an arbitrary differential ideal of R such that $I \subseteq K$, $K \cap S = \varnothing$, and for any differential subtractive ideal L such that $K \subseteq L$ we have $K = L$. Under given conditions $\sqrt{K}$ is a differential subtractive ideal of R. Moreover, $I \subseteq K \subseteq \sqrt{K}$. Since K is maximal, we have $K = \sqrt{K}$. Thus K is a radical differential subtractive ideal of R, maximal with respect to the exclusion of S. Hence, by Theorem 1, K is prime.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suppose $S \subseteq R$ is a multiplicatively closed subset of R ($0 \notin S$), I is a differential subtractive ideal of R such that $I \cap S = \varnothing$, and every differential subtractive ideal K of R, maximal among those containing I and not meeting S is prime. Let P be any prime subtractive ideal. Under given conditions $S = R \backslash P$ is a multiplicatively closed subset of R and $\{0\}$ is a differential subtractive ideal disjoint from S. Moreover, $P_{\#} \subseteq P$ follows $S \cap P_{\#} = \varnothing$. Thus $P_{\#}$ is a differential subtractive ideal of R disjoint from S. If I is an arbitrary differential subtractive ideal of R such that $P_{\#} \subseteq I$ and $I \cap S = \varnothing$, then $I \subseteq P$. It follows that $I = I_{\#} \subseteq P_{\#}$. Thus $P_{\#}$ is prime.

(3) $\Rightarrow$ (4) Let I be an arbitrary differential subtractive ideal of R, and let P be a prime subtractive ideal of R minimal among those containing I. Then we have $I = I_{\#} \subseteq P_{\#} \subseteq P$. Since P is prime, moreover it is minimal among prime subtractive ideals containing I, $P_{\#}$ is prime by assumption and $P_{\#} = P$. Thus P is differential.

(4) $\Rightarrow$ (1) Follows from Theorem 2 and Proposition 3. Let I be an differential subtractive ideal of R. The radical of each differential subtractive ideal is the intersection of all prime differential subtractive ideals containing it, moreover this intersection is a prime ideal and it is minimal over I. It follows by assumption that $\sqrt{I}$ is differential.

(1) $\Leftrightarrow$ (5) If a radical of each differential subtractive ideal is a differential subtractive ideal, then the same holds for the differential subtractive ideal $|A|$. Then $\sqrt{|A|}$ is differential and obviously coincides with $\langle A \rangle$. Conversely, let I be a differential ideal. Then $\langle I \rangle = \sqrt{|I|} = \sqrt{I}$ is a differential ideal of R.

(3) $\Leftrightarrow$ (6) Obviously, since (0) is a differential subtractive ideal contained in any other differential subtractive ideal not meeting S.

(6) $\Leftrightarrow$ (7) Obviously follows from definition and Theorem 2. □

A differential semiring satisfying one of the equivalent conditions stated in the Theorem 3 is called a *dmsp-semiring*. Note that differential rings in which the radical of each differential ideal is differential were studied in 1973 by H. Gorman, who coined the term of a *d-MP*-ring; rings satisfying the same property were studied by Keigher [6] in 1977, who named them special rings. Nowadays in differential algebraic geometry the term of a *Keigher ring* is generally used instead. It is therefore easy to see that in a *dmsp*-semiring maximal among differential subtractive ideals are prime. Every differentially trivial semiring is a *dmsp*-semiring. $\{0\}$ is a *dmsp*-semiring. Any differential semifield is a *dmsp*-semiring. Any Keigher ring is a *dmsp*-semiring.

Corollary 8. *In a dmsp-semiring the radical of an arbitrary differential subtractive ideal is the intersection of all the prime differential subtractive ideals containing I.*

Proof. Since I is differential by Theorem 3 (5) we have $\langle I \rangle = \sqrt{|I|} = \sqrt{I}$. From Theorem 2, $\langle I \rangle = \bigcap_{I \subseteq P} P$, and the result follows. □

Note that this corollary can be proved directly using the argument similar to the proof of Theorem 2.

Let I be an ideal of a semiring R and let $a, b \in R$. Define the equivalence $a \sim b$ if and only if there exist $x, y \in I$ such that $a + x = b + y$. Then $\sim$ is an equivalence relation on R. Let $[a]_I^R$ or $[a]$ be the equivalence class of $a \in R$. Then $R/I = \{[a]_I^R | a \in R\}$ is a semiring under the binary operations defined as follows: $[a] + [b] = [a + b]$ and $[a][b] = [ab]$ for all $a, b \in R$. This semiring is called the *Bourne factor semiring* of R by I.

Let (R, δ) be a differential semiring and let I be a differential semiring ideal of R. Then it can be easily proved that the Bourne factor semiring R/I is a differential semiring under the derivation $d\colon R/I \longrightarrow R/I$ given by $d\left([a]_I^R\right) = [d(a)]_I^R$ for any $a \in R$.

Proposition 15. *If R is a dmsp-semiring and I is a differential subtractive ideal of R, then R/I is a dmsp-semiring.*

Proof. The statement follows easily from the structure of prime ideals of the Bourne factor semiring R/I and the definition of *dmsp*-semiring. □

Proposition 16. *If I is a radical differential subtractive ideal of the* dmsp-*semiring R, then $I_{\#}$ is a radical differential subtractive ideal of R.*

Proof. Let I be a radical differential subtractive ideal of R. By Theorem 2, I coincides with the intersection of all prime differential subtractive ideals of R which contain it. Thus $I = \bigcap_{I \subseteq P} P$. By Propositions 10 and 11 the operator $(\ \ )_{\#}$ preserves intersections, inclusion and subtractive ideals. Therefore $(\ \ )_{\#}$ also preserves radical ideals. □

Proposition 17. *If R_1 is a dmsp-semiring and $f\colon R_1 \to R_2$ is a differential semiring epimorphism, then R_2 is a dmsp-semiring.*

Proof. Denote $A = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec} R_1 \mid \operatorname{Ker} f \subseteq \mathcal{P}\} \subseteq R_1$. It is clear that the differential epimorphism $f\colon R_1 \to R_2$ induces a differential isomorphism $\bar{f} = f\,|_A : A \to \operatorname{Spec} R_2$ between prime ideals $\mathcal{P}$ of R_1, containing the kernel of the homomorphism $\operatorname{Ker} f$ and prime ideals of R_2.

Let $\mathcal{Q} \in \operatorname{Spec} R_2$. Since R_1 is a *dmsp*-semiring and $\bar{f}^{-1}(\mathcal{Q}) = f^{-1}(\mathcal{Q}) \in A$ is a prime subtractive ideal of R_1 by Corollary 5, then so is $f^{-1}(\mathcal{Q})_{\#}$. It follows from the properties of $(\ \ )_{\#}$ (Proposition 13) that $\mathcal{Q}_{\#} = \bar{f}\left(\bar{f}^{-1}(\mathcal{Q}_{\#})\right) = \bar{f}\left(\left(\bar{f}^{-1}(\mathcal{Q})\right)_{\#}\right)$. Therefore $\mathcal{Q}_{\#}$ is a prime differential subtractive ideal of R_2. Hence R_2 is a *dmsp*-semiring. □

Proposition 18. *Let $R_1, \ldots, R_n$ be differential semirings and let $R = R_1 \times \cdots \times R_n$. Then R is a dmsp-semiring if and only if R_i is a dmsp-semiring for each i.*

Proof. Let R be a *dmsp*-semiring. Then for every i the canonical projection $\pi_i\colon R \to R_i$ is a differential epimorphism. By Proposition 17, every R_i is a *dmsp*-semiring.

Conversely, suppose all R_i are *dmsp*-semirings and $\mathcal{P}$ is a prime subtractive ideal of R. Consider the canonical projections $\pi_i\colon P \to P_i$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$. It follows that $\pi_k(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_k$ is a prime subtractive ideal of R_k for some k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, and $\pi_j(\mathcal{P}) = R_l$ for $l \neq k$. Then $\pi_k^{-1}(\mathcal{P}_k) = \mathcal{P}$. Therefore $\mathcal{P}_{\#} = (\pi_k^{-1}(\mathcal{P}_k))_{\#} = \pi_k^{-1}((\mathcal{P}_k)_{\#})$. Since $\pi_k^{-1}((\mathcal{P}_k)_{\#})$ is a prime subtractive ideal of R by Corollary 5, so is $\mathcal{P}_{\#}$. Hence R is a *dmsp*-semiring. □

Acknowledgement. I would like to thank Professor M. Ya. Komarnytskyi for helpful discussions.

References

1. *Allen P.J., Neggers J., Kim H.S.* Ideal theory in commutative A-semirings // Kyungpook Math. J. — 2006. — **46**, №2. — P. 261–271.
2. *Chandramouleeswaran M., Thiruveni V.* On derivations of semirings // Advances in Algebra. — 2010. — **3**, №1-2. — P. 123–131.
3. *Dubei M.K.* Prime and weakly prime ideals in semirings // Quasigroups Relat. Syst. — 2012. — **20**. — P. 197–202.
4. *Golan J.S.* Semirings and their Applications. — Dordrecht: Kluwer, 1999. — 382 p.
5. *Hebisch U., Weinert H.J.* Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science, — Singapore: World Scientific, 1993. — 361 p.
6. *Keigher W.* Prime differential ideals in differential rings // Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin. — New York: Academic Press, 1977. — P.239–249.
7. *Kolchin E.R.* Differential Algebra and Algebraic Groups. — New York: Academic Press, 1973. — 446 p.
8. *Thierrin G.* Insertion of languages and differential semirings // Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2001. — P. 287–296.
9. *Vandiver H.S.* Note on a simple type of algebras in which the cancellation law of addition does not hold // Bull. Am. Math. Soc. — 1934. — **40**, №12. — P. 914–920.

Стаття: надійшла до редколегії 04.06.2015
доопрацьована 28.11.2016
прийнята до друку 14.12.2016

ПРО РАДИКАЛ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ІДЕАЛУ НАПІВКІЛЬЦЯ

Іванна МЕЛЬНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська,1, Львів, 79000
e-mail: ivannamelnyk@yahoo.com

Наведено нові приклади та властивості диференціальних ідеалів у напівкільцях. Досліджуємо радикал диференціального ідеалу комутативного диференціального напівкільця. Доведено, що радикальний диференціальний напівстрогий ідеал є перетином первинних диференціальних напівстрогих ідеалів. Подано характеризацію диференціальних напівкілець, в яких радикал кожного диференціального напівстрогого ідеалу є диференціальним.

Ключові слова: диференціальне напівкільце, диференціальний ідеал напівкільця, радикальний диференціальний ідеал.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 174–185
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 174–185

УДК 513.88

РЕЗОЛЬВЕНТА Й УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ВЛАСНИХ РОЗШИРЕНЬ ЛІНІЙНОГО ВІДНОШЕННЯ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Ольга ПІГУРА, Олег СТОРОЖ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: info@nuft.edu.ua, storog@ukr.net

У термінах абстрактних крайових операторів досліджено один клас розширень L_A фіксованого замкненого лінійного відношення L_0 у гільбертовому просторі. Встановлено розмірність многовиду нулів, корозмірність області значень і критерій нормальної розв'язності відношення $L_A - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Знайдено резольвентну множину та побудовану резольвенту розглядуваного розширення.

Ключові слова: гільбертів простір, лінійне відношення, оператор, резольвента.

1. Вступ. Теорія лінійних відношень ("багатозначних операторів" у гільбертовому просторі) — важливий розділ функціонального аналізу. Її започаткував Р. Аренс [1] і знайшла свій подальший розвиток у працях Е.А. Кодінгтона [2] (самоспряжені розширення нещільно визначених ермітових операторів), А. Дайксми і Г. Сноо [3] (опис самоспряжених розширень симетричного відношення в термінах дефектних просторів), Ф.С. Рофе-Бекетова [4], А.Н. Кочубея [5], В.І. Горбачук і М.Л. Горбачука [6] (застосування теорії лінійних відношень до опису самоспряжених та дисипативних розширень різних класів симетричних операторів) та інших математиків. Протягом останніх двадцяти років зацікавленість до теорії відношень значно посилилася. Це пов'язано, зокрема, з тим, що вона знайшла різноманітні застосування в теорії розширень нещільно визначених операторів, передусім диференціальних (див., наприклад [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], де розвивається концепція простору граничних значень і відповідної функції Вейля для лінійного відношення, та цитовану там літературу).

2. Позначення та формулювання задачі. Попередні відомості. Під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 47B44, 81Q15

Будь-який (замкнений) лінійний многовид в $H^2 = H \oplus H$ називається (*замкненим*) *лінійним відношенням* в H. Прикладом лінійного відношення є графік GrT лінійного оператора T, тому в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком. Ми використовуємо такі позначення: $D(T), R(T), \ker T$— відповідно, область визначення, область значень і многовид нулів відношення (оператора) T:

$$D(T) = \{y \in H | (\exists y' \in H) : (y, y') \in T\}; \qquad R(T) = \{y' \in H | (\exists y \in H) : (y, y') \in T\};$$

$$\ker T = \{y \in T : (y, 0) \in T\}; \qquad \alpha T = \{(y, \alpha y') : (y, y') \in T\};$$

якщо $\lambda \in \mathbb{C}$, то $T - \lambda = \{(y, y' - \lambda y) : (y, y') \in T\}$ (отож,

$$\ker(T - \lambda) = \{y \in H : (y, 0) \in T - \lambda\} \quad (= \{y \in H : (y, \lambda y) \in T\});$$

$$\widehat{\ker}(T - \lambda) = \{(y, \lambda y) : y \in ker(T - \lambda)\}; \qquad T^{-1} = \{(y', y) \in H^2 : (y, y') \in T\};$$

$$T(0) = \{y' \in H : (0, y') \in T\};$$

для будь-якого лінійного відношення $T \subset H^2$ спряжене (лінійне) відношення T^* визначається так:

$$T^* = H^2 \ominus \widehat{J}T = \widehat{J}(H^2 \ominus T),$$

де

$$\widehat{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i1_H \\ i1_H & 0 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) = \{0\}, R(T - \lambda) = H\}$ (резольвентна множина відношення T).

Далі, якщо X, Y – гільбертові простори, то $(\cdot|\cdot)_X$— символ скалярного добутку на X; $\mathcal{B}(X, Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $S : X \to Y$ таких, що $D(S) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$:

1_X – тотожне перетворення простору X;
$S \downarrow E$ – звуження відображення S на множину E;
$\dot{+}, \oplus$ – відповідно символи прямої та ортогональної суми;
$\ominus$ – символ ортогонального доповнення;
SE – образ множини E при відображенні S;
$\overline{E}$ – замикання множини E.

Роль початкового об'єкта відіграє пара (L, L_0) замкнених лінійних відношень в H таких, що $L_0 \subset L$. Приймемо $M \overset{def}{=} L_0^*$, $M_0 \overset{def}{=} L^*$. Відомо [16], що існують гільбертові простори G_1, G_2 та лінійні оператори $\Gamma_i \in \mathcal{B}(L, G_i)$ $(i = 1, 2)$ такі, що

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = G_1 \oplus G_2, \quad \ker(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = L_0 \quad \text{i} \quad \widetilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(M, G_2),\ \widetilde{\Gamma}_2 \in \mathcal{B}(M, G_1)$$

(які визначаються однозначно, виходячи з $G_1, G_2, \Gamma_1, \Gamma_2$) такі, що

$$R(\widetilde{\Gamma}_1 \oplus \widetilde{\Gamma}_2) = G_2 \oplus G_1, \quad \ker(\widetilde{\Gamma}_1 \oplus \widetilde{\Gamma}_2) = M_0,$$

$$\forall \widehat{y} = (y, y') \in L,\ \forall \widehat{z} = (z, z') \in M \qquad (y'|z) - (y|z') = (\Gamma_1 \widehat{y} | \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{z})_{G_1} - (\Gamma_2 y | \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{z})_{G_2}.$$

При цьому

$$\Gamma_1 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_1^* = 0, \quad \Gamma_1 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_2^* = i1_{G_1}, \quad \Gamma_2 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_1^* = -i1_{G_2}, \quad \Gamma_2 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_2^* = 0, \tag{2}$$

де $\widehat{J}$ визначено згідно з (1). Будь-яке замкнене лінійне відношення $L_1(M_1)$ таке, що $L_0 \subset L_1 \subset L$ (відповідно, $M_0 \subset M_1 \subset M$) ми називаємо власним розширенням відношення $L_0(M_0)$.

Нехай F – деякий гільбертів простір такий, що $\dim F = \dim(G_1 \oplus G_2)$. Неважко довести, що для будь-якого власного розширення L_1 відношення L_0 існує $A \in \mathcal{B}(G_1 \oplus G_2, F)$ таке, що $L_1 = \ker A\Gamma$. Далі писатимемо L_A замість L_1. Отож

$$L_A = \ker(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2) = \{\widehat{y} \in L : A_1\Gamma_1\widehat{y} + A_2\Gamma_2\widehat{y} = 0\}, \quad \text{де } A_i = A \downarrow G_i \ (i = 1, 2).$$

Зрозуміло, що $A_i \in \mathcal{B}(G_i, F)$.

Далі припускаємо, що резольвентна множина $\rho(L_2)$ відношення $L_2 \overset{def}{=} \ker\Gamma_2$ непорожня. Нехай $\lambda \in \rho(Ł_2)$, а отже, $\overline{\lambda} \in \rho(M_2)$, де $M_2 \overset{def}{=} \ker\widetilde{\Gamma}_2 \ \ (= L_2^*)$. Тоді

$$L_\lambda \overset{def}{=} (L_2 - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H), \quad M_{\overline{\lambda}} \overset{def}{=} (M_2 - \overline{\lambda}^{-1}) \ (= L_\lambda^*) \in \mathcal{B}(H).$$

В термінах абстактних граничних операторів, тобто у вигляді, який у випадку диференціальних операторів приводить безпосередньо до крайових умов, встановлено розмірність многовиду нулів, корозмірність області значень і критерій нормальної розв'язності відношення $L_A - \lambda \ \ (\lambda \in \mathbb{C})$. Зокрема, з'ясовано, коли це відношення є розв'язним, тобто, коли $\ker(L_A - \lambda) = \{0\}, R(A - \lambda) = H$. У цьому випадку побудовано резольвенту відношення L_A. Окрему увагу приділено випадку, коли A є нормально розв'язним оператором.

3. Допоміжні оператор-функції. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Приймемо

$$\forall y \in H \ \widehat{L}_\lambda y = (L_\lambda y, y + \lambda L_\lambda y), \qquad \text{і} \qquad \forall z \in H \ \widehat{M_{\overline{\lambda}}} z = (M_{\overline{\lambda}} z, z + \overline{\lambda} M_{\overline{\lambda}} z).$$

Лема 1.

$$R(\widehat{L}_\lambda) = L_2, \qquad R(\overline{M}_\lambda) = M_2. \tag{3}$$

Доведення. Зрозуміло, що $\widehat{L}_\lambda \in \mathcal{B}(H, H^2)$. Далі $GrL_\lambda = \{(y, L_\lambda y) : y \in H\}$, тому $L_2 - \lambda = \{(L_\lambda y, y) : y \in H\}$, а отже, $L_2 = \{(L_\lambda y, y + L_\lambda y : y \in H)\} = R(\widehat{L}_\lambda)$. Першу з рівностей (3) доведено. Другу доводимо аналогічно. □

Наслідок 1. $\forall y \in H \quad \mathit{\Gamma}_2 \widehat{L}_\lambda y = 0, \quad \forall z \in H \quad \widetilde{\mathit{\Gamma}}_2 \widehat{M_{\overline{\lambda}}} z = 0.$

Приймемо $Z_\lambda \overset{def}{=} (\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M_{\overline{\lambda}}})^*$, $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} \overset{def}{=} (\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda)^*$.

Лема 2.

$$Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H), \ Z_\lambda = (L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2) + \pi_2)\widetilde{\mathit{\Gamma}}_1^*, \tag{4}$$

$$\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_1, H), \ \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} = (M_{\overline{\lambda}}(\pi_1 + \lambda\pi_2) + \pi_2)\mathit{\Gamma}_1^*, \tag{5}$$

де $\pi_1 : H^2 \to H \oplus \{0\}$, $\pi_2 : H^2 \to \{0\} \oplus H$ *– ортопроектори.*

Доведення. Оскільки $\widehat{M_{\overline{\lambda}}} \in \mathcal{B}(H, H^2)$ і $R(\widehat{M_\lambda}) = M_2 \subset M$, то $\widehat{M_{\overline{\lambda}}} \in \mathcal{B}(H, M)$; оскільки $\widetilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(H, G_2)$, то $\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M_{\overline{\lambda}}} \in \mathcal{B}(H, G_2)$. Тому $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$.

Далі, $\forall a \in G_2, \forall z \in H$

$$(z|Z_\lambda a) = (\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M_{\overline{\lambda}}} z|a)_{G_2} = (\widehat{M_{\overline{\lambda}}} z|\widetilde{\Gamma}_1^* a) = ((M_\lambda z, z + \overline{\lambda} M_{\overline{\lambda}} z)|(\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a, \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a))_{H^2} =$$

$$= (M_{\overline{\lambda}} z|\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (\overline{\lambda} M_{\overline{\lambda}} z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) = (z|L_\lambda \pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\lambda L_\lambda \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) =$$

$$= (z|(L_\lambda\pi_1 + \pi_2 + \lambda L_\lambda \pi_2))\widetilde{\Gamma}_1^* a.$$

Отже, (4) доведено, (5) доводимо аналогічно. □

Позначення: $\forall a \in G_2 \quad \widehat{Z}_\lambda a \overset{def}{=} (Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a)$.

Лема 3. *$R(\widehat{Z}_\lambda) \subset L$ і $\Gamma_2 \widehat{Z}_\lambda = 1_G$.*

Доведення.

$$\widehat{Z}_\lambda = (Z_\lambda, \lambda Z_\lambda) = (L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + \pi_2\widetilde{\Gamma}_1^*, \lambda(L_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + \pi_2\widetilde{\Gamma}_1^*)) =$$
$$= (L_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^*, \lambda L_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + (\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^*) + (\pi_2\widetilde{\Gamma}_1^*, -\pi_1\widetilde{\Gamma}_1^*) =$$
$$\widehat{L}_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + i\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^*,$$

де $\widehat{J}$ визначено згідно з (1). Але

$$\forall a \in G_2 \ \widehat{L}_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* a \subset L_2 \subset L$$

(див. лему 1), $\widetilde{\Gamma}_1^* a \in M \ominus M_0$, тому (див. [17]) $i\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^* a \in L \ominus L_0 \subset L$. Звідси випливає, що $\widehat{Z}_\lambda a \in L$. Далі, враховуючи (2) і Наслідок 1, бачимо, що

$$\forall a \in G_2 \ \ \Gamma_2\widehat{L}_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* a = 0, \Gamma_2(i\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^*)a = a,$$

тому $\Gamma_2\widehat{Z}_\lambda a = a$. □

Лема 4.

$$\widehat{Z}_\lambda \Gamma_2 \downarrow \widehat{\ker}(L-\lambda) = 1_{\widehat{\ker}(L-\lambda)}, \tag{6}$$
$$R(Z_\lambda) = \ker(L-\lambda) \tag{7}$$

Доведення. Нехай $y \in \ker(L-\lambda)$, $x \in H$. Застосовуючи рівність

$$(y'|z) - (y|z') = (\Gamma_1\widehat{y}|\widetilde{\Gamma_2 z})_{G_1} - (\Gamma_2 y|\widetilde{\Gamma_1 z})_{G_2}$$

при $\widehat{y} = (y, \lambda y)(\in \widehat{\ker}(L-\lambda))$, $z = M_{\overline{\lambda}}x$, отримуємо (враховуючи наслідок 1)

$$Z_\lambda\Gamma_2\widehat{y}|x) = (\Gamma_2\widehat{y}|\widetilde{\Gamma}_1\widehat{M_{\overline{\lambda}}}x) = -[(\Gamma_1\widehat{y}|\widetilde{\Gamma}_2\widehat{M_{\overline{\lambda}}}x)_{G1} - (\Gamma_2\widehat{y}|\widetilde{\Gamma}_1\widehat{M}_\lambda x)_{G_2}] =$$
$$= (-[(\lambda y|M_{\overline{\lambda}}x) - (y|x) + \overline{\lambda} M_{\overline{\lambda}}x] = (y|x).$$

Звідси випливає, що для будь-якого $y \in \ker(L-\lambda)$ $Z_\lambda\Gamma_2(y,\lambda y) = y$, а тому

1) $\widehat{Z}_\lambda\Gamma_2(y,\lambda y) = (y, \lambda y)$, тобто справджується (6);
2) $\ker(L-\lambda) \subset R(Z_\lambda)$.

Крім того, з леми 2 випливає, що для всякого $a \in G_2($ $Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a) \in L$, тобто $Z_\lambda a \in \ker(L-\lambda)$. Іншими словами, $R(Z_\lambda) \subset \ker(L-\lambda)$. Рівність (7), а з нею і лему 4, доведено. □

Приймемо $M(\lambda) \overset{def}{=} \Gamma_1\widehat{Z}_\lambda$.

Зауваження 1.

$$M(\lambda) = \Gamma_1\widehat{L}_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^*. \tag{8}$$

Справді, $\widehat{Z}_\lambda = \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + i\widetilde{\widehat{J\Gamma}}_1^*$ (див доведення леми 3), тому

$$M(\lambda) = \Gamma_1\widehat{Z}_\lambda = \Gamma_1\widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + i\Gamma_1\widetilde{\widehat{J\Gamma}}_1^*.$$

Оскільки, з огляду на (2), $\Gamma_1\widetilde{\widehat{J\Gamma}}_1^* = 0$, то (8) доведено.

Лема 5.

$$D(L_2) + \ker(L - \lambda) = D(L). \tag{9}$$

Доведення. Включення $D(L_2) + \ker(L - \lambda) \subset D(L)$ є очевидним. Навпаки, нехай $y \in D(L)$. Тоді існує $y' \in H$ таке, що $(y, y' - \lambda y) \in L - \lambda$. Але $H = R(L_2 - \lambda)$, тому існує $u \in D(L_2)$ таке, що $(u, y' - \lambda y) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Тому $(y - u, 0) \in L - \lambda$, тобто $y - u \in \ker(L - \lambda)$. Отож, $y = u + (y - u) \in D(L_2) + \ker(L - \lambda)$. □

Зауваження 2. Сума (9), загалом, не є прямою. Точніше

$$D(L_2)\bigcap\ker(L - \lambda) = \{0\} \Longleftrightarrow L_2(0) = L(0).$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $v \in L(0) = (L - \lambda)(0)$. Тоді $(0; v) \in L - \lambda$. Далі, оскільки $R(L_2 - \lambda) = H$, то існує $u \in D(L_2 - \lambda) = D(L_2)$ таке, що $(u, v) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Звідси випливає, що $(u, 0) = (u, v) - (0, v) \in L - \lambda$, тобто $u \in \ker(L - \lambda)$. Отож, $u \in \ker(L - \lambda) \cap D(L_2)$, тобто $u = 0$. А це означає, що $(0, v) \in L - \lambda$. Отже, $v \in (L_2 - \lambda)(0) = L_2(0)$.

($\Leftarrow$) Нехай $u \in D(L_2) \cap \ker(L - \lambda)$. Це означає:

1) $(\exists v \in H) : (u, v) \in L_2 \subset L$;
2) $(u, \lambda u) \in T$.

Маємо: $(0, v - \lambda u) \in L \Rightarrow v - \lambda u \in L(0) = L_2(0) \Rightarrow (0, v - \lambda u) \in S \Rightarrow (u, \lambda u) = (u, v) - (0, v - \lambda u) \in S \Rightarrow u \in \ker(S - \lambda) \Rightarrow u = 0$. □

Лема 6. $L_2 \dot{+} \widehat{\ker}(L - \lambda) = L$.

Доведення. а) $L_2 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda) = \{0\}$. Нехай $(y, y') \in L_2 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda)$, зокрема існує $a \in G_2$ таке, що $(y, y') = (Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a)$ (див. (7)), а отже, $(y, y' - \lambda y) = (y, 0) \in L_2 - \lambda$, або, що еквівалентно, $y \in \ker(L_2 - \lambda)$. Але $\ker(L_2 - \lambda) = 0$, тому $(y, y') = (0, 0)$.

б) $L_2 + \widehat{\ker}(L - \lambda) = L$. Включення $L_2 + \widehat{\ker}(L - \lambda) \subset L$ очевидне. Протилежне включення випливає з того, що $(\forall \widehat{y} \in L)$ $\widehat{y} = (\widehat{y} - \widehat{Z}_\lambda\Gamma_2 y) + \widehat{Z}_\lambda \Gamma y$ і лем 3, 4. □

Лема 7. а) $L_0 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda) = \{0\}$;
б) $L_0 \dot{+} \widehat{\ker}(L - \lambda) \subset \ker(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$

Доведення. а) Правильність цього твердження випливає з леми 6.

б) Якщо $\widehat{y} = (y, y') \in L_0$, то $\Gamma_1\widehat{y} = \Gamma_2\widehat{y} = 0$, а отже, $\Gamma_1\widehat{y} = M(\lambda)\Gamma_2\widehat{y}$. Якщо $\widehat{y} \in \widehat{\ker}(L - \lambda)$, то, з огляду на леми 3, 4, існує $a \in G_2$ таке, що $y = \widehat{Z}_\lambda a$, а отже $\Gamma_1\widehat{y} - M(\lambda)\Gamma_2\widehat{y} = \Gamma_1\widehat{Z}_\lambda a - M(\lambda)\Gamma_2\widehat{Z}_\lambda a = M(\lambda)a = M(\lambda)a = 0$. □

Наслідок 2. $L_0 \dot{+} \widehat{\ker}(L - \lambda) = \ker(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$.

Доведення. Нехай $\widehat{y} \in \widehat{\ker}(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$. З огляду на леми 4, 6, $\widehat{y} \in L = L_2 \dot{+} \widehat{\ker}(L-\lambda)$ і існують $\widehat{u} \in L_2, a \in G_2$ такі, що $\widehat{y} = \widehat{u} + \widehat{Z}_\lambda a$, а отже, $(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)(\widehat{u} + \widehat{Z}_\lambda a) = 0$. Отож,

$$0 = \Gamma_1\widehat{u} + \Gamma_1 Z_\lambda a - M(\lambda)\Gamma_2 u - M(\lambda)\Gamma_2\widehat{u} - M(\lambda)\Gamma_2 Z_\lambda a = \Gamma_1\widehat{u}.$$

Оскільки $\Gamma_2\widehat{u} = 0$, то $\widehat{u} \in L_0$. □

Зауваження 3. Міняючи ролями пари (L, L_0) та (M, M_0), аналогічно доводимо, що:

$$\text{якщо } \widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} \overset{def}{=} (\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}, \overline{\lambda}\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}), \text{ то } R(\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}}) = \widehat{\ker}(M - \overline{\lambda}), \quad \widetilde{\Gamma}_2\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} = 1_{G_1},$$

$$\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}}\widetilde{\Gamma}_2 \downarrow \widehat{\ker}(M - \overline{\lambda}) = 1_{\widehat{\ker}(M-\overline{\lambda})};$$

$$\text{якщо } \widetilde{M}(\overline{\lambda}) \overset{def}{=} \widetilde{\Gamma}_1\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}}, \text{ то } \widetilde{M}(\overline{\lambda}) \in \mathcal{B}(G_1, G_2),\ \widetilde{M}(\overline{\lambda}) = \widetilde{\Gamma}_1\widehat{M}_{\overline{\lambda}}(\pi_1 + \overline{\lambda}\pi_2)\Gamma_1^*,$$

$$M_0 \dot{+} \widehat{\ker}(M - \overline{\lambda}) = \ker(\widetilde{\Gamma}_1 - \widetilde{M}(\overline{\lambda})\widetilde{\Gamma}_2).$$

Крім того, $\forall\lambda \in \rho(L_2) \quad M(\lambda)^* = \widetilde{M}(\overline{\lambda})$.

Справді, для будь-яких $a \in G_1, b \in G_2$

$$(\widetilde{M}(\overline{\lambda})a|b)_{G_2} = (\widetilde{\Gamma}_1\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}}a|b)_{G_2} = (\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}}a|\widetilde{\Gamma}_1^* b)_{H^2} = ((\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}a, \overline{\lambda}\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}a)|(\pi_1\widetilde{\Gamma}_1^* b, \pi_2\widetilde{\Gamma}_1^* b))_{H^2} =$$
$$= (\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}a|\pi_1\widetilde{\Gamma}_1^* b) + (\overline{\lambda}\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}a|\pi_2\widetilde{\Gamma}_1^* b) = (\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}a|(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* b) =$$
$$= (a|\Gamma_1\widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* b)_{G_1} = (a|M(\lambda)b)_{G_1}.$$

4. Основний результат.

Лема 8. *Припустимо, що* $\lambda \in \rho(L_2)$. *У цьому випадку:*

а) *елемент* $f \in H$ *належить до* $R(L_A - \lambda)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$A_1\widetilde{Z}_\lambda^* f \in R(A_1 M(\lambda) + A_2); \tag{10}$$

б)
$$\ker(L_A - \lambda) = Z_\lambda \ker(A_1 M(\lambda) + A_2). \tag{11}$$

Доведення. Нехай $f \in H$. Оскільки $R(L_2 - \lambda) = H$, то $f \in R(L_2 - \lambda)$, а отже, $(L_\lambda f, f) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Припустимо, що для деякого $y \in H \quad (y, f) \subset L - \lambda$. Тоді $(y - L_\lambda f, 0) \in L - \lambda$, а отже, існує $a \in G_2$ таке, що

$$y = L_\lambda f + Z_\lambda a. \tag{12}$$

Маємо

$$f \in R(L_A - \lambda) \Leftrightarrow (y, f) \in L_A - \lambda \Leftrightarrow (y, f + \lambda y) \in L_A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (L_\lambda f + Z_\lambda a, f + \lambda L_\lambda f + \lambda Z a) \in L_A \Leftrightarrow \widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a \in \ker(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2) \Leftrightarrow$$
$$A_1\Gamma_1(\widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a) + A_2\Gamma_2(\widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a) \equiv A_1\Gamma_1\widehat{L}_\lambda f + A_1\Gamma_1\widehat{Z}_\lambda a + A_2\Gamma_2\widehat{L}_\lambda f + A_2\Gamma_2\widehat{Z}_\lambda a = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_1\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}^* f + A_1 M(\lambda)a + + A_2 a = 0.$$

Останню рівність можна переписати так:

$$(A_1 M(\lambda) + A_2)a = -A_1\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}^* f. \tag{13}$$

Отже, $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існує $a \in G_2$ таке, що справджується (13), тобто, коли виконується (10). Повторюючи ці міркування при $f = 0$, бачимо, що справджується (11). □

Приймемо $A_\lambda \overset{def}{=} A_1 M(\lambda) + A_2$.

Зауваження 4. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Тоді

а) $\ker \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} = 0$;

б) $\ker(\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \downarrow \ker(M - \overline{\lambda})) = \{0\}$;

в) $$R(\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda) \equiv R(\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}}) = G_1; \tag{14}$$

г) $$\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda \downarrow R(L_0 - \lambda) \equiv \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \downarrow R(L_0 - \lambda) = 0. \tag{15}$$

Доведення. а) $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = 0 \Rightarrow \widehat{\widetilde{Z}}^*_{\overline{\lambda}} a = 0 \Rightarrow a = \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{\widetilde{Z}}^*_{\overline{\lambda}} a = 0$.

б) Нехай $u \in \ker(M - \overline{\lambda})$, $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} u = 0$. Оскільки $\ker(M - \lambda) = R(\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}})$, то існує $a \in G_1$ таке, що $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = u$. Маємо $0 = \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} u = \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \widetilde{Z}_\lambda a$, тому $Z_\lambda a = u = 0$.

в) Оскільки $R(\widehat{L}_\lambda) = L_2 = \ker \Gamma_2$, то достатньо довести, що $R(\Gamma_1 \downarrow \ker \Gamma_2) = G_1$. А це cghfdls так, тому що $R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = R(\Gamma_1) \oplus R(\Gamma_2)$, а отже, $R(\Gamma_1 \downarrow \ker \Gamma_2) = R(\Gamma_1) = G_1$.

г) Нехай $v \in R(L_0 - \lambda)$. Існує $u \in H$ таке, що $(u, v) \in L_0 - \lambda \subset L_2 - \lambda$. Маємо $\widehat{L}_\lambda v = (L_\lambda v, v + \lambda L_\lambda v) = (u, v + \lambda u)$. Але $(u, v) \in L_0 - \lambda$, тому $(u, v + \lambda u) \in L_0$, отже, $\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda v = 0$. □

Наслідок 3. *Існує гомеоморфізм* $\Pi_\lambda \in \mathcal{B}(G_1, \ker(M - \overline{\lambda}))$ *такий, що*

$$R(L_A - \lambda) = R(L_0 - \lambda) \oplus \Pi_\lambda(A_1^{-1} R(A_\lambda)). \tag{16}$$

Доведення. Легко бачити, що $R(L_0 - \lambda)$ — замкнений многовид, а отже

$$H = R(L_0 - \lambda) \oplus \ker(M - \overline{\lambda}).$$

Звідси, а також з (14) і (15) випливає, що $R(\widetilde{Z}^*_\lambda \downarrow \ker(M - \overline{\lambda})) = R(\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}}) = G_1$.

Тому $(\widetilde{Z}^*_\lambda \downarrow \ker(M - \overline{\lambda})) \in \mathcal{B}(\ker(M - \overline{\lambda},\ G_1))$ – гомеоморфізм, а отже

$$\Pi_\lambda \overset{def}{=} (\widetilde{Z}^*_\lambda \downarrow \ker(M - \overline{\lambda}))^{-1} \in \mathcal{B}(G_1, \ker(M - \overline{\lambda}))$$

– гомеоморфізм $G_1 \to \ker(M - \overline{\lambda})$.

Далі $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існують $f_0 \in R(L_0 - \lambda)$ і

$$f_1 \in R(L_A - \lambda) \ominus R(L_0 - \lambda) = R(L_A - \lambda) \cap \ker(M - \overline{\lambda})$$

такі, що $f = f_0 + f_1$. З іншого боку, враховуючи (10) і (15), бачимо, що

$$f \in R(L_A - \lambda) \Leftrightarrow \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f \in A_1^{-1} R(A_\lambda) \Leftrightarrow \widetilde{Z}^*_\lambda f_0 + \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f_1 \in A_1^{-1} R(A_\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\widetilde{Z}^*_\lambda \downarrow \ker(M - \overline{\lambda}) f_1) \in A^{-1} R(A_\lambda) \Leftrightarrow f_1 \in \Pi_\lambda(A_1^{-1} R(A_\lambda)).$$

Рівність (16) доведено. □

Теорема 1. *Нехай* $\lambda \in \rho(L_2)$. *Тоді:*

а) $$\dim \ker(L_A - \lambda) = \dim \ker A_\lambda; \tag{17}$$

б) $$\dim[H/R(L_A - \lambda)] = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))]; \tag{18}$$

в) $R(L_A - \lambda)$ *замкнений в* H *тоді і тільки тоді, коли* $A_1^{-1} R(A_\lambda)$ *замкнений в* G_1*;*

г) $\lambda \in \rho(L_A)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\ker A_\lambda = \{0\}, R(A_1) \subset R(A_\lambda)$, *тобто, коли* $A_\lambda^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(G_1, G_2)$.

У цьому випадку

$$(L_A - \lambda)^{-1} = L_\lambda - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_\lambda \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}^*. \tag{19}$$

Доведення. а) Рівність (17) випливає з (11) і неперервної оборотності оператора Z_λ.

б) Нехай $\ker(M - \overline{\lambda}) = \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)) \dot{+} \mathcal{L}_1$, тобто

$$\Pi_\lambda G_1 = \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)) \dot{+} \Pi_\lambda(\Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1),$$

або, що є рівносильним,

$$G_1 = A_1^{-1}R(A_\lambda) \dot{+} \Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1. \tag{20}$$

З іншого боку, враховуючи (16), отримуємо

$$H = R(L_0 - \lambda) \dot{+} \ker(M - \overline{\lambda}) = R(L_0 - \lambda) \dot{+} \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda) \dot{+} \mathcal{L}_1 = R(L_A - \lambda) \dot{+} \mathcal{L}_1,$$

а отже (див. (20))

$$\dim[H/R(L_A - \lambda)] = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1 = \dim[G_1/A_1^{-1}R(A_\lambda)].$$

Але $A_1^{-1}R(A_\lambda) = A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))$, тому рівність (18) рівносильна такій:

$$\dim[G_1/A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))] = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))].$$

Доведемо її. Нехай

$$G_1 = A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda)) \dot{+} \mathcal{L},$$

а отже,

$$R(A_1) = (R(A_1) \cap R(A_\lambda) \dot{+} A_1\mathcal{L}.$$

Крім того, якщо $l \in \mathcal{L}$ і $A_1 l = 0$, то $l \in A_1^{-1}(\{0\}) \subset A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_l)$. Отож, $l \in A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda)) \cap \mathcal{L} = 0$. Тому $\dim \mathcal{L} = \dim A_1\mathcal{L}$, а отже,

$$\dim[G_1/A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))] = \dim \mathcal{L} = \dim A_1\mathcal{L} = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))].$$

Твердження б) доведено.

в) Правильність цього твердження безпосередньо випливає з (16).

г) З (17), (18) випливає, що

$$\ker(L_A - \lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \ker A_\lambda = \{0\} \tag{21}$$

$$R(L_A - \lambda) = H \Leftrightarrow R(A_1) \subset R(A_\lambda). \tag{22}$$

Враховуючи (21), (22) і застосовуючи теорему про замкнений графік (див. [15, с. 211]), бачимо, що

$$(L_A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(G_1, G_2).$$

Припустимо, що умови (21), (22) справджуються. Знайдемо резольвенту оператора L_A, тобто розв'яжемо таку задачу:

нехай $f \in R(L_A - \lambda)$ $(= H)$; *знайти* $y \in H$ *таке, що* $(y, f) \in L_A - \lambda$.

Для цього повторимо міркування, використані для доведення леми 8. Отримуємо $(y, f) \in L - \lambda$ тоді і тільки тоді, коли існує $a \in G_2$ таке, що $y = L_\lambda f + Z_\lambda a$ (див.

(12)); при цьому $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді , коли $A_\lambda a = -A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f$ (див. (13)). Підставляючи (13) в (12), бачимо, що

$$(L_A - \lambda)^{-1} f = y = L_\lambda f - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f.$$

Рівність (19) доведено. □

Далі скрізь під $\mathcal{B}_\infty(X_1, X_2)$, де X_1, X_2— гільбертові простори, розуміємо множину компактних операторів з $\mathcal{B}(X_1, X_2)$, а $\mathcal{B}_\infty(H) \stackrel{def}{=} \mathcal{B}_\infty(H, H)$.

Наслідок 4. *В умовах теореми 1*

$$(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $\lambda \in \rho(L_2) \cap \rho(L_A)$ і $(L_A - \lambda)^{-1} L_\lambda \equiv -Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Тоді

$$Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \downarrow \ker(M - \lambda) \in \mathcal{B}_\infty(\ker(M - \overline{\lambda}), H),$$

а отже,

$$Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \Pi_\lambda = Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, H).$$

Оскільки, $\ker Z_\lambda = \{0\}$, а $R(Z_\lambda) = \ker(L - \lambda)$, то $Z_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(\ker(L - \lambda), G_2)$, тому

$$A_\lambda^{-1} A_1 = Z_\lambda^{-1} Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

($\Leftarrow$) Оскільки $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$, $A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2)$, $\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}(H, G_1)$, то з (19) випливає, що $(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H)$. □

5. Випадок, коли $R(A)$ — замкнений підпростір. У цьому випадку твердження, висловленні в теоремі 1 та наслідку 4, допускають деякі уточнення. Далі скрізь вважаємо, що L_A — відношення описане в п. 1, причому $R(A) = \overline{R(A)} \stackrel{def}{=} F_1$ (це припущення не зменшує загальності).

Лема 9.

$$L_A^* = \{\widehat{z} \in M | \exists h \in F_1 : \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{z} = A_1^* h, \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{z} = -A_1^* h\}. \tag{23}$$

Доведення. У праці [16] доведено, що існує $B \in \mathcal{B}(G_2 \oplus G_1, F \ominus F_1)$ такий, що

$$L_A^* = \ker B\widetilde{\Gamma} = \{z \in M : B\widetilde{\Gamma} z = 0\} \stackrel{def}{=} M_B.$$

Більше того, $M_B = L_A^* \Leftrightarrow \ker A = J^* \overline{R(B^*)}$, де

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i1_{G_2} \\ -i1_{G_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Міняючи ролями A та B і враховуючи нормальну розв'язність оператора A (а отже, і оператора A^* — див. [15, с. 295]), бачимо, що $L_A^* = M_B \Leftrightarrow \ker B = JR(A^*)$.

Але права частина рівності (23) — це $\{\widehat{z} \in M : \widetilde{\Gamma} \widehat{z} \in JR(A^*)\}$, в той час, як $M_B = \{z \in M : \widetilde{\Gamma} \widehat{z} \in \ker B\}$. Лему доведено. □

Лема 10. *Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Існує гомеоморфізм $\widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_2, \ker(L - \lambda))$ такий, що*

$$R(L_A^* - \overline{\lambda}) = R(M_0 - \overline{\lambda}) \oplus \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*). \tag{24}$$

Доведення. Міркуючи так, як при доведенні зауваження 4, бачимо, що

$$\ker(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda)) = \{0\}, R(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda)) = G_2.$$

Тому $\widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} \stackrel{def}{=} (Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(G_2, \ker(L-\lambda)$ — гомеоморфізм $G_2 \to \ker(L-\lambda)$.

Враховуючи лему 1, зауваження 3 та лему 9, отримуємо:

$$M - \overline{\lambda} = \{(M_{\overline{\lambda}} f + \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a, f) : f \in H, a \in G_1\}, \tag{25}$$

$\widehat{M}_{\overline{\lambda}} f + \widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} a \in L_A^*$ тоді і тільки тоді, коли існує $h \in F_1$ таке, що

$$\begin{cases} \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\overline{\lambda}} f + \widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = A_2^* h \\ \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{M}_\lambda f + \widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = -A_1^* h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_\lambda^* f + \widetilde{M}(\overline{\lambda}) a = A_2^* h \\ a = -A_1^* h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Z_\lambda^* f = (M(\lambda)^* A_1^* + A_2^*) h \equiv A_\lambda^* h.$$

Отже, (див. (25)), $f \in R(L_A^* - \overline{\lambda})$ тоді і тільки тоді, коли існує $h \in F_1$ таке, що $Z_\lambda^* f = A_\lambda^* h$, тобто, коли $Z_\lambda^* f \in R(A_\lambda^*)$ (пор. з (10)). Зокрема,

$$f \in R(L_A^* - \overline{\lambda}) \cap [H \ominus R(M_0 - \overline{\lambda})] = R(L_A^* - \overline{\lambda}) \cap \ker(L-\lambda)$$

тоді і тільки тоді, коли $(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda) f \in R(A_\lambda^*))$, тобто, коли $f \in \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*)$. Лему доведено. □

Наслідок 5.

$$\ker(L_A^* - \overline{\lambda}) = \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} A_1^* \ker A_\lambda^*. \tag{26}$$

Доведення. Для того, щоб переконатися у правильності (26), достатньо повторити міркування, використані в процесі доведення леми 10, при $f = 0$. □

Теорема 2. *Нехай* $R(A) = F_1,\ \lambda \in \rho(L_2)$. *Тоді*

а) $\dim\ker(L_A^* - \overline{\lambda}) = \dim\ker A_\lambda^*$; (27)

б) $\dim[H/R(L_A^* - \overline{\lambda})] = \dim[G_2/R(A_\lambda^*)]$; (28)

в) $R(L_A - \lambda)$ *замкнений в* H *тоді і тільки тоді, коли* $R(A_\lambda)$ *замкнений у* F_1. *У цьому випадку*

$$\dim[H \ominus R(L_A - \lambda)] = \dim[F_1 \ominus R(A_\lambda)], \tag{29}$$

$$\dim[H \ominus R(L_A^* - \overline{\lambda})] = \dim[G_1 \ominus R(A_\lambda^*)]; \tag{30}$$

г) $\lambda \in \rho(L_A)$ *тоді і тільки тоді , коли* $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2)$. *У цьому випадку*

$$(L_A - \lambda)^{-1} L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, F_1).$$

Доведення. а) Зрозуміло, що $R(A_1) + R(A_\lambda) = R(A) \equiv F_1$, тому (див. [15, с. 279]) $\ker A_1^* \cap \ker A_\lambda^* = 0$. Звідси , з (26) та з оборотності оператора $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}$ випливає (27).

б) Нехай

$$\ker(L-\lambda)^{-1} = \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*) \dot{+} \mathcal{L}. \tag{31}$$

З (31) випливає таке:

1) $H = R(M_0 - \overline{\lambda}) \dot{+} \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*) \dot{+} \mathcal{L}$ так що $\dim[H/(R(L_A^* - \overline{\lambda}))] = \dim\mathcal{L}$;
2) $G_2 = \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}}^{-1} \ker(L-\lambda) = R(A_\lambda^*) \dot{+} \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}}^{-1} \mathcal{L}$, так що $\dim[G_2/R(A_\lambda^*)] = \dim\widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}}^{-1}\mathcal{L} = \dim\mathcal{L}$.

Рівність (28) доведено.

в) Оскільки $R(M_0 - \overline{\lambda})$— замкнений многовид, то правильність цього твердження випливає безпосередньо з (24), при цьому потрібно взяти до уваги теорему про одночасну замкненість областей значень взаємно спряжених лінійних операторів (відношень) (див. [3],[15, с. 295]), а також застосувавши твердження а) і теорему про взаємну ортогональність многовидів нулів та областей значень взаємно спряжених операторів (відношень) (див. [1, 2, 3]).

г) Безпосередньо з (29), (30) випливає, що

$$R(L_A - \lambda) = H \Leftrightarrow R(A_\lambda) = F_1, \qquad R(L_A^* - \overline{\lambda}) = H \Leftrightarrow R(A_\lambda^*) = G_2.$$

Враховуючи цю обставину та доведене вище, бачимо, що

$$\lambda \in \rho(L_A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(L_A^*) \Leftrightarrow \ker(L_A^* - \overline{\lambda}) = \{0\},$$
$$R(L_A^* - \overline{\lambda}) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(A_\lambda^*) = \ = \{0\},$$
$$R(A_\lambda^*)^{-1} \in \mathcal{B}(G_2, F_1) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2).$$

Далі (див. наслідок 4)

$$(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

Але $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2)$, тому $A_\lambda^{-1} A_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2)$ тоді і тільки тоді, коли $A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, F_1)$. Теорему доведедено. □

Список використаної літератури

1. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacif. J. Math. — 1961. — **11**, №1. — P. 9–23.
2. *Coddington E.A.* Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear symmetric operators // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — **79**, № 4. — P. 712–715.
3. *Dijksma A., de Snoo H.S.V.* Self-adjoint extensions of symetric subspaces // Pacif. J. Math. — 1974. — **54**, №1. — P. 71–100.
4. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Самосопряженныерасширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. — 1969. — **184**, №5. — С. 1034–1037.
5. *Кочубей А.Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. — 1975. — **17**, №1. — С. 41–48.
6. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1984. — 284 с.
7. *Malamud M.M., Mogilevskii V.I.* On extensions of dual pairs of operators // Доп. НАН України. — 1997. — №1. — С. 30–37.
8. *Derkach V.A., Hassi S., Malamud M.M., de Snoo H.S.V.* Generalized resolvents andadmissibility // Methods Funct. Anal. Topol. — 2000. — **6**, №3. — P. 24–55.
9. *Арлінський Ю.М.* Максимальні акретивні розширення секторіальних операторів: Автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук. - Київ, 2000.
10. *Arlinskii Yu.M., Hassi S., Sebestyen Z., de Snoo H.S.V.* On the class of extremal extensions of a nonnegative operator // Operator Theory: Advances and Applications, Recent Advances in Operator Theory and Related Topics. **127**. Basel: Birkhäuser, 2001. — P. 41–81.
11. *Hassi S., de Snoo H.S.V., Sterk A., Winkler H.* Finite-domentional graph perturbations of selfdjoint Sturm-Liouville operators // Tiberiu Constantinescu Memorial Volume, Bucharest: Theta Foundation, 2007. – P. 205–226.

12. *Hassi S., de Snoo H.S.V., Szafraniec F.H.* Infinite-dimentional perturbations, maximally nondensely symmetric operators, and some matrix representations // Indag. Math. — 2012. — **23**. — P. 1087–1117.
13. *Bruk V.M.* On the characteristic operatorof an integral equation with a nevanlinna measure in the infinite-dimentional case // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. — 2014. — **10**, №2. — P. 163–188.
14. *Kuzhel A.V., Kuzhel S.A.* Regular extensions of Hermitian operators, Utrecht: VSP, 1988.
15. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — Москва: Мир, 1972.
16. *Oliyar Yu.I., Storozh O.G.* Criteria of mutual adjoiness of proper extensions of linear relations // Mat. Stud. — 2013. — **40**, №1. – P. 71–78.
17. *Сторож О.Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипатинві розширення деяких нещільно визначених операторів // Карпатські мат. публ. — 2009. — **1**, №2. — С. 207–213.

Стаття: надійшла до редколегії 31.05.2016
доопрацьована 23.08.2016
прийнята до друку 13.03.2017

RESOLVENT AND CONDITIONS OF SOLVABILITY FOR PROPER EXTENSIONS OF LINEAR RELATION IN HILBERT SPACE

Olha PIHURA, Oleh STOROZH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: info@nuft.edu.ua, storog@ukr.net

In the terms of abstract boundary operators a class of extensions L_A of a fixed closed linear relation L_0 in a Hilbert space is investigated. The dimension of the null space, the codimension of range and a criterion of normal solvability for the relation $L_A - \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ are established. The resolvent set of the considered extension is founded and its resolvent is constructed.

Key words: Hilbert space, linear relation, operator, resolvent.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 186–191
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 186–191

УДК 512.64

НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК І НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ ОДНОГО КЛАСУ МАТРИЦЬ

Андрій РОМАНІВ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060
e-mail: romaniv_a@ukr.net

Для особливих матриць другого порядку над комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5 знайдено форму Сміта та перетворювальні матриці їхнього найбільшого спільного лівого дільника та найменшого спільного правого кратного.

Ключові слова: комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, найбільший спільний дільник матриць, найменше спільне кратне матриць, форма Сміта, перетворювальна матриця.

У 2008 р. У. МакГоверн ввів у розгляд кільця майже стабільного рангу 1. Тобто кільця нетривіальні гомоморфні образи яких є кільцями стабільного рангу 1 [4].

На підставі цього класу кілець В. Щедрик ввів поняття кільця стабільного рангу 1,5. Кільце R є *кільцем стабільного рангу* 1,5, якщо для довільних взаємно простих зліва елементів a, b, c із R , $c \neq 0$ існує такий елемент $r \in R$, що елементи $a + br$, c взаємно прості зліва [3]. Досліджуючи структуру кілець матриць, він довів, що кільце матриць другого порядку над кільцем стабільного рангу 1,5 є кільцем стабільного рангу 1,5. Тому, природно, виникла задача дослідження арифметичних властивостей кілець матриць другого порядку над такими кільцями.

Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 з $1 \neq 0$ і A та B – матриці над R. Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є *лівим дільником матриці* A, а матриця A є *правим кратним матриці* B.

Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають *спільним лівим дільником* матриць A та B. Крім того, якщо кожний інший спільний лівий дільник матриць A та B ділить зліва матрицю D, то матриця D називається *найбільшим спільним лівим дільником* матриць A та B (в позначеннях $(A, B)_l$).

Якщо $M = AP = BQ$, то матрицю M називають *спільним правим кратним* матриць A та B. Крім того, якщо матриця M є лівим дільником кожного іншого

2010 Mathematics Subject Classification: 15A23

спільного правого кратного матриць A та B, то матрицю M називають ***найменшим спільним правим кратним*** матриць A та B (в позначеннях $[A,B]_r$).

Продовжуюємо дослідження розпочаті в [2], зокрема, встановлюються взаємозв'язки між формами Сміта і перетворювальними матрицями двох особливих матриць та формами Сміта, і перетворювальними матрицями їхнього найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного над комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5.

Нехай A та B – особливі 2×2 матриці над R. Для них існують такі оборотні матриці P_A, Q_A та P_B, Q_B, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{E}, \text{ де } \mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, 0),$$
$$P_B B Q_B = \Delta, \text{ де } \Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, 0).$$

Матриці Е та Δ називаються формами Сміта [6], а матриці P_A, P_B та Q_A, Q_B лівими та правими перетворювальними матрицями матриць A та B, відповідно.

Нехай $a\in R$. Розглянемо множину $\mathbf{G}_a$ всіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ a h_{21} & h_{22} \end{array} \right\|.$$

Очевидно, що $\mathbf{G}_a$ є мультиплікативною групою. Якщо $a=0$, то $\mathbf{G}_a=\mathbf{G}_0$ – група оборотних верхніх трикутних матриць.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ та $\mathbf{P}_B$ множини всіх лівих перетворювальних матриць для матриць A та B, відповідно. Згідно з результатами [1], [5], $\mathbf{P}_A=\mathbf{G}_0 P_A$, $\mathbf{P}_B=\mathbf{G}_0 P_B$. Символами $[a,b]$ будемо позначати найменше спільне кратне елементів a та b, через $a|b$ – елемент a ділить елемент b.

Лема 1. *Нехай A, B — особливі матриці з $M_2(R)$, $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2 = S$. Тоді елемент $s_{21}[\varepsilon_1,\delta_1]$ є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_B та P_A.*

Доведення. Нехай $A=\operatorname{diag}(\varepsilon_1,0)$ $B=\operatorname{diag}(\delta_1,0)$ і F_A та F_B інші ліві перетворювальні матриці цих матриць. Тобто $F_A\in\mathbf{P}_A$, $F_B\in\mathbf{P}_B$. Тоді існують такі $H_A = \left\| \begin{array}{cc} e_1' & v_{12} \\ 0 & e_2' \end{array} \right\|$ та $H_B = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|$, що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Позначимо $F_B F_A^{-1} = \left\|s'_{ij}\right\|_1^2 = S'$. Для доведення леми потрібно з'ясуваати, що s_{21} та s'_{21} асоційовні в кільці R. Розглянемо добуток матриць

$$S' = F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Запишемо ці матриці в явному вигляді, тобто

$$\left\| \begin{array}{cc} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} e_1'^{-1} & * \\ 0 & e_2'^{-1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} s''_{11} & s''_{12} \\ s_{21}u & s''_{22} \end{array} \right\|,$$

де $u = e_2 e_1'^{-1}$ – оборотний елемент кільця R. Отже, $s'_{21} = s_{21}u$, що і потрібно було довести. □

Лема 2. *Нехай A, B – особливі матриці з $M_2(R)$, $P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & s \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|$. Тоді*

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B.$$

Доведення. Оскільки
$$P_BP_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} e_1 & s \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\| = H \in \mathbf{G}_0,$$
то $P_B = HP_A$, де $H \in \mathbf{G}_0$. Зауваживши, що $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_0P_A$, отримуємо, що
$$\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_0P_B = \mathbf{G}_0HP_A = \mathbf{G}_0P_A = \mathbf{P}_A.$$
□

Лема 3. *Нехай A, B – особливі матриці з $M_2(R)$, $P_BP_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{matrix} \right\|$. Тоді для будь-яких інших матриць $P'_A \in \mathbf{P}_A$ та $P'_B \in \mathbf{P}_B$ матимемо*
$$P'_BP'^{-1}_A = \left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ 0 & s'_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Доведення. Нехай P'_A та P'_B інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тобто $P'_A \in \mathbf{P}_A$, $P'_B \in \mathbf{P}_B$. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_0$ та $H_B \in \mathbf{G}_0$, що $P'_A = H_AP_A$, $P'_B = H_BP_B$.

Розглянемо добуток матриць
$$P'_BP'^{-1}_A = H_BP_B(H_AP_A)^{-1} = H_BP_BP_A^{-1}H_A^{-1} = H_BSH_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2.$$
Запишемо ці матриці в явному вигляді, тобто
$$H_BSH_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ 0 & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ 0 & s'_{22} \end{matrix} \right\|.$$
Отже, $s'_{21} = 0$, що і потрібно було довести. □

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, $A = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, 0)$, $B = \operatorname{diag}(\delta_1, 0)$, $P_BP_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. Тоді:*

1) *якщо $s_{21} \neq 0$, то*
$$(A, B)_l = (L_AP_A)^{-1}\Phi = (L_BP_B)^{-1}\Phi,$$
де
$$\Phi = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1] \end{matrix} \right\|,$$
а матриці L_A та L_B задовольняють рівність $L_B^{-1}L_A = P_BP_A^{-1}$ і належать, відповідно, групам $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$ та $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}$;

2) *якщо $s_{21} = 0$, то $(A, B)_l = P^{-1}\Phi$, де*
$$\Phi = \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \ P \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B.$$

Доведення. 1. На підставі леми 1 елемент $s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]$, а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B. Далі доведення проводиться аналогічно як у теоремі 2 з [2].

2. Згідно з лемою 3 елемент s_{21} дорівнює нулю незалежно від вибору матриць P_A та P_B. На підставі леми 2 маємо, що $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Нехай $U \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Це означає, що матриці A та B можна записати у вигляді
$$A = U^{-1}\mathrm{EQ_A^{-1}}, \ \ \mathrm{B = U^{-1}\Delta Q_B^{-1}}.$$

Розглянемо матрицю

$$D = U^{-1} \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = U^{-1}\Phi.$$

Оскільки

$$A = \left(U^{-1} \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right) \times \left(\left\| \begin{matrix} \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| Q_A^{-1} \right) = DA_1,$$

$$B = \left(U^{-1} \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right) \times \left(\left\| \begin{matrix} \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| Q_B^{-1} \right) = DB_1,$$

то D є спільним лівим дільником матриць A та B.

Нехай $T = P_T^{-1} \Gamma Q_T^{-1}$, де

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|, \ \gamma_1 \,|\gamma_2 \,,$$

– інший спільний лівий дільник матриць A та B, тобто $A = TA_2$, $B = TB_2$. Отже, $\Gamma\,|\mathrm{E}$ та $\Gamma\,|\Delta$. Оскільки $\gamma_1\,|\varepsilon_1$ та $\gamma_1\,|\delta_1$, то $\gamma_1\,|(\varepsilon_1, \delta_1)$. Отож, $\Gamma\,|\Phi$. Тоді, на підставі леми 5 з [2] матриця T є лівим дільником матриці D. Отже, D є найбільшим спільним лівим дільником матриць A та B. □

Теорема 2. *Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, $A = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, 0)$, $B = \mathrm{diag}(\delta_1, 0)$,*

$$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2, \ P_B \in \mathbf{P}_B, \ P_A \in \mathbf{P}_A.$$

Тоді

1) *якщо $s_{21} \neq 0$, то $M = [A, B]_r = \mathbf{0}$;*
2) *якщо $s_{21} = 0$, то $[A, B]_r = P^{-1}\Omega$, де*

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \ P \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B.$$

Доведення. 1. Для доведення треба довести, що, крім нульової матриці, не існує іншого спільного правого кратного матриць A та B.

Припустимо, що $M = P_M^{-1} \Upsilon Q_M^{-1} \neq \mathbf{0}$ – спільне праве кратне матриць A та B. Тоді $\mathrm{E}|\Upsilon$ та $\Delta|\Upsilon$. Отже, $\Upsilon = \mathrm{diag}(\tau_1, 0)$. Окрім того, $M = AA_2$ та $M = BB_2$.

Оскільки $A|M$ та $B|M$ зліва, то на підставі теореми 1 з [5] $P_A = L_M P_M$ та $P_B = L_{M_1} P_M$, де $L_M \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}}$ і $L_{M_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)}}$. Зауважимо, що в цьому випадку

$$\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}} = \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)}} = \left\| \begin{matrix} e_1 & * \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|$$

– група оборотних верхніх трикутних матриць. Тоді $P_M = L_M^{-1} P_A$ і $P_M = L_{M_1}^{-1} P_B$, тобто $L_M^{-1} P_A = L_{M_1}^{-1} P_B$. А це означає, що $L_{M_1} L_M^{-1} = P_B P_A^{-1} = S$. Отже,

$$\left\| \begin{matrix} e_1 & * \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\|,$$

тобто $s_{21} = 0$. Це суперечить умові теореми.

2. Згідно з лемою 3 незалежно від вибору матриць P_A та P_B елемент s_{21} дорівнює нулю. На підставі леми 2 маємо, що $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Нехай $U \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Це означає, що матриці A та B можна записати у вигляді

$$A = U^{-1}\mathrm{E}\mathrm{Q}_{\mathrm{A}}^{-1}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{U}^{-1}\Delta\mathrm{Q}_{\mathrm{B}}^{-1}.$$

Розглянемо матрицю

$$M = U^{-1}\begin{Vmatrix} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = U^{-1}\Omega.$$

Оскільки

$$M = \left(U^{-1}\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} Q_A^{-1}\right) \times \left((Q_A \begin{Vmatrix} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1]}{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right) =$$

$$= \left(U^{-1}\begin{Vmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} Q_B^{-1}\right) \times \left(Q_B \begin{Vmatrix} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1]}{\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right),$$

то M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай $F = P_F^{-1}\Gamma Q_F^{-1}$ – інше спільне праве кратне матриць A та B. Це означає, що відповідні інваріантні множники матриці F кратні інваріантним множникам матриць A та B. Оскільки шнші інваріантні множники цих матриць є нулями, то матриця Γ має вигляд $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, 0)$. Окрім того, $\varepsilon_1|\gamma_1$ та $\delta_1|\gamma_1$. Тому $[\varepsilon_1, \delta_1]|\gamma_1$, тобто $\gamma_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]\alpha$. Отже, $\Omega \mid \Gamma$. Оскільки $F = AF_1$, то згідно з теоремою 1 з [5] $P_A = U = LP_F$, де $L \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\gamma_1)}}$ – група оборотних верхніх трикутних матриць. Зауваживши, що $\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\gamma_1)}} = \mathbf{G}_{\frac{\omega_2}{(\omega_2,\gamma_1)}}$ отримуємо, що $U = LP_F$, де $L \in \mathbf{G}_{\frac{\omega_2}{(\omega_2,\gamma_1)}}$, а це на підставі леми 6 з [2] означає, що матриця M є лівим дільником матриці F. Отже, M є найменшим спільним правим кратним матриць A та B. □

Список використаної літератури

1. *Зелиско В.Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1980. — **12**. — С. 14–21.
2. *Романів А.М., Щедрик В.П.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісник НТШ. — 2012. — **9**. — С. 269–284.
3. *Щедрик В.П.* Bezout rings of stable range 1.5 // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №6. — С. 849–860.
4. *McGovern W.Wm.* Bezout rings with almost stable range 1 // J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — **212**, №2. — P. 340–348.
5. *Shchedryk V.P.* Factorization of matrices over elementary divisor rings // Algebra Discrete Math. — 2009. — №2. — P. 79–98.
6. *Smith H.J.S.* On systems of linear indeterminate equations and congruences // Philos. Trans. R. Soc. Lond. — 1861. — **151**, №2. — P. 293–326.

Стаття: надійшла до редколегії 25.10.2016
доопрацьована 16.11.2016
прийнята до друку 20.12.2016

THE GREATEST COMMON DIVISOR AND LEST COMMON MULTIPLE OF ONE CLASS OF MATRICES

Andriy ROMANIV

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine, 3b Naukova str., L'viv, 79060
e-mail: romaniv_a@ukr.net

For a singular matrix of the second order over a commutative Bezout domain of stable range 1.5, the Smith normal form and transforming matrices of them, the left greatest common divisor and right lest common multiple are established.

Key words: commutative Bezout domain of stable range 1,5, greatest common divisor of matrices, lest common multiple of matrices, Smith normal form, transforming matrix.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 192–195
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 192–195

УДК 512.552.13

CLEAN DUO RINGS

Natalia RONSKA, Anatoliy DMYTRUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv
e-mail: nataliarr@ukr.net

A ring with unit element is called a duo ring if every one-sided ideal is two-sided. A ring is called clean if every its element is the sum of a unit and an idempotent. This article describes some of the properties of clean duo-rings.

Key words: Bezout ring, clean ring, avoidable ring, duo ring

Helmer [6] was the first to start considering the adequate domains with the idea to obtain abstract characterization of the rings of integer functions. The adequate rings with zero-divisors in Jacobson radical were studied by Kaplansky [7]. Gillman and Henriksen have shown that a von Neumann regular ring is adequate [4]. The first example of Bezout nonadequate domain, which is a domain of elementary divisors, was constructed by Henriksen [5].

Zabavsky and Kuznitska [8] have introduced for consideration a new class of so-called avoidable rings that contains the adequate ring.

Gatalevych [3] was the first, who studied noncommutative adequate rings and their generalizations. He has proved that the generalized right adequate duo Bezout domain is an elementary divisor domain.

All rings are associative rings with nonzero identity.

Definition 1. *A ring R is said to be a clean ring if for any element $x \in R$ there exists a converse element $u \in R$ and an idempotent $e \in R$ such that $x = u + e$.*

Definition 2. *A ring R is called a Bezout right (left) ring if every finitely generated right (left) ideal in R is principal.*

Definition 3. *An element $a \neq 0$ of the Bezout domain R is called a right adequate element if for any element $b \in R$ there exist the elements $r, s \in R$ so that:*

1) $a = rs$;
2) $bR + rR = R$;
3) $\forall\ s' \in R,\ sR \subset s'R \neq R \Rightarrow bR + s'R \neq R$.

2010 Mathematics Subject Classification: 16U70, 16U80

Definition 4. *A ring, in which every nonzero element is right adequate, is called a right adequate ring.*

A ring R is called everywhere right adequate ring ring if every its element is adequate

Definition 5. *A ring R is called a right (left) duo-ring if the following equivalent statements hold:*

1) Every right (left) ideal in R is an ideal;

2) For every $x \in R$,$Rx \subset xR$ ($Rx \supset xR$).

Such rings were investigated by E. Feller [2] and G. Thierrin [11]. Trivial examples of duo rings are, of course, commutative rings and division rings. Nontrivial duo rings are not difficult to come by (e.g., any noncommutative special primary ring is duo, since the only right or left ideals are powers of the unique maximal ideal). In fact some interesting examples of duo rings have already occurred in the literature: M. Auslander and O. Goldman have shown in [1] that there exist noncommutative maximal orders which are both duo rings and Noetherian domains. Further investigations of such rings have been carried out by G. Maury in [9].

Definition 6. *An element a of a duo ring R is said to be right avoidable if for any elements $b, c \in R$ such that $aR + bR + cR = R$ there exist elements $r, s \in R$ such that $a = rs$, $rR + bR = R$, $sR + cR = R$, and $rR + sR = R$. A ring R is called right avoidable if every its nonzero element is right avoidable.*

A ring R is called everywhere right avoidable if every element of R is right avoidable.

Theorem 1. *Any right adequate element of Bezout duo-ring is right avoidable.*

Proof. Let R be a Bezout duo-ring and a is an adequate element of R. Let $aR+bR+cR = R$ and $a = rs$ where $rR + bR = R$ and $\acute{s}R + bR \neq R$ for every element $\acute{s}$ such that $sR \subset \acute{s}R \neq R$. Obviously $rR+sR = R$. Let $sR+cR = dR \neq R$. Since d is a noninvertible divisor of an element s, we see that $dR + bR = hR \neq R$. Since $cR \subset dR \subset hR, bR \subset hR$ and $aR \subset sR \subset hR$. We have $aR + bR + cR \subset hR \neq R$. This is impossible, since $aR + bR + cR = R$. □

As an obvious consequence we obtain the following result.

Corollary 1. *Any right adequate Bezout duo-ring is right avoidable ring.*

Theorem 2. *Let a be an right avoidable element of a duo-ring R. Then zero is right avoidable element of the factor-ring R/aR.*

Proof. Let $\overline{R} = R/aR$, and $\overline{b}\overline{R}+\overline{c}\overline{R} = \overline{R}$, where $\overline{b} = b+aR$, $\overline{c} = c+aR$. By the assumption we have $a = rs$, where $rR + bR = R$, $sR + cR = R$ and $rR + sR = R$. Now we have $\overline{0} = \overline{r} \cdot \overline{s}$, where $\overline{r}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$, $\overline{s}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$ and $\overline{r}\overline{R} + \overline{s}\overline{R} = \overline{R}$. □

Theorem 3. *Duo-ring R is clean if and only if the zero element is right avoidable.*

Proof. Let $bR+cR = R$ and $0 = rs$, where $rR+bR = R$, $sR+cR = R$ and $rR+sR = R$. Since $rR+sR = R$, we see that $ru+sv = 1$ for some elements $u, v \in R$. Since $0 = rs$, we have $r^2u = r$, $s^2v = s$. Denote $ru = e$, then $e^2 = e$ and $1 - e = sv$. Since $rR + bR = R$, we obtain $r\alpha + b\beta = 1$ for some elements $\alpha, \beta \in R$. Here $svb\beta = sv$, i.e. $1 - e \in bR$.

Similarly, $e \in cR$. By [10] R is an exchange ring. In the case of duo rings classes of exchange and clean rings coincide, so R is a clean ring. N ecessity is proved.

We will prove that any clean ring is a ring in which zero is right avoidable. Let $bR + cR = R$. There exists an idempotent $e \in R$ such that $e \in bR$ and $1 - e \in cR$. Since $0 = e(1-e)$, we obtain $(1-e)R + bR = R$, $eR + cR = R$, and $eR + (1-e)R = R$. Putting $1 - e = r, e = s$ we obtain an appropriate representation of the zero element. □

Theorem 4. *Let R be a duo Bezout domain. If $\overline{0}$ is right avoidable element of R/aR then a is right avoidable element of R.*

Proof. Denote $\overline{R} = R/aR$. Since zero is right avoidable element, for any elements $\overline{b}, \overline{c} \in \overline{R}$ such that $\overline{bR} + \overline{cR} = \overline{R}$ there exists such $\overline{r}, \overline{s} \in \overline{R}$ that $\overline{0} = \overline{r} \cdot \overline{s}$ and $\overline{rR} + \overline{bR} = \overline{R}$, $\overline{sR} + \overline{cR} = \overline{R}$ and $\overline{rR} + \overline{sR} = \overline{R}$. Denote $\overline{r} = r + aR$, $\overline{s} = s + aR$, $\overline{b} = b + aR$, $\overline{c} = c + aR$.

Let b and c be arbitrary elements of R such that $aR + bR + cR = R$. Since $\overline{rR} + \overline{bR} = \overline{R}$, there are elements $u, v, t \in R$ such that $ru + bv = 1 + at$. Let $aR + rR = \delta R$. Then $a = \delta a_0$, $r = \delta r_0$ for some elements $a_0, r_0 \in R$ moreover $a_0R + r_0R = R$. It follows that $\delta R + bR = R$.

Since $\overline{0} = \overline{r} \cdot \overline{s}$, we obtain $rs = a\alpha$ for some element $\alpha \in R$. Then $\delta r_0 s = \delta a_0 \alpha$. Since R is a domain we have $r_0 s = a_0 \alpha$. Since $r_0R + a_0R = R$, there exist elements $t, k \in R$ such that $r_0 t + a_0 k = 1$. This means that $a_0 \beta = s$ for some element $\beta \in R$. Therefore $a = \delta a_0$, where $\delta R + bR = R$ and $sR \subset a_0R$. Since $\overline{sR} + \overline{cR} = \overline{R}$, it is obvious that $a_0R + cR = R$. Since $\overline{rR} + \overline{sR} = \overline{R}$ then, obviously, $\delta R + a_0R = R$. Thus we have shown that a is right avoidable element. □

References

1. *Auslander M., Goldman O.* Maximal orders // Trans. Amer. Math. Soc. — 1960. — **97**, №1. — P. 1–24.
2. *Feller E.H.* Properties of primary noncommutative rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958. — **89**, №1. — P. 79–91.
3. *Gatalevych A.* On adequate and generalized adequate duo-rings and elementary divisor duo-rings // Mat. Stud. — 1998. — **9**, №2. — P. 115–119 (in Ukrainian).
4. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — **82**, №2. — P. 366–391.
5. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — **82**, №2. — P. 362–365.
6. *Helmer O.* The elementary divisor for rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — **49**, №2. — P. 235–236.
7. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — **66**, №2. — P. 464–491.
8. *Kuznitska B.M., Zabavsky B.V.* Avoidable rings // Mat. Stud. — 2015. — **43**, №1. — P. 153-155 (in Ukrainian).
9. *Maury G.* Characterisation des ordres maximaux // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. A. — 1969. — **269**. — P. 993–996.
10. *Nicholson W.K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Mat. Soc. — 1977. — **229**. — P. 269–279.
11. *Thierrin G.* On duo rings // Can. Math. Bull. — 1960. — **3**. — P. 167–172.

Стаття: надійшла до редколегії 22.11.2016
прийнята до друку 12.12.2016

ЧИСТІ ДУО КІЛЬЦЯ

Наталія РОНСЬКА, Анатолій ДМИТРУК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: nataliarr@ukr.net

Кільце з одиницею називається дуо кільцем, якщо кожен його однобічний ідеал є двобічним. Кільце називається чистим, якщо кожен його елемент є сумою оборотного й ідемпотента. Описано деякі з властивостей чистих дуо кілець.

Ключові слова: кільце Безу, чисте кільце, роздільне кільце, дуо кільце

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 196–207
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 196–207

УДК 517.957

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF VARIATIONAL SOLUTIONS TO DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH NONSTANDARD GROWTH CONDITIONS

Pavlo TKACHENKO

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University,
Haharina av., 72, Dnipro, Ukraine
e-mail: cool.phenom@mail.ru

The Dirichlet boundary value problem for a nonlinear elliptic equation with nonstandard growth conditions in the main part of operator is considered. There is a peculiarity of this problem, which means that without a preliminary definition of an intermediate space, where the solution is searched, a Lavrentiev effect may be observed. Existence and uniqueness of variational solutions for each intermediate weighted Sobolev-Orlicz space are proven.

Key words: nonlinear elliptic equation, variable exponent, Lavrentiev effect, Sobolev-Orlicz space.

1. Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ be a bounded domain with Lipschitz boundary, let $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ be a Lebesgue measurable function such that $1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < +\infty$ for a.e. $x \in \Omega$. Let also $\mu\colon \Omega \to \mathbb{R}$ be a measurable function such that $\mu \in L^1(\Omega)$, $\mu(x) > 0$ for a.e. $x \in \Omega$ and $\mu(x)^{-\frac{1}{p(x)}} \in L^{q(x)}(\Omega)$, where $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ for a.e. $x \in \Omega$. Here $L^{q(x)}(\Omega)$ is a well-known variable Lebesgue space.

Let $L^{p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$ be a functional space which is defined as follows:

$$L^{p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x) = \left\{ v\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \int\limits_{\Omega} |v(x)|^{p(x)}\,\mu(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Unlike $L^{p(x)}(\Omega)$, these spaces are far less known, but, nonetheless, under the given constraints on p they have almost the same properties as $L^{p(x)}(\Omega)$: reflexivity, separability

2010 Mathematics Subject Classification: 35J60 and completeness with respect to the Luxemburg norm [1]

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)} = \inf\left\{\lambda > 0\colon \int\limits_{\Omega} |u(x)/\lambda|^{p(x)}\,\mu(x)\,\mathrm{d}x \le 1\right\}.$$

These spaces are usually called weighted variable Lebesgue spaces or weighted Lebesgue-Orlicz spaces. We will also take into consideration another type of spaces, namely, weighted Sobolev-Orlicz spaces, which are separable reflexive Banach spaces generally defined as follows:

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)}\,\mu(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right\},$$

$$\|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)} = \||\nabla u|\|_{L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)}\,.$$

The aim of this paper is to establish some existence and uniqueness theorems for the following boundary value problem (BVP)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Big(\mu(x)\,|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\Big) = -\operatorname{div}\Big(\mu(x)\vec{F}(x)\Big) \text{ on } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\vec{F} = (f_1,...,f_n) \in \left[L^{q(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n$ is given, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ is uknown. It is worth mentioning that we do not state anything rigorous beforehand about the exact functional space to which the function u belongs. To be more precise, we can only assert that $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ as in the widest possible case.

The reason for such a vague explanation is based on the structure of spaces $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ and $H_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$, where $H_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ is a closure of $C_0^\infty(\Omega)$ with respect to the given norm of $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$. It is obvious that $H_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$, but there exist functions such that $H_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x) \neq W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ [2], which makes the boundary value problem (1) far more challenging.

Let us consider a closed subspace V of the space $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ such that

$$H_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x) \subset V.$$

It is obvious that $C_0^\infty(\Omega) \subset V$, but if $V \neq H_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$, then $C_0^\infty(\Omega)$ is not dense in V. It is also clear that a functional

$$v \mapsto \int\limits_{\Omega} \mu(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)v_{x_k}(x)\,\mathrm{d}x \equiv \int\limits_{\Omega} \mu(x)\vec{F}(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

is an element of V^* (to make sure, see Theorem 8, Section 3), a dual space of V. This allows us to give the following definition of solutions to problem (1).

Definition 1. *A function $u \in V$ is said to be a V-solution (variational solution with respect to the space V) to the problem* (1) *if the integral equality*

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x)\,|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} \mu(x)\vec{F}(x)\nabla v\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

holds true for all $v \in V$.

Similarly, another well-known definition of solutions to (1) should also be recalled.

Definition 2. *A function $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$ is said to be a weak solution to the boundary value problem* (1) *if an integral equality from* (3) *holds true only for those v which belong to $C_0^\infty(\Omega)$.*

Remark 1. Each V-solution to (1) is also a weak solution to (1).

The main result of this paper is the following statement.

Theorem 1. *Boundary value problem* (1) *has a unique V-solution for each intermediate space $H_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x) \subseteq V \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$.*

The proof of this theorem will be based on considering an operator equation

$$A(u) = f, \tag{4}$$

where $u \in V, f \in V^*, A : V \to V^*$, V is a Banach space, V^* is a dual space. We will show that BVP (1) is equivalent to the equation (4), which allows to apply a theorem of existence and uniqueness of solutions to this equation [3]. This idea will be implemented in Section 3.

To be more rigorous, we should provide a historical review and some information about physical sense of the given problem, because it is not just abstract one and has some important background. To start with, the boundary value problem (1) became widely known after the paper [4] by V.V. Zhikov in 1986, which was followed by a numerous series of researches in, for instance, articles [5, 17]. Namely, it was shown that a functional

$$I(u) = \int\limits_\Omega f(x, \nabla u)\,\mathrm{d}x,$$

where the function $f(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfies the growth conditions

$$-c_0 + c_1 |\xi|^p \le f(x,\xi) \le c_0 + c_2 |\xi|^q, \quad q > p,$$

can attain different minimums for different test function spaces. In other words, it means that we can observe Lavrentiev phenomenon for some functional spaces. Afterwards, the question of solvability of the corresponding Euler-Lagrange equation, which also was considered separately as a degenerate elliptic equation, was broached in papers of scientists such as Xian-Ling Fan, Qi-Hu Zhang [6], V.V. Zhikov, S.Ye. Pastukhova (for instance, [9]), Yu.A. Alkhutov, O.V. Krashennikova (for instance, [10]), P. Marcellini [11], M. Giaquinta [12], M. Růžička [13] and others.

Generally, the first studies on solvability of problem (1) in terms of weak solutions (see Definition 2) were devoted to the case $\mu(x) = 1$ (see [6]). Furthermore, a series of researches into the problem (1) was conducted by the group of Russian scientists (V.V. Zhikov, S.Ye. Pastukhova, Yu.A. Alkhutov, O.V. Krashennikova). These researches include both variations of problem (1) with $\mu(x) \neq 1$ and parabolic generalizations of this problem, not to mention that topics of these scientists' papers also include some case studies of Sobolev-Orlicz spaces.

A substantial contribution to the theory of equations with variable exponents was also brought by some Ukrainian mathematicians, mostly by M.M. Bokalo and

O.M. Buhriy, who conducted various researches into parabolic extensions of BVP (1) (see their latest papers [7, 8]).

The key issue of the problem (1) is that generally it may have an infinite number of solutions. This issue is based on the fact that $C_0^\infty(\Omega)$ may be either dense or not dense in $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mathrm{d}x)$ depending on regularity properties of $p(x)$. There were also some studies on the equality

$$H_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x) = W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x),$$

which subsequently turned out to be guaranteed by the density of $C_0^\infty(\Omega)$ in the space $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$. In this case, the density of $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$ may be violated not only because of the lack of regularity for $p(x)$, but also due to violation of the Muckenhoupt condition by $\mu(x)$, which in turn is the corresponding condition for density of $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$ [14, p.1].

The main result of the paper is similar to those mentioned above, most of all to Theorem 2.1 from [5], but it has a certain difference: unlike the results on BVPs for degenerate elliptic equations in [5], the following result encompasses those cases of weight $\mu(x)$ which do not satisfy conditions from 2.2 [5].

As for the physical applicability, the BVP (1) is a certain variation of the classical thermistor problem [15]. It can be reduced from the system of PDEs to a single equation in the same way as it was shown in [15]. By and large, this BVP can be used for modeling electrorheological and thermoelectric characteristics of various processes [13], which makes us ascertain of actuality of the given problem.

2. Some Preliminary Results

Theorem 2. *The space $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$ is continuously imbedded into the space $W_0^{1,1}(\Omega)$; in other words,*

$$\forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x): \quad \|u\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq K^* \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)},$$

where $K^* = \mathrm{const} > 0$.

Proof. Firstly, by definition, $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$, which implies that for arbitrarily chosen $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$ we have $\|u\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Secondly, by the Hölder inequality for variable Lebesgue spaces [16, p.14] we obtain

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega |\nabla u|\,\mu^{1/p(x)} \cdot \mu^{-1/p(x)}\,\mathrm{d}x \leq K \left\|\mu^{1/p(x)}\,|\nabla u|\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \left\|\mu^{-1/p(x)}\right\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Since

$$\left\|\mu^{\frac{1}{p(x)}}\,|\nabla u|\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega \left|\frac{\mu^{\frac{1}{p(x)}}(x)\,|\nabla u|}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leq 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega \left|\frac{\nabla u}{\lambda}\right|^{p(x)} \mu(x)\,\mathrm{d}x \leq 1\right\} = \||\nabla u|\|_{L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)},$$

then

$$\|u\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq \underbrace{K \left\|\mu^{-1/p(x)}\right\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}_{K^*} \||\nabla u|\|_{L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)} = K^* \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)},$$

which provides an imbedding $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x) \hookrightarrow W_0^{1,1}(\Omega)$. □

Theorem 3. *The space* $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ *is a separable reflexive Banach space with respect to the given norm.*

Proof. The normability of $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ is almost obvious. The next step is to verify the completeness, reflexivity and separability for this space. To start with, we draw our attention to the completeness property. With that in mind, we consider a fundamental sequence $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ and substantiate its convergence.

Firstly, by the Hölder inequality for variable Lebesgue spaces, since

$$\|u\|_{[L^1(\Omega)]^n} = \int\limits_\Omega |u(x)|\;\mathrm{d}x,$$

then

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_k - \nabla u_m|\;\mathrm{d}x \leq K \|u_k - u_m\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)} \left\|\mu^{-1/p(x)}\right\|_{L^{q(x)}(\Omega)}, \tag{5}$$

which implies that $\{\nabla u_k\}_{n=1}^{+\infty}$ is fundamental in $\left[L^1(\Omega)\right]^n$. The space $\left[L^1(\Omega)\right]^n$ is complete, that is why there exists $\psi \in \left[L^1(\Omega)\right]^n$ such that $\nabla u_k \to \psi$ strongly in $\left[L^1(\Omega)\right]^n$. In addition, as $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ is fundamental in $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$, therefore, the sequence $\{\nabla u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ is fundamental with respect to $\left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n$, thereby, due to completeness we establish an existence of a function $\psi' \in \left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n$ with a property $\nabla u_k \to \psi'$. Thus, as $\left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n \hookrightarrow \left[L^1(\Omega)\right]^n$ by (5), then it follows that $\psi = \psi'$.

Secondly, basing on imbedding $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x) \hookrightarrow W_0^{1,1}(\Omega)$ (by Theorem 2) we infer that ψ is a weak gradient for some function $u \in L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$. In conclusion, as every function $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ has a zero trace, it indicates that u also has zero trace, from where we state that $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ converges to u in the space $W_0^{1,1}(\Omega)$. Since $\{\nabla u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ is convergent to ∇u with respect to $\left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n$, we conclude that $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ to finish the proof of completeness for $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$.

Now let us prove reflexivity and separability for $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$. In order to establish these statements, we define a function

$$f : W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x) \to M \subsetneq \left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n,$$

where $f(u) = \nabla u$, M is an image of $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$. The next stage is to show that f is an injective operator. We assume to the contrary that for distinct $u_1 \neq u_2 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ an equality $\nabla u_1 = \nabla u_2$ holds true. If it holds, then $u_1 = u_2 + C$, but also $u_1 \in W_0^{1,1}(\Omega)$, which is contrary to $u_2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$, hence, we arrive at contradiction. The operator f is also surjective by the definition. Moreover, since

$$\|u\|_{\left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n} = \||u|\|_{L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)},$$

$$\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)} = \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{\left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n},$$

that is why f is an isometry. As $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ is a complete space, then the image M is closed in $\left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n$. The space $\left[L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)\right]^n$ is separable and reflexive [1], and because of the fact that f is an isometry, $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$ is a separable reflexive space by the properties of isometry. □

Theorem 4. *Let $u \in L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)$. Then the following inequality holds true*

$$\min\left\{\|u\|^{\alpha}, \|u\|^{\beta}\right\} \le \rho_{p,\mu}(u) \le \max\left\{\|u\|^{\alpha}, \|u\|^{\beta}\right\},$$

where

$$\rho_{p,\mu}(u) = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\,\mu(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\|u\| = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)}.$$

Proof. If $u = 0$, then the inequality is obvious. To start with, we mention that if $\|u\| = a \neq 0$, then $\rho_{p,\mu}\left(\frac{u}{a}\right) = 1$ ([16, p.4]). To proceed, let $\|u\| \ge 1$. Then

$$\frac{1}{a^{\beta}}\rho_{p,\mu}(u) \le \rho_{p,\mu}\left(\frac{u}{a}\right) \le \frac{1}{a^{\alpha}}\rho_{p,\mu}(u),$$

which implies that

$$\|u\|^{\alpha} \le \rho_{p,\mu}(u) \le \|u\|^{\beta}.$$

The inequality

$$\|u\|^{\beta} \le \rho_{p,\mu}(u) \le \|u\|^{\alpha},$$

if $0 < \|u\| < 1$, can be confirmed in the same way. Now, if we combine these inequalities, then the given result is obvious. □

Definition 3 ([3, p. 182]). *Let V be a Banach space. An operator $A : V \to V^*$ is said to be coercive if*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} = +\infty.$$

Definition 4 ([3, p. 168]). *Let V be a Banach space. An operator $A : V \to V^*$ is said to be hemicontinuous if a function*

$$f(\lambda) = \langle A(u + \lambda v), w\rangle_{V^*,V}$$

is continuous on $\mathbb{R}$ for all $u, v, w \in V$.

3. Existence and Uniqueness of Variational Solutions

To prove the main theorem of this paper, we will use the following statement.

Theorem 5 ([3, p. 182]). *Let V be a separable reflexive Banach space, let V^* be a dual space of V and let $A\colon V \to V^*$ be a bounded hemicontinuous coercive monotone operator. Then for every $f \in V^*$ an equation $A(u) = f$ has a solution. If the operator is strictly monotone, then this solution is unique.*

Before proving the main theorem, we provide some additional theorems in order to make the proof clearer.

Theorem 6. *Every intermediate space V is a separable reflexive Banach space equipped with the norm $\|\cdot\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)}$.*

Proof. By definition, V is a closed linear manifold in the space $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x)$, which is a separable reflexive Banach space, therefore, V is also a separable reflexive Banach space. □

Let us consider a form

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \mu(x) \left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x, \quad u, v \in V. \tag{6}$$

Theorem 7. *The form $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ (see (6)) is well defined and the following inequality*

$$|a(u,v)| \le K \left\|v\right\|_V \max\left\{\left\|u\right\|_V^{\alpha-1}, \left\|u\right\|_V^{\beta-1}\right\} \quad \forall u, v \in V,$$

holds, where $K = \mathrm{const} > 0$.

Proof. By the Hölder inequality, we have

$$\int\limits_{\Omega} \mu(x) \left|\nabla u\right|^{p(x)-1} \left|\nabla v\right| \,\mathrm{d}x \le K \left\|\mu^{\frac{1}{p(x)}} \left|\nabla v\right|\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \left\|\mu^{\frac{1}{q(x)}} \left|\nabla u\right|^{p(x)-1}\right\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

By the arguments from Theorem 2,

$$\left\|\mu^{\frac{1}{p(x)}} \left|\nabla v\right|\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \left\|v\right\|_V. \tag{7}$$

Let us show that

$$\left\|\mu^{\frac{1}{q(x)}} \left|\nabla u\right|^{p(x)-1}\right\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \le K \max\left\{\left\|u\right\|_V^{\alpha-1}, \left\|u\right\|_V^{\beta-1}\right\}. \tag{8}$$

We will take into account the following chain of transformations:

$$\left\|\mu^{\frac{1}{q(x)}} \left|\nabla u\right|^{p(x)-1}\right\|_{L^{q(x)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\mu^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}(x) \left|\nabla u\right|^{p(x)-1}}{\lambda}\right|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \mathrm{d}x \le 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \frac{\left|\nabla u\right|^{p(x)}}{\lambda^{q(x)}} \mu(x) \,\mathrm{d}x \le 1\right\}.$$

If $u = 0$, then the inequality (8) holds true. Assuming that $\|u\|_V = C < +\infty$, let us demonstrate that infimum in the last block of equalities is finite. In order to substantiate it, we consider two cases: $C \geq 1, 0 < C < 1$. In the first case let $\lambda = C^{\beta-1}$. Hence,

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{\lambda^{q(x)}} \mu(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{C^{(\beta-1)\frac{p(x)}{p(x)-1}}} \mu(x)\, \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{C^{(p(x)-1)\frac{p(x)}{p(x)-1}}} \mu(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{C^{p(x)}} \mu(x)\, \mathrm{d}x = 1 \implies$$

$$\implies \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{\lambda^{q(x)}} \mu(x)\, \mathrm{d}x \leq 1 \right\} \leq C^{\beta-1} = \|u\|_V^{\beta-1}.$$

In the second case $0 < C < 1$, that is why we take $\lambda = C^{\alpha-1}$ and use the same idea as for the first case with $C \geq 1$ to show that

$$\inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{\lambda^{q(x)}} \mu(x)\, \mathrm{d}x \leq 1 \right\} \leq C^{\alpha-1} = \|u\|_V^{\alpha-1}.$$

Thus, the inequality (8) holds true, since we may combine two cases by choosing maximum value between them. Ultimately, after combining (8) and (7) we draw a conclusion that the statement of this theorem holds. □

It is clear that by fixing an argument $u \in V$ the form from Theorem 7 can be restricted to the domain V, whereby we define a functional $v \mapsto a(u, v)$, $v \in V$, which is also linear and continuous on V. Therefore, we have operator $A : V \to V^*$ defined by the rule

$$\langle A(u), v \rangle_{V^*,V} = a(u, v) \quad \forall u, v \in V. \tag{9}$$

Theorem 8. *The operator $A : V \to V^*$ is bounded, coercive, hemicontinuous and strictly monotone.*

Proof. From Theorem 7 we have

$$\|A(u)\|_{V^*} \leq K \max \left\{ \|u\|_V^{\alpha-1}, \|u\|_V^{\beta-1} \right\},$$

hence, the operator A is bounded.

The next step of the proof is to confirm that the operator A is coercive. Owing to the equality

$$\langle A(u), u \rangle_{V^*,V} = \int_\Omega \mu(x) \, |\nabla u(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x,$$

and Definition 3, we ensure that

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} = \lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\int_\Omega \mu(x) \, |\nabla u|^{p(x)} \, \mathrm{d}x}{\|u\|_V} = \lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\rho_{p,\mu}(|\nabla u|)}{\|u\|_V} \geq$$

$$\geq \lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\min \left\{ \|u\|_V^\alpha, \|u\|_V^\beta \right\}}{\|u\|_V} = \lim_{\|u\| \to \infty} \min \left\{ \|u\|_V^{\alpha-1}, \|u\|_V^{\beta-1} \right\} = +\infty,$$

because $\alpha, \beta > 1$. In the last line we have applied an inequality from Theorem 4.

Now, we prove that the operator A is hemicontinuous. In order to ensure hemicontinuity, it is sufficient to make sure of the equality

$$\lim_{\lambda\to 0}\langle A(u+\lambda v), w\rangle_{V^*,V} = \langle A(u), w\rangle_{V^*,V} \quad \forall u, v, w \in V. \tag{10}$$

Without the loss of generality, we may consider $\lambda \in [-1, 1]$. By definition,

$$\langle A(u+\lambda v), w\rangle_{V^*,V} = \int_\Omega \mu(x) \left|\nabla u + \lambda \nabla v\right|^{p(x)-2} \nabla (u+\lambda v) \nabla w \, \mathrm{d}x.$$

The integrated expression can be estimated as follows:

$$\left|\mu(x) \left|\nabla u + \lambda \nabla v\right|^{p(x)-2} \nabla (u+\lambda v) \nabla w\right| \le \mu(x) \left|\nabla u + \lambda \nabla v\right|^{p(x)-1} \left|\nabla w\right| \le$$

$$\le \mu(x) \left(\left|\nabla u\right| + \left|\nabla v\right|\right)^{p(x)-1} \left|\nabla w\right| \in L^1(\Omega),$$

where the last statement may be confirmed by the same arguments as those used in Theorem 7 while proving the first inequality. Hence, since

$$\left|\nabla u + \lambda \nabla v\right|^{p(x)-2} \nabla (u+\lambda v) \nabla w \mu(x) \to \left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \nabla u \nabla w \mu(x) \text{ a.e. in } \Omega \quad \forall u, v, w \in V,$$

then (by the Lebesgue dominated convergence theorem) the operator A is hemicontinuous.

Finally, it remains to guarantee that the operator A is strictly monotone.

Let $r \in \mathbb{R}$ be an arbitrary number such that $r > 1$. It is well-known that the function $s \mapsto |s|^{r-2} s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is strictly monotone, i.e.,

$$\left(|s_1|^{r-2} s_1 - |s_2|^{r-2} s_2\right)\left(s_1 - s_2\right) > 0 \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 \ne s_2.$$

With this in mind, we can deduce that

$$|\xi|^r + |\eta|^r > |\xi|\,|\eta| \left(|\xi|^{r-2} + |\eta|^{r-2}\right) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n : |\xi|, |\eta| \ne 0,\ |\xi| \ne |\eta|.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality, $\xi\eta \le |\xi|\,|\eta|$, which can be applied to the previous inequality:

$$|\xi|^r + |\eta|^r > \xi\eta \left(|\xi|^{r-2} + |\eta|^{r-2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(|\xi|^{r-2} \xi - |\eta|^{r-2} \eta, \xi - \eta\right) > 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n : |\xi|, |\eta| \ne 0,\ |\xi| \ne |\eta|.$$

Now let $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n : |\xi| = |\eta| = \rho > 0$ and $\xi \ne \pm\eta$. Then it is clear that

$$\left(|\xi|^{r-2} \xi - |\eta|^{r-2} \eta, \xi - \eta\right) = |\xi|^r + |\eta|^r - \xi\eta \left(|\xi|^{r-2} + |\eta|^{r-2}\right) =$$

$$= 2\rho^r - 2\xi\eta\rho^{r-2} = 2\rho^r(1 - \xi'\eta'), \tag{11}$$

where $\xi' = \rho^{-1}\xi$, $\eta' = \rho^{-1}\eta$. From here we infer that $|\xi'| = |\eta'| = 1$ and $\xi' \ne \pm\eta'$. Hence, it is obvious that

$$|\xi' - \lambda\eta'| > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

because otherwise in the case $\xi' = \lambda_0\eta'$ for some $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, we have $\lambda_0 = \pm 1$, which is impossible. As a result, this implies that

$$1 - 2\lambda\xi'\eta' + \lambda^2 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

guaranteeing that $D = 4(\xi'\eta')^2 - 4 < 0$ and $\xi'\eta' < 1$, which provides that the expression (11) is always positive. The same holds true for $\eta = -\xi$ as well as when one of these vectors is zero.

Taking into account all these arguments, we draw a conclusion that

$$\Big(|\xi|^{r-2}\,\xi - |\eta|^{r-2}\,\eta, \xi - \eta\Big) > 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n : \xi \neq \eta. \tag{12}$$

To show that the operator A is also strictly monotone, we first recall the condition of monotonicity:

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V^*,V} > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v.$$

If $u, v \in V : u \neq v$, then there exists a positive measure set $E \subset \Omega$ such that $\nabla u(x) \neq \nabla v(x)$ for $x \in E \subset \Omega$ and $\nabla u(x) = \nabla v(x)$ for $x \in \Omega \setminus E$. Since $p(x) > 1$ and $\mu(x) > 0$ for almost all $x \in \Omega$, then from this and (12) it follows

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V^*,V} =$$
$$= \int\limits_E \mu(x)\big(|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\,\nabla u(x) - |\nabla v(x)|^{p(x)-2}\,\nabla v(x), \nabla u(x) - \nabla v(x)\big)\,\mathrm{d}x > 0,$$

from where we ascertain that operator A is strictly monotone. □

Now we define functional $f : V \to \mathbb{R}$ by the following rule:

$$v \mapsto f(v) = \int\limits_\Omega \mu(x)\vec{F}(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x, \quad v \in V. \tag{13}$$

Theorem 9. *This functional $f\colon V \to \mathbb{R}$ is well defined, linear and continuous, that is, $f \in V^*$, and also $f(v) = \langle f, v\rangle_{V^*,V}, \quad v \in V$.*

Proof. Indeed, after using again the Hölder inequality, we get

$$\left|\int\limits_\Omega \mu(x)\vec{F}(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_\Omega \mu(x)\left|\vec{F}(x)\right| |\nabla v(x)|\,\mathrm{d}x \leq K \left\|\left|\vec{F}(x)\right|\right\|_{L^{q(x)}(\Omega,\mu\,\mathrm{d}x)} \|v\|_V . \tag{14}$$

From the last inequality we may infer that $f\colon V \to \mathbb{R}$ is a bounded functional. Since f is linear, hence, it is also continuous, that is, $f \in V^*$. □

Proof of Theorem 1. After the previous definitions and statements we may make conclusion that the definition of V-solution to the problem (1) is correct, and this problem is equivalent to abstract equation (4), where

$$H_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x) \subseteq V \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x),$$

V^* is dual to V, and $f \in V^*$, $A : V \to V^*$ are defined above. To this operator equation we can apply Theorem 5. Therefore, by Theorem 5, the equation (4) has a unique solution, which in turn is equivalent to the existence of a unique V-solution to the BVP (1). □

Consequently, we have proven that the boundary value problem (1) has a unique V-solution with respect to each intermediate space

$$H_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x) \subseteq V \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega, \mu\,\mathrm{d}x).$$

References

1. *Жиков В.В., Сурначёв М.Д.* О плотности гладких функций в весовых соболевских пространствах с переменным показателем // Алгебра и анализ. — 2015. — **27**, №3. — С. 95—124.
2. *Жиков В.В.* О плотности гладких функций в пространстве Соболева-Орлича // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2004. — **310**. — С. 67—81.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач; пер. с фран. — Москва: Мир, 1973. — 587 с.
4. *Жиков В.В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР.— 1986.— **50**, № 4.— С. 675—710.
5. *Zhikov V.V.* On variational problems and nonlinear elliptic equation with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci. — 2011. — **173**, №5. — P. 463–570.
6. *Fan X., Zhang Q.* Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 2003. — **52**, №8. — P. 1843–1852.
7. *Bokalo M.M., Ilnytska O.V.* Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay // Appl. Anal. — 2017. — 96, №7. — P. 1240–1254.
8. *Бугрій О.М.* Про розв'язність мішаної задачі для модельного півлінійного параболічного рівняння з показником нелінійності $q(x,t) > 2 + \frac{2}{n}$ // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2014. — **79**. — С. 12–32.
9. *Пастухова С.Е.* О вырожденных уравнениях монотонного типа: эффект Лаврентьева и вопросы достижимости // Матем. сб. — 2007. — **198**, № 10. — С. 89–118.
10. *Alkhutov Yu.A., Krasheninnikova O.V.* On the continuity of solutions to elliptic equations with variable order of nonlinearity // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — **261**. — P. 1–10.
11. *Marcellini P.* Regularity for elliptic equations with general growth conditions // J. Differ. Equations — 1993. — **105**, №2. — P. 296–333.
12. *Giaquinta M.* Growth conditions and regularity, a counterexample // Manuscr. Math. — 1987. — **59**, №2. — P. 245–248.
13. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. — Berlin: Springer, 2001. — 185 p.
14. *Surnachev M.D.* Density of smooth functions in weighted Sobolev spaces with variable exponent // Dokl. Math. — 2014. — **89**, №2. — P. 146–150.
15. *Zhikov V.V.* Solvability of the Three-Dimensional Thermistor Problem // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — **261**. — P. 98–111.
16. *Nguyen P.Q.H.* On variable Lebesgue spaces: An abstract of a dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor OF Philosophy; Kansas State University. — Manhattan, 2011. — 54 p.
17. *Zhikov V.V.* On the technique for passing to the limit in nonlinear elliptic equations // Funct. Anal. Appl. — 2009. — **43**, №2.— P. 96—112.

Стаття: надійшла до редколегії 05.04.2016
доопрацьована 23.02.2017
прийнята до друку 23.02.2017

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ВАРІАЦІЙНИХ РОЗ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕСТАНДАРТНИМИ УМОВАМИ ЗРОСТАННЯ

Павло ТКАЧЕНКО

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, проспект Гагаріна, 72, Дніпро, Україна
e-mail: cool.phenom@mail.ru

Розглянуто задачу Діріхле для нелінійного еліптичного рівняння з нестандартними умовами зростання в головній частині оператора. Існує особливість цієї задачі, вона полягає в тому, що без попереднього зазначення простору Соболєва-Орліча, в якому шукаємо розв'язок, простежується ефект Лаврентьєва. Доведено існування та єдиність варіаційних розв'язків для проміжних просторів Соболєва-Орліча.

Ключові слова: нелінійне еліптичне рівняння, змінний показник, ефект Лаврентьєва, простір Соболєва-Орліча.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 208–216
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 208–216

УДК 514.763.4

ГРУПИ КОНФОРМНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО-КЕЛЕРОВИХ МНОГОВИДІВ І ГОМОТЕТІЙ КЕЛЕРОВИХ МНОГОВИДІВ

Євген ЧЕРЕВКО

Одеський національний економічний університет,
вул. Преображенська, 8, Одеса, 65082
e-mail: cherevko@usa.com

Розглянуто інфінітезимальні перетворення локально конформно-келерових многовидів, які зберігають комплексну їхню структуру. Отримано вираз для похідної Лі форм Лі цих многовидів. Також досліджо зв'язок між групою конформних перетворень конформно-келерового многовиду та групою гомотетій келерового многовиду.

Ключові слова: келерові многовиди, локально конформно-келерові многовиди, форма Лі, інфінітезимальні перетворення, аналітичні векторні поля, похідна Лі.

1. Вступ. Об'єктом дослідження є локально конформно-келерові многовиди такі, що $\dim(M) = n = 2m > 2$. Конформно-келеровим многовидам присвячені праці багатьох дослідників. Локально конформно-келерові многовиди розглядали в [11], [2], [7]. Також варто згадати енциклопедичну роботу в цьому напрямі [9]. Інфінітезимальні конформні перетворення многовидів вивчали в [8], [5]. Питання інфінітезимальних конформних перетворень комплексних многовидів досліджували в [12]. Мета нашої праці — дослідити проблеми інфінітезимальних конформних перетворень локально конформно-келерових многовидів.

2. ЛКК-многовиди та інфінітезимальні перетворення. Спочатку подамо декілька необхідних означень.

Означення 1. *Майже комплексною структурою J називають такий афінор J^i_j, що*

$$J^i_\alpha J^\alpha_j = -\delta^i_j \tag{1}$$

Тут δ^i_j — символ Кронекера.

Означення 2. *Многовид, на якому задано майже комплексну структуру J, називають майже комплексним многовидом.*

2010 Mathematics Subject Classification: 32Q15, 53A30, 53B35

Означення 3. *Майже комплексний многовид є майже ермітовим, якщо на ньому задана ермітова метрика*

$$J_i^\alpha J_j^\beta g_{\alpha\beta} = g_{ij}. \tag{2}$$

Майже ермітовий многовид позначаємо $\{M_n, J, g\}$.

Означення 4. *Майже ермітовий многовид $\{M_n, J, g\}$ є ермітовим, якщо майже комплексна структура є інтегровною* [1], [12].

Зауважимо таке: якщо майже комплексна структура J і многовид M_n будуть належати класу C^ω, то достатньою умовою інтегровності майже комплексної структури є тотожна рівність нулю тензора Нейєнхейса:

$$N_{ij}^k = J_i^\alpha \left(\partial_j J_\alpha^k - \partial_\alpha J_j^k\right) - J_j^\alpha \left(\partial_i J_\alpha^k - \partial_\alpha J_i^k\right) = 0, \tag{3}$$

або, що еквівалентно,

$$J_{i,j}^k = J_i^\alpha J_j^\beta J_{\alpha,\beta}^k. \tag{4}$$

Комою ми позначаємо коваріантну похідну в зв'язності, узгодженій з рімановою метрикою g_{ij}.

Якщо, до того ж, на ермітовому многовиді $\{M_n, J, g\}$ справджується

$$J_{i,j}^k = 0, \tag{5}$$

то він є *келеровим.*

Означення 5. *Ермітовий многовид M_n, має назву* локально конформно-келерового *(коротше, ЛКК-)* многовиду*, якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ многовиду M та система $\Sigma = \{\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ гладких функцій таких, що $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ – келерова структура для будь-якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ називається локально конформного перетворення структури. Функція σ називається визначальною функцією конформного перетворення* [2].

Відомо, що на ЛКК-многовиді форма Лі (Lee form), компоненти якої визначаються формулою [3]

$$\omega = \frac{1}{m-1}\delta\Omega \circ J \qquad \text{або} \qquad \omega_i = -\frac{2}{n-2} J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta, \tag{6}$$

має бути замкненою

$$d\omega = 0.$$

Означення 6. *Перетворення многовиду M_n*

$$\overline{x}^h = x^h + t\xi^h(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{7}$$

де t – довільний малий параметр незалежний від x^i, називається інфінітезимального перетворення многовида M_n. Вектор $\xi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ називається генератором перетворення.

Похідна Лі (Lie derivative) тензора $\mathfrak{L}_\xi T_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ типу (p,q) уздовж векторного поля ξ в координатах набуває вигляду

$$\mathfrak{L}_\xi T_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} = T_{j_1\ldots j_q,s}^{i_1\ldots i_p}\xi^s + T_{kj_2\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}\xi^k{}_{,j_1} + \ldots + T_{kj_k\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}\xi^k{}_{,j_1} - T_{j_1\ldots j_q}^{li_2\ldots i_p}\xi^{i_1}{}_{,l} - T_{j_1\ldots j_q}^{i_1 i_2\ldots l}\xi^{i_p}{}_{,l}. \tag{8}$$

Конформні інфінітезимальні перетворення характеризуються рівняннями [12]

$$\mathfrak{L}_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi g_{ij}. \tag{9}$$

Відомо таке: коли векторне поле ξ породжує інфінітезимальні конформні перетворення, воно разом з інваріантом φ має задовольняти систему [6], [5]:

$$\begin{aligned}
&1)\ \xi_{i,j} = \xi_{ij};\\
&2)\ \varphi_{,i} = \varphi_i;\\
&3)\ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi g_{ij};\\
&4)\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \tfrac{1}{2}(\varphi_k g_{ij} + \varphi_j g_{ik} - \varphi_i g_{jk});\\
&5)\ \varphi_{i,j} = \tfrac{2}{n-2}\left(\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i - \tfrac{g_{ij}}{2(n-1)}\left(\xi^\alpha R_{,\alpha} + \varphi R\right)\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

3. Тензор Нейєнхейса та форма Лі при конформних інфінітезимальних перетвореннях. Особливим випадком є ситуація, коли векторне поле $\xi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ породжує перетворення, що зберігає комплексну структуру [12]

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = J^i_{j,k}\xi^k - J^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0. \tag{11}$$

Таке поле має назву *контраваріантного аналітичного* векторного поля. Варто зауважити таке: оскільки диференціювання Лі комутує з операцією зовнішнього диференціювання

$$d\mathfrak{L}_\xi \omega = \mathfrak{L}_\xi d\omega,$$

будь-які інфінітезимальні перетворення зберігають замкненість форми Лі. Отже, необхідною та достатньою умовою того, щоб при інфінітезимальних конформних перетвореннях многовид залишався ЛКК-многовидом, є збереження ермітовості, тобто збереження виконання умови (3), яку можна записати у термінах коваріантних похідних

$$N^k_{ij} = J^\alpha_i \left(J^k_{\alpha,j} - J^k_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j \left(J^k_{\alpha,i} - J^k_{i,\alpha}\right) = 0.$$

Для цього потрібно, щоб

$$\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = 0.$$

Якщо ми вимагаємо збереження комплексної структури, то похідна Лі тензора Нейєнхейса набуває вигляду

$$\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = J^\alpha_i \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,j} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,i} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{i,\alpha}\right). \tag{12}$$

внаслідок (11).

Відома тотожність [12], що є правильною для будь-яких інфінітезимальних перетворень

$$\mathfrak{L}_\xi J^k_{i,j} - \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_i\right)_{,j} = J^\beta_i \mathfrak{L}_\xi \Gamma^k_{j\beta} - J^k_\beta \mathfrak{L}_\xi \Gamma^\beta_{ji}, \tag{13}$$

де Γ^k_{ji} – об'єкт зв'язності, узгоджений з метрикою g_{ij}. Для інфінітезимальних конформних перетворень

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^k_{ji} = \frac{1}{2}(\delta^k_i \varphi_j + \delta^k_j \varphi_i - \varphi^k g_{ij}) \tag{14}$$

Внаслідок вимоги збереження комплексної структури (11), и (14), підставивши у (13), отримуємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J^k_{i,j} = \frac{1}{2} J^\beta_i(\delta^k_\beta\varphi_j + \delta^k_j\varphi_\beta - \varphi^k g_{\beta j}) - \frac{1}{2} J^h_\beta(\delta^\beta_i\varphi_j + \delta^\beta_j\varphi_i - \varphi^\beta g_{ij}) = \\ = \frac{1}{2}\left(\delta^k_j J^\alpha_i\varphi_\alpha - \varphi^k J_{ij} - J^k_j\varphi_i + J^k_\alpha\varphi^\alpha gij\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Обчислимо похідну Лі тензора Нейєнхейса уздовж векторного поля ξ, враховуючи (15)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = J^\alpha_i\left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,j} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j\left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,i} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{i,\alpha}\right) = \\ = \frac{1}{2} J^\alpha_i\big(\delta^k_j J^\beta_\alpha\varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha j} - J^k_j\varphi_\alpha + J^k_\beta\varphi^\beta g_{\alpha j} - \\ - \delta^k_\alpha J^\beta_j\varphi_\beta + \varphi^k J_{j\alpha} + J^k_\alpha\varphi_j - J^k_\beta\varphi^\beta g_{j\alpha}\big) - \\ - \frac{1}{2} J^\alpha_j\big(\delta^k_i J^\beta_\alpha\varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha i} - J^k_i\varphi_\alpha + J^k_\beta\varphi^\beta g_{\alpha i} - \\ - \delta^k_\alpha J^\beta_i\varphi_\beta + \varphi^k J_{i\alpha} + J^k_\alpha\varphi_i - J^k_\beta\varphi^\beta g_{i\alpha}\big).\end{aligned} \tag{16}$$

Розкриваючи дужки та зводячи подібні члени у (16), отримуємо, що похідна Лі тензора Нейєнхейса тотожно дорівнює нулю

$$\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = 0.$$

Враховуючи той факт, що будь-які інфінітезимальні перетворення зберігають замкненість форми Лі, отримуємо таке твердження.

Теорема 1. *При інфінітезимальних конформних перетвореннях, що зберігають комплексну структуру, тензор Нейєнхейса також зберігається. Зокрема, ЛКК-многовид буде перетворено у ЛКК-многовид.*

Тепер знайдемо похідну Лі форми Лі. Враховуючи (11), отримуємо з (6)

$$\mathfrak{L}_\xi\omega_i = -\frac{2}{n-2}\mathfrak{L}_\xi\left(J^\alpha_{\beta,\alpha}J^\beta_i\right) = -\frac{2}{n-2}\mathfrak{L}_\xi\left(J^\alpha_{\beta,\alpha}\right)J^\beta_i. \tag{17}$$

З іншого боку, оскільки операція диференціювання Лі є переставною зі згорткою, то матимемо з (15), згортаючи індекси k та j

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J^\alpha_{i,\alpha} = \frac{1}{2}\left(nJ^\beta_i\varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J^\alpha_\alpha\varphi_i + J^\alpha_\beta\varphi^\beta g_{i\alpha}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(nJ^\beta_i\varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} + J_{\beta i}\varphi^\beta\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(nJ^\beta_i\varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J_{i\beta}\varphi^\beta\right) = \frac{n-2}{2}J^\beta_i\varphi_\beta.\end{aligned} \tag{18}$$

Підставимо (18) в (17). Отримуємо

$$\mathfrak{L}_\xi\omega_i = -\frac{2}{n-2}\cdot\frac{n-2}{2}J^\beta_\gamma\varphi_\beta J^\gamma_i = \varphi_i. \tag{19}$$

Отож, матимемо таке твердження:

Теорема 2. *При інфінітезимальних конформних перетвореннях ЛКК-многовидів, що зберігають комплексну структуру, векторне поле ξ та інваріант φ, які визначаються з системи (10), компонент похідної Лі форми Лі дорівнюють частинним похідним інваріанта φ*

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = \varphi_i.$$

Звернемо увагу, що згідно з (8)

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = \omega_{i,\alpha}\xi^\alpha + \omega_\alpha \xi^\alpha{}_{,i}.$$

З іншого боку,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big) = \omega_{\alpha,i}\xi^\alpha + \omega_\alpha \xi^\alpha{}_{,i}.$$

Внаслідок замкненості форми Лі, $\omega_{i,j} = \omega_{j,i}$, а тому з (8) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big) = \big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,i} = \varphi_i. \tag{20}$$

Звідси скаляр φ з рівняння (10_3) пов'язаний з формою Лі та векторним полем ξ так:

$$\varphi = \omega_\alpha \xi^\alpha + C,$$

де C – довільна константа. Отже, враховуючи умову (11) аналітичності векторного поля ξ система рівнянь (10) набуває вигляду

$$\begin{array}{l} 1)\ \xi_{i,j} = \xi_{ij};\\ 2)\ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \big(\omega_\alpha \xi^\alpha + C\big) g_{ij};\\ 3)\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\Big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk}\Big);\\ 4)\ J^i_{j,k}\xi^k - J^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0. \end{array} \tag{21}$$

4. Ізоморфізм груп конформних перетворень ЛКК-многовиде та гомотетій відповідного келерового многовиде. Рівняння (21_1) є розв'язаними стосовно похідних $n = 2m$ невідомих функцій, рівняння (21_3) – відповідно, стосовно $n^2 = 4m^2$ невідомих функцій. Рівняння (21_2) містять $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2m(2m+1)}{2}$ обмеження. Як легко бачити,(21_4) задає $2m^2$ незалежних обмежень. Оскільки досліджуваний многовид є ермітовим, то з інтегровності майже комплексної структури випливає існування голономної системи комплексних координат $(z^\alpha, z^{\hat\alpha})$. В них умови ($21_4$) виглядатимуть як

$$\partial_{\hat\beta}\xi^\alpha = 0$$

$$\partial_\beta \xi^{\hat\alpha} = 0.$$

Внаслідок цього

$$\nabla_{\hat\beta}\xi^\alpha = \Gamma^\alpha_{\hat\beta\delta}\xi^\delta = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^\alpha_{\hat\beta,\delta}\xi^\delta$$

$$\nabla_\beta \xi^{\hat\alpha} = \Gamma^{\hat\alpha}_{\beta\hat\delta}\xi^{\hat\delta} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat\alpha}_{\beta,\hat\delta}\xi^{\hat\delta}.$$

Опускаючи індекси, матимемо

$$\nabla_{\hat\beta}\xi_{\hat\alpha} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat\beta\hat\alpha,\delta}\xi^\delta$$

$$\nabla_\beta \xi_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\beta\alpha,\hat\delta}\xi^{\hat\delta}.$$

Звідси ми бачимо, що (21_2) містять $m(m+1)$ обмежень, які є залежними від (21_4). Отже, розв'язок системи (21) буде залежати від

$$r = 4m^2 + 2m - \frac{2m(2m+1)}{2} + m(m+1) - 2m^2 + 1 = (m+1)^2$$

сталих. Таким чином, отримано такий результат.

Теорема 3. *Якщо ЛКК-многовид* $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ *допускає групу* G_r *інфінітезимальних конформних перетворень, які зберігають комплексну структуру, то векторні поля, які її породжують, задовольняють систему рівнянь:*

1) $\xi_{i,j} = \xi_{ij}$;
2) $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \big(\omega_\alpha \xi^\alpha + C\big) g_{ij}$;
3) $\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk}\big)$;
4) $J^i_{j,k}\xi^k - J^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0$.

Порядок цієї групи r *не перевищує* $(m+1)^2$.

Розглянемо келеровий многовид $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, конформний ЛКК-многовидові $\{M_n, J, g\}$. За означенням, $\hat{g}_{ij} = g_{ij}e^{-2\sigma}$, $\omega_i = 2\sigma_{,i}$. Тоді

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\delta^k_i \omega_j - \frac{1}{2}\delta^k_j \omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}, \tag{22}$$

– об'єкт зв'язності, узгоджений з метрикою $\hat{g}$. Нехай на $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$ і на $\{M_n, J, g\}$ задано контраваріантне векторне поле ξ^i. Позначимо

$$\xi_i = \xi^\alpha g_{\alpha i}; \quad \hat{\xi}_i = \xi^\alpha \hat{g}_{\alpha i} = \xi_i e^{-2\sigma}.$$

Знайдемо коваріантну похідну ковектора $\hat{\xi}_i$ у зв'язності, узгодженій з метрикою $\hat{g}$. Коваріантну похідну у зв'язності $\hat{\Gamma}^k_{ij}$ ми будемо позначати вертикальною рискою ", а у зв'язності Γ^k_{ij}, узгодженій з метрикою ЛКК-многовиду g, позначимо, як зазвичай, комою. Маємо:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_{i|j} &= \hat{\xi}_{i,j} + \big(\frac{1}{2}\delta^\alpha_i \omega_j + \frac{1}{2}\delta^\alpha_j \omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha g_{ij}\big)\hat{\xi}_\alpha = \\
&= \big(\xi_i e^{-2\sigma}\big)_{,j} + \frac{1}{2}\hat{\xi}_i\omega_j + \frac{1}{2}\hat{\xi}_j\omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha\hat{\xi}_\alpha g_{ij} = \\
&= \xi_{i,j}e^{-2\sigma} - \xi_i e^{-2\sigma}\omega_j + \frac{1}{2}\hat{\xi}_i\omega_j + \frac{1}{2}\hat{\xi}_j\omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha\hat{\xi}_\alpha g_{ij} = \\
&= \big(\xi_{i,j} - \frac{1}{2}\xi_i\omega_j + \frac{1}{2}\xi_j\omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha\xi_\alpha g_{ij}\big)e^{-2\sigma} = \\
&= \big(\xi_{i,j} - \frac{1}{2}\xi_i\omega_j + \frac{1}{2}\xi_j\omega_i\big)e^{-2\sigma} - \frac{1}{2}\omega^\alpha\xi_\alpha\hat{g}_{ij}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Нехай тепер поле ξ^i є одним з тих, що породжують на $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$ групу гомотетій. Тоді воно має задовольняти рівняння

$$\hat{\xi}_{i|j} + \hat{\xi}_{j|i} = C\hat{g}_{ij}. \tag{24}$$

Підставивши (23) у (24), отримуємо:

$$e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,j}+\xi_{j,i}\big)-\omega^\alpha\xi_\alpha\hat g_{ij}=C\hat g_{ij};$$
$$e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,j}+\xi_{j,i}\big)=C\hat g_{ij}+\omega^\alpha\xi_\alpha\hat g_{ij};$$
$$e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,j}+\xi_{j,i}\big)=e^{-2\sigma}\big(\omega^\alpha\xi_\alpha g_{ij}+Cg_{ij}\big).$$

Тобто, оскільки $e^{-2\sigma}\neq 0$, то необхідно має виконуватись (21_2)

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=\big(\omega_\alpha\xi^\alpha+C\big)g_{ij}.$$

Далі продиференціюємо коваріантно $\hat\xi_{i|j}$ по x^k у зв'язності $\hat\Gamma^k_{ij}$. Оскільки (22), то отримуємо

$$\begin{aligned}\hat\xi_{i|jk}&=e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,jk}+\frac14\omega_k\big(\xi_j\omega_i-\xi_i\omega_j\big)-\frac14\xi^\alpha\omega_\alpha\big(\omega_i g_{jk}-\omega_j g_{ik}\big)+\\&+\frac12\big(\xi_\alpha\omega^\alpha{}_{,j}g_{ik}-\xi_\alpha\omega^\alpha{}_{,i}g_{jk}\big)+\frac12\big(\xi_j\omega_{i,k}-\xi_i\omega_{j,k}\big)+\frac14||\omega||^2\big(\xi_i g_{jk}-\xi_j g_{ik}\big)-\\&-\frac12\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\big)\big)=\\&=e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,jk}+\xi_\alpha\big(\frac14\omega_k\big(\delta^\alpha_j\omega_i-\delta^\alpha_i\omega_j\big)-\frac14\omega^\alpha\big(\omega_i g_{jk}-\omega_j g_{ik}\big)+\\&+\frac12\big(\omega^\alpha{}_{,j}g_{ik}-\omega^\alpha{}_{,i}g_{jk}\big)+\frac12\big(\delta^\alpha_j\omega_{i,k}-\delta^\alpha_i\omega_{j,k}\big)+\frac14||\omega||^2\big(\delta^\alpha_i g_{jk}-\delta^\alpha_j g_{ik}\big)\big)-\\&-\frac12\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\big)\big),\end{aligned}\tag{25}$$

де $||\omega||^2=\omega_i\omega_j g^{ij}$. З іншого боку, з (22) матимемо, що тензор кривини $\hat R$ келерового многовиду $\{\mathcal K_n,J,\hat g\}$ пов'язаний з тензором кривини R ЛКК-многовиду $\{M_n,J,g\}$ так:

$$\begin{aligned}\hat R^h_{ijk}&=R^h_{ijk}+\delta^h_j\big(\frac12\omega_{i,k}+\frac14\omega_i\omega_k-\frac14||\omega||^2g_{ik}\big)-\\&-\delta^h_k\big(\frac12\omega_{i,j}+\frac14\omega_i\omega_j-\frac14||\omega||^2g_{ij}\big)+\\&+\big(\frac12\omega^h{}_{,j}+\frac14\omega^h\omega_j\big)g_{ik}-\big(\frac12\omega^h{}_{,k}+\frac14\omega^h\omega_k\big)g_{ij}.\end{aligned}\tag{26}$$

Відомо таке: коли поле ξ^i породжує на $\{\mathcal K_n,J,\hat g\}$ гомотетію, то воно має задовольняти також рівняння [8]

$$\hat\xi_{i|jk}=\hat\xi_\alpha\hat R^\alpha_{kji}.\tag{27}$$

Підставивши (25) і (26) у рівняння (27), враховуючи, що $\hat\xi_i=\xi_i e^{-2\sigma}$, отримаємо

$$e^{-2\sigma}\xi_{i,jk}=e^{-2\sigma}\big(\xi_\alpha R^\alpha_{kji}+\frac12\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\big)\big).$$

Знову, внаслідок $e^{-2\sigma}\neq 0$, необхідно має виконуватись (21_3)

$$\xi_{i,jk}=\xi_\alpha R^\alpha_{kji}+\frac12\big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i}g_{jk}\big).$$

Умова аналітичності контраваріантного векторного поля ξ^i для келерового многовиду $\{\mathcal K_n,J,\hat g\}$

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j=J^i_{j|k}\xi^k-J^\alpha_j\xi^i{}_{|\alpha}+J^i_\alpha\xi^\alpha{}_{|j}=0.$$

Внаслідок властивостей похідної Лі ця умова буде виконуватись тоді і тільки тоді, коли аналогічна умова (11) буде виконуватись для ЛКК-многовиду $\{M_n, J, g\}$. Отож, якщо векторне поле ξ^i задовольняє систему (21), то воно необхідно задовольняє систему

$$\begin{aligned} &1)\ \hat{\xi}_{i,j} = \hat{\xi}_{ij};\\ &2)\ \hat{\xi}_{i,j} + \hat{\xi}_{j,i} = C\hat{g}_{ij};\\ &3)\ \hat{\xi}_{i,jk} = \hat{\xi}_{\alpha}\hat{R}^{\alpha}_{kji};\\ &4)\ J^i_{j|k}\xi^k - J^{\alpha}_j \xi^i{}_{|\alpha} + J^i_{\alpha}\xi^{\alpha}{}_{|j} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Отже, отримано такий результат.

Теорема 4. *Якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ допускає групу G_r інфінітезимальних конформних перетворень, які зберігають комплексну структуру, то ця група локально ізоморфна групі гомотетій келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, яка перебуває у конформній відповідності з $\{M_n, J, g\}$.*

Завершуючи, зазначимо, що доведена теорема дуже подібна до результату, отриманого Р. Ф. Біляловим ([6], стор. 274) для дійсних лоренцевих многовидів: група конформних перетворень, які діють у неконформно-плоскому полі тяжіння, є групою рухів або гомотетій простору, конформного даному. Як бачимо, ключовою відмінністю нашого випадку є відсутність вимоги, щоб ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ був неконформно-плоским.

Список використаної літератури

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Москва: МПГУ, 2003. — 495 с.
2. *Кириченко В.Ф.* Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Матем. сб. — 1991. — **182**, №3. — С. 354-–363.
3. *Кириченко В.Ф.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия // Матем. заметки — 1992. — **51**, №5. — С. 57—66.
4. *Кузаконь В.М., Черевко Є.В.* Конформно-келерові простори та конформні перетворення тензора енергії-імпульсу // Proc. Inter. Geom. Center. — 2011. — **4**, №4. — P. 20–26.
5. *Микеш Й., Молдобаев Д.* О распределении порядков групп конформных преобразований римановых пространств // Изв. вузов. Матем. — 1991. — №12. — С. 24–29.
6. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. — Москва: Наука, 1966. — 496 с.
7. *Радулович Ж., Микеш Й.* Геодезические отображения конформно-келеровых пространств // Изв. вузов. Матем. — 1994. — №3. — С. 50–52.
8. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. — Москва: ИЛ, 1948. — 316 с.
9. *Dragomir S., Ornea L.* Locally conformal Kähler geometry. — Basel: Birkhäuser – 1998. — 328p.
10. *Mikeš J., Vanžurovà A., Hinterleitner I.* Geodesic mappings and some generalizations. — Olomouc: Palacky University Press, 2009. — 304p.
11. *Vaisman I.* A geometric condition for an l.c.K. manifold to be Kähler // Geom. Dedicata. — 1981. — **10**, №1. — P. 129–134.

12. *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces. — New York: Pergamon Press Book, 1965. — 326p.

Стаття: надійшла до редколегії 16.10.2016
прийнята до друку 11.12.2016

GROUPS OF CONFORMAL TRANSFORMATIONS ON LOCALLY CONFORMAL KÄHLER MANIFOLDS AND GROUPS OF HOMOTHETIC MOTIONS ON KÄHLER MANIFOLDS

Yevhen CHEREVKO

Odesa National Economics University,
8, Preobrazhenska str., Odesa, 65082 Ukraine
e-mail: cherevko@usa.com

In this paper, we study infinitesimal conformal transformations which does not change a complex structure of locally conformal Kähler manifolds. We have found an expression for the Lie derivative of a Lee form with respect to a covariant almost analytic field for locally conformal Kähler manifolds. Also we explore links between the group of conformal transformations on a locally conformal Kähler manifold and a group of homothetic motions on a Kähler manifold.

Key words: Kähler manifold, reduced branching processes,locally conformal Kähler manifolds, Lee form,infinitesimal conformal transformations, analitic vector fields, Lie derivative.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 217–223
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 217–223

УДК 517.53

ПРО МАТРИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЦІЛИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Мирослав Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Університетська 1, м. Львів, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Послідовність (x_n) комплексних чисел називається *цілою* стосовно зростаючої до $+\infty$ послідовності (λ_n) додатних чисел, якщо ряд Діріхле з коефіцієнтами x_n і показниками λ_n є цілим. Узагальненим порядком послідовності (x_n) будемо називати узагальнений порядок відповідного ряду Діріхле. Знайдено необхідну і достатню умову для того, щоб матриця (a_{nk}) відображала клас цілих послідовностей узагальненого порядку $\leq \varrho \in (0, +\infty)$ у клас цілих послідовностей узагальненого порядку $\leq \mu \in (0, +\infty)$.

Ключові слова: ряд Діріхле, матричне відображення, узагальнений порядок.

1. Вступ. Згідно з [1] послідовність $x = (x_n)$ комплексних чисел називається *цілою*, якщо такою є функція $f(z) = \sum_n x_n z^n$. Порядком ϱ послідовності $x = (x_n)$ називається порядок функції f, тобто за теоремою Адамара $\varrho = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \ln n}{-\ln |x_n|}$. Для фіксованого $\varrho \in (0, +\infty)$ через $\Omega(\varrho)$ позначимо клас всіх цілих послідовностей порядку $\leq \varrho$.

Нехай $\xi = (\xi_n)$ – послідовність ненульових комплексних чисел, а $s(\xi) = \{x : \xi_n x_n \to 0\, (n \to \infty)\}$. Якщо позначимо $||x||_\xi = \sup\{|\xi_n x_n| : n \geq 1\}$, то простір $(s(\xi), ||\cdot||_\xi)$ є [2] банаховим і компактним. В [1] досліджено умови, за яких матриця $A = (a_{nk})_{n,\, k\geq 1}$ відображає $s(\xi)$ в $s(\eta) = \{y : \eta_n y_n \to 0\, (n \to \infty)\}$.

Нехай $(\xi^{(j)})$ і $(\eta^{(i)})$ – послідовності послідовностей (тобто $\xi^{(j)} = (\xi_n^{(j)})$ і $\eta^{(i)} = (\eta_k^{(i)})$) такі, що $s(\xi^{(k)}) \subset s(\xi^{(j)})$ і $s(\eta^{(k)}) \subset s(\eta^{(j)})$ для $k > j$. Приймемо $S = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$, $T = \bigcap\limits_i s(\eta^{(i)})$ і припустимо, що для кожного j існує таке $k > j$, що $\sum\limits_n |\xi_n^{(j)}/\xi_n^{(k)}| < +\infty$, а для кожного i існує таке $l > i$, що $\left|\eta_n^{(i)}/\eta_n^{(l)}\right| \to 0$ $(n \to \infty)$. Нарешті, за

2010 Mathematics Subject Classification: 30B20 означенням матриця A відображає S в T, якщо для кожного i існує таке j, що A відображає $s(\xi^{(j)})$ в $s(\eta^{(i)})$. В [1] доведено таке твердження.

Лема 1. *Для того, щоб матриця A відображала S в T, необхідно і достатньо, щоб для кожного i існували такі j і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k*

$$\left|\eta_n^{(i)} a_{nk}/\xi_k^{(j)}\right| \leq M. \tag{1}$$

Використовуючи цю лему, в [1] доведено, що для того, щоб матриця A відображала $\Omega(\varrho)$ в $\Omega(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k

$$n^{n/t}|a_{nk}|k^{-k/r} \leq M.$$

Цей результат буде узагальнено, з одного боку, на випадок цілих послідовностей, означених збіжністю рядів Діріхле зі зростаючими до $+\infty$ показниками, а з іншого – на узагальнені порядки зростання.

2. Основна частина. Отже, нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел. Послідовність $x = (x_n)$ комплексних чисел будемо називаєти цілою стосовно послідовності λ, якщо ряд Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \exp\{z\lambda_n\}, \quad z = \sigma + it, \tag{2}$$

абсолютно збігається в усій комплексній площині. Для цього ряду приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\}$.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \leq x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \leq x \to +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{пз}} \subset L^0$.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком $\varrho_{\alpha,\beta}[F]$ цілого ряду Діріхле (2) називається [3] величина

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)},$$

а для її знаходження правильне [4, с. 26] таке твердження.

Лема 2. *Нехай $0 < p < +\infty$, $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ – неперервно диференційовні функції і виконується одна з умов:*

а) $\alpha \in L^0$, $\beta(\ln x) \in L^0$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} \to \dfrac{1}{p}$ $(x \to +\infty)$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$;

б) $\alpha \in L_{пз}$, $\beta(\ln x) \in L_{пз}$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ $(x \to +\infty)$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$ *і* $\ln n = O(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$.

Тоді $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[x] = \varrho_{\alpha,\beta}[(x_n)]$, *де*

$$\varrho_{\alpha,\beta}[x] = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n/p)}{\beta\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|x_n|}\right)}. \tag{3}$$

Узагальненим порядком цілої стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовності $x = (x_n)$ будемо називати узагальнений порядок відповідного цілого ряду Діріхле (2), тобто величину (3).

Для фіксованого $\varrho \in (0, +\infty)$ через $\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$ позначимо клас всіх цілих стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовностей $x = (x_n)$ узагальненого порядку $\varrho_{\alpha,\beta}[x] \le \varrho$ і доведемо наступну лему.

Лема 3. *Нехай* (ϱ_j) *– послідовність додатних чисел і* $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j \to \infty)$. *Припустимо, що виконується одна з умов а) чи б) леми 2, і приймемо*

$$\xi_n^{(j)} = \exp\left\{\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_j}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right) - \frac{1}{p}\right)\right\}.$$

Тоді

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho) = \bigcap_j s(\xi^{(j)}).$$

Доведення. Спочатку доведемо, що $\bigcap_j s(\xi^{(j)}) \subset \Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$. Оскільки

$$s(\xi^{(j)}) = \{(x_n) : \xi_n^{(j)} x_n \to 0\,(n \to \infty)\},$$

то для всіх досить великих n

$$|x_n| \le \frac{1}{\xi_n^{(j)}} = \exp\left\{-\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_j}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right) - \frac{1}{p}\right)\right\}, \tag{4}$$

звідки випливає, що

$$\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|x_n|} \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

і з огляду на умову $\ln n = O(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ абсциса збіжності ряду Діріхле (2) з такими коефіцієнтами дорівнює $+\infty$ (див. [5]). Отже, послідовність $x = (x_n)$ є цілою стосовно послідовності $\lambda = (\lambda_n)$. З нерівності (4) випливає також,
що для будь-якого j

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n/p)}{\beta\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{|x_n|}\right)} \le \varrho_j$$

і оскільки $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j \to \infty)$, то $\varrho_{\alpha,\beta}[x] \le \varrho$, тобто $s(\xi^{(j)}) \subset \Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$, і отже, $\bigcap_j s(\xi^{(j)}) \subset \Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$.

Навпаки, якщо $(x_n) \in \Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$|x_n| \le \exp\left\{-\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho + \varepsilon}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right) - \frac{1}{p}\right)\right\}, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

і

$$|x_n\xi_n^{(j)}|\le \exp\left\{-\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho+\varepsilon}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)-\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_j}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)\right)\right\},\ n\geqslant n_0(\varepsilon). \quad (5)$$

Зауважимо таке: якщо $\beta(\ln x)\in L^0$ і $\delta>0$, то

$$t\{\beta^{-1}((1+\delta)\alpha(t))-\beta^{-1}(\alpha(t))\}\to+\infty,\quad t\to+\infty. \quad (6)$$

Справді, якщо для деякої прямуючої до $+\infty$ послідовності (t_k) правильна нерівність

$$t_k\{\beta^{-1}((1+\delta)\alpha(t_k))-\beta^{-1}(\alpha(t_k))\}\le K<+\infty,$$

то

$$(1+\delta)\alpha(t_k)\le\beta(\beta^{-1}(\alpha(t_k))+K/t_k)=\beta\left(\ln\left(e^{\beta^{-1}(\alpha(t_k))}e^{K/t_k}\right)\right)=$$
$$=\beta\left(\ln\left\{(1+o(1))e^{\beta^{-1}(\alpha(t_k))}\right\}\right)=(1+o(1))\alpha(t_k),\quad k\to\infty,$$

що неможливо.

З огляду на (6) і нерівність $\varrho_j>\varrho$ з (5) випливає, що $|x_n\xi_n^j|\to0$ $(n\to\infty)$, тобто $(x_n)\in s(\xi^{(j)})$ для кожного j, і отже, $\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)\subset\bigcap_j s(\xi^{(j)})$. Лему 3 доведено. □

Використовуючи леми 1 і 3, доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай функції $\alpha\in L$ та $\beta\in L$ і послідовність $\lambda=(\lambda_n)$ задовольняють умови леми 2, $\varrho\in(0,+\infty)$ і $\mu\in(0,+\infty$. Для того, щоб матриця $A=(a_{nk})$ відображала $\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t>\mu$ існували такі $r>\varrho$ і $M\in(0,+\infty)$, що для всіх n і k*

$$|a_{nk}|\exp\left\{\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{t}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)-\frac{1}{p}\right)-\lambda_k\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{r}\alpha\left(\frac{\lambda_k}{p}\right)\right)-\frac{1}{p}\right)\right\}\le M.$$

Доведення. Нехай (μ_i) – така послідовність додатних чисел, що $\mu_i\downarrow\mu$, а

$$\eta_n^{(i)}=\exp\left\{\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\mu_i}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)-\frac{1}{p}\right)\right\}.$$

За лемою 3 $\Omega_{\alpha,\beta}(\mu)=\bigcap_i s(\eta^{(i)})$ і $\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)=\bigcap_j s(\xi^{(j)})$. Легко перевірити таке: якщо $\varrho_k<\varrho_j$ для $k>j$, то $\xi_n^{(j)}\le\xi_n^{(k)}$ для $k>j$, звідки згідно з означенням випливає, що $s(\xi^{(k)})\subset s(\xi^{(j)})$ для $k>j$. Подібно, $s(\eta^{(k)})\subset s(\eta^{(j)})$ для $k>j$.

Для $l>i$, як у доведенні співвідношення $\left|\xi_n^{(j)}x_n\right|\to0$ $(n\to\infty)$ в лемі 3, використовуючи умову $\beta(\ln x)\in L^0$, отримуємо

$$\frac{\eta_n^{(i)}}{\eta_n^{(l)}}=\exp\left\{-\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\mu_l}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)-\beta^{-1}\left(\frac{1}{\mu_i}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)\right)\right\}\to0,\quad n\to\infty.$$

Нарешті, для $k>j$

$$\sum_n\frac{\xi_n^{(j)}}{\xi_n^{(k)}}=\sum_n\exp\left\{-\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_k}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)-\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_j}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right)\right)\right\}. \quad (7)$$

Припустимо, що виконується умова а) леми 2. Тоді $\beta(\ln x)\in L^0$ і, як раніше,

$$\beta(x+o(1))=\beta(\ln\{(1+o(1))e^x\})=(1+o(1))\beta(x)$$

при $x \to +\infty$. Звідси випливає, що $\beta^{-1}(t/\varrho_k) - \beta^{-1}(t/\varrho_j) \geq h_{kj} > 0$ для всіх $t \geq t_0$, бо якщо $\beta^{-1}(t_n/\varrho_k) - \beta^{-1}(t_n/\varrho_j) \to 0$ для деякої послідовності $(t_n) \uparrow +\infty$, то

$$t_n/\varrho_k \leq \beta(\beta^{-1}(t_n/\varrho_j) + \varepsilon) = (1+\varepsilon)t_n/\varrho_j$$

при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, що неможливо. Отже, з (7) з огляду на умову $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ отримуємо

$$\sum_n \xi_n^{(j)}/\xi_n^{(k)} \leq \sum_n \exp\{-\lambda_n h_{kj}\} < +\infty, \tag{8}$$

За умови б) $\beta(\ln x) \in L_{\text{пз}}$ і $\beta(x + O(1)) = (1+o(1))\beta(x)$ при $x \to +\infty$. Тому тепер

$$\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_k}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right) - \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_j}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right) \to +\infty, \quad n \to \infty,$$

і з огляду на умову $\ln n = O(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ знову отримуємо (8).

Отже, можемо застосувати лему 1 до $S = \Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$ і $T = \Omega_{\alpha,\beta}(\mu)$, за якою для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного i існували такі j і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k

$$\frac{\exp\left\{\lambda_n\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\mu_i}\alpha\left(\frac{\lambda_n}{p}\right)\right) - \frac{1}{p}\right)\right\}}{\exp\left\{\lambda_k\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho_j}\alpha\left(\frac{\lambda_k}{p}\right)\right) - \frac{1}{p}\right)\right\}}|a_{nk}| \leq M.$$

Звідси легко отримати висновок теореми. □

Наведемо два прості наслідки. Якщо в означенні узагальненого порядку цілого ряду Діріхле виберемо $\alpha(t) = \ln t$ і $\beta(t) = t$ для $t \geq t_0$, то отримаємо означення R-порядку ϱ_R, а якщо за умови $\varrho_R = p \in (0, +\infty)$ виберемо $\alpha(t) = t$ і $\beta(t) = e^{pt}$, то отримаємо означення R-типу T_R цього ряду. З доведеної теореми легко випливають такі два твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\Omega_R(\varrho)$ – клас всіх цілих стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовностей $x = (x_n)$ R-порядку $\leq \varrho$. Припустимо, що $\ln n = O(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$, а $0 < \varrho$, $\mu < +\infty$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega_R(\varrho)$ в $\Omega_R(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k*

$$|a_{nk}| \exp\left\{\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{t} - \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{r}\right\} \leq M.$$

Наслідок 2. *Нехай $\Omega_R(p, T)$ – клас всіх цілих стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовностей $x = (x_n)$, зростання яких не перевищує R-порядку p і R-типу T. Припустимо, що $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$, а $0 < T_1, T_2 < +\infty$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega_R(p, T_1)$ в $\Omega_R(p, T_2)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > T_2$ існували такі $r > T_1$ і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k*

$$|a_{nk}| \exp\left\{\frac{\lambda_n}{p} \ln \frac{\lambda_n}{etp} - \frac{\lambda_k}{p} \ln \frac{\lambda_k}{erp}\right\} \leq M.$$

Зауважимо таке: якщо у степеневому розвиненні цілої функції $f(z) = \sum_n x_n z^n$ зробимо заміну z на e^z, то отримаємо цілий ряд Діріхле (2) з показниками $\lambda_n = n$. Тому з наслідку 1 випливає наведений вище результат з [1] для цілих послідовностей скінченного порядку.

3. Доповнення. Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ модифікованим узагальненим порядком цілого ряду Діріхле (2) називається величина

$$\overline{\varrho_{\alpha,\beta}}[F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right).$$

В [6] доведено таке: якщо $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L^0$, або $\beta \in L_{\text{пз}}$ і $\alpha \in L^0$, а показники λ_n задовольняють умову $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to +\infty$
для будь-якого $c \in (0,+\infty)$, то

$$\overline{\varrho_{\alpha,\beta}}[F] = \overline{\varrho_{\alpha,\beta}}[x] := \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|x_n|}\right)}.$$

Тому, якщо через $\overline{\Omega}_{\alpha,\beta}(\varrho)$ позначимо клас всіх цілих стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовностей $x = (x_n)$ модифікованого узагальненого порядку $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[x] \leqslant \rho$, то, повторюючи доведення теореми 1, перейдемо до теореми 2, формулювання якої значно простіше, ніж теореми 1.

Теорема 2. *Нехай або $\alpha \in L_{пз}$ і $\beta \in L^0$, або $\beta \in L_{пз}$ і $\alpha \in L^0$, $\ln n = o(\lambda_n\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to +\infty$ для кожного $c \in (0,+\infty)$, $\varrho \in (0,+\infty)$ і $\mu \in (0,+\infty)$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nh})$ відображала $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}(\varrho)$ в $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували $r > \varrho$ і $M \in (0,+\infty)$ такі, що для всіх n і h*

$$|a_{nh}|\exp\left\{\lambda_n\beta^{-1}\left(\frac{1}{t}\alpha(\lambda_n)\right) - \lambda_h\beta^{-1}\left(\frac{1}{r}\alpha(\lambda_h)\right)\right\} \leqslant M.$$

Список використаної літератури

1. *Skerry H.B.* On matrix maps of entire sequences // Pacif. J. Math. — 1974. — **51**, №2. — P. 563–570.
2. *Zeller K.* Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren // Math. Z. — 1951. — **53**. — S. 463–487.
3. *Пьяныло Я.Д., Шеремета М.М.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. вузов. Матем. — 1975. — №10. — С. 91–93.
4. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. — Київ: ІСДО, — 1993. — 168 с.
5. *Мулява О.М.* Про абсцису збіжності ряду Діріхле // Мат. Студ. — 1998. — **9**, №2 — С. 171–176
6. *Кулявець Л., Шеремета М.* Про модифіковані узагальнені порядки цілих рядів Діріхле та характерестичні функції ймовірнісних законів // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2012. — **77**. — С. 124–131.

ON MATRIX MAPS OF ENTIRE SEQUENCES

Myroslav Sheremeta

Ivan Franko National University of Lviv,
str. Universytetska,1, Lviv, 79000
e-mail: m_ m_ sheremeta@list.ru

A sequence (x_n) of complex numbers is called entire with respect to a sequence (λ_n) of positive numbers increasing to $+\infty$, if the Dirichlet series with coefficients x_n and exponents λ_n is entire. We will define the generalized order of the sequence (x_n) as the generalized order of this Dirichlet series. We find a necessary and sufficient condition for a matrix (a_{nk}) to map a class of entire sequences of the generalized order $\le \varrho \in (0, +\infty)$ into a class of entire sequences of the generalized order $\le \mu \in (0, +\infty)$.

Key words: Dirichlet series, matrix map, generalized order

Стаття: надійшла до редколегії 10.10.2016.
доопрацьована 20.12.2016.
прийнята до друку 20.12.2016.

ПРО МІЖНАРОДНУ МАТЕМАТИЧНУ КОНФЕРЕНЦІЮ, ПРИСВЯЧЕНУ 120-й РІЧНИЦІ З ДНЯ НАРОДЖЕННЯ КАЗИМИРА КУРАТОВСЬКОГО

На базі Львівського національного університету кафедра геометрії і топології організувала міжнародну конференцію, присвячену 120-й річниці з дня народження всесвітньо відомого тополога Казимира Куратовського, який працював у Львові з 1927 до 1934 роки. Конференція відбувалася з 27 вересня до 1 жовтня 2016 року. У конференції взяло участь понад 70 науковців із 10 країн: України, Польщі, Киргизії, Чехії, Грузії, Великої Британії, Ізраїлю, Канади, Німеччини та Росії.

На конференції було виголошено 11 пленарних доповідей (тривалістю 40 хвилин кожна), 12 напівпленарних (30 хв) і 39 секційних доповідей (25 хв) у 9 секціях (по 3 секції денно): "Історія математики", "Топологія в аналізі", "Топологічна алгебра", "Загальна топологія", "Теоретико-множинна топологія", "Категорна топологія", "Геометрична топологія", "Диференційна геометрія", "Теорія графів".

Зокрема, з пленарними доповідями виступили:

- **Ya. Prytula** (Lviv, Ukraine), *Kazimierz Kuratowski and his Lviv students*;
- **V. Maslyuchenko** (Chernivtsi, Ukraine), *Contribution of K. Kuratowski to the theory of separately continuous functions*;
- **P. Szeptycki** (Toronto, Canada), *Uniform powers of compacta and the proximal game*;
- **M. Zarichnyi** (Lviv, Ukraine), *The Lwów period in Kuratowski's life*;
- **M. Hušek** (Prague, Czech Republic), *Lattices of uniformly continuous functions*;
- **O. Sipacheva** (Moscow, Russia), *Discrete subsets in topological groups and countable extremally disconnected groups*;
- **W. Marciszewski** (Warsaw, Poland), *On weak and pointwise topologies in function spaces*;
- **H. Toruńczyk** (Warsaw, Poland), *Selected mathematical achievements of Kazimierz Kuratowski*;
- **A. Wolff** (Würzburg, Germany), *Drawing graphs on few lines and few planes*;
- **J. Grytczuk** (Kraków, Poland), *Graph coloring problems with number theoretic flavor*;
- **T. Banakh** (Lviv, Ukraine), *Topological spaces with an ω^ω-base.*

Праці конференції заплановано видати окремим випуском журналу “Topological Algebra and its Applications” (видавництво de Gruyter).

Детальну інформацію про конференцію та її наукову програму можна знайти на web-сторінці (http://www.math.lviv.ua/conf-2016/).

Тарас Банах, Олег Гутік

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме має передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською та англійською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме подається на веб-сторінці

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2010**.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).

2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.

3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.

4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.

6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, Discrete groups of motions of spaces of constant curvature, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248

8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.

9. V. Bovdi, Free subgroups in group rings, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.

10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.

11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.