ISSN 2078-3744

# ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

## Серія механіко-математична

*Випуск 83*

2017

# VISNYK OF THE LVIV UNIVERSITY

**Series Mechanics and Mathematics**

**Issue 83**

Scientific journal

Published 1-2 issues per year

Published since 1965

Ivan Franko National University of Lviv

# ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

**Серія механіко-математична**

**Випуск 83**

Збірник наукових праць

Виходить 1-2 рази на рік

Видається з 1965 року

Львівський національний університет імені Івана Франка

2017

ЗАСНОВНИК: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету
імені Івана Франка
Протокол №43/12 від 06.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №528 від 12.05.2015р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Відповідальний за випуск *Михайло Зарічний*

**Адреса редколегії:**
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-42-18

**Editorial office address:**
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Технічний редактор С. СЕНИК

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ, ВИДАВЦЯ І ВИГОТОВЛЮВАЧА:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна*
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої
справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 16,9
Наклад 100 прим. Зам.

## ЗМІСТ

## CONTENT

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 5–19*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 5–19*

УДК 512.534

# ПРО НАПІВГРУПУ $\mathsf{ID}_\infty$

**Олег ГУТІК, Анатолій САВЧУК**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mails: o_ gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,*
*asavchuk1@meta.ua*

Досліджуємо напівгрупу $\mathsf{ID}_\infty$ всіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$. Доведено, що фактор-напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, $\mathsf{ID}_\infty$ є $F$-інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$. Знайдено достатні умови, за виконання яких, трансляційно неперевнна топологія на $\mathsf{ID}_\infty$ є дискретною, а також побудовано недискретну гаусдорфову напівгрупову топологію на $\mathsf{ID}_\infty$. Досліджуємо проблему ізоморфного занурення дискретної напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

*Ключові слова:* напівгрупа ізометрій, часткова біекція, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, компактний, зліченно компактний, слабко компактний, дискретний простір, вкладення.

## 1. Термінологія та означення.

Ми користуватимемося термінологією з [14, 16, 32, 35, 37].

Надалі у тексті потужність множини $A$ позначатимемо через $|A|$, перший нескінченний кардинал через $\omega$, і множину цілих чисел — через $\mathbb{Z}$. Через $\operatorname{cl}_X(A)$ і $\operatorname{int}_X(A)$ позначатимемо *замикання* та *внутрішність* підмножини $A$ в топологічному просторі $X$.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини $X$ у множину $Y$, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* й *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні $\alpha$, відповідно. Часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ називається *ко-скінченним*, якщо множини $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ та $Y \setminus \operatorname{ran}\alpha$ — скінченні.

Рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на множині $X$ називається *частковим порядком* на $X$. Множина $X$ із заданим на ній частковим порядком $\leqslant$ називається *частково впорядкованою множиною* і позначається $(X, \leqslant)$.

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 20M18, 20M20, 20M30, 22A15, 22A25, 54D30, 54D40, 54E52, 54H10

Елемент $x$ частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *максимальним* (*мінімальним*) в $(X, \leqslant)$, якщо з відношення $x \leqslant y$ $(y \leqslant x)$ в $(X, \leqslant)$ випливає рівність $x = y$;
- *найбільшим* (*найменшим*) в $(X, \leqslant)$, якщо $y \leqslant x$ $(x \leqslant y)$ для всіх $y \in X$.

У випадку, якщо $(X, \leqslant)$ — частково впорядкована множина і $x \leqslant y$, для деяких $x, y \in X$, то будемо говорити, що елементи $x$ та $y$ — *порівняльні* в $(X, \leqslant)$. Якщо ж для елементів $x \leqslant y$ не виконується жодне з відношень $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то говоритимемо, що елементи $x$ та $y$ — непорівняльні у частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$. Частковий порядок $\leqslant$ на $X$ називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ — порівняльні.

Відображення $h\colon X \to Y$ з частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ в частково впорядковану множину $(Y, \leqslant)$ називається *монотонним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає $(x)h \leqslant (y)h$.

Якщо $S$ — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа $S$ називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента $x$ існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. В інверсній напівгрупі $S$ вищеозначений елемент $x^{-1}$ називається *інверсним до $x$*. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка. Надалі через $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ позначатимемо *вільну напівґратку* з одиницею над множиною дійсних чисел, тобто множину усіх скінченних (разом з порожньою) підмножин множини $\mathbb{R}$ з операцією об'єднання.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі $S$ називається *конгруенцією*, якщо для елементів $a$ і $b$ напівгрупи $S$ з того, що виконується умова $(a, b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c, d \in S$. Відношення $(a, b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку говоритимемо, що *елементи $a$ і $b$ є $\mathfrak{K}$-еквівалентними.*

Якщо $S$ — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \leqslant f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним.*

Означимо відношення $\leqslant$ на інверсній напівгрупі $S$ так:

$$s \leqslant t \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad s = te,$$

для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі $S$ [32]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\leqslant$ на інверсній напівгрупі $S$ на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$. Інверсна напівгрупа $S$ називається *факторизовною*, якщо для кожного елемента $s \in S$ існує елемент $g$ групи одиниць напівгрупи $S$ такий, що $s \leqslant g$ стосовно природного часткового порядку $\leqslant$ на $S$.

Відомо, що група $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2$ адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$ циклічною групою другого порядку $\mathbb{Z}_2$.

Через $\mathbf{\mathsf{ID}}_{\infty}$ позначимо напівгрупу всіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$. Напівгрупа $\mathbf{\mathsf{ID}}_{\infty}$ означена в праці Безущак [8], де описано її твірні та доведено, що вона має експоненціальний ріст. Зауважимо, що напівгрупа

$\mathsf{ID}_\infty$ є інверсною і, очевидно, є піднапівгрупою напівгрупи всіх часткових коскінченних бієкцій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, а елементи напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ — це саме звуження ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ на коскінченні підмножини в розумінні Лоусона (див. [32, с. 9]). У праці [9] описані відношення Ґріна та головні ідеали напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$.

Підмножина $A$ топологічного простору $X$ називається:

- *щільною* в $X$, якщо $\operatorname{cl}_X(A) = X$;
- *кощільною* в $X$, якщо $X \setminus A$ — щільна в $X$;
- *ніде не щільною* в $X$, якщо $\operatorname{cl}_X(A)$ — кощільна в $X$;
- $F_\sigma$*-множиною*, якщо $A$ є зліченним об'єднанням замкнених множин.

*Компактифікацією Стоуна-Чеха* тихоновського простору $X$ називається компактний гаусдорфовий простір $\beta X$, який містить $X$ як щільний підпростір такий, що довільне неперервне відображення $f\colon X \to Y$ в компактний гаусдорфовий простір $Y$ продовжується до неперервного відображення $\overline{f}\colon \beta X \to Y$ [16].

Топологічний простір $X$ називається:

- *квазірегулярним*, якщо для довільної непорожньої відкритої підмножини $U$ в $X$ існує відкрита непорожня підмножина $V \subseteq U$ така, що $\operatorname{cl}_X(V) \subseteq U$;
- *компактним*, якщо довільне відкрите покриття простору $X$ містить скінченне підпокриття;
- *секвенціально компактним*, якщо довільна послідовність в $X$ містить збіжну підпослідовність;
- *зліченно компактним*, якщо довільне зліченне відкрите покриття простору $X$ містить скінченне підпокриття;
- *слабко компактним*, якщо довільна локально скінченна сім'я відкритих непорожніх підмножин в $X$ є скінченною [4];
- $d$*-слабко компактним* або $\mathsf{DFCC}$*-простором*, якщо довільна дискретна сім'я відкритих непорожніх підмножин в $X$ є скінченною (див. [33]);
- *псевдокомпактним*, якщо $X$ є цілком регулярним і кожна неперервна дійснозначна функція на $X$ є обмеженою;
- *локально компактним*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки $x$ в $X$ з компактним замиканням $\operatorname{cl}_X(U(x))$;
- *повним за Чехом*, якщо $X$ є цілком регулярним і наріст $\beta X \setminus X$ є $F_\sigma$-множиною в $\beta X$;
- *берівським*, якщо для кожної послідовності $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ніде нещільних множин з $X$ об'єднання $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ є кощільною підмножиною в $X$;
- *спадково берівським*, якщо довільна непорожна замкнена підмножина в $X$ є берівським простором.

За теоремою 3.10.22 з [16], цілком регулярний простір $X$ є слабко компактним тоді і лише тоді, коли $X$ є псевдокомпактним. Кожен компакний та кожен секвенціально компактний простір є зліченно компактним, кожен зліченно компактний простір є слабко компактним, а кожен слабко компактний простір є $d$-слабко компактним.

Топологічний простір $X$ із заданою на ньому напівгруповою операцією називається *напівтопологічною* (*топологічною*) *напівгрупою*, якщо ця напівгрупова операція на $X$ є нарізно (сукупно) неперервною. Інверсна топологічна напівгрупа з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною напівгрупою.* Топологія $\tau$ на [інверсній] напівгрупі $S$ називається [*інверсною*] *напівгруповою*, якщо $(S,\tau)$ — топологічна [інверсна] напівгрупа. Також, топологія $\tau$ на напівгрупі $S$ називається *трансляційно неперервною*, $(S,\tau)$ — напівтопологічна напівгрупа

Вивчення напівгрупових недискретних тополологізацій напівгруп починається з класичної праці Ебергарта та Селдена [15], у якій доведено, що кожна напівгрупова гаусдорфова топологія на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ є дискретною. У праці [7] Бертман і Уест довели, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на $\mathscr{C}(p,q)$ є також дискретною. У працях [17, 23] згадані результати були поширені на розширену біциклічну напівгрупу $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ та на інтерасоціативності біциклічного моноїда. Також Тайманов у [38] побудував приклад напівгрупи, яка допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію та в [39] він визначив достатні ознаки недискретної напівгрупової топологізації комутативної напівгрупи. Напівгрупа $T$ називається *Таймановою*, якщо вона містить дві різні точки $0_T, \infty_T$ такі, що $xy = \infty_T$ для довільних різних точок $x, y \in T \setminus \{0_T, \infty_T\}$ і $xy = \infty_T$ у всіх інших випадках [20]. У праці [20] доведено, що довільна Тайманова напівгрупа має такі топологічні властивості: (i) кожна $T_1$-топологія з неперервними зсувами на $T$ є дискретною; (ii) $T$ замкнена в довільній $T_1$-топологічній напівгрупі, що містить $T$ як піднапівгрупу; (iii) кожен неізоморфний гомоморфний образ $Z$ напівгрупи $T$ є напівгрупою з нульовим множенням і, отже, є топологічною напівгрупою в довільній топології на $Z$. Дискретні та недискретні топологізації напівгруп перетворень за модулем берівського чи локально компактного простору вивчали в працях [5, 6, 12, 13, 19, 22, 26, 28, 29].

Проблема ізоморфного занурення напівгруп у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних досліджували в [1, 2, 3, 6, 12, 13, 18, 21, 23, 24, 25, 27].

Ми доводимо, що фактор-напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$; напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty$ є $F$-інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$. Визначено достатні умови, за виконання яких трансляційно неперервна топологія на $\mathsf{ID}_\infty$ є дискретною, а також побудовано недискретну гаусдорфову напівгрупову топологію на $\mathsf{ID}_\infty$. Досліджується проблема ізоморфного занурення дискретної напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

## 2. Структурна теорема для напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$.

Найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на інверсній напівгрупі $S$ визначається так (див. [35, III.5]):

$$s\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}t \text{ в } S \quad \text{тоді і лише тоді, коли існує ідемпотент} \quad e \in S \quad \text{такий, що} \quad es = et.$$

З означення напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ випливає, що для довільного елемента $\alpha$ напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ існує єдиний елемент $\gamma_\alpha$ групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$, а отже, означено відображення

$$\mathfrak{G}\colon \mathsf{ID}_\infty \to H(1)\colon \alpha \mapsto \gamma_\alpha. \tag{1}$$

З означення напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ випливає, що так означене відображення $\mathfrak{G}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом, і тим більше для $\alpha, \beta \in \mathsf{ID}_\infty$ маємо, що

$$\alpha \mathfrak{C}_{\mathsf{mg}} \beta \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad (\alpha)\mathfrak{G} = (\beta)\mathfrak{G}.$$

Отож, ми довели таку теорему

**Теорема 1.** *Фактор-напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, причому природний гомоморфізм $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}^{\natural} \colon \mathsf{ID}_\infty \to \mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ визначається за формулою* (1).

Нагадаємо, що інверсна напівгрупа $S$ називається *$F$-інверсною*, якщо $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-клас $s_{\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}}$ кожного елемента $s$ має найбільший елемент стосовно природного часткового порядку в $S$ [34]. Очевидно, що кожна $F$-інверсна напівгрупа містить одиницю.

З означення напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ випливає, що довільного елемента $\alpha$ напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ існує єдиний елемент $\gamma_\alpha$ групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$, а отже, виконується

**Наслідок 1.** *$\mathsf{ID}_\infty$ є $F$-інверсною напівгрупою.*

Для довільного елемента $s$ інверсної напівгрупи $S$ позначимо

$${\downarrow} s = \{x \in S \colon x \leqslant s\},$$

де $\leqslant$ — природний частковий порядок на $S$.

Нехай $S$ — довільна $F$-інверсна напівгрупа. Тоді для довільного елемента $s$ напівгрупи $S$ через $e_s$ позначимо ідемпотент $ss^{-1} \in S$, через $t_s$ — найбільший елемент стосовно природного часткового порядку на $S$ в $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-класі $s_{\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}}$ елемента $s$, і нехай $T_S = \{t_s \colon s \in S\}$. Тоді напівгрупа $S$ є диз'юнктним об'єднанням множин ${\downarrow} t$, де $t \in T_S$ [34].

Структура $F$-інверсних напівгруп викладена у [34], надалі ми далі використаємо такі два твердження для описання напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$.

**Лема 1** ([34, лема 3])**.** *Нехай $S$ — $F$-інверсна напівгрупа з одиницею $1_S$. Тоді:*

(*i*) *$1_S$ — одиниця напівґратки $E(S)$;*

(*ii*) *множина $T_S$ з бінарною операцією*

$$u * v = t_{uv}, \qquad u, v \in T_S,$$

*є групою з нейтральним елементом $1_S$, і $t^{-1}$ є оберненим до елемента $t$ в групі $(T_S, *)$;*

(*iii*) *для кожного елемента $t \in T_S$ відображення $\mathfrak{F}_t \colon E(S) \to {\downarrow} e_t$, означене за формулою*

$$(f)\mathfrak{F}_t = tft^{-1}, \qquad f \in E(S),$$

*є сюр'єктивним гомоморфізмом, причому $\mathfrak{F}_{1_S}$ є тотожним відображенням на $E(S)$;*

(*iv*) *$(1_S)\mathfrak{F}_t = e_t$ й $(e_t)\mathfrak{F}_{t^{-1}} = e_{t^{-1}}$, для довільного елемента $t \in T_S$;*

(*v*) *для довільних елементів $u, v \in S$ виконується рівність*

$$((1_S)\mathfrak{F}_u)\,\mathfrak{F}_v \cdot (f)\mathfrak{F}_{u*v} = ((f)\mathfrak{F}_u)\,\mathfrak{F}_v, \qquad \textit{для довільного ідемпотента} \quad f \in S;$$

($vi$) *якщо* $u, v \in T_S$, *то*

$$f \cdot (g)\mathfrak{F}_u \leqslant e_{u*v},$$

*для всіх ідемпотентів* $f \leqslant e_u$ *та* $g \leqslant e_v$ *напівгрупи* $S$.

**Теорема 2** ([34, теорема 3]). *Нехай* $S$ — $F$*-інверсна напівгрупа та* $\mathscr{S} = \bigcup\limits_{t \in T_S} ({\downarrow} e_t \times \{t\})$. *Означимо на* $\mathscr{S}$ *бінарну операцію* $\circ$ *так: якщо* $u, v \in T_S$, *то для ідемпотентів* $f \leqslant e_u$ *та* $g \leqslant e_v$ *приймемо*

$$(f, u) \circ (g, v) = (f \cdot (g)\mathfrak{F}_u, u * v)\,. \tag{2}$$

*Тоді* $\circ$ — *напівгрупова операція на* $\mathscr{S}$ *і напівгрупа* $(\mathscr{S}, \circ)$ *ізоморфна напівгрупі* $S$ *стосовно відображення* $\mathfrak{H}\colon S \to \mathscr{S}\colon s \mapsto \big(ss^{-1}, t_s\big)$.

Нехай $A$ та $B$ — напівгрупи, $\mathsf{End}(B)$ — напівгрупа ендоморфізмів напівгрупи $B$ і визначено гомоморфізм $\mathfrak{h}\colon A \to \mathsf{End}(B)\colon b \mapsto \mathfrak{h}_b$. Тоді множина $A \times B$ з бінарною операцією

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, (b_1)\mathfrak{h}_{a_2} b_2)\,, \qquad a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$$

називається *напівпрямим добутком* напівгрупи $A$ напівгрупою $B$ стосовно гомоморфізму $\mathfrak{h}$ і позначається $A \ltimes_{\mathfrak{h}} B$ [32]. У цьому випадку кажуть, що визначена права дія напівгрупи $A$ на напівгрупі $B$ ендоморфізмів (гомоморфізмів). Зауважимо, що напівпрямий добуток інверсних напівгруп не завжди є інверсною напівгрупою (див. [32, розділ 5.3]).

**Лема 2.** *Відображення* $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \mathsf{End}(E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty))\colon \gamma \mapsto \mathfrak{h}_\gamma$, *де* $(\alpha)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\alpha\gamma$ — *автоморфізм напівґратки* $E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$, *є гомоморфізмом, причому* $\mathfrak{h}_1$ — *тотожний автоморфізм напівґратки* $E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$.

*Доведення.* Для довільних $\gamma \in H(1)$, $\varepsilon, \iota \in E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$ отримаємо, що

$$(\varepsilon\iota)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\varepsilon\iota\gamma = \gamma^{-1}\varepsilon\gamma\gamma^{-1}\iota\gamma = (\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma(\iota)\mathfrak{h}_\gamma,$$

а отже, $\mathfrak{h}_\gamma$ — гомоморфізм напівґратки $E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$. Оскільки для довільних $\gamma \in H(1)$ та $\varepsilon \in E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$ елемент $\gamma\varepsilon\gamma^{-1}$ є ідемпотентом напівгрупи $\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty$ і

$$(\gamma\varepsilon\gamma^{-1})\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}(\gamma\varepsilon\gamma^{-1})\gamma = \varepsilon,$$

то гомоморфізм $\mathfrak{h}_\gamma$ — сюр'єктивне відображення. Очевидно, що $\mathfrak{h}_1$ — тотожне відображення напівґратки $E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$.

Припустимо, що $(\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma = (\iota)\mathfrak{h}_\gamma$, для деяких $\gamma \in H(1)$, $\varepsilon, \iota \in E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$. Оскільки $H(1)$ — група одиниць напівгрупи $\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty$, то з рівностей

$$\gamma^{-1}\varepsilon\gamma = (\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma = (\iota)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\iota\gamma$$

випливає, що

$$\varepsilon = 1\varepsilon 1 = \gamma\gamma^{-1}\varepsilon\gamma\gamma^{-1} = \gamma\gamma^{-1}\iota\gamma\gamma^{-1} = 1\iota 1 = \iota,$$

а отже, $\mathfrak{h}_\gamma$ — автоморфізм напівґратки $E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty)$.

Зафіксуємо довільні $\gamma, \delta \in H(1)$. Тоді для довільного ідемпотента $\varepsilon \in \boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty$ маємо, що

$$(\varepsilon)\mathfrak{h}_{\gamma\delta} = (\gamma\delta)^{-1}\varepsilon\gamma\delta = \delta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon\gamma\delta = \delta^{-1}(\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma\delta = ((\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma)\,\mathfrak{h}_\delta = (\varepsilon)\,(\mathfrak{h}_\gamma \cdot \mathfrak{h}_\delta)\,,$$

а отже, так означене відображення $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \mathsf{End}\,(E(\boldsymbol{\mathsf{ID}}_\infty))$ є гомоморфізмом. ☐

Наступна теорема описує структуру напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$.

**Теорема 3.** *Напівгрупа $\mathbf{ID}_{\infty}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$.*

*Доведення.* Оскільки група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, то нам достатньо довести, що напівгрупа $\mathbf{ID}_{\infty}$ ізоморфна напівпрямому добутку $H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_{\infty})$ напівґратки $E(\mathbf{ID}_{\infty})$ групою одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$ стосовно гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \mathsf{End}\left(E(\mathbf{ID}_{\infty})\right) : \gamma \mapsto \mathfrak{h}_{\gamma}$, де $(\alpha)\mathfrak{h}_{\gamma} = \gamma^{-1}\alpha\gamma$.

Означимо відображення $\mathfrak{T}\colon \mathbf{ID}_{\infty} \to H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_{\infty})$ за формулою

$$(\alpha)\mathfrak{T} = \left(\gamma_{\alpha}, \alpha^{-1}\alpha\right),$$

де елемент $\gamma_{\alpha}$ групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$, визначений формулою (1). Оскільки для довільного елемента $\alpha$ напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$ існує єдиний елемент $\gamma_{\alpha}$ групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_{\alpha}$, то з наслідку 1 випливає, що відображення $\mathfrak{T}\colon \mathbf{ID}_{\infty} \to H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_{\infty})$ означене коректно, і воно є сюр'єктивним. Припустимо, що існують елементи $\alpha$ та $\beta$ напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$ такі, що $(\alpha)\mathfrak{T} = (\beta)\mathfrak{T}$. Тоді $\left(\gamma_{\alpha}, \alpha^{-1}\alpha\right) = \left(\gamma_{\beta}, \beta^{-1}\beta\right)$ і, використавши властивість, що для довільного елемента $\alpha$ напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$ існує єдиний елемент $\gamma_{\alpha}$ групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_{\alpha}$, і лему 1.4.6 з [32], отримуємо

$$\alpha = \gamma_{\alpha}\alpha^{-1}\alpha = \gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta = \beta,$$

а отже, відображення $\mathfrak{T}\colon \mathbf{ID}_{\infty} \to H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_{\infty})$ є сюр'єктивним.

Нехай $\alpha$ та $\beta$ — довільні елементи напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$. Тоді з формули (1) і теореми 1 випливає, що $\alpha\beta\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}$, і оскільки $\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta} \in H(1)$, то отримуємо, що $\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
(\alpha)\mathfrak{T}(\beta)\mathfrak{T} &= \left(\gamma_{\alpha}, \alpha^{-1}\alpha\right)\left(\gamma_{\beta}, \beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}, \gamma_{\beta}^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\beta}^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta\right).
\end{aligned}$$

За лемою 2 відображення $\mathfrak{h}_{\gamma}\colon E(\mathbf{ID}_{\infty}) \to E(\mathbf{ID}_{\infty})\colon \alpha \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma$ є автоморфізмом напівґратки $E(\mathbf{ID}_{\infty})$, а отже отримуємо, що елемент $\gamma_{\beta}^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_{\beta}$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$. Оскільки $\mathbf{ID}_{\infty}$ — інверсна напівгрупа, то для довільного елемента $\alpha$ напівгрупи $\mathbf{ID}_{\infty}$ існує єдиний елемент $\gamma_{\alpha}$ групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_{\alpha}$. З леми 1.4.6 з [32] виливає, що $\beta = \gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta$, а отже,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\beta}^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta &= \left(\gamma_{\beta}^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_{\beta}\right)\left(\beta^{-1}\beta\right)\left(\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\beta^{-1}\beta\gamma_{\beta}^{-1}\right)\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\left(\gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta\right)^{-1}\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\left(\gamma_{\beta}\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \beta^{-1}\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\beta = \\
&= \left(\beta^{-1}\alpha^{-1}\right)(\alpha\beta) = \\
&= (\alpha\beta)^{-1}(\alpha\beta).
\end{aligned}$$

Отож, отримуємо

$$(\alpha\beta)\mathfrak{T} = \big(\gamma_{\alpha\beta}, (\alpha\beta)^{-1}\alpha\beta\big) = (\alpha)\mathfrak{T}(\beta)\mathfrak{T},$$

а отже, відображення $\mathfrak{T}\colon \mathsf{ID}_\infty \to H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathsf{ID}_\infty)$ є гомоморфізмом, що і завершує доведення теореми. □

Позаяк група $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2$, то з теореми 3 випливає наслідок.

**Наслідок 2.** *Напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку*

$$(\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}).$$

Надалі нам буде потрібне таке твердження.

**Твердження 1.** *Для довільного $\alpha \in \mathsf{ID}_\infty$ множина*

$$\uparrow\!\alpha = \{\beta \in \mathsf{ID}_\infty \colon \alpha \leqslant \beta\}$$

*скінченна.*

*Доведення.* З леми 1.4.6 [32] випливає, що

$$\uparrow\!\alpha = \left\{\beta \in \mathsf{ID}_\infty \colon \alpha = \alpha\alpha^{-1}\beta\right\},$$

і, використавши те, що у напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$ усі ідемпотенти є частковими тотожними відображеннями коскінченних у $\mathbb{Z}$ підмножин, отримуємо, що підмножина $\uparrow\!\alpha$ є скінченною в $\mathsf{ID}_\infty$. □

**Твердження 2.** *Для довільних $\alpha, \beta \in \mathsf{ID}_\infty$ множини*

$$R(\alpha|\beta) = \{\chi \in \mathsf{ID}_\infty \colon \alpha\chi = \beta\} \qquad i \qquad L(\alpha|\beta) = \{\chi \in \mathsf{ID}_\infty \colon \chi\alpha = \beta\}$$

*скінченні. Причому, якщо $R(\alpha|\beta) \neq \varnothing$ ($L(\alpha|\beta) \neq \varnothing$), то $|R(\alpha|\beta) \cap H(1)| = 1$ ($|L(\alpha|\beta) \cap H(1)| = 1$).*

*Доведення.* Зауважимо, очевидно, що $R(\alpha|\beta)$ є підмножиною множини

$$R = \left\{\chi \in \mathsf{ID}_\infty \colon \alpha^{-1}\alpha\chi = \alpha^{-1}\beta\right\},$$

оскільки $\alpha^{-1}\alpha$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$, то отримуємо, що $R \subseteq \uparrow\!\alpha^{-1}\beta$. Тоді за твердженням 1 отримуємо, що $R$ — скінченна, а отже, $R(\alpha|\beta)$ — скінченна підмножина в $\mathsf{ID}_\infty$. Останнє твердження випливає з того, що $\mathsf{ID}_\infty$ є $F$-напівгрупою. Доведення твердження у випадку множини $L(\alpha|\beta)$ є аналогічним. □

## 3. Про (напів)топологічну напівгрупу $\mathsf{ID}_\infty$.

**Твердження 3.** *Нехай $\tau$ — $T_1$-топологія на напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$ стосовно якої ліві (праві) зсуви в $(\mathsf{ID}_\infty, \tau)$ є неперервними відображеннями та топологічний простір $(\mathsf{ID}_\infty, \tau)$ містить ізольовану точку. Тоді група одиниць $H(1)$ є дискретним підпростором в $(\mathsf{ID}_\infty, \tau)$.*

*Доведення.* Припустимо, що ліві зсуви в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ є неперервними відображеннями. Нехай $\alpha_0$ — ізольована точка в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$. Тоді з неперервності лівих зсувів у $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ випливає, що множина ${\uparrow}\alpha_0$ — відкрито-замкнена, як повний прообраз відкрито-замкненої множини при неперервному лівому зсуві на ідемпотент $\alpha_0\alpha_0^{-1}$. Позаяк $\tau$ — $T_1$-топологія на напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$, то за твердженням 2 група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ містить ізольовану точку в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$. Але в кожній групі рівняння $ax=b$ має єдиний розв'язок і множина $\mathsf{ID}_\infty\setminus H(1)$ є двобічним ідеалом в напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$, то з неперервності лівих зсувів у $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ випливає, що кожен елемент групи одиниць $H(1)$ є ізольованою точкою в просторі $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$.

Для правих зсувів доведення аналогічне. □

**Теорема 4.** *Нехай $\tau$ — берівська $T_1$-топологія на напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$, стосовно якої ліві (праві) зсуви в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ є неперервними відображеннями. Тоді група одиниць $H(1)$ є дискретним підпростором в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$.*

*Доведення.* Припустимо, що ліві зсуви в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ є неперервними відображеннями. Позаяк напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty$ зліченна, то з беровості $T_1$-простору $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ випливає, що хоча б один елемент сім'ї $\{\{\alpha\}:\alpha\in\mathsf{ID}_\infty\}$ має непорожню внутрішність в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$, а отже, простір $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ містить ізольовану точку. Далі скористаємося твердженням 3. □

Кажуть, що топологія $\tau$ на напівгрупі $S$ є *ліво* (*право*) *$E$-берівською*, якщо для довільного ідемпотента $e\in S$ підпростір $eS$ $(Se)$ в $S$ є берівським.

**Теорема 5.** *Кожна ліво (право) $E$-берівська $T_1$-топологія $\tau$ на напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$, стосовно якої праві (ліві) зсуви в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ є неперервними відображеннями, дискретна.*

*Доведення.* Нехай $\tau$ — ліво $E$-берівська $T_1$-топологія на напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$, стосовно якої ліві (праві) зсуви в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ є неперервними відображеннями. Оскільки $\mathsf{ID}_\infty$ — інверсна напівгрупа, то $\alpha\mathsf{ID}_\infty=\alpha\alpha^{-1}\mathsf{ID}_\infty$ для довільного елемента $\alpha\in\mathsf{ID}_\infty$, а отже, $\alpha\mathsf{ID}_\infty$ — берівський підпростір в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$. Тоді з беровості $T_1$-простору $\alpha\mathsf{ID}_\infty$ випливає, що хоча б один елемент сім'ї $\{\{\beta\}:\beta\in\alpha\mathsf{ID}_\infty\}$ має непорожню внутрішність в $\alpha\mathsf{ID}_\infty$, а отже, простір $\alpha\mathsf{ID}_\infty$ містить ізольовану точку. Нехай $\alpha_0$ — ізольована точка в $\alpha\mathsf{ID}_\infty$ і $\alpha\beta=\alpha_0$ для деякого $\beta\in\mathsf{ID}_\infty$. Тоді з неперервності правих зсувів у $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ та твердження 2 випливає, що множина

$$\{\chi\in\mathsf{ID}_\infty\colon\chi\beta=\alpha_0\}$$

є скінченною та відкритою в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ як повний прообраз відкритої множини при неперервному правому зсуві на елемент $\beta$, і, крім того, вона містить елемент $\alpha$. Звідки випливає, що $\alpha$ — ізольована точка в $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$. З довільності вибору елемента $\alpha\in\mathsf{ID}_\infty$ випливає, що усі точки простору $(\mathsf{ID}_\infty,\tau)$ ізольовані. □

Позаяк в гаусдорфовій напівтопологічній напівгрупі $S$ множини $eS$ і $Se$ — замкнені для довільного ідемпотента $e\in S$, то з теореми 5 випливає такий наслідок

**Наслідок 3.** *Кожна гаусдорфова трансляційно неперервна спадково берівська топологія $\tau$ на напівгрупі $\mathsf{ID}_\infty$ є дискретною.*

Оскільки кожен гаусдорфовий локально компактний топологічний простір є повним за Чехом, а кожен повний за Чехом є спадково берівським (див. [16]), то з наслідку 3 випливає наслідок 4.

**Наслідок 4.** *Кожна гаусдорфова трансляційно неперервна повна за Чехом (а отже, і локально компактна) топологія $\tau$ на напівгрупі $\boldsymbol{ID}_\infty$ є дискретною.*

З наступного прикладу випливає, що на напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$ існує недискретна неберівська гаусдорфова топологія $\tau_{\mathsf{NB}}$ така, що $(\mathbf{ID}_\infty, \tau_{\mathsf{NB}})$ є топологічною напівгрупою.

**Приклад 1.** Відомо, що група ізометрій $\mathsf{Iso}(\mathbb{T}^1)$ одиничного кола

$$\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$$

на комплексній площині ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbb{T}^1 \rtimes \mathbb{Z}_2$ та відображення

$$\theta\colon \mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{T}^1 \rtimes \mathbb{Z}_2\colon (z,a) \mapsto (e^{iz}, a)$$

є ізоморфним (алгебричним) зануренням групи $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ в групу $\mathsf{Iso}(\mathbb{T}^1)$. Нехай на одиничному колі $\mathbb{T}^1$ задано компактну топологію, індуковану з $\mathbb{C}$, де на $\mathbb{C}$ визначена звичайна евклідова топологія, а на групі $\mathbb{Z}_2$ визначена дискретна топологія. Тоді $\mathbb{T}^1 \rtimes \mathbb{Z}_2$ з топологією добутку є компактною топологічною групою (див. [36, приклад 6.22]), яка індукує на підгрупі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ недискретну групову топологію.

Нехай на напівґратці $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ задана дискретна топологія. Тоді за теоремою 2.10 з [11, том 1, с. 67] напівгрупа $(\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ з топологією добутку є топологічною напівгрупою, яка, очевидно, не є дискретним простором.

**Лема 3.** *Якщо $A$ — дискретний щільний підпростір $T_1$-топологічного простору $X$, то $A$ — відкритий підпростір в $X$.*

*Доведення.* Припустимо протилежне: існує точка $x \in A$ така, що кожен її відкритий окіл $U(x)$ перетинає множину $X \backslash A$. Зафіксуємо довільний відкритий окіл $U_0(x)$ точки $x$ в топологічному просторі $X$ такий, що $U_0(x) \cap A = \{x\}$. Тоді $U_0(x)$ є відкритим околом деякої точки $y \in U_0(x) \cap X \setminus A$ в топологічному просторі $X$, а отже, $U_0(x)$ містить нескінченну кількість точок множини $A$, що суперечить вибору околу $U_0(x)$. З отриманої суперечності випливає твердження леми. □

**Теорема 6.** *Нехай дискретна напівгрупа $\boldsymbol{ID}_\infty$ є щільною піднапівгрупою $T_1$-напівтопологічної напівгрупи $S$ й $I = S \setminus \boldsymbol{ID}_\infty \neq \varnothing$. Тоді $I$ є двобічним ідеалом в $S$.*

*Доведення.* З леми 3 випливає, що $\mathbf{ID}_\infty$ є відкритим підпростором в $S$.

Зафіксуємо довільний елемент $y \in I$, якщо $x \cdot y = z \notin I$ для деякого елемента $x \in \mathbf{ID}_\infty$, то існує відкритий окіл $U(y)$ точки $y$ в топологічному просторі $S$ такий, що $\{x\} \cdot U(y) = \{z\} \subset \mathbf{ID}_\infty$. Окіл $U(y)$ містить нескінченну кількість елементів напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, що суперечить твердженню 2. З отриманого протиріччя випливає, що $x \cdot y \in I$ для всіх $x \in \mathbf{ID}_\infty$ and $y \in I$. Доведення твердження, що $y \cdot x \in I$ для всіх $x \in \mathbf{ID}_\infty$ та $y \in I$ є аналогічним.

Припустимо протилежне: $x \cdot y = w \notin I$, для деяких $x, y \in I$. Тоді $w \in \mathbf{ID}_\infty$ і з нарізної неперервності напівгрупової операції в $S$ випливає, що існують відкриті околи $U(x)$ та $U(y)$ точок $x$ та $y$ в просторі $S$, відповідно, такі, що $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ and $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$. Однак обидва околи $U(x)$ і $U(y)$ містять нескінченну кількість елементів напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, а отже, обидві рівності $\{x\}\cdot U(y)=\{w\}$ й $U(x)\cdot\{y\}=\{w\}$ суперечать попередній частині доведення теореми, оскільки $\{x\}\cdot(U(y)\cap\mathbf{ID}_\infty)\subseteq I$. З отриманого протиріччя випливає, що $x\cdot y\in I$. □

**Твердження 4.** *Нехай гаусдорфова топологічна напівгрупа $S$ містить дискретну напівгрупу $\mathbf{ID}_\infty$ як щільну піднапівгрупу. Тоді для довільного $c\in\mathbf{ID}_\infty$ множина*

$$D_c=\{(x,y)\in\mathbf{ID}_\infty\times\mathbf{ID}_\infty\colon xy=c\}$$

*вікрито-замкнена в $S\times S$.*

*Доведення.* З леми 3 випливає, що $\mathbf{ID}_\infty$ є відкритим підпростором в $S$. Тоді з неперервності напівгрупової операції в напівгрупі $S$ отримуємо, що $D_c$ — відкрита підмножина в просторі $S\times S$ для довільного елемента $c\in\mathbf{ID}_\infty$.

Припустимо, що існує такий елемент $c\in\mathbf{ID}_\infty$, що $D_c$ є незамкненою підмножиною в $S\times S$. Тоді існує точка накопичення $(a,b)\in S\times S$ множини $D_c$. З неперервності напівгрупової операції в $S$ випливає, що $a\cdot b=c$. Але $\mathbf{ID}_\infty\times\mathbf{ID}_\infty$ є дискретним підпростором в $S\times S$, а отже, за теоремою 6 точки $a$ і $b$ належать до двобічного ідеалу $I=S\setminus\mathbf{ID}_\infty$, а звідси випливає, що добуток $a\cdot b\in S\setminus\mathbf{ID}_\infty$ не може дорівнювати елементові $c$. □

**Теорема 7.** *Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа $S$ містить напівгрупу $\mathbf{ID}_\infty$ як щільну дискретну піднапівгрупу, то квадрат $S\times S$ не є слабко компактним простором.*

*Доведення.* З твердженням 4 для довільного елемента $c\in\mathbf{ID}_\infty$ квадрат $S\times S$ містить відкрито-замкнений дискретний підпростір $D_c$. У випадку, коли $c$ є одиницею групи одиниць напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, то множина $D_c$ містить нескінченну підмножину $\left\{\left(x,x^{-1}\right):x\in H(1)\right\}$, а отже, множина $D_c$ є нескінченною. Звідси випливає, що простір $S\times S$ не є слабко компактним. □

З іншого боку, кожен зліченно компактний простір є слабко компактним і за теоремою 3.10.4 з [16] замкнений підпростір зліченно компактного простору є знову зліченно компактним, то з теореми 7 випливає наслідок 5.

**Наслідок 5.** *Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа $S$ містить дискретну напівгрупу $\mathbf{ID}_\infty$, то її квадрат $S\times S$ не є зліченно компактним простором.*

Відомо, що компактність і секвенціальна компактність зберігається скінченними добутками (див. [16, розділ 3]), а отже, з наслідку 5 випливають такі два наслідки

**Наслідок 6.** *Дискретна напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ не занурюється топологічно ізоморфно в жодну гаусдорфову компактну топологічну напівгрупу.*

**Наслідок 7.** *Дискретна напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ не занурюється топологічно ізоморфно в жодну гаусдорфову секвенціально компактну топологічну напівгрупу.*

**Теорема 8.** *Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа $S$ містить напівгрупу $\mathbf{ID}_\infty$ з ізольованою точкою в $\mathbf{ID}_\infty$, то квадрат $S\times S$ не є зліченно компактним простором.*

*Доведення.* Якщо напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ містить ізольовану точку, то за твердженням 3 група одиниць $H(1)$ є дискретним підпростором в $\mathbf{ID}_\infty$. Тоді за твердженням 2.3.3 з [16] отримаємо, що $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1)) = \operatorname{cl}_S(H(1))\times \operatorname{cl}_S(H(1))$, а тоді з теореми 3.10.4 з [16] випливає, що $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1))$ — зліченно компактний простір. Однак $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1))$ — замкнена піднапівгрупа в $S\times S$ (див. [11, т. 1, с. 9–10]), то з аналогічних міркувань (як і в доведенні твердження 4 і теореми 7) отримуємо, що $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1))$ не є слабко компактним підпростором в $S\times S$, а отже, за теоремою 3.10.4 з [16] простір $S\times S$ не є зліченно компактним. □

**Теорема 9.** *Слабко компактна квазі-регулярна $T_1$-топологічна інверсна напівгрупа не містить напівгрупу $\mathbf{ID}_\infty$ як щільну піднапівгрупу.*

*Доведення.* Припустимо протилежне: існує слабко компактна квазі-регулярна $T_1$-топологічна інверсна напівгрупа $S$, яка містить напівгрупу $\mathbf{ID}_\infty$ як щільну піднапівгрупу. Тоді з теореми 2.8 монографії [31] випливає, що простір напівгрупи $S$ є берівським, а отже, хоча б один елемент сім'ї $\mathscr{U} = \{s\colon s\in \mathbf{ID}_\infty\}\cup\{S\setminus \mathbf{ID}_\infty\}$ має непорожню внутрішність. Позаяк усі точки множини $S\setminus \mathbf{ID}_\infty$ є точками дотику до множини $\mathbf{ID}_\infty$ у просторі $S$, то $\operatorname{int}_S(S\setminus \mathbf{ID}_\infty)=\varnothing$, а отже, напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ містить ізольовану точку в просторі $S$. Тоді за твердженням 3 група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ є дискретним підпростором у напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$, а отже, і у просторі $S$. Припустимо, що група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ не є замкненим підпростором у топологічній інверсній напівгрупі $S$. Зафіксуємо довільний елемент $s\in S$ такий, що $s\in \operatorname{cl}_S(H(1))\setminus H(1)$. Доведемо, що $ss^{-1}\neq 1\neq s^{-1}s$. Нехай $U(1)$ — довільний відкритий окіл одиниці 1 напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ у топологічній інверсній напівгрупі $S$ такий, що $U(1)\cap\mathbf{ID}_\infty=\{1\}$. Однак $S$ — топологічна інверсна напівгрупа, а отже, існує відкритий окіл $V(s)$ елемента $s$ у просторі $S$ такий, що

$$V(s)\cdot(V(s))^{-1}\cup(V(s))^{-1}\cdot V(s)\subseteq U(1).$$

Але окіл $V(s)$ елемента $s$ містить нескінченну кількість елементів групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, то

$$\Big(V(s)\cdot(V(s))^{-1}\cup(V(s))^{-1}\cdot V(s)\Big)\cap\mathbf{ID}_\infty\neq\{1\},$$

а це суперечить вибору околу $U(1)$. З отриманої суперечності випливає, що група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ є замкненим підпростором у топологічній інверсній напівгрупі $S$, і більше того, група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ є групою одиниць напівгрупи $S$.

Далі зауважимо, що група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ є відкритим підпростором в просторі $S$. Справді, з наведених міркувань випливає, що напівгрупа $S$ містить ізольовану точку $s_0\in\mathbf{ID}_\infty$ в просторі $S$. Позаяк $S$ — топологічна інверсна напівгрупа, то повний прообраз $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ стосовно правого зсуву $\rho_{s_0}\colon S\to S: s\mapsto s\cdot s_0$ є відкритою підмножиною в $S$. З означення напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ випливає, що $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}\cap H(1)=\{1\}$. Доведемо, шо множина $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ скінченна. Припустимо протилежне. Нехай $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ — нескінченна множина в $S$. Тоді з твердження 2 випливає, що відкрита підмножина $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ містить нескінченну кількість елементів з наросту $S\setminus\mathbf{ID}_\infty$, а отже, вона є відкритим околом деякої точки $x\in S\setminus\mathbf{ID}_\infty$. Але довільний відкритий окіл точки $x \in S \setminus \mathsf{ID}_\infty$ містить нескінченну кількість елементів напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$, а це суперечить твердженню 2, оскільки $\left((\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}\right)\rho_{s_0} = \{s_0\}$. Отож, ми отримали, що множина $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ відкрита та скінченна, і, крім того, вона містить одиницю 1 групи одиниць $H(1)$. Отже, одиниця 1 групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ є ізольованою точкою в просторі $S$. Зафіксуємо довільний елемент $x_0$ групи одиниць $H(1)$. Позаяк $S$ — топологічна інверсна напівгрупа, то повний прообраз $(\{1\})\rho_{x_0^{-1}}^{-1}$ стосовно правого зсуву $\rho_{x_0^{-1}} \colon S \to S : s \mapsto s\cdot x_0^{-1}$ є відкритою підмножиною в $S$. Тоді з означення напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ випливає, що $(\{1\})\rho_{x_0^{-1}}^{-1} \cap \mathsf{ID}_\infty = \{x_0\}$. Використовуючи твердження 2, отримуємо, що $(\{1\})\rho_{x_0^{-1}}^{-1} \cap S = \{x_0\}$. Отож, група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathsf{ID}_\infty$ є відкрито-замкненим дискретним підпростором у топологічній інверсній напівгрупі $S$, а це суперечить слабкій компактності простору $S$. З отриманого протиріччя випливає твердження теореми. ☐

**Теорема 10.** *Напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty$ не занурюється в жодну зліченно компактну $T_3$-топологічну інверсну напівгрупу.*

*Доведення.* Припустимо, що існує зліченно компактна $T_3$-топологічна інверсна напівгрупа $S$, яка містить напівгрупу $\mathsf{ID}_\infty$. Тоді з теорем 2.1.6 і 3.10.4 з [16] випливає, що замикання $\mathrm{cl}_S(\mathsf{ID}_\infty)$ є зліченно компактним $T_3$-простором, а з твердження II.2 з [15], що $\mathrm{cl}_S(\mathsf{ID}_\infty)$ — топологічна інверсна напівгрупа. Отже, $T_3$-топологічна інверсна напівгрупа $\mathrm{cl}_S(\mathsf{ID}_\infty)$ містить щільну напівгрупу, а це суперечить теоремі 9. З отриманого протиріччя випливає твердження теореми. ☐

## ПОДЯКА

Автори висловлюють подяку С. Бардилі, О. Равському та рецензенту за корисні коментарі та зауваження.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. L. W. Anderson, R. P. Hunter, and R. J. Koch, *Some results on stability in semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 521–529.
2. T. O. Banakh, S. Dimitrova, and O. V. Gutik, *The Rees-Suschkewitsch Theorem for simple topological semigroups*, Mat. Stud. **31** (2009), no. 2, 211–218.
3. T. Banakh, S. Dimitrova, and O. Gutik, *Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups*, Topology Appl. **157** (2010), no. 18, 2803–2814.
4. R. W. Bagley, E. H. Connell, and J. D. McKnight, Jr., *On properties characterizing pseudo-compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), no. 3, 500–506.
5. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Мат. вісник Наук. т-ва ім. Т. Шевченка **13** (2016), 21–28.
6. S. Bardyla and O. Gutik, On a semitopological polycyclic monoid, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
7. M. O. Bertman and T. T. West, *Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups*, Proc. Roy. Irish Acad. **A76** (1976), no. 21–23, 219–226.
8. O. Bezushchak, *On growth of the inverse semigroup of partially defined co–finite automorphisms of integers*, Algebra Discrete Math. (2004), no. 2, 45–55.

9. О. О. Безущак, *Відношення Ґріна інверсної напівгрупи частково визначених коскінченних ізометрій дискретної лінійки*, Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. (2008), no. 1, 12–16.
10. В. В. Вагнер, *Обобщенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
11. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vols. **I** and **II**, Marcell Dekker, Inc., New York and Basel, 1983 and 1986.
12. I. Chuchman and O. Gutik, *Topological monoids of almost monotone, injective cofinite partial selfmaps of positive integers*, Carpathian Math. Publ. **2** (2010), no. 1, 119–132.
13. I. Chuchman and O. Gutik, *On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity*, Demonstr. Math. **44** (2011), no. 4, 699–722.
14. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vols. **I** and **II**, Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961 and 1967.
15. C. Eberhart and J. Selden, *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 115–126.
16. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
17. I. Fihel and O. Gutik, *On the closure of the extended bicyclic semigroup*, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no. 2, 131–157.
18. І. Гуран, О. Гутік, О. Равський, І. Чучман, *Симетричні топологічні групи та півгрупи*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **74** (2011), 61–73.
19. O. Gutik, *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **80** (2015), 33–41.
20. O. Gutik, *Topological properties of Taimanov semigroups*, Мат. вісник Наук. т-ва ім. Т. Шевченка **13** (2016), 29–34.
21. O. Gutik, J. Lawson, and D. Repovš, *Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups*, Semigroup Forum **78** (2009), no. 2, 326–336.
22. O. Gutik and K. Maksymyk, *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups*, Мат. методи та фіз.-мех. поля **59** (2016), no. 4, 31–43.
23. O. Gutik and K. Maksymyk, *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **82** (2016), 98–108.
24. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *On topological semigroups of matrix units*, Semigroup Forum **71** (2005), no. 3, 389–400.
25. O. Gutik, K. Pavlyk, and A. Reiter, Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt $\lambda^0$-extensions, Mat. Stud. **32** (2009), no. 2, 115–131.
26. O. Gutik and I. Pozdnyakova, *On monoids of monotone injective partial selfmaps of Ln?lex? with cofinite domains and images*, Algebra Discrete Math. **17** (2014), no. 2, 256—279.
27. O. Gutik and D. Repovš, *On countably compact* 0*-simple topological inverse semigroups*, Semigroup Forum, **75** (2007), no. 2, 464–469.
28. O. Gutik and D. Repovš, *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}$ *having cofinite domain and image*, Stud. Sci. Math. Hungar. **48** (2011), no. 3, 342–353.
29. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images*, Georgian Math. J. **19** (2012), no. 3, 511–532.
30. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial cofinite selfmaps*, Math. Slovaca **65** (2015), no. 5, 981–992.
31. R. C. Haworth and R. A. McCoy, *Baire spaces*, Diss. Math **141**, PWN, Warszawa, 1977.
32. M. V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
33. M. Matveev, *A survey of star covering properties*, Topology Atlas preprint, April 15, 1998.
34. R. McFadden and L. O'Carroll, *F-inverse semigroups*, Proc. Lond. Math. Soc., III Ser. **22** (1971), 652–666.

35. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
36. W. Roelcke and S. Dierolf, Uniform structures on topological groups and their quotients, McGraw-Hill College, New-York, 1982.
37. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math. **1079**, Springer, Berlin, 1984.
38. А. Д. Тайманов, *Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию*, Алгебра и логика **12** (1973), no. 1, 114–116; English transl. in: Algebra and Logic **12** (1973), no. 1, 64–65.
39. А. Д. Тайманов, *О топологизации коммутативных полугрупп*, Матем. заметки **17** (1975), no. 5, 745–748; English transl. in: Math. Notes **17** (1975), no. 5, 443–444.

# ON THE SEMIGROUP $\mathsf{ID}_\infty$

**Oleg GUTIK, Anatolii SAVCHUK**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: o_ gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,*
*asavchuk1@meta.ua*

We study the semigroup $ID_\infty$ of all partial isometries of the set of integers $\mathbb{Z}$. It is proved that the quotient semigroup $ID_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$, where $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is the minimum group congruence, is isomorphic to the group $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ of all isometries of $\mathbb{Z}$, $ID_\infty$ is an $F$-inverse semigroup, and $ID_\infty$ is isomorphic to the semidirect product $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ of the free semilattice with unit $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ by the group $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$. We give the sufficient conditions on a shift-continuous topology $\tau$ on $ID_\infty$ when $\tau$ is discrete. A non-discrete Hausdorff semigroup topology on $ID_\infty$ is constructed. Also, the problem of an embedding of the discrete semigroup $ID_\infty$ into Hausdorff compact-like topological semigroups is studied.

*Key words:* semigroup of isometries, partial bijection, semitopological semigroup, topological semigroup, compact, countably compact, feebly compact, discrete space, embedding.

*Стаття: надійшла до редколегії 24.04.2017*
*доопрацьована 29.05.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 20–23*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 20–23*

УДК 512.582

# EXTENDING MONOMORPHIC FUNCTORS WITH FINITE SUPPORTS

**Taras BANAKH, Viktoriia BRYDUN**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: tbanakh@yahoo.com, v_frider@yahoo.com*

We prove that each monomorphic functor with finite supports $F\colon \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ has a unique extension $\bar{F}\colon \mathbf{TYCH} \to \mathbf{TYCH}$ to the category **TYCH** of Tychonoff spaces and their arbitrary maps such that $\bar{F}|\mathbf{Tych} = F_\beta$ where $F_\beta : \mathbf{Tych} \to \mathbf{Tych}$ is the extension of the functor $F$ to the category **Tych** of Tychonoff spaces and their continuous maps, constructed by Chigogidze.

*Key words:* monomorphism, monomorphic functor, finite support, extension of functor

In this article we describe a general construction of an extension of a monomorphic functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ with finite supports in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces and their continuous maps to a functor $\bar{F} : \mathbf{TYCH} \to \mathbf{TYCH}$ in the category **TYCH** whose objects are Tychonov spaces and morphisms are arbitrary (not necessarily continuous) maps between Tychonoff spaces. More information on functors in the category **Comp** can be found in the book [4].

We shall say that a functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{TYCH}$

- is *monomorphic* if $F$ preserves monomorphisms, which means that for any injective continuous map $f : X \to Y$ between compact Hausdorff spaces the map $Ff : FX \to FY$ is injective;
- has *finite supports* if for each compact Hausdorff space $X$ and each $a \in FX$ there is a finite subset $A \subset X$ such that $a \in Fi_{A,X}(FA)$ where $i_{A,X} : A \to X$ is the identity inclusion.

More information on monomorphic functors with finite supports can be found in the paper [1].

Given a functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{TYCH}$ we first extend $F$ to a functor $F_\beta : \mathbf{Tych} \to \mathbf{TYCH}$ defined on the category **Tych** of Tychonoff spaces and their continuous maps. Given a Tychonoff space $X$ let $\beta X$ be the Stone-Čech compactification of $X$ and $\mathcal{K}(X)$ be the family of all compact subsets of $X$. For each compact subset $K \in \mathcal{K}(X)$ let

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 18A22

$i_{K,\beta X} : K \to X \subset \beta X$ be the identity inclusion of $K$ into the Stone-Čech compactification of $X$. Applying the functor $F$ to the inclusion $i_{K,\beta X} : K \to \beta X$, we get a map $Fi_{K,\beta X} : FK \to F(\beta X)$.

Now let

$$F_\beta X := \bigcup_{K\in\mathcal{K}(X)} Fi_{K,\beta X}(FK).$$

For any continuous function $f : X \to Y$ between Tychonoff spaces let $\beta f : \beta X \to \beta Y$ be the Stone-Čech extension of $f$ and $F_\beta f : F_\beta X \to F_\beta Y$ be the restriction of the map $F\beta f$ to $F_\beta X$. In such way we define the extension $F_\beta$ : **Tych** → **TYCH** of the functor $F$ to the category **Tych**. For functors $F$ : **Comp** → **Comp** the extension $F_\beta$ was introduced and studied by Chigogidze in [2].

Now assuming that the functor $F$ : **Comp** → **TYCH** is monomorphic and has finite supports, we shall further extend the functor $F_\beta$ to a functor $\bar{F}$ : **TYCH** → **TYCH** defined on the category **TYCH** of Tychonoff spaces and their arbitrary (not necessarily continuous) maps. For a Tychonoff space $X$ let $[X]^{<\omega}$ be the family of all finite subspaces of $X$.

**Proposition 1.** *If a functor $F$ :* **Comp** → **TYCH** *has finite supports, then*

$$F_\beta X = \bigcup_{A\in[X]^{<\omega}} Fi_{A,\beta X}(FA).$$

*Proof.* The inclusion $\bigcup_{A\in[X]^{<\omega}} Fi_{A,\beta X}(FA) \subset F_\beta X$ follows from the inclusion $[X]^{<\omega} \subset \mathcal{K}(X)$. To prove the reverse inclusion, fix any element $a \in F_\beta X$ and find a compact subset $K \subset X$ such that $a \in Fi_{K,\beta X}(FK)$. Find an element $b \in FK$ such that $a = Fi_{K,\beta X}(b)$. Since $F$ has finite supports, there exists a finite subset $A \subset K$ such that $b \in Fi_{A,K}(FA)$ and hence $b = Fi_{A,K}(c)$ for some $c \in FA$. Since $i_{A,\beta X} = i_{K,\beta X} \circ i_{A,K}$, we get

$$\begin{aligned} a &= Fi_{K,\beta X}(b) = \\ &= Fi_{K,\beta X}(Fi_{A,K}(c)) = \\ &= F(i_{K,\beta X} \circ i_{A,K})(c) = \\ &= Fi_{A,\beta X}(c) \in Fi_{A,\beta X}(FA). \end{aligned}$$

□

Now we are able to prove the main result of this note.

**Theorem 1.** *Each monomorphic functor $F$ :* **Comp** → **TYCH** *with finite supports has a unique extension $\bar{F}$ :* **TYCH** → **TYCH** *such that $\bar{F}|$***Tych** $= F_\beta$.

*Proof.* For any Tychonoff space $X$ put $\bar{F}X = F_\beta X$. Given any function $f : X \to Y$ between Tychonoff spaces and any $a \in \bar{F}X = F_\beta X$, find a finite subspace $A_1 \subset X$ such that $a \in Fi_{A_1,\beta X}(FA_1)$. Such subspace exists by Proposition 1. Find an element $a_1 \in FA_1$ such that $a = Fi_{A_1,\beta X}(a_1)$. Applying the functor $F_\beta$ to the continuous map $f_1 = f|A_1 : A_1 \to Y$, we get a map $F_\beta f_1 : FA_1 \to F_\beta Y$. Finally, put

$$\bar{F}f(a) := F_\beta f_1(a_1) \in F_\beta Y = \bar{F}Y.$$

Let us show that the value $\bar{F}f(a) = F_\beta f_1(a_1)$ depends only on $a$ (but not on $A_1$ or $a_1$).

Let $A_2 \subset X$ be a finite set such that $a \in Fi_{A_2,\beta X}(FA_2)$ and $a_2 \in FA_2$ be an element such that $a = Fi_{A_2,\beta X}(a_2)$. Consider the finite set $A = A_1 \cup A_2$, and for $i \in \{1,2\}$ let $i_{A_i,A} : A : A_i \to A$ denote the identity inclusion. Let $\tilde{a}_i = Fi_{A_i,A}(a_i) \in FA$ and observe that

$$a = Fi_{A_i,\beta X}(a_i) = Fi_{A,\beta X} \circ Fi_{A_i,A}(a_i) = Fi_{A,\beta X}(\tilde{a}_i).$$

Since the functor $F$ is monomorphic, the map $Fi_{A,\beta X}$ is injective and hence $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Then

$$F_\beta f_1(a_1) = F_\beta(f|A) \circ Fi_{A_1,A}(a_1) = F_\beta(f|A)(\tilde{a}_1) = F_\beta(f|A)(\tilde{a}_2) = F_\beta(f|A_2)(a_2),$$

so the map $\bar{F} : \bar{F}X \to \bar{F}Y$ is well-defined.

Thus, we obtain an extension of the functor $F$ : **Comp** $\to$ **TYCH** to the functor $\bar{F}$ : **TYCH** $\to$ **TYCH** such that $\bar{F}|$**Tych** $= F_\beta$. To see that this extension is unique, observe that for any function $f : X \to Y$ between Tychonoff spaces and any $a \in \bar{F}X = F_\beta X$, we can apply Proposition 1 and find a finite set $A \subset X$ with $a \in Fi_{A,\beta X}FA$ and an element $a_1 \in FA$ such that $a = Fi_{A,\beta X}(a_1)$. Let $B = f(A) \subset Y$. Applying the functor $\bar{F}$ to the equality $f|A = f \circ i_{A,X}$ we obtain the equality $F_\beta(f|A) = \bar{F}(f|A) = \bar{F}f \circ \bar{F}i_{A,X} = \bar{F}f \circ F_\beta i_{A,X}$, which implies that the value $\bar{F}f(a) = \bar{F}f \circ F_\beta i_{A,X}(a_1) = F_\beta(f|A)(a_1)$ is uniquely determined. □

Theorem 1 allows us to aks the following problem which will be considered in subsequent publications.

**Problem 1.** *Detect monomorphic functors* $F$ : **Comp** $\to$ **TYCH** *with finite support whose extension* $\bar{F}$ : **TYCH** $\to$ **TYCH** *preserves certain property* $\mathcal{P}$ *of functions between Tychonoff spaces.*

In the role of the property $\mathcal{P}$ we can consider one of properties of generalized continuity, listed in the survey [3].

## REFERENCES

1. T. Banakh, M. Martynenko, and M. Zarichnyi. *On monomorhic topological functors with finite supports*, Carpathian Math. Publ. **4** (2012), no. 1, 4–12.
2. A. Chigogidze, *Extension of normal functors*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **6** (1984), 23–26.
3. O. Karlova, *Classification of analogues of continuous functions*, Chernivtsi Nat. Univ., Chernivtsi, 2015, Preprint.
4. A. Teleiko and M. Zarichnyi. *Categorical topology of compact Hausdorff spaces*, VNTL Publ., Lviv, 1999.

*Стаття: надійшла до редколегії 02.06.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83*

# ПРОДОВЖЕННЯ МОНОМОРФНОГО ФУНКТОРА ЗІ СКІНЧЕННИМИ НОСІЯМИ

**Тарас БАНАХ, Вікторія БРИДУН**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mails: tbanakh@yahoo.com, v_frider@yahoo.com*

Доведено, що кожен мономорфний функтор зі скінченними носіями $F\colon \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ має продовження $\bar{F}\colon \mathbf{TYCH} \to \mathbf{TYCH}$ на категорію **TYCH** тихонівських просторів і довільних відображень (не обов'язково неперервних). Причому $\bar{F}|\mathbf{Tych} = F_\beta$, де $F_\beta : \mathbf{Tych} \to \mathbf{Tych}$ – побудоване Чігогідзе продовження функтора $F$ на категорію **Tych** тихонівських просторів і неперервних відображень.

*Ключові слова:* мономорфізм, мономорфний функтор, скінченний носій, продовження функтора.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 24–33*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 24–33*

УДК 514.01

# САЛЯ ВАЙНЛЬОС ТА ЇЇ ПРАЦЯ З ОСНОВ ГЕОМЕТРІЇ

**Ігор ГУРАН, Ярослав ПРИТУЛА**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mails: igor_guran@yahoo.com, ya.g.prytula@gmail.com*

Викладено біографічну довідку про Салю Вайнльос і зміст її докторської праці, де запропоновано оригінальне доведення існування неевклідової геометрії.

*Ключові слова:* основи геометрії, аксіоматика Гільберта, аксіоматика Штайнгауза, незалежність аксіом, аксіома паралельності, неевклідова геометрія.

Серед тринадцяти осіб, які в період 1920–1939 років отримали ступінь доктора філософії у галузі математики у Львівському університеті, була одна жінка — Саля Вайнльос (Sala Weinlös). Вона стала першою жінкою доктором філософії у галузі математики в історії Львівського університету [1].

Саля Вайнльос народилася 6 лютого 1903 р. в Рогатині на Станіславщині. Її батьком був Ізраель, мати Реббека з дому Дам. До 1940 р. батько працював службовцем у приватних підприємствах. Вів також історичні та бібліографічні дослідження у сфері єврейської літератури. З приходом радянської влади став членом спілки письменників Львова. У 1940–1941 роках працював бібліографом у Науковій бібліотеці імені Василя Стефаника [2]. З 1909 р. С. Вайнльос почала відвідувати народну школу у Львові. У 1913-14 н.р. вона навчалась у приватній жіночій гімназії ім. Юліуша Словацького, де закінчила перший клас. Далі продовжувала навчання в гімназії пані Камерлінг, у якій 1921 р. отримала атестат зрілості з оцінкою “відмінно”.

Ця приватна гімназія була заснована у 1899 р. Юзефою С. Голдблатт-Камерлінг (Juzefa S. Goldblatt-Kamerling). Це була перша приватна жіноча гімназія не лише у Львові, а й в Галичині. Гімназія містилась у будинку на вул. Сакраментек 16, тепер це вулиця Туган–Барановського. У повоєнний час в цьому будинку була фабрика, а з 2005 — новий будинок. Гімназія була змішаного типу — класичного та математично-природничого, мала повні публічні права. До цієї гімназії ходили дівчата з заможних єврейських сімей, які прагнули більшої асиміляції. З 1905 р. тут

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 01A60, 01A70, 01A72, 51A05

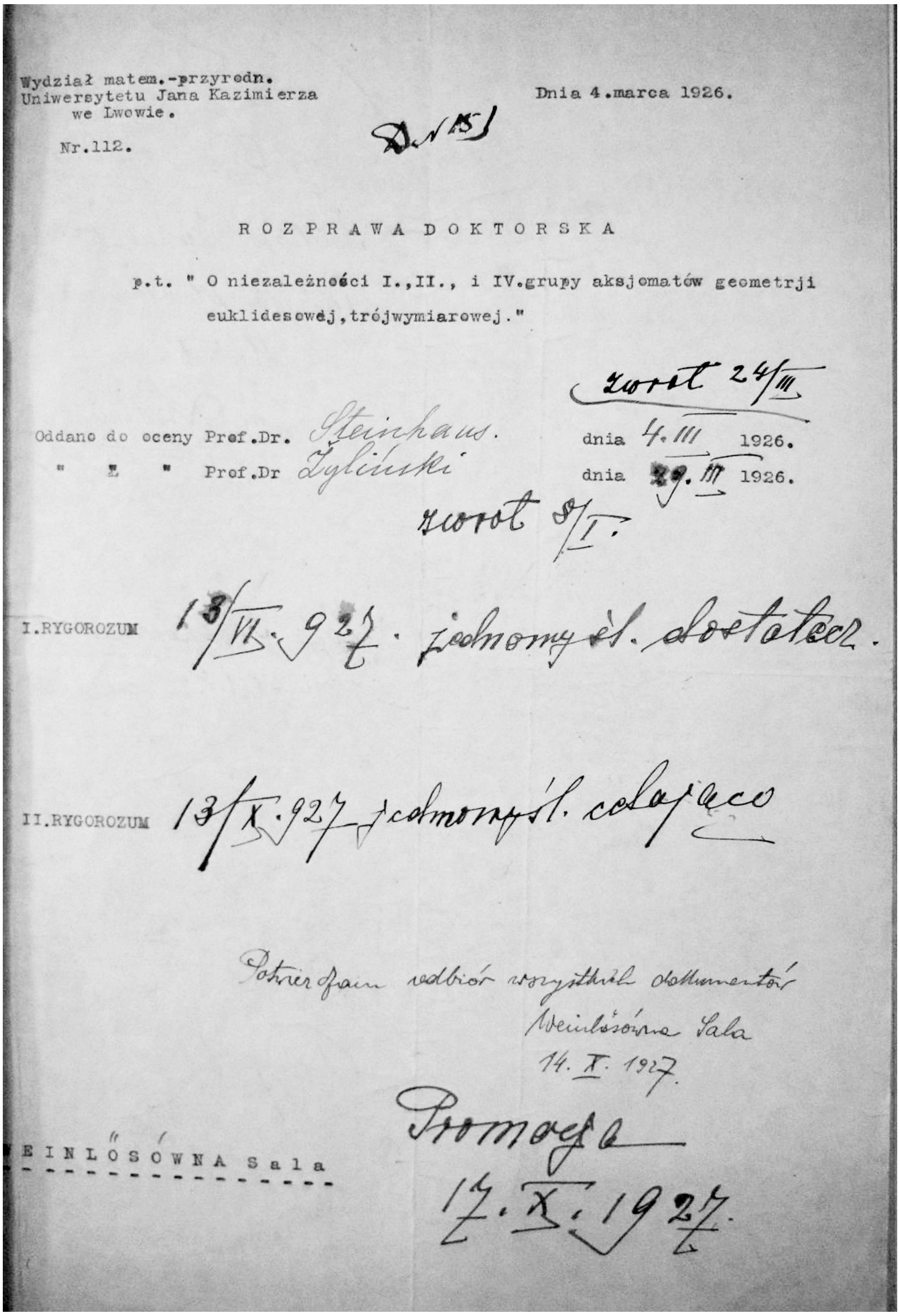
було повних 8 класів гімназії. Від заснування до 1939 р. директором гімназії була її власниця пані Камерлінг, яка навчалася в університетах Цюріха та Відня, і отримала диплом історика.

З жовтня 1921 р. С. Вайнльос була студенткою філософського факультету Львівського університету Яна Казимира, а з 1924 математично-природничого, який був утворений під час поділу філософського факультету. У першому семестрі С. Вайнльос вибрала курси К. Твардовського "Вступ до психології", "Силогістика", М. Вартенберга "Вступ до філософії", Є. Жилінського "Алгебра", "Вступ до математики", С. Рузевіча "Математика для філософів і природничників", Р. Негруса "Експериментальна фізика", а також курс стенографії. Колоквіум з "Силогістики" склала на "дуже добре", а з математики у С. Рузевіча на "відмінно" [3]. Далі кожного року вона записувалась на курси К. Твардовського з логіки та філософії, на математичні курси С. Банаха, Є. Жилінського, С. Рузевіча та Г. Штайнгауза. У 1924 р. Г. Штайнгауз читав курс "Основи геометрії" та вів семінар з цього курсу. С. Вайнльос відвідувала цей курс і брала участь у семінарі Г. Штайнгауза. У цьому курсі він сформулював декілька проблем, які зацікавили С. Вайнльос. Гурток математично-фізичний студентів університету в 1925 р. видав текст лекцій "Podstawy geometrji" [4]. У вступі Г. Штайнгауз, згадуючи про вклад Д. Гільберта, написав "Після Гільберта основи геометрії викладали в Гетінгені: Ландау і Бернаус. Нотатки з тих лекцій, які велися студентом Басковічем обдуманні ним і викладачем були викладені у манускрипті".

Гуго Штайнгауз (1887-1972) свою університетську освіту почав у Львівському університеті восени 1905 р. Тут у першому півріччі він вибрав лекції з філософії та етики К. Твардовського та М. Вартенберга, з математики Ю. Пузини, з експериментальної фізики І. Закшевського та з методології суспільних наук С. Грабського. Через рік він продовжив навчання у Гетінгенському університеті, де у 1911 р. отримав ступінь доктора філософії на підставі праці "Neue Anwendungen des Dirichlet'schen Prinzips". Після габілітації у Львівському університеті 1917 р. Г. Штайнгауз читав лекції як приват-доцент і мав штатну посаду асистента. У 1920 р. він отримав посаду надзвичайного, а з 1923 — звичайного професора і керівника II-ої кафедри математики.

С. Вайнльос звернулася з заявою до Ради математично-природничого факультету про допуск до докторських іспитів 3 березня 1926 р.: математики, як головної дисципліни і кристалографії, як другої дисципліни та філософії. Разом з заявою подала докторську працю "O niezależności I, II, IV grupy aksiomatów geometrji euklidesowej trójwymiarowej", яка, зазначена в заяві, була виконана на семінарі Г. Штайнгауза [5]. Вибір другої дисципліни був пов'язаний, мабуть з тим, що у 1925/26 навчальному році вона слухала курси "Загальна мінерологія" та "Геометрична кристалографія" у З. Вейберга [6].

Рецензентами докторської праці призначено Г. Штайнгауза та Є. Жилінського. Г. Штайнгауз уже 23 березня написав свою оцінку праці, Є. Жилінський, взявши докторську працю, свою оцінку написав 20 грудня 1926 р. Обидва рецензенти вважали, що на підставі цієї праці С. Вайнльос можна допустити до докторських іспитів. Зауважимо, що у всіх інших випадках написання оцінок докторських праць у цей (1920-39 рр.) період рецензенти писали спільну оцінку [7].



Wydział matem.-przyrodn.
Uniwersytetu Jana Kazimierza
we Lwowie.

Dnia 4.marca 1926.

Dr N 151

Nr.112.

ROZPRAWA DOKTORSKA

p.t. " O niezależności I.,II., i IV.grupy aksjomatów geometrji euklidesowej,trójwymiarowej."

zwrot 24/III

Oddano do oceny Prof.Dr. Steinhaus. dnia 4.III 1926.
" " " Prof.Dr Żyliński dnia 29.III 1926.

zwrot 8/I.

I.RYGOROZUM 13/VI. 927. jednomyśl. dostateczn.

II.RYGOROZUM 13/X. 927 jednomyśl. celująco

Potwierdzam odbiór wszystkich dokumentów
Weinlösówna Sala
14. X. 1927.

EINLÖSÓWNA Sala

Promocja
17. X. 1927.

Оцінки Г. Штайнгауза та Є. Жилінського

Іспит з математики та кристалографії С. Вайнльос склала 13 червня 1927 р. Її відповідь З. Вайберг оцінив "відмінно", інші члени комісії Є. Жилінський, Г. Штайнгауз і декан С. Лоріа "задовільно". Комісія одноголосно прийняла оцінку "задовільно". Відповідь на іспиті з філософії 13 жовтня 1927 р. комісія, до якої входили К. Твардовський і М. Вартенберг, оцінили на "відмінно". Офіційна докторська промоція С. Вайнльос відбулась 17 жовтня 1927 р. Промотором був Г. Штайнгауз [7].

Уже в 1926 р. С. Вайнльос була членом Львівського відділення Польського математичного товариства. У 1927 р. була учасником Першого польського математичного з'їзду у Львові. У журналі "Fundamenta Mathematica" опублікувала дві статті ([8, 9]).

З 1926 до 1930 р. С. Вайнльос працювала вчителькою математики у приватних школах Львова. Вона продовжувала науково співпрацювати з Г. Штайнгаузом. В 1932-1933 роках займалась підготовкою до друку лекцій з основ геометрії Г. Штайнгауза. Підготувала і подала до журналу "Fundamenta Mathematica" статтю "Beitrage zur Axiomatik der Euklidischen dreidimensionelen Geometrie", яка мала вийти у 1940 р.

З 1934 до 1941 р. С. Вайнльос працювала в середній школі (№29 у радянський період) у Львові. Середня школа №29 була розташована в монастирі, на площі Юра 1. Тепер там третій навчальний корпус "Львівської політехніки". У 1939-1940 рр. викладала математику на обласних педагогічних курсах для вчителів.

У 1940 р. С. Вайнльос подала заяву про вступ до аспірантури Львівського державного університету імені Івана Франка [10]. Вступні іспити склала успішно: спеціальність — "добре", основи марксизму-ленінізму — "добре", іноземна мова — "відмінно". Однак, не була зарахована за конкурсом.

Доля Салі Вайнльос в час війни авторам невідома.

Ми згадували, що в 1925 р. вийшов з друку манускрипт професора Г. Штайнгауза "Podstawy geometrji". В ньому викладені основи геометрії на підставі певної системи аксіом, яка покликана систематизувати тільки логічним шляхом структуру евклідової геометрії. Цю програму раніше реалізував Д. Гільберт у його класичній монографії [11], перше видання якої з'явилось 1899 р.

Гільбертом запропоновано розбиття системи аксіом геометрії на п'ять груп:

**(I)** **I1–I8** аксіоми сполучення (незалежності);
**(II)** **II1–II4** аксіоми порядку;
**(III)** **III1-III5** аксіоми конгруентності;
**(IV)** аксіоми паралельності;
**(V)** **V1**, **V2** аксіоми неперервності.

У манускрипті Г. Штайнгауза "Podstawy geometrji" [4] (далі **PG**) поділ на групи системи аксіом такий самий як у Д. Гільберта. Зупинимось на порівнянні цих систем аксіом, беручи за базову систему Гільберта. Аксіоми Гільберта ми позначатимемо літерою **H** з відповідною нумерацією групи і порядковим номером аксіоми, наприклад, **HI1** — означає першу аксіому першої групи, **HII2** — другу аксіому другої групи і т.д. Для позначення аксіом системи Штайнгауза, викладеної в **PG**, вживатимемо літеру **S**, номер групи і номер відповідної аксіоми. Наприклад, **SI2** — це друга аксіома першої групи аксіом сполучення.

Які ж відмінності між аксіоматикою (**H**) Гільберта та (**S**) — Штайнгауза. Запис **SI1**≡**HI1** означає ідентичність відповідних аксіом **1**: "Для довільних двох точок $A$,

$B$ існує пряма $a$, що належить до цих двох точок” в обох системах (**H**) і (**S**). Запис **HI4**$\Rightarrow$**SI4** означає, що з аксіоми **HI4** випливає аксіома **SI4**. А запис **HI4**$\equiv$**SI4**+**SI3**$_2$, відповідно, означає, що аксіома **HI4** еквівалентна кон'юнкції аксіом **SI4** і **SI3**$_2$.

Порівняння системи аксіом першої групи в системах (**H**) і (**S**).

В системі (**S**) аксіоми **SI1**–**SI8** формулюються так:

**SI1:** через дві різні точки завжди проходить пряма;
**SI2:** через дві різні точки проходить щонайбільше одна пряма;
**SI3**$_1$**:** на прямій лежать принаймні дві різні точки;
**SI3**$_2$**:** на площині лежить принаймні одна точка;
**SI4:** через три різні точки завжди проходить площина;
**SI5:** через три різні точки, які не лежать на одній прямій, проходить щонайбільше одна площина;
**SI6:** якщо дві різні точки прямої лежать на площині $\alpha$, то кожна точка цієї прямої лежить на площині $\alpha$;
**SI7:** якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають іншу спільну точку;
**SI8:** існують принаймні чотири різні точки, які не лежать на одній площині.

Оскільки **HI1**$\equiv$**SI1**, **HI2**$\equiv$**SI2**, **HI5**–**HI8**$\equiv$**SI5**–**SI8**, то формулювати відповідні аксіоми Гільберта не треба. Розглянемо аксіоми

**HI4:** Для будь-яких трьох точок $A$, $B$, $C$, що не лежать на тій самій прямій, існує площина $\alpha$, що належить кожній з цих трьох точок $A$, $B$, $C$. Для довільної площини завжди існує точка, що їй належить.
**HI3:** На прямій існують принаймні дві точки. Існують принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

Щодо аксіоми **HI4**, то очевидно

$$\mathbf{HI4} \equiv \mathbf{SI4} + \mathbf{SI3}_2.$$

В лемі 1 доводиться, що

$$\mathbf{HI3} \equiv \mathbf{SI3}_1 + \mathbf{SI4} + \mathbf{SI6} + \mathbf{SI8}.$$

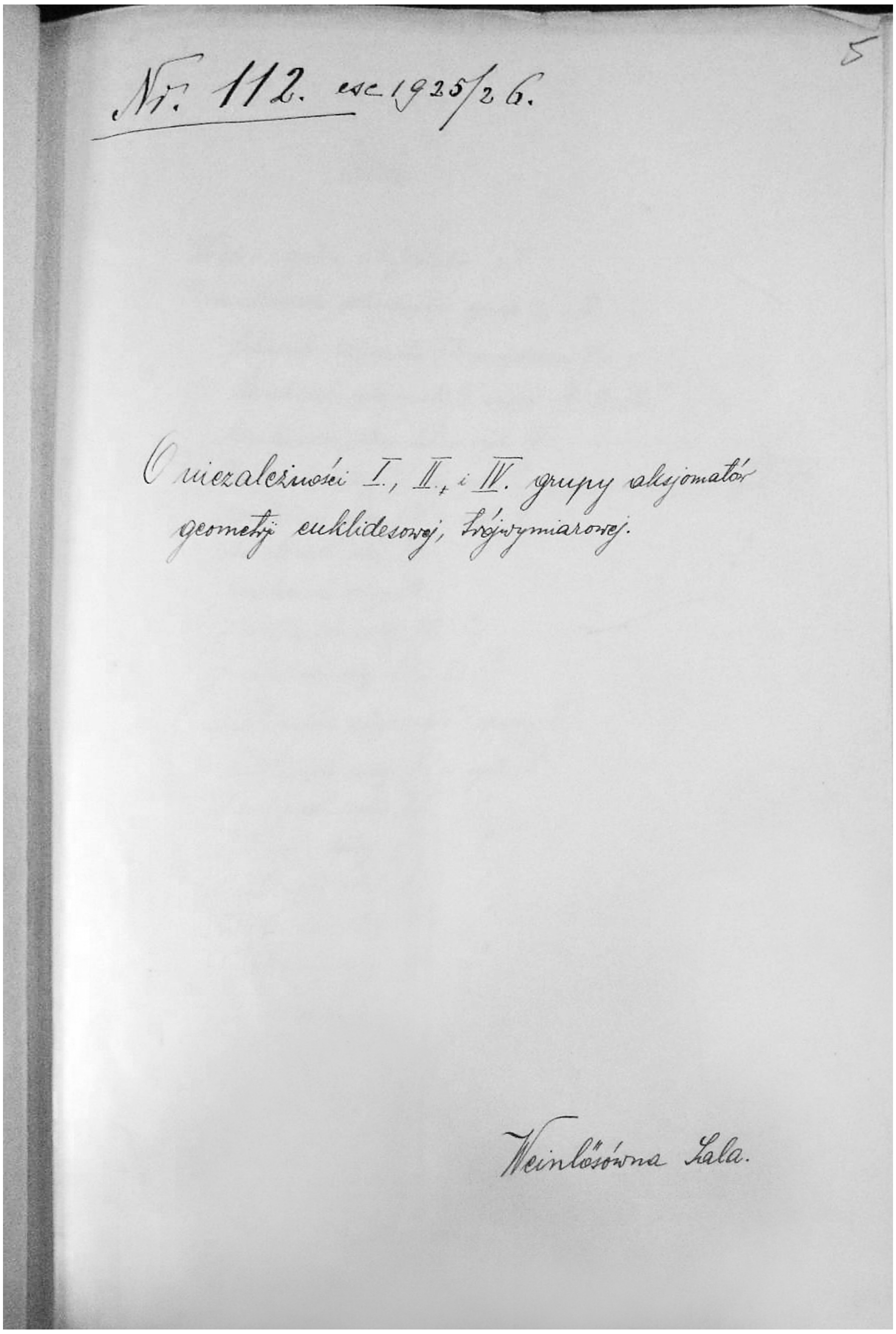
Отож, системи аксіом сполучення **HI** та **SI** еквівалентні.

В подальшому розгляді докторської праці Салі Вайнльос аксіома **SI3**$_1$ матиме визначальне значення.

Проста перевірка аксіом другої, третьої, четвертої та п'ятої групи аксіом в обох системах (**H**) і (**S**) свідчить про їхню еквівалентність. Отже, системи (**H**) і (**S**) еквівалентні та становлять аксіоматичну основу евклідової геометрії.

Перейдемо до викладу основних результатів докторської праці “Про незалежність **I**, **II** і **IV** груп аксіом тривимірної евклідової геометрії” Салі Вайнльос.

Докторська праця складається зі вступу, двох розділів і висновків.



5

Nr. 112. esc 1925/26.

O niezależności I., II., i IV. grupy aksjomatów geometrji euklidesowej, trójwymiarowej.

Weinlösówna Sala.

“O niezależności **I**, **II** i **IV** grupy aksjomatóv geomrtrji euklidowej trójwymiarowej”
Weinlösówna Sala

У вступі автор сформулював мету праці, а саме, доведення незалежності аксіом груп **I**, **II**, **IV**.

В першому розділі після викладу системи аксіом Г. Штайнгауза (**S**) автор розглядав таке:

*Залежність аксіом* **SI3**$_1$ *від аксіом* **SI1**, **SI2**, **SI4**, **SI6**, **SI8**, **II2**, **II3**$_3$, **IV**.

**Лема 1.** *Існують три різні точки, які не лежать на одній прямій.*

*Доведення.* З аксіоми **I8** випливає існування чотирьох різних точок $A$, $B$, $C$, $D$, які не лежать в одній площині. Стверджуємо, що довільні три з них, наприклад, $A$, $B$, $C$ не лежать на одній прямій. Якщо б ці точки $A$, $B$, $C$ лежали на одній якісь прямій, то площина $\alpha$, що проходить через точки $A$, $B$, $D$ (така площина існує завдяки аксіомі **I4**), проходила б також (за аксіомою **I6**) через точку $C$, що суперечить тому, що точки $A$, $B$, $C$, $D$ не належать одній площині. □

**Лема 2.** *Для заданої точки  існують дві різні точки, які не лежать з нею на одній прямій.*

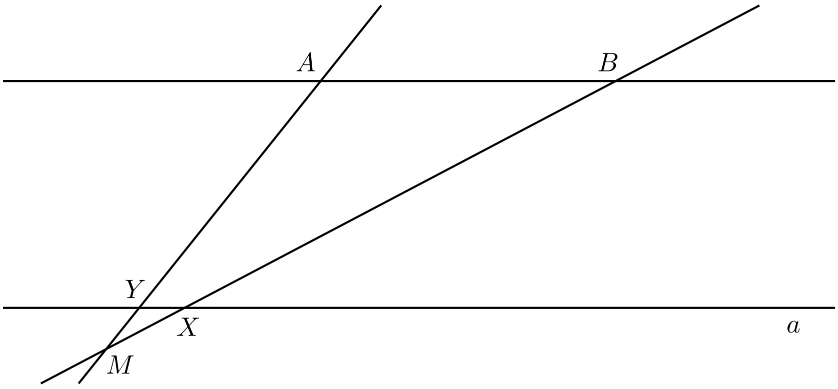
*Доведення.* Візьмемо три різні точки $A$, $B$, $C$, які не лежать на одній прямій (існування таких точок випливає з леми 1). Якщо довільні дві з них, наприклад, $A$, $B$, не лежать з точкою $X$ на одній прямій, то лема доведена. Якщо ж через точки $A$, $B$, $X$ проходить пряма $l$, то вже точка $C$ на цій прямій $l$ не лежить (бо тоді б точки $A$, $B$, $C$ лежали на одній прямій, що суперечить припущенню), однак пряма $l$ є єдиною прямою, що проходить через $A$, $X$, тому точки $A$, $C$, $X$ не лежать на жодній прямій. Візьмемо тепер довільну пряму $a$. Для неї можливі три випадки:

1° На прямій $a$ немає жодної точки.
2° На прямій $a$ лежить тільки одна точка .
3° На прямій $a$ лежить принаймні дві різні точки.

У випадку 3° нічого не треба доводити.

У випадку 1° проведемо через три різні точки $A$, $B$, $C$, які не лежать на одній прямій площину $\alpha$ (**I4**). Пряма $a$ лежить в площині $\alpha$, і як така, що не містить жодної точки, лежить в кожній площині. Розглянемо прямі $AB$ і $BC$ (**I1**), які лежать (за аксіомою **I6**) в площині $\alpha$. Всупереч тому, що вони різні і проходять обидві через точку $B$, мають, принаймні одна з них, перетинати, — на підставі аксіоми **IV** — пряму $a$. Отже, маємо на прямій $a$ якусь точку $X$. Якщо на ній існує ще одна точка $Y$, відмінна від $X$, то твердження доведено. Випадок, коли $X$ є єдиною точкою прямої $a$, аналогічний до випадку 2°. У цьому випадку візьмемо до точки $X$ дві різні від неї точки $A$, $B$, які не лежать з нею на одній прямій і проведемо через точки $A$, $B$, $X$ площину $\alpha$ (**I4**), пряма $a$, яка містить лише точку $X$, лежатиме в площині $\alpha$. Розглянемо на площині $\alpha$ прямі $AB$ і $AM$, причому $M$ — це точка прямої $BX$, що задовольняє відношення $BXM$. Така точка $M$ існує завдяки аксіомі **II2**. Стверджуємо, що прямі $AB$ і $AM$ — різні.

У протилежному випадку точка $M$ належала б прямій $AB$, що означало б, що прямі $AB$ і $BX$ мали б дві різні спільні точки: $B$, $M$ ($B \neq M$ за аксіомою **II3**$_3$ і відношенням $BXM$), тому вони б збігалися, що означало б, що точки $A$, $B$, $X$ лежали б на одній прямій, всупереч припущенню. Однак далі, обидві прямі $AB$, $AM$ лежать в площині $\alpha$ і проходять через точку $A$ і не можуть обидві бути паралельними до прямої $a$ — (аксіома **IV**), тому принаймні одна з цих прямих перетинає пряму a в точці $Y$.



Стверджуємо, що точка $Y$ відмінна від точки $X$. Якщо б точки $X$ і $Y$ були ідентичними, то точка $X$ лежала б або на прямій $AB$, що суперечить припущенню, або лежала б на $AM$, звідки випливало б, що прямі $AM$ і $BM$ збігаються (бо мають дві спільні різні точки: $M$ і $X$) всупереч попередньому твердженню.

Маємо в кожному з випадків, що на прямій $a$ існують різні точки, що й треба було довести. ☐

Далі автор пропонує оригінальне доведення незалежності аксіоми **IV** паралельності в аксіоматиці системи $\overline{\mathsf{S}} \equiv \mathsf{S} - \mathsf{I3}_1$.

*Незалежність аксіоми* **IV** *в системі* $\overline{\mathsf{S}}$.

Довівши залежність аксіоми $\mathsf{I3}_1$ в системі **S**, ми можемо її виключити з системи **S** і спростити цю систему аксіом до $\overline{\mathsf{S}} \equiv \mathsf{S} - \mathsf{I3}_1$, яка рівносильна з системою **S**. У цій системі $\overline{\mathsf{S}}$ набагато легше довести незалежність аксіоми **IV**, ніж у всій системі **S**. Побудуємо модель для доведення незалежності аксіоми **IV**.

“точка” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “точка евклідової геометрії”
“пряма” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ 1) “евклідова пряма”
2) “довільне число, наприклад, 1/2”
“площина” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “евклідова площина”
“точка лежить на прямій” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ 1) “пряма” є евклідова пряма і
2) “точка” “лежить” на ній в сенсі евклідовому

Відношення “порядку” і “належності” залишаються як в евклідовій геометрії. Іншими словами, до евклідової геометрії ми додали “пряму” — число 1/2, отже жодна “точка” на ній не лежить. Ця модель геометрії задовольняє всі аксіоми системи $\overline{\mathsf{S}}$, за винятком аксіоми **IV**.

Аксіоми **I1**, **I2** виконуються, бо через дві різні “точки” проходить одна і тільки одна “пряма”, саме евклідова.

Аксіоми $\mathsf{I3}_2$, **I4**, **I7**, **I8** виконуються, оскільки в їхніх формулюваннях відсутнє поняття “пряма”.

Аксіома **I5** виконується, бо ця аксіома виконується в евклідовій геометрії.
Аксіома **I6** виконується для евклідових прямих, а для “прямої” приєднаної “1/2” посилання є хибним, тому **I6** для прямої “1/2” — виконується.

Всі аксіоми групи **II** і **III** виконуються для цієї моделі, оскільки вони виконуються для евклідових “прямих”, а для доданої “1/2” прямої посилання хибні.

**V** група аксіом повноти очевидно виконується як для евклідових “прямих”, так і для доданої прямої “1/2”.

Аксіома **IV** не виконується: існує нескінченна множина різних “прямих” (евклідових), що проходять через “точку” поза прямою “1/2”, які лежать в єдиній “площині”, кожна з яких не перетинає “прямої 1/2”.

Завдяки цій моделі геометрії бачимо, наскільки істотним є застосування аксіоми **IV** в доведенні залежності аксіоми $\mathbf{I3}_1$ в системі **S**. З іншого боку, аксіома $\mathbf{I3}_1$ є незалежною в неевклідовій геометрії.

Далі автор доводить незалежність аксіом першої та другої групи у введеній нею системі $\overline{\mathbf{S}} \equiv \mathbf{S} - \mathbf{I3}_1$. Ідея доведення полягає в побудові різноманітних моделей для системи аксіом $\overline{\mathbf{S}}$. Наприклад, незалежність аксіоми **I1** в системі $\overline{\mathbf{S}}$:

В евклідовій геометрії беремо довільні різні точки $A$, $B$, $C$, $D$ і визначаємо:

“точки” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “кожна з точок $A$, $B$, $C$, $D$”
“пряма” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “евклідова пряма, що не проходить через жодну з “точок” в сенсі евклідової геометрії”
“площина” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “трійка різних “точок” (невпорядкованих)”
“точка лежить на прямій” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ ““точка” лежить в сенсі евклідовому на евклідовій прямій”
“точка лежить на площині” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “є серед даної трійки “точок””
Жодна “точка” не “лежить між” двома іншими
“Відкладення кутів” не визначаємо, бо кути в цій геометрії не існують, нема саме двох різних “прямих”, що перетинаються в якісь точці.

У цій моделі не виконується аксіома **I1**, бо через дві “точки” не “проходить”, за означенням, жодна “пряма” — однак всі інші аксіоми — виконуються. В цьому легко переконатись.

Для доведення незалежності аксіоми **I4** у системі $\overline{\mathbf{S}}$ запропонована така модель: фіксуємо довільну евклідову пряму $a$ і означуємо:

“точки” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “кожна точка прямої $a$”
“пряма” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “пряма $a$”
“площина” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “фіксоване коло $\mathcal{K}$ з центром в точці $A$, яке лежить на прямій $a$”
“точка лежить на прямій” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “точка лежить в сенсі евклідовому на прямій $a$”
“точка лежить на площині” $\overset{\mathsf{def}}{=}$ “точка є центром кола $\mathcal{K}$”

Докторська праця С. Вайнльос приваблює простотою доведень незалежності аксіом першої та другої групи, аксіоми паралельності особливо. Безперечно, що простота досягається введенням системи $\overline{\mathbf{S}}$, еквівалентної системі (**S**) Г. Штайнгауза, яка еквівалентна системі (**H**) Д. Гільберта.

Викладені результати докторської праці С. Вайнльос зацікавлять не лише викладачів, які читають університетський курс “Основи геометрії”, а й широке коло студентів і любителів математики.

## Список використаної літератури

1. J. Prytula, *Doktoraty z matematyki i logili na Uniwersytecie Jana Kazimierza w latach 1920–1938*, Dzieje Matematyki Polskej, W. Więsław ed., Wrocław, 2012, pp. 137–161.
2. *Архів Національної наукової бібліотеки України імені Василя Стефаника*, Особова справа I. Вайнльос.
3. ДАЛО (Держаний архів Львівської області), ф. 26, оп. 15, сп. 661.
4. H. Steinhaus, *Podstawy geometrji*, Lwów, MCMXXV, 82 str.
5. ДАЛО, ф. 26, оп. 9, сп. 386.
6. ДАЛО, ф. 26, оп. 15, сп. 981.
7. ДАЛО, ф. 26, оп. 15, сп. 1354.
8. S. Weinlös, *Sur l’indépendance des axiomes de coïncidence et de parallélité dans un système des axiomes de la géométrie euclidienne à trois dimensions*, Fundam. Math. **11** (1928), 206–221.
9. S. Weinlös, *Remarques à propos de la note de M. Rosenthal: “Eine Bemerkung zu der Arbeit von Frl. Weinlös …”*, Fundam. Math. **15** (1930), 310–312.
10. Архів Львівського університету, ф. 119, оп. 1, сп. 1474.
11. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner Verlag, 1899.

# SALA WEINLÖS AND HER WORK ON FOUNDATIONS OF GEOMETRY

**Igor GURAN, Yaroslav PRYTULA**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: igor_guran@yahoo.com, ya.g.prytula@gmail.com*

A biographical note on Sala Weinlös and the contents of her doctoral thesis are presented. This doctoral thesis proposes an original proof of the existence of non-Euclidean geometry.

*Key words:* foundations of geometry, Hilbert axiomatics, Steinhaus axiomatics, axiom independence, parallel axiom, non-Euclidean geometry

*Стаття: надійшла до редколегії 24.04.2017*
*доопрацьована 29.09.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 34–41*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34–41*

УДК 515.12

# CONE AND JOIN IN THE ASYMPTOTIC CATEGORIES

**Mykhailo ROMANSKYI, Mykhailo ZARICHNYI**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mail: zarichnyi@yahoo.com*

We will prove that the join $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ is isomorphic to the half-space $\mathbb{R}^{n+1}_+$ and extend this result onto the class of $\gamma$-weakly convex and $\delta$-weakly concave geodesic spaces. We will also show that the cone over divergent sequence is not isomorphic to the join of this sequence and $\mathbb{R}_+$ in the asymptotic category $\mathcal{A}$.

*Key words:* join, cone, asymptotic category.

## 1. Introduction.

Asymptotic topology is a part of mathematics dealing with large scale properties of metric spaces and, more generally, coarse spaces. Backgrounds of the asymptotic topology are described in [1]. In particular, this paper contains basic functorial constructions in the coarse categories.

Some of these constructions are considered in the present note. We establish relations between the cones and joins in the asymptotic categories.

## 2. Terminology and notation.

A metric space $(X, d)$ is *proper* if every closed ball in $X$ is compact.

A map $f\colon X \to Y$ is *proper* if the preimage of every compact subset is compact. A map $f\colon X \to Y$ is *coarsely proper*, if the preimage of every bounded set id bounded.

A map $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ is *coarsely uniform*, if there is a non-decreasing function $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ such that $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ and $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y))$ for all $x, y \in X$.

A map $f$ is *coarse*, if $f$ is coarse uniform and coarse proper.

A map $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ is *asymptotically Lipschitz*, if there are $\lambda$ *i* $s$ ($\lambda > 0,\ s \geqslant 0$) such that

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x, y) + s, \quad x, y \in X.$$

The objects of the asymptotic category $\mathcal{A}$ are proper metric spaces, the morphisms of this category are proper asymptotically Lipschitz maps.

The objects of the asymptotic category $\overline{\mathcal{A}}$ are proper metric spaces (actually, one can consider all metric spaces), the morphisms of this category are coarsely proper, asymptotically Lipschitz maps.

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 54B17, 54E15

An *isomorphism* in the category $\overline{\mathcal{A}}$ is a homeomorphism $f\colon X \to Y$ such that $f$ and $f^{-1}$ are asymptotically Lipschitz. A morphism $f\colon X \to Y$ в $\overline{\mathcal{A}}$ is called a *coarse isomorphism*, if there is a morphism $g\colon Y \to X$ such that $f \circ g$ and $g \circ f$ are equivalent to the identity maps $1_X$ and $1_Y$ respectively. Metric spaces $X$ and $Y$ are *coarse isomorphic* (quasi-isometric), if there exists a coarse isomorphism $f\colon X \to Y$.

A map $f\colon X \to Y$ of metric spaces $(X, d)$ and $(Y, \rho)$ is called a *quasi-isometry* if there exist $C, D \geqslant 0$, $\lambda > 0$ such that

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) - C \leqslant \rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x, y) + C, \quad x, y \in X$$

and the $D$-neighborhood of the set $f(X)$ equals $Y$.

Let $C > 0$. A set  in a metric space  is called *C-connected* if, for every $x, y \in M$, there exist $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y \in M$ such that $d(x_i, x_{i-1}) \leqslant C$, $i = 1, \ldots, n$.

## 3. Main result.

Let $X$ be a metric space. The cone $CX$ of $X$ is defined as follows: $CX = X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_+(X)$, where $i_+\colon X \to X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+$ is the embedding defined by the formula $i_+(x) = (x, \|x\|, 0)$ (see [1]).

**Lemma 1.** *The cone $C\mathbb{R}$ is not isomorphic to the half-space $\mathbb{R}^2_+$ in the asymptotic category $\mathcal{A}$.*

*Proof.* Suppose that the cone $C\mathbb{R}$ is isomorphic (quasi-isometric) to the half-plane $\mathbb{R}^2_+$. Thus, there exists $f\colon C\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_+$ such that, for some $C \geqslant 0$ and $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) - C \leqslant \rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x, y) + C, \quad x, y \in C\mathbb{R}.$$

Pick and infinite sequence $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in $C\mathbb{R}$ and $d(x_i, x_j) = 2\lambda C + 1$ for all $i, j \in \mathbb{N}$. This is easy to construct in $C\mathbb{R}$, let, e.g.,

$$x_k = \left( k(2\lambda C + 1), (2\lambda C + 1)\frac{1 - 8k^2}{8k}, (2\lambda C + 1)\frac{\sqrt{16k^2 - 1}}{8k} \right).$$

The images $x_1, x_2, x_3, \ldots$ belong to the neighborhood $O_{f(x_1)}(2\lambda^2 C + \lambda + C)$ and

$$d(f(x_i), f(x_j)) \geqslant \frac{1}{\lambda} d(x_i, x_j) - C = \frac{1}{\lambda}(2\lambda C + 1) - C = C + \frac{1}{\lambda},$$

which provides a contradiction. □

Lemma 1 contradicts to the statement from [1] that for geodesic spaces $X$ the cone can be defined by the formula $CX = X \times \mathbb{R}_+$.

### *3.1. Kantorovich-Rubinstein metric on the join $X * \mathbb{R}_+$.*

For any two pointed metric spaces $X$ and $Y$ one can define the bouquet $X \vee Y$. We endow the bouquet with the natural quotient metric. The join $X * \mathbb{R}_+$ is the subspace of $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ of probability measures with supports of cardinality $\leq 2$. Let us define the Kantorovich-Rubinstein distance on the join $X * \mathbb{R}_+$ between two probability measures $\mu$ and $\nu$,

$$\mu = \alpha\delta_x + (1 - \alpha)\delta_y$$
$$\nu = \beta\delta_{x'} + (1 - \beta)\delta_{y'}$$
$$\|x\| = y, \ \|x'\| = y', \ \{x, x'\} \subset X, \ \{y, y'\} \subset \mathbb{R}_+,$$

$$d_{KP}(\mu,\nu)=\inf\{\varepsilon d(y',x)+(\alpha-\varepsilon)d(x,x')+(1-\beta-\varepsilon)d(y,y')$$
$$+(\beta-\alpha+\varepsilon)d(x',y)\mid \varepsilon\geqslant 0,\varepsilon\geqslant\alpha-\beta\}=$$
$$\inf\{\varepsilon(d(y',x)-d(x,x')-d(y,y')+d(x',y))+\alpha d(x,x')+(1-\beta)d(y,y')$$
$$+(\beta-\alpha)d(x',y)\ |\varepsilon\geqslant 0,\varepsilon\geqslant\alpha-\beta\}=$$
$$=\begin{cases}(\beta-\alpha)d(x',y)+\alpha d(x',x)+(1-\beta)d(y,y'), & \beta>\alpha,\\ (\alpha-\beta)d(x,y')+\beta d(x,x')+(1-\alpha)d(y,y'), & \beta\leqslant\alpha,\end{cases}=$$
$$|\alpha-\beta|(y+y')+\min\{\alpha,\beta\}d(x,x')+(1-\max\{\alpha,\beta\})|y-y'|.$$

**Lemma 2.** *The join $\mathbb{R}^n*\mathbb{R}_+$ is isomorphic to the half-space $\mathbb{R}^{n+1}_+$ in the asymptotic topology $\mathcal{A}$.*

*Proof.* Consider the map $\varphi\colon\mathbb{R}^n*\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n+1}_+$ defined by the formula

$$\varphi(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y)=(\alpha x,(1-\alpha)y)$$
$$x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}_+.$$

The inverse map $\varphi^{-1}\colon\mathbb{R}^{n+1}_+\to\mathbb{R}^n*\mathbb{R}_+$ is defined by the formula

$$\varphi^{-1}(l,t)=\frac{t}{\|l\|+t}\delta_{\frac{\|l\|+t}{t}l}+\frac{\|l\|}{\|l\|+t}\delta_{\frac{\|l\|+t}{\|l\|}t}.$$

Denoting $x=\frac{\|l\|+t}{t}l$, $\alpha=\frac{t}{\|l\|+t}$, $y=\frac{\|l\|+t}{\|l\|}t$, we obtain

$$\varphi^{-1}(\alpha x,(1-\alpha)y)=(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y).$$

Show that the map $\varphi^{-1}$ is Lipschitz.

$$d_{KP}(\varphi^{-1}(\alpha x,(1-\alpha)y);\varphi^{-1}\beta x',(1-\beta)y')=d_{KP}(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'}+(1-\beta)\delta_{y'}).$$

Without loss of generality one may assume that $y'>y$.

First, prove that $\varphi^{-1}$ is Lipschitz for $\beta>\alpha$.

$$d_{KP}(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'}+(1-\beta)\delta_{y'})=$$
$$=(\beta-\alpha)d(x',y)+\alpha d(x,x')+(1-\beta)d(y,y')\leqslant$$
$$\leqslant(\beta-\alpha)d(x',y)+d(\alpha x,\beta x')+(\beta-\alpha)\|x'\|+(1-\beta)d(y,y')=$$
$$=d(\alpha x,\beta x')+2(\beta-\alpha)y'+(\beta-\alpha)y+(1-\beta)(y'-y)$$

Taking into account that

$$(1-\beta)(y'-y)\leqslant|(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|+(\beta-\alpha)y$$

for $\beta>\alpha$ and $y'>y$, we obtain

$$\leqslant d(\alpha x,\beta x')+2(\beta-\alpha)y'+2(\beta-\alpha)y+|(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|\leqslant$$
$$\leqslant d(\alpha x,\beta x')+4(\beta-\alpha)y'+|(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|\leqslant$$

Since $(\beta-\alpha)y'\leqslant\beta y'-\alpha y\leqslant d(\alpha x,\beta x')$, we obtain

$$\leqslant 5d(\alpha x,\beta x')+d((1-\alpha)y,(1-\beta)y')\leqslant$$
$$\leqslant 5d_{\mathbb{R}^{n+1}_+}((\alpha x,(1-\alpha)y);(\beta x',(1-\beta)y')).$$

Let us check that $\varphi^{-1}$ is Lipschitz for $\beta\leqslant\alpha$.

$$d_{KP}(\alpha\delta_x+(1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'}+(1-\beta)\delta_{y'})=$$

$$= (\alpha-\beta)d(x,y') + \beta d(x,x') + (1-\alpha)d(y,y') \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha-\beta)d(x,y') + (\alpha-\beta)\|x\| + d(\alpha x,\beta x') + (1-\alpha)d(y,y') =$$

$$= d(\alpha x,\beta x') + (\alpha-\beta+1-\alpha)y' + (\alpha-\beta+\alpha-\beta-1+\alpha)y =$$

$$= d(\alpha x,\beta x') + (1-\beta)y' - (1-\alpha)y + 2(\alpha-\beta)y$$

Since $2(\alpha-\beta)y \leqslant 2d((1-\beta)y',(1-\alpha)y)$, we obtain

$$\leqslant 3d(\alpha x,\beta x') + 3d((1-\alpha)y,(1-\beta)y') =$$

$$= 3d_{\mathbb{R}_+^{n+1}}((\alpha x,(1-\alpha)y);(\beta x',(1-\beta)y')).$$

Show that $\varphi$ is Lipschitz with constant 1. Suppose that $y' \geqslant y$. Consider two cases: 1. $\beta > \alpha$ and 2. $\beta \leqslant \alpha$.

$$1.\ d_{\mathbb{R}_+^{n+1}}(\varphi(\alpha\delta_x,(1-\alpha)\delta_y);\varphi(\beta\delta_{x'},(1-\beta)\delta_{y'})) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}((\alpha x,(1-\alpha)y);(\beta x',(1-\beta)y')) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^n}(\alpha x,\beta x') + d_{\mathbb{R}_+}((1-\alpha)y,(1-\beta)y') \leqslant$$

$$\leqslant \alpha d(x,x') + (\beta-\alpha)\|x'\| + (1-\beta)(y'-y) + (\beta-\alpha)y =$$

The latter inequality is a consequence of the following two inequalities:

$$d(\alpha x,\beta x') \leqslant \alpha d(x,x') + (\beta-\alpha)\|x'\|$$

$$d((1-\alpha)y,(1-\beta)y') \leqslant (1-\beta)(y'-y) + (\beta-\alpha)y$$

$$= \alpha d(x,x') + (\beta-\alpha)d(x',y) + (1-\beta)d(y,y') =$$

$$= d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

$$2.\ \ d_{\mathbb{R}^n}(\alpha x,\beta x') + d_{\mathbb{R}_+}((1-\alpha)y,(1-\beta)y') \leqslant$$

Since $d(\alpha x,\beta x') \leqslant \beta d(x,x') + (\alpha-\beta)\|x\|$, we obtain

$$\beta d(x,x') + (\alpha-\beta)\|x\| + (1-\beta)y' - (1-\alpha)y =$$

$$= \beta d(x,x') + (\alpha-\beta)\|x\| + \alpha y' - \beta y' - \alpha y' + y' - (1-\alpha)y =$$

$$= \beta d(x,x') + (\alpha-\beta)(\|x\| + y') + (1-\alpha)(y'-y) =$$

$$= d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y,\beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

□

Lemmas 1 and 2 imply the following

**Corollary 1.** *The join $R * \mathbb{R}_+$ is not isomorphic to the cone $C\mathbb{R}$ in the asymptotic category $\overline{\mathcal{A}}$.*

**Lemma 3.** *Let $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. The join $X * \mathbb{R}_+$ is not isomorphic to the cone $CX$ in the asymptotic category $\overline{\mathcal{A}}$.*

*Proof.* Let $f\colon CX \to X * \mathbb{R}_+$ be a coarse map. The image of every segment $[x, y]$ from $CX$ is contained in the ball $O_{s(1)}(f(x))$.

Consider in $CX$ a segment $[x_0, x], d(x_0, x) = n$. Construct a sequence

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x,\ d(x_i, x_{i+1}) = 1.$$

Since the image of every segment $[x_i, x_{i+1}]$ is contained in the ball $O_{s(1)}(f(x_i))$, the image $[x_0, x]$ is a bounded set, since $X * \mathbb{R}_+$ is not $S(1)$-connected for all $S(1) > 0$.

Thus, there is no coarse uniform map of the cone $CX$ into the join $X * \mathbb{R}_+$ with unbounded image. □

Lemma 3 also holds in the asymptotic category $\mathcal{A}$.

### 4. Weakly $\gamma$-convex and weakly $\delta$-concave geodesic spaces.

A metric space $(X, d)$ is called geodesic if, for any $x, y \in X$, there is an isometric embedding $c\colon [0, d(x, y)] \to X$ such that $c(0) = x$ and $c(d(x, y)) = y$. Any isometric embedding $c_{xy}\colon [0, d(x, y)] \to X$ such that $c_{xy}(0) = x$, $c_{xy}(d(x, y)) = y$, will be called an isometric segment connecting $x \in X$ and $y \in Y$.

A geodesic space $(X, d)$ is called $\gamma$-weakly convex ($\gamma \geqslant 1$), if every pair of geodesic segments, $c_{xy}$ and $c_{xz}$, satisfies the inequality

$$d(c_{xy}(t \cdot d(x, y)), c_{xz}(t \cdot d(x, z))) \leqslant \gamma \cdot t \cdot d(y, z).$$

A geodesic space $(X, d)$ is called weakly $\delta$-concave ($0 < \delta \leqslant 1$), if every pair of geodesic segments, $c_{xy}$ and $c_{xz}$, satisfies the inequality

$$d(c_{xy}(t \cdot d(x, y)), c_{xz}(t \cdot d(x, z))) \geqslant \delta \cdot t \cdot d(y, z).$$

**Lemma 4.** *Let $X$ be a weakly $\gamma$-convex and weakly $\delta$-concave geodesic space. The join $X * \mathbb{R}_+$ is isomorphic to the space $X \times \mathbb{R}_+$ in the asymptotic category $\mathcal{A}$.*

*Proof.* The proof is similar to that of Lemma 2. Let $x_0 \in X$ be a fixed point. Define the norm $\|x\|$ of $x \in X$ as $d_X(x, x_0)$. For the sake of brevity, $c_{x_0 x}(\alpha \cdot d(x_0, x))$ will be denoted $x_\alpha$ in the sequel.

Consider the map $\varphi\colon X * \mathbb{R}_+ \to X \times \mathbb{R}_+$, defined by the formula

$$\varphi(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y) = (x_\alpha, (1-\alpha)y)$$

$$x \in X, y \in \mathbb{R}_+.$$

The inverse map $\varphi^{-1}\colon X \times \mathbb{R}_+ \to X * \mathbb{R}_+$ is defined by the formula

$$\varphi^{-1}(x_\alpha, (1-\alpha)y) = (\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y).$$

Show that $\varphi^{-1}$ is a Lipschitz map.

$$d_{KP}(\varphi^{-1}(x_\alpha, (1-\alpha)y); \varphi^{-1}(x'_\beta, (1-\beta)y') = d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

Without loss of generality we may assume that $y' > y$.

We first prove that $\varphi^{-1}$ is Lipschitz for $\beta > \alpha$.

$$\begin{aligned}
&d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'})\\
&= (\beta-\alpha)d(x', y) + \alpha d(x, x') + (1-\beta)d(y, y')\\
&\leqslant (\beta-\alpha)d(x', y) + \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + \frac{1}{\delta}(\beta-\alpha)\|x'\| + (1-\beta)d(y, y')
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (1+\frac{1}{\delta})(\beta-\alpha)y' + (\beta-\alpha)y + (1-\beta)(y'-y)$$

Taking into account that $(1-\beta)(y'-y) \leqslant |(1-\alpha)y-(1-\beta)y'| + (\beta-\alpha)y$ for $\beta > \alpha \ i \ y' > y$, the inequality cam be continued:

$$\leqslant \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (1+\frac{1}{\delta})(\beta-\alpha)y' + 2(\beta-\alpha)y + |(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (3+\frac{1}{\delta})(\beta-\alpha)y' + |(1-\alpha)y-(1-\beta)y'|$$

Since $(\beta-\alpha)y' \leqslant \beta y' - \alpha y \leqslant d(x_\alpha, x'_\beta)$, we obtain

$$\leqslant (3+\frac{2}{\delta})d(x_\alpha, x'_\beta) + d((1-\alpha)y, (1-\beta)y')$$

$$\leqslant (3+\frac{2}{\delta})d_{X\times\mathbb{R}_+}((x_\alpha, (1-\alpha)y); (x'_\beta, (1-\beta)y')).$$

Let us check that $\varphi^{-1}$ is Lipschitz for $\beta \leqslant \alpha$.

$$d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'})$$
$$= (\alpha-\beta)d(x,y') + \beta d(x,x') + (1-\alpha)d(y,y')$$
$$\leqslant (\alpha-\beta)d(x,y') + \frac{1}{\delta}(\alpha-\beta)\|x\| + \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (1-\alpha)d(y,y')$$
$$= \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (\alpha-\beta+1-\alpha)y' + (\alpha-\beta+\frac{1}{\delta}(\alpha-\beta)-1+\alpha)y$$
$$= \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (1-\beta)y' - (1-\alpha)y + (1+\frac{1}{\delta})(\alpha-\beta)y$$

Taking into account that $(\alpha-\beta)y \leqslant d((1-\beta)y', (1-\alpha)y)$, we obtain

$$\leqslant \frac{1}{\delta}d(x_\alpha, x'_\beta) + (2+\frac{1}{\delta})d((1-\alpha)y, (1-\beta)y')$$

$$\leqslant (2+\frac{1}{\delta})d_{X\times\mathbb{R}_+}((x_\alpha, (1-\alpha)y); (x'_\beta, (1-\beta)y')).$$

Show that $\varphi$ is a Lipschitz map with constant $\gamma$. Take $y' \geqslant y$. Consider two cases: 1. $\beta > \alpha$ and 2. $\beta \leqslant \alpha$.

$$1.\ d_{X\times\mathbb{R}_+}(\varphi(\alpha\delta_x, (1-\alpha)\delta_y); \varphi(\beta\delta_{x'}, (1-\beta)\delta_{y'}))$$
$$= d_{X\times\mathbb{R}_+}((x_\alpha, (1-\alpha)y); (x'_\beta, (1-\beta)y'))$$
$$= d_X(x_\alpha, x'_\beta) + d_{\mathbb{R}_+}((1-\alpha)y, (1-\beta)y')$$
$$\leqslant \gamma\alpha d(x,x') + (\beta-\alpha)\|x'\| + (1-\beta)(y'-y) + (\beta-\alpha)y$$

The latter inequality is a consequence of the following two inequalities:

$$d(x_\alpha, x'_\beta) \leqslant \gamma\alpha d(x,x') + (\beta-\alpha)\|x'\|$$

$$d((1-\alpha)y, (1-\beta)y') \leqslant (1-\beta)(y'-y) + (\beta-\alpha)y$$
$$= \gamma\alpha d(x,x') + (\beta-\alpha)d(x',y) + (1-\beta)d(y,y')$$
$$\leqslant \gamma d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}).$$

$$2.\ \ d_X(x_\alpha, x'_\beta) + d_{\mathbb{R}_+}((1-\alpha)y, (1-\beta)y')$$

Since $d_X(x_\alpha, x'_\beta) \leqslant \gamma\beta d(x,x') + (\alpha-\beta)\|x\|$, we obtain

$$\begin{aligned} &\leqslant \gamma\beta d(x,x') + (\alpha-\beta)\|x\| + (1-\beta)y' - (1-\alpha)y \\ &= \gamma\beta d(x,x') + (\alpha-\beta)\|x\| + \alpha y' - \beta y' - \alpha y' + y' - (1-\alpha)y \\ &= \gamma\beta d(x,x') + (\alpha-\beta)(\|x\| + y') + (1-\alpha)(y'-y) \\ &\leqslant \gamma d_{KP}(\alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y, \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}). \end{aligned}$$

□

## 5. Remarks and open questions.

It was asked in [1] whether the cone $CX$ and the join $X * \mathbb{R}_+$ are isomorphic. Corollary 1 provides a negative answer to this question; in particular, these spaces are not isomorphic for $X = \mathbb{R}$. Lemma 3 contains an example of a non-geodesic space $X$ for which these spaces are not isomorphic.

This leads to the following questions.

1. Is there a non-bounded metric space $X$ for which the $CX$ and the join $X * \mathbb{R}_+$ are isomorphic in the asymptotic category $\mathcal{A}$?
2. Are the join $X * \mathbb{R}_+$ and $X \times \mathbb{R}_+$ isomorphic for all geodesic spaces $X$? For $X = \mathbb{R}^n_+$, the answer is given by Lemma 2.
3. Let $\mathbb{H}$ denote the hyperbolic space. Are the spaces $\mathbb{H}\times\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{H}*\mathbb{R}_+$ isomorphic?

## REFERENCES

1. A. Dranishnikov, *Asymptotic topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), no. 6, 71–116.
2. A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension*, Topol. Appl. **140** (2004), no. 2-3, 203–225.
3. I. Protasov aqnd M. Zarichnyi, *General asymptology*, VNTL Publ. Math. Studies, Monograph Series, Vol. **XII**, Lviv, 2007.
4. M. Sawicki, *Absolute extensors and absolute neighborhood extensors in asymptotic categories*, Topol. Appl. **150** (2005), no. 1-3, 59–78.
5. В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Москва, 2006.

*Стаття: надійшла до редколегії 10.11.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83*

# КОНУС І ДЖОЙ В АСИМПТОТИЧНИХ КАТЕГОРІЯХ

**Михайло РОМАНСЬКИЙ, Михайло ЗАРІЧНИЙ**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mail: zarichnyi@yahoo.com*

Доведено, що джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпросторові $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Цей результат поширено на клас $\gamma$-слабко опуклих і $\delta$-слабко вгнутих геодезійних просторів. Доведено також, що конус над розбіжною послідовністю не ізоморфний джойнові цієї послідовності і $\mathbb{R}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

*Ключові слова:* джойн, конус, асимптотична категорія.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 42–57*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 42–57*

УДК 515.122.25+512.536

# ON FEEBLY COMPACT SEMITOPOLOGICAL SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUPS OF A BOUNDED FINITE RANK

**Oleg GUTIK**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: o_ gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com*

We study feebly compact shift-continuous $T_1$-topologies on the symmetric inverse semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ of finite transformations of the rank $\leqslant n$. For any positive integer $n \geqslant 2$ and any infinite cardinal $\lambda$ a Hausdorff countably pracompact non-compact shift-continuous topology on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is constructed. We show that for an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ for a $T_1$-topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ the following conditions are equivalent: $(i)$ $\tau$ is countably pracompact; $(ii)$ $\tau$ is feebly compact; $(iii)$ $\tau$ is $d$-feebly compact; $(iv)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is H-closed; $(v)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$-compact for the discrete countable space $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$; $(vi)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is $\mathbb{R}$-compact; $(vii)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is infra H-closed. Also we prove that for an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ every shift-continuous semiregular feebly compact $T_1$-topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is compact.

*Key words:* semigroup, inverse semigroup, semitopological semigroup, compact, countably compact, countably pracompact, feebly compact, H-closed, infra H-closed, $X$-compact, semiregular space.

We follow the terminology of [6, 7, 8, 26, 27]. If $X$ is a topological space and $A \subseteq X$, then by $\operatorname{cl}_X(A)$ and $\operatorname{int}_X(A)$ we denote the topological closure and interior of $A$ in $X$, respectively. By $|A|$ we denote the cardinality of a set $A$, by $A \triangle B$ the symmetric difference of sets $A$ and $B$, by $\mathbb{N}$ the set of positive integers, and by $\omega$ the first infinite cardinal.

A semigroup $S$ is called *inverse* if every $a$ in $S$ possesses an unique inverse $a^{-1}$, i.e. if there exists an unique element $a^{-1}$ in $S$ such that

$$aa^{-1}a = a \qquad \text{and} \qquad a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}.$$

A map which associates to any element of an inverse semigroup its inverse is called the *inversion*.

A *topological* (*inverse*) *semigroup* is a topological space together with a continuous semigroup operation (and an inversion, respectively). Obviously, the inversion defined on a topological inverse semigroup is a homeomorphism. If $S$ is a semigroup (an inverse

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 22A15, 54D45, 54H10, 54A10, 54D30, 54D40.

semigroup) and $\tau$ is a topology on $S$ such that $(S,\tau)$ is a topological (inverse) semigroup, then we shall call $\tau$ a *semigroup* (*inverse*) *topology* on $S$. A *semitopological semigroup* is a topological space together with a separately continuous semigroup operation. If $S$ is a semigroup (an inverse semigroup) and $\tau$ is a topology on $S$ such that $(S,\tau)$ is a semitopological semigroup (with continuous inversion), then we shall call $\tau$ a *shift-continuous* (*inverse*) *topology* on $S$.

If $S$ is a semigroup, then by $E(S)$ we denote the subset of all idempotents of $S$. On the set of idempotents $E(S)$ there exists a natural partial order: $e \leqslant f$ *if and only if* $ef = fe = e$. A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents. A *topological* (*semitopological*) *semilattice* is a topological space together with a continuous (separately continuous) semilattice operation. If $S$ is a semilattice and $\tau$ is a topology on $S$ such that $(S,\tau)$ is a topological semilattice, then we shall call $\tau$ a *semilattice topology* on $S$.

Every inverse semigroup $S$ admits a partial order:

$$a \preccurlyeq b \qquad \text{if and only if there exists} \qquad e \in E(S) \quad \text{such that} \quad a = eb.$$

We shall say that $\preccurlyeq$ is the *natural partial order* on $S$.

Let $\lambda$ be an arbitrary non-zero cardinal. A map $\alpha$ from a subset $D$ of $\lambda$ into $\lambda$ is called a *partial transformation* of $\lambda$. In this case the set $D$ is called the *domain* of $\alpha$ and is denoted by $\operatorname{dom}\alpha$. The image of an element $x \in \operatorname{dom}\alpha$ under $\alpha$ is denoted by $x\alpha$ Also, the set $\{x \in \lambda \colon y\alpha = x \text{ for some } y \in Y\}$ is called the *range* of $\alpha$ and is denoted by $\operatorname{ran}\alpha$. The cardinality of $\operatorname{ran}\alpha$ is called the *rank* of $\alpha$ and is denoted by $\operatorname{rank}\alpha$. For convenience we denote by $\varnothing$ the empty transformation, a partial mapping with $\operatorname{dom}\varnothing = \operatorname{ran}\varnothing = \varnothing$.

Let $\mathscr{I}_\lambda$ denote the set of all partial one-to-one transformations of $\lambda$ together with the following semigroup operation:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{if} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \qquad \text{for} \quad \alpha,\beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

The semigroup $\mathscr{I}_\lambda$ is called the *symmetric inverse semigroup* over the cardinal $\lambda$ (see [7]). The symmetric inverse semigroup was introduced by V. V. Wagner [29] and it plays a major role in the theory of semigroups.

Put $\mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \colon \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\}$, for $n = 1,2,3,\ldots$. Obviously, $\mathscr{I}_\lambda^n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ are inverse semigroups, $\mathscr{I}_\lambda^n$ is an ideal of $\mathscr{I}_\lambda$, for each $n = 1,2,3,\ldots$. The semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ is called the *symmetric inverse semigroup of finite transformations of the rank* $\leqslant n$. By

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array}\right)$$

we denote a partial one-to-one transformation which maps $x_1$ onto $y_1$, $x_2$ onto $y_2$, $\ldots$, and $x_n$ onto $y_n$. Obviously, in such case we have $x_i \neq x_j$ and $y_i \neq y_j$ for $i \neq j$ $(i,j = 1,2,3,\ldots,n)$. The empty partial map $\varnothing \colon \lambda \rightharpoonup \lambda$ is denoted by $\mathbf{0}$. It is obvious that $\mathbf{0}$ is zero of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Let $\lambda$ be a non-zero cardinal. On the set $B_\lambda = (\lambda \times \lambda) \cup \{0\}$, where $0 \notin \lambda \times \lambda$, we define the semigroup operation “ $\cdot$ ” as follows

$$(a,b)\cdot(c,d) = \left\{\begin{array}{ll} (a,d), & \text{if } b = c; \\ 0, & \text{if } b \neq c, \end{array}\right.$$

and $(a,b)\cdot 0 = 0 \cdot (a,b) = 0 \cdot 0 = 0$ for $a,b,c,d \in \lambda$. The semigroup $B_\lambda$ is called the *semigroup of* $\lambda \times \lambda$*-matrix units* (see [7]). Obviously, for any cardinal $\lambda > 0$, the semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units $B_\lambda$ is isomorphic to $\mathscr{I}_\lambda^1$.

A subset $A$ of a topological space $X$ is called *regular open* if $\operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(A)) = A$.

We recall that a topological space $X$ is said to be

- *functionally Hausdorff* if for every pair of distinct points $x_1, x_2 \in X$ there exists a continuous function $f\colon X \to [0,1]$ such that $f(x_1) = 0$ and $f(x_2) = 1$;
- *semiregular* if $X$ has a base consisting of regular open subsets;
- *quasiregular* if for any non-empty open set $U \subset X$ there exists a non-empty open set $V \subset U$ such that $\operatorname{cl}_X(V) \subseteq U$;
- *compact* if each open cover of $X$ has a finite subcover;
- *sequentially compact* if each sequence $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of $X$ has a convergent subsequence in $X$;
- *countably compact* if each open countable cover of $X$ has a finite subcover;
- *H-closed* if $X$ is a closed subspace of every Hausdorff topological space in which it is contained;
- *infra H-closed* provided that any continuous image of $X$ into any first countable Hausdorff space is closed (see [20]);
- *countably compact at a subset* $A \subseteq X$ if every infinite subset $B \subseteq A$ has an accumulation point $x$ in $X$;
- *countably pracompact* if there exists a dense subset $A$ in $X$ such that $X$ is countably compact at $A$;
- *feebly compact* if each locally finite open cover of $X$ is finite;
- *d-feebly compact* (or *DFCC*) if every discrete family of open subsets in $X$ is finite (see [24]);
- *pseudocompact* if $X$ is Tychonoff and each continuous real-valued function on $X$ is bounded;
- $Y$*-compact* for some topological space $Y$, if $f(X)$ is compact, for any continuous map $f\colon X \to Y$.

According to Theorem 3.10.22 of [8], a Tychonoff topological space $X$ is feebly compact if and only if $X$ is pseudocompact. Also, a Hausdorff topological space $X$ is feebly compact if and only if every locally finite family of non-empty open subsets of $X$ is finite. Every compact space and every sequentially compact space are countably compact, every countably compact space is countably pracompact, every countably pracompact space is feebly compact (see [3]), every H-closed space is feebly compact too (see [15]). Also, every space feebly compact is infra H-closed by Proposition 2 and Theorem 3 of [20].

Topological properties of an infinite (semi)topological semigroup $\lambda\times\lambda$-matrix units were studied in [12, 13, 14]. In [13] it was shown that on the infinite semitopological semigroup $\lambda\times\lambda$-matrix units $B_\lambda$ there exists a unique Hausdorff topology $\tau_c$ such that $(B_\lambda, \tau_c)$ is a compact semitopological semigroup and it was also shown that every pseudocompact Hausdorff shift-continuous topology $\tau$ on $B_\lambda$ is compact. Also, in [13] it was proved that every non-zero element of a Hausdorff semitopological semigroup $\lambda\times\lambda$-matrix units $B_\lambda$ is an isolated point in the topological space $B_\lambda$. In [12] it was shown that the infinite semigroup $\lambda\times\lambda$-matrix units $B_\lambda$ cannot be embedded into a compact Hausdorff topological semigroup, every Hausdorff topological inverse semigroup $S$ that contains $B_\lambda$ as a subsemigroup, contains $B_\lambda$ as a closed subsemigroup, i.e., $B_\lambda$ is *algebraically complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. This result in [11] was extended onto so called inverse semigroups with *tight ideal series* and, as a corollary, onto the semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$. Also, in [16] it was proved that for every positive integer $n$ the semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ is *algebraically h-complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups, i.e., every homomorphic image of $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ is algebraically complete in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. In the paper [17] this result was extended onto the class of Hausdorff semitopological inverse semigroups and it was shown therein that for an infinite cardinal $\lambda$ the semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ admits a unique Hausdorff topology $\tau_c$ such that $(\mathscr{I}_{\lambda}^{n},\tau_c)$ is a compact semitopological semigroup. Also, it was proved in [17] that every countably compact Hausdorff shift-continuous topology $\tau$ on $B_{\lambda}$ is compact. In [14] it was shown that a topological semigroup of finite partial bijections $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ with a compact subsemigroup of idempotents is absolutely H-closed (i.e., every homomorphic image of $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ is algebraically complete in the class of Hausdorff topological semigroups) and any countably compact topological semigroup does not contain $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ as a subsemigroup for infinite cardinal $\lambda$. In [14] there were given sufficient conditions onto a topological semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{1}$ to be non-H-closed. Also in [10] it was proved that an infinite semitopological semigroup of $\lambda\times\lambda$-matrix units $B_{\lambda}$ is H-closed in the class of semitopological semigroups if and only if the space $B_{\lambda}$ is compact.

For an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary non-zero cardinal $\lambda$ we put

$$\exp_n\lambda=\{A\subseteq\lambda\colon |A|\leqslant n\}.$$

It is obvious that for any positive integer $n$ and any non-zero cardinal $\lambda$ the set $\exp_n\lambda$ with the binary operation $\cap$ is a semilattice. Later in this paper by $\exp_n\lambda$ we shall denote the semilattice $(\exp_n\lambda,\cap)$. It is easy to see that $\exp_n\lambda$ is isomorphic to the subsemigroup of idempotents (the band) of the semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ for any positive integer $n$. We observe that for every positive integer $n$ the band of the semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ is isomorphic to the semilattice $\exp_n\lambda$ by the mapping $E(\mathscr{I}_{\lambda}^{n})\ni\varepsilon\mapsto\operatorname{dom}\varepsilon$.

In the paper [18] feebly compact shift-continuous topologies $\tau$ on the semilattice $\exp_n\lambda$ were studied, and all compact semilattice topologies on $\exp_n\lambda$ were described. In [18] it was whown that for an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ for a $T_1$-topology $\tau$ on $\exp_n\lambda$ the following conditions are equivalent: $(i)$ $(\exp_n\lambda,\tau)$ is a compact topological semilattice; $(ii)$ $(\exp_n\lambda,\tau)$ is a countably compact topological semilattice; $(iii)$ $(\exp_n\lambda,\tau)$ is a feebly compact topological semilattice; $(iv)$ $(\exp_n\lambda,\tau)$ is a compact semitopological semilattice; $(v)$ $(\exp_n\lambda,\tau)$ is a countably compact semitopological semilattice. Also, in [18] there was constructed a countably pracompact H-closed quasiregular non-semiregular topology $\tau_{\mathsf{fc}}^{2}$ such that $\left(\exp_2\lambda,\tau_{\mathsf{fc}}^{2}\right)$ is a semitopological semilattice with the discontinuous semilattice operation and it was proved that for an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ a semiregular feebly compact semitopological semilattice $\exp_n\lambda$ is a compact topological semilattice. In [19] it was shown that for an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ for a $T_1$-topology $\tau$ on $\exp_n\lambda$ the following conditions are equivalent: $(i)$ $\tau$ is countably pracompact; $(ii)$ $\tau$ is feebly compact; $(iii)$ $\tau$ is $d$-feebly compact; $(iv)$ $(\exp_n\lambda,\tau)$ is an H-closed space.

This paper is a continuation of [11, 13, 16, 17]. We study feebly compact shift-continuous $T_1$-topologies on the semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$. For any positive integer $n\geqslant 2$ and any infinite cardinal $\lambda$ a Hausdorff countably pracompact non-compact shift-continuous topology on $\mathscr{I}_{\lambda}^{n}$ is constructed. We show that for an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ for a $T_1$-topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ the following conditions are equivalent: $(i)$ $\tau$ is countably pracompact; $(ii)$ $\tau$ is feebly compact; $(iii)$ $\tau$ is $d$-feebly compact; $(iv)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is H-closed; $(v)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is $\mathbb{N}_\mathfrak{d}$-compact for the discrete countable space $\mathbb{N}_\mathfrak{d}$; $(vi)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is $\mathbb{R}$-compact; $(vii)$ $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is infra H-closed. Also we prove that for an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ every shift-continuous semiregular feebly compact $T_1$-topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is compact.

Later we shall assume that $n$ is an arbitrary positive integer.

For every element $\alpha$ of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ we put

$$\uparrow_l\alpha=\left\{\beta\in\mathscr{I}_\lambda^n\colon \alpha\alpha^{-1}\beta=\alpha\right\} \qquad \text{and} \qquad \uparrow_r\alpha=\left\{\beta\in\mathscr{I}_\lambda^n\colon \beta\alpha^{-1}\alpha=\alpha\right\}.$$

Then Proposition 5 of [17] implies that $\uparrow_l\alpha=\uparrow_r\alpha$ and by Lemma 6 of [23, Section 1.4] we have that $\alpha\preccurlyeq\beta$ if and only if $\beta\in\uparrow_l\alpha$ for $\alpha,\beta\in\mathscr{I}_\lambda^n$. Hence we put $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha=\uparrow_l\alpha=\uparrow_r\alpha$ for any $\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^n$.

The definition of the semigroup operation of $\mathscr{I}_\lambda^n$ implies the following trivial lemma.

**Lemma 1.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer and $\lambda$ be any cardinal. Then for any elements $\alpha$ and $\beta$ of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ the sets $\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\beta$ and*

$$\downarrow_{\preccurlyeq}\alpha=\{\gamma\in\mathscr{I}_\lambda^n\colon \gamma\preccurlyeq\alpha\}$$

*are finite.*

*Proof.* For any elements $\alpha$ and $\beta$ of $\mathscr{I}_\lambda^n$ we have that

$$\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\beta=\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\cap\mathscr{I}_\lambda^n\beta=\{\gamma\in\mathscr{I}_\lambda^n\colon\ \operatorname{dom}\gamma\subseteq\operatorname{dom}\alpha \ \text{ and } \ \operatorname{ran}\gamma\subseteq\operatorname{ran}\beta\}.$$

Since the sets $\operatorname{dom}\alpha$ and $\operatorname{ran}\beta$ are finite, $\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\beta$ is finite, as well.

For every $\gamma\in\downarrow_{\preccurlyeq}\alpha$ the definition of the natural partial order $\preccurlyeq$ on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ (see [23, Chapter 1]) implies that the finite partial map $\gamma$ is a restriction of the finite partial map $\alpha$ onto the set $A=\operatorname{dom}\alpha\cap\operatorname{dom}\varepsilon$, where $\varepsilon$ is an idempotent of $\mathscr{I}_\lambda^n$ such that $\gamma=\varepsilon\alpha$. This implies that the set $\downarrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is finite. □

**Lemma 2.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer, $\lambda$ be any infinite cardinal and $\tau$ be a shift-continuous $T_1$-topology on semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Then for every element $\alpha$ of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is open-and-closed in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$, the space $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is functionally Hausdorff and hence it is quasi-regular.*

*Proof.* Fix an arbitrary $\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^n$. Then $\alpha\in\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\alpha$ and

$$\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\alpha=\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\cap\mathscr{I}_\lambda^n\alpha=\alpha\alpha^{-1}\mathscr{I}_\lambda^n\cap\mathscr{I}_\lambda^n\alpha^{-1}\alpha=\alpha\alpha^{-1}\mathscr{I}_\lambda^n\alpha^{-1}\alpha,$$

because $\mathscr{I}_\lambda^n$ is an inverse semigroup. Since the topology $\tau$ is $T_1$, Lemma 1 implies that the set $(\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\alpha)\setminus\{\alpha\}$ is closed in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$. By the separate continuity of the semigroup operation in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ we have that there exists an open neighbourhood $U(\alpha)$ of the point $\alpha$ in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ such that

$$\alpha\alpha^{-1}\cdot U(\alpha)\cdot\alpha^{-1}\alpha\subseteq\mathscr{I}_\lambda^n\setminus\left((\alpha\mathscr{I}_\lambda^n\cup\mathscr{I}_\lambda^n\alpha)\setminus\{\alpha\}\right).$$

The last inclusion implies that $U(\alpha)\subseteq\uparrow\alpha$. Again, since the semigroup operation in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is separately continuous the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is open in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ as a full preimage of $U(\alpha)$ and the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is closed in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ as a full preimage of the singleton set $\{\alpha\}$.

Fix arbitrary distinct elements $\alpha$ and $\beta$ of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Then either $\alpha$ and $\beta$ are comparable or not with respect to the natural partial order on $\mathscr{I}_\lambda^n$. If $\alpha \preccurlyeq \beta$ or $\alpha$ and $\beta$ are incomparable in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \preccurlyeq)$ then it is obvious that the map $g\colon \mathscr{I}_\lambda^n \to [0,1]$ defined by the formula

$$(\gamma)f = \begin{cases} 1, & \text{if } \gamma \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta; \\ 0, & \text{if } \gamma \notin {\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta \end{cases}$$

is continuous. We observe that quasi-regularity of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ follows from the fact that every non-empty open subset $U$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ contains a maximal element $\delta$ with respect to the natural partial order $\preccurlyeq$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ such that ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and hence, since $\tau$ is a $T_1$-topology, $\{\alpha\} \subseteq U$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. □

A topological space $X$ is called

- *totally disconnected* if the connected components in $X$ are singleton sets;
- *scattered* if $X$ does not contain non-empty dense in itself subset, which is equivalent that every non-empty subset of $X$ has an isolated point in itself.

Lemma 2 implies the following corollary:

**Corollary 1.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer, $\lambda$ be any infinite cardinal and $\tau$ be a shift-continuous $T_1$-topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Then $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is a totally disconnected scattered space.*

A partial order $\leqslant$ on a topological space $X$ is called closed if the relation $\leqslant$ is a closed subset of $X \times X$ in the product topology. In this case $(X, \leqslant)$ is called a *pospace* [9].

Lemma 2 and Proposition VI-1.4 from [9] imply the following corollary:

**Corollary 2.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer, $\lambda$ be any infinite cardinal and $\tau$ be a shift-continuous $T_1$-topology on semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Then $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau, \preccurlyeq)$ is a pospace*

The following example shows that the statement of Lemma 2 does not hold in the case when $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is a $T_0$-space.

**Example 1.** For an arbitrary positive integer $n$ and an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ we define a topology $\tau_0$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ in the following way:

$(i)$ all non-zero elements of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ are isolated points in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_0)$; and
$(ii)$ $\mathscr{I}_\lambda^n$ is the unique open neighbourhood of zero in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_0)$.

Simple verifications show that the semigroup operation and inversion on $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_0)$ are continuous.

We need the following example from [17].

**Example 2** ([17])**.** Fix an arbitrary positive integer $n$. The following family

$$\mathscr{B}_{\mathsf{c}} = \big\{U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus ({\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_k)\colon \\ \alpha_i \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus \{\alpha\}, \alpha, \alpha_i \in \mathscr{I}_\lambda^n, i = 1, \ldots, k\big\}$$

determines a base of the topology $\tau_{\mathsf{c}}$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$. By Proposition 10 from [17], $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_{\mathsf{c}})$ is a Hausdorff compact semitopological semigroup with continuous inversion.

By Theorem 7 from [17], for an arbitrary infinite cardinal $\lambda$ and any positive integer $n$ every countably compact Hausdorff semitopological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ is topologically isomorphic to $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau_{\mathsf{c}})$. By Corollary 1 the topological space $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau_{\mathsf{c}})$ is scattered. Since every countably compact scattered $T_3$-space is sequentially compact (see [28, Theorem 5.7]), $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau_{\mathsf{c}})$ is a sequentially compact space.

Next we summarise the above results in the following theorem.

**Theorem 1.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer, $\lambda$ be any infinite cardinal and $\tau$ be a $T_1$-shift continuous topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Then the following conditions are equivalent:*

*(i)* *$\tau$ is compact;*
*(ii)* *$\tau=\tau_{\mathsf{c}}$;*
*(iii)* *$\tau$ is countably compact;*
*(iv)* *$\tau$ is sequentially compact.*

Since every feebly compact Hausdorff topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^1$ is compact, it is natural to ask: *Does there exist a shift-continuous Hausdorff non-compact feebly compact topology $\tau$ on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ for $n\geqslant 2$?*

The following example shows that for any infinite cardinal $\lambda$ and any positive integer $n\geqslant 2$ there exists a Hausdorff feebly compact topology $\tau$ on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ such that $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is a non-compact semitopological semigroup.

**Example 3.** Let $\lambda$ be any infinite cardinal and $\tau_{\mathsf{c}}^2=\tau_{\mathsf{c}}$ be the topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^2$ which is defined in Example 2. We construct a stronger topology $\tau_{\mathsf{fc}}^2$ on $\mathscr{I}_\lambda^2$ then $\tau_{\mathsf{c}}^2$ in the following way. By $\pi\colon\lambda\to\mathscr{I}_\lambda^2\colon a\mapsto\varepsilon_a$ we denote the map which assigns to any element $a\in\lambda$ the identity partial map $\varepsilon_a\colon\{a\}\to\{a\}$. Fix an arbitrary infinite subset $A$ of $\lambda$. For every non-zero element $x\in\mathscr{I}_\lambda^2$ we assume that the base $\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(x)$ of the topology $\tau_{\mathsf{fc}}^2$ at the point $x$ coincides with the base of the topology $\tau_{\mathsf{c}}^2$ at $x$, and

$$\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(0)=\big\{U_B(\mathbf{0})=U(\mathbf{0})\setminus((B)\pi\cup\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}):U(0)\in\mathscr{B}_{\mathsf{c}}^2(0),\alpha_1,\ldots,\alpha_s\in\mathscr{I}_\lambda^2\setminus\{\mathbf{0}\}\\ \text{and } B\subseteq\lambda \text{ such that } |A\triangle B|<\infty\big\}$$

form a base of the topology $\tau_{\mathsf{fc}}^2$ at zero $\mathbf{0}$ of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^2$. Simple verifications show that the family $\big\{\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(x)\colon x\in\mathscr{I}_\lambda^2\big\}$ satisfies conditions **(BP1)–(BP4)** of [8], and hence $\tau_{\mathsf{fc}}^2$ is a Hausdorff topology on $\mathscr{I}_\lambda^2$.

**Proposition 1.** *Let $\lambda$ be an arbitrary infinite cardinal. Then $\big(\mathscr{I}_\lambda^2,\tau_{\mathsf{fc}}^2\big)$ is a countably pracompact semitopological semigroup with continuous inversion.*

*Proof.* It is obvious that the inversion in $\big(\mathscr{I}_\lambda^2,\tau_{\mathsf{fc}}^2\big)$ is continuous and later we shall show that all translations in $\big(\mathscr{I}_\lambda^2,\tau_{\mathsf{fc}}^2\big)$ are continuous maps. We consider the following possible cases.

**(1)** $\mathbf{0}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$. For every basic open neighbourhood $U_B(\mathbf{0})$ of zero in $\big(\mathscr{I}_\lambda^2,\tau_{\mathsf{fc}}^2\big)$ we have that

$$U_B(\mathbf{0})\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot U_B(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}\subset U_\pi(\mathbf{0}).$$

**(2)** $\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$. For all basic open neighbourhoods $U_B(\mathbf{0})$ and $U_\alpha(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ of zero and an element $\alpha\neq\mathbf{0}$ in $\big(\mathscr{I}_\lambda^2,\tau_{\mathsf{fc}}^2\big)$, respectively, we have that

$$U_\alpha(\beta_1,\ldots,\beta_k)\cdot\mathbf{0}=\{\mathbf{0}\}\subset U_B(\mathbf{0}).$$

Let $V_B(\mathbf{0}) = \mathscr{I}_\lambda^2 \setminus ({\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_k \cup (B)\pi)$ be an arbitrary basic neighbourhood of zero in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$. Without loss of generality we may assume that

$$\operatorname{rank}\alpha_1 = \ldots = \operatorname{rank}\alpha_k = 1 \leqslant \operatorname{rank}\alpha.$$

Put

$$\mathcal{C}_l = \big\{\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^2 \colon \operatorname{rank}\gamma = 1 \text{ such that } \alpha\gamma = \alpha_i \text{ for some } i = 1, \ldots, k \\ \text{or } \alpha\gamma \in E(\mathscr{I}_\lambda^2) \setminus \{\mathbf{0}\}\big\}.$$

The definition of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^2$ implies that the set $\mathcal{C}_l$ is finite. Then we have that $\alpha \cdot W_B(0) \subseteq V_B(0)$ for $W_B(0) = \mathscr{I}_\lambda^2 \setminus \bigcup\left\{{\uparrow_{\preccurlyeq}}\gamma \colon \gamma \in \mathcal{C}_l\right\}$.

**(3)** $\mathbf{0} \cdot \alpha = \mathbf{0}$. For all basic open neighbourhoods $U_B(\mathbf{0})$ and $U_\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ of zero and an element $\alpha \neq \mathbf{0}$ in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$, respectively, we have that

$$\mathbf{0} \cdot U_\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \{\mathbf{0}\} \subset U_B(\mathbf{0}).$$

Let $V_B(\mathbf{0}) = \mathscr{I}_\lambda^2 \setminus ({\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_k \cup (B)\pi)$ be an arbitrary basic neighbourhood of zero in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$. Without loss of generality we may assume that

$$\operatorname{rank}\alpha_1 = \ldots = \operatorname{rank}\alpha_k = 1 \leqslant \operatorname{rank}\alpha.$$

Put

$$\mathcal{C}_r = \big\{\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^2 \colon \operatorname{rank}\gamma = 1 \text{ such that } \gamma\alpha = \alpha_i \text{ for some } i = 1, \ldots, k \\ \text{or } \gamma\alpha \in E(\mathscr{I}_\lambda^2) \setminus \{\mathbf{0}\}\big\}.$$

The definition of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^2$ implies that the set $\mathcal{C}_r$ is finite. Then we have that $W_B(0) \cdot \alpha \subseteq V_B(0)$ for $W_B(0) = \mathscr{I}_\lambda^2 \setminus \bigcup\left\{{\uparrow_{\preccurlyeq}}\gamma \colon \gamma \in \mathcal{C}_r\right\}$.

**(4)** $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ and $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta = \operatorname{rank}\gamma$, i.e., $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\beta$. Then for any open neighbourhoods $U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ of the points $\alpha, \beta$ and $\gamma$ in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$, respectively, we have that

$$U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cdot \beta = \alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m).$$

**(5)** $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ and $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\gamma = 1$ and $\operatorname{rank}\beta = 2$, i.e., $\operatorname{ran}\alpha \subsetneqq \operatorname{dom}\beta$. Then for any open neighbourhoods $U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ and $U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ of the points $\beta$ and $\gamma$ in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$, respectively, we have that

$$\alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m).$$

Let $U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ be an arbitrary open neighbourhood of the point $\gamma$ in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ for some $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\gamma$, i.e., $\operatorname{rank}\gamma_1 = \ldots = \operatorname{rank}\gamma_k = 2$. Put

$$\mathcal{Q} = \left\{\delta \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \colon \delta\beta \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}\right\}.$$

The definition of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^2$ implies that the set $\mathcal{Q}$ is finite. Then we have that

$$U_\alpha(\mathcal{Q}) \cdot \beta \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$$

for $U_\alpha(\mathcal{Q}) = {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus \left\{\delta \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \colon \delta \in \mathcal{Q}\right\}$.

**(6)** $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ and $\operatorname{rank}\beta = \operatorname{rank}\gamma = 1$ and $\operatorname{rank}\alpha = 2$, i.e., $\operatorname{dom}\beta \subsetneqq \operatorname{ran}\alpha$. In this case the proof of separate continuity of the semigroup operation on $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is dual to case **(5)**.

**(7)** $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$, $\operatorname{rank} \gamma = 1$ and $\operatorname{rank} \alpha = \operatorname{rank} \beta = 2$. Then $\alpha$ and $\beta$ are isolated points in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ and hence

$$\alpha \cdot \beta = \gamma \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_k),$$

for any basic open neighbourhood $U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ of $\gamma$ in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$.

**(8)** $\alpha \cdot \beta = \mathbf{0}$. Then $\operatorname{dom} \beta \cap \operatorname{ran} \alpha = \varnothing$ and hence

$$U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cdot \beta = \alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \{\mathbf{0}\} \subset U_B(\mathbf{0}),$$

for any basic open neighbourhoods $U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ and $U_B(\mathbf{0})$ of $\alpha$, $\beta$ and zero $\mathbf{0}$ in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$, respectivelly.

Thus we have shown that the translations in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ are continuous maps.

Also, the definition of the topology $\tau_{\mathsf{fc}}^2$ on $\mathscr{I}_\lambda^2$ implies that the set $\mathscr{I}_\lambda^2 \setminus \mathscr{I}_\lambda^1$ is dense in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ and every infinite subset of $\mathscr{I}_\lambda^2 \mathscr{I}_\lambda^1$ has an accumulation point in $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$, and hence the space $\left(\mathscr{I}_\lambda^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is countably pracompact. □

**Proposition 2.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer and $\lambda$ be an arbitrary infinite cardinal. Then for every $d$-feebly compact shift-continuous $T_1$-topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ the subset $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is dense in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$.*

*Proof.* Since every quasi-regular $d$-feebly compact space is feebly compact (see [19, Theorem 2]), by Lemma 2 the topology $\tau$ is feebly compact.

Suppose to the contrary that there exists a feebly compact shift-continuous $T_1$-topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ such that $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is not dense in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Then there exists a point $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ of the space $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ such that $\alpha \notin \operatorname{cl}_{\mathscr{I}_\lambda^n} \left(\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}\right)$. This implies that there exists an open neighbourhood $U(\alpha)$ of $\alpha$ in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ such that $U(\alpha) \cap \left(\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}\right) = \varnothing$. Lemma 2 implies that ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and hence by Theorem 14 of [4], ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is feebly compact. This implies that without loos of generality we may assume that $U(\alpha) \subseteq {\uparrow_{\preccurlyeq}}x \cap \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$. By the definition of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ we have that there exists a point $\beta \in U(\alpha)$ such that ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta \cap U(\alpha) = \{\beta\}$. Again, by Lemma 2 we have that ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and hence by Theorem 14 of [4], ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ is feebly compact. Moreover, our choice implies that $\beta$ is an isolated point in the subspace ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$.

Suppose that

$$\beta = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix},$$

for some finite subsets $\{x_1, \cdots, x_k\}$ and $\{y_1, \cdots, y_k\}$ of distinct points from $\lambda$. Then the above arguments imply that $k < n$. Put $p = n - k$. Next we fix an arbitrary infinite sequence $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of distinct elements of the set $\lambda \setminus (\{x_1, \cdots, x_k\} \cup \{y_1, \cdots, y_k\})$.

For arbitrary positive integer $j$ we put

$$\beta_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k & a_{p(j-1)+1} & \cdots & a_{pj} \\ y_1 & \cdots & y_k & a_{p(j-1)+1} & \cdots & a_{pj} \end{pmatrix}.$$

Then $\beta_j \in \mathscr{I}_\lambda^n$ for any positive integer $j$. Moreover, we have that $\beta_j \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ and $\beta_j \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ for any positive integer $j$.

We claim that the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\gamma \cap \{\beta_j : j \in \mathbb{N}\}$ is finite for any $\gamma \in \uparrow_{\preccurlyeq}\beta \setminus \{\beta\}$. Indeed, if the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\gamma \cap \{\beta_j : j \in \mathbb{N}\}$ is infinite for some $\gamma \in \uparrow_{\preccurlyeq}\beta \setminus \{\beta\}$ then $\operatorname{dom}\gamma$ contains infinitely many points of the set $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$, which contradicts that $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n$.

By Lemma 2 for every $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n$ the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\gamma$ is open in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Then since $\beta$ is an isolated point in $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$, our claim implies that the infinite family of isolated points $\mathscr{U} = \{\{b_j\} : j \in \mathbb{N}\}$ is locally finite in $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$, which contradicts that the subspace $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is feebly compact. The obtained contradiction implies the statement of the proposition. ☐

*Remark* 1. The following three examples of topological semigroups of matrix units $(B_\lambda, \tau_{mv})$, $(B_\lambda, \tau_{mh})$ and $(B_\lambda, \tau_{mi})$ from [12] imply that the converse to Proposition 2 is not true for any infinite cardinal $\lambda$.

Later by $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$ and $\mathbb{R}$ we denote the sets of positive integers with the discrete topology and the real numbers with the usual topology.

**Theorem 2.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer and $\lambda$ be an arbitrary infinite cardinal. Then for every shift-continuous $T_1$-topology $\tau$ on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ the following statements are equivalent:*

- $(i)$ *$\tau$ is countably pracompact;*
- $(ii)$ *$\tau$ is feebly compact;*
- $(iii)$ *$\tau$ is $d$-feebly compact;*
- $(iv)$ *$(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is H-closed;*
- $(v)$ *$(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$-compact;*
- $(vi)$ *$(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is $\mathbb{R}$-compact;*
- $(vii)$ *$(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is infra H-closed.*

*Proof.* Implications $(i) \Rightarrow (ii)$ and $(ii) \Rightarrow (iii)$ are trivial.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Suppose that a space $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is $d$-feebly compact. By Lemma 2 it is quasi-regular. Then by Theorem 1 of [19] every quasiregular $d$-feebly compact space is feebly compact and hence so is $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suppose that a space $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is feebly compact. By Lemma 2 the topological space $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is Hausdorff. Then by Lemma 1 of [19] every Hausdorff feebly compact space with a dense discrete subspace is countably pracompact (also see Lemma 4.5 of [5] or Proposition 1 from [2] for Tychonoff spaces) and hence so is $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$.

Implication $(iv) \Rightarrow (ii)$ follows from Proposition 4 of [15].

$(ii) \Rightarrow (iv)$ We shall show by induction that if $\tau$ is a shift-continuous feebly compact $T_1$-topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ then the subspace $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is H-closed for any $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$.

It is obvious that for any $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\alpha = n$ the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha = \{\alpha\}$ is singleton, and since $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is a $T_1$-space, $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is H-closed.

Fix an arbitrary $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\alpha = n - 1$. By Lemma 2, $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and hence by Theorem 14 from [4] the space $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is feebly compact. Since by Lemma 2 every point $\beta$ of $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ with $\operatorname{rank}\alpha = n$ is isolated in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$, the feeble compactness of $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ implies that $\alpha$ is a non-isolated point of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and the space $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is compact. This implies that $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is H-closed.

Next we shall prove the following statement: *if for some positive integer $k < n$ for any $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with* $\operatorname{rank}\alpha \leqslant k$ *the subspace* $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ *is H-closed then* $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ *is H-closed for any* $\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ *with* $\operatorname{rank}\beta = k-1$.

Suppose to the contrary that there exists a shift-continuous feebly compact $T_1$-topology $\tau$ on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ such that for some positive integer $k < n$ for any $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\alpha = k$ the subspace $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha$ is H-closed and $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ is not an H-closed space for some $\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\beta = k-1$. Then there exists a Hausdorff topological space $X$ which contains the space $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ as a dense proper subspace. We observe that by Lemma 2 and Theorem 14 of [4] the space $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ is feebly compact.

Fix an arbitrary $x \in X \setminus \uparrow_{\preccurlyeq}\beta$. The Hausdorffness of $X$ implies that there exist open neighbourhoods $U_X(x)$ and $U_X(\beta)$ of the points $x$ and $\beta$ in $X$, respectively, such that $U_X(x) \cap U_X(\beta) = \varnothing$. Then the assumption of induction implies that without loss of generality we may assume that there do not exist finitely many $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ with $\operatorname{rank}\alpha_1 = \ldots = \operatorname{rank}\alpha_m = k$ such that

$$U_X(x) \cap \uparrow_{\preccurlyeq}\beta \subseteq \uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_1 \cup \cdots \cup \uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_m.$$

Fix an arbitrary $\alpha_1 \in \uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ such that $\operatorname{rank}\alpha_1 = k$ and $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_1 \cap U_X(x) \neq \varnothing$. Proposition 1.3.1 of [8], Lemma 2 and Proposition 2 imply that there exists $\gamma_1 \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ such that $\gamma_1 \in \uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_1 \cap U_X(x)$. Next, by induction using Proposition 1.3.1 of [8], Lemma 2 and Proposition 2 we construct sequences $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ and $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of distinct points of the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$ such that the following conditions hold:

($a$) $\operatorname{rank}\alpha_{i+1} = k$ and $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_{i+1} \setminus \big(\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_1 \cup \cdots \cup \uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_i\big) \cap U_X(x) \neq \varnothing$; and
($b$) $\gamma_{i+1} \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ and $\gamma_{i+1} \in \uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_{i+1} \setminus \big(\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_1 \cup \cdots \cup \uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_i\big) \cap U_X(x)$,

for all positive integers $i > 1$.

Then Lemma 1 implies that the infinite family of non-empty open subsets $\mathscr{U} = \{\{\gamma_i\} : i \in \mathbb{N}\}$ is locally finite, which contradicts the feeble compactness of $\uparrow_{\preccurlyeq}\beta$. The obtained contradiction implies the statement of induction which completes the proof of the statement that the space $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is H-closed.

$(iv) \Rightarrow (v)$ By Katětov's Theorem every continuous image of an H-closed topological space into a Hausdorff space is H-closed (see [8, 3.15.5 (b)] or [22]). Hence the image $f(\mathscr{I}_\lambda^n)$ is H-closed for every continuous map $f\colon (\mathscr{I}_\lambda^n, \tau) \to \mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$, which implies that $f(\mathscr{I}_\lambda^n)$ is compact (see [8, 3.15.5 (a)]).

$(v) \Rightarrow (ii)$ Suppose to the contrary that there exists a Hausdorff shift-continuous $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$-compact topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ which is not feebly compact. Then there exists an infinite locally finite family $\mathscr{U} = \{U_i\}$ of open non-empty subsets of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Without loss of generality we may assume that the family $\mathscr{U} = \{U_i\}$ is countable., i.e., $\mathscr{U} = \{U_i \colon i \in \mathbb{N}\}$. Then the definition of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ and Lemma 2 imply that for every $U_i \in \mathscr{U}$ there exists $\alpha_i \in U_i$ such that $\uparrow_{\preccurlyeq}\alpha_i \cap U_i = \{\alpha_i\}$ and hence $\mathscr{U}^* = \{\{\alpha_i\} \colon i \in \mathbb{N}\}$ is a family of isolated points of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Since the family $\mathscr{U}$ is locally finite, without loss of generality we may assume that $\alpha_i \neq \alpha_j$ for distinct $i, j \in \mathbb{N}$. We claim that the family $\mathscr{U}^*$ is locally finite. Indeed, if we assume the contrary then there exists $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ such that every open neighbourhood of $\alpha$ contains infinitely many elements of the family $\mathscr{U}^*$. This implies that the family $\mathscr{U}$ is not locally finite, a contradiction. Since $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is a $T_1$-space and the family $\mathscr{U}^*$ is locally finite, we have that $\bigcup \mathscr{U}^*$ is a closed subset in

$(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ and hence the map $f\colon (\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)\to\mathbb{N}_\mathfrak{d}$ defined by the formula

$$f(\beta)=\begin{cases} 1, & \text{if } \beta\in\mathscr{I}_\lambda^n\setminus\bigcup\mathscr{U}^*;\\ i+1, & \text{if } \beta=\alpha_i \text{ for some } i\in\mathbb{N},\end{cases}$$

is continuous. This contradicts that the space $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is $\mathbb{N}_\mathfrak{d}$-compact.

The proofs of implications $(iv)\Rightarrow(vi)$ and $(vi)\Rightarrow(ii)$ are same as the proofs of $(iv)\Rightarrow(v)$ and $(v)\Rightarrow(ii)$, respectively.

Implication $(ii)\Rightarrow(vii)$ follows from Proposition 2 and Theorem 3 of [20].

$(vii)\Rightarrow(ii)$ Suppose to the contrary that there exists a Hausdorff shift-continuous infra H-closed topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ which is not feebly compact. Then similarly as in the proof of implication $(v)\Rightarrow(ii)$ we choice a locally finite family $\mathscr{U}^*=\{\{\alpha_i\}\colon i\in\mathbb{N}\}$ of isolated points of $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$. Then the map $f\colon(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)\to\mathbb{R}$ defined by the formula

$$f(\beta)=\begin{cases} 1, & \text{if } \beta\in\mathscr{I}_\lambda^n\setminus\bigcup\mathscr{U}^*;\\ \dfrac{1}{i+1}, & \text{if } \beta=\alpha_i \text{ for some } i\in\mathbb{N},\end{cases}$$

is continuous. This contradicts that the space $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is infra H-closed. ☐

*Remark* 2. By Theorem 5 from [20] conditions $(ii)$ and $(vii)$ of Theorem 2 are equivalent for any Tychonoff space $X$.

It is not, however, the case that feebly compact and infra H-closed are equivalent in general. In [21] Herrlich, beginning with a $T_1$-space $Y$, constructs a regular space $X$ such that the only continuous functions from $X$ into $Y$ are constant. His construction involves the cardinality of $Y$, but only as the cardinality of collections of open sets whose intersections are singletons. Thus only the most trivial modifications are needed in his argument to produce a regular Hausdorff infra H-closed space. It is also easily shown that the space constructed in this manner is not feebly compact.

Any regular lightly compact space must be a Baire space [25, Lemma 3], and thus it is of interest to note that the space constructed in [21] can be shown to be the countable union of nowhere dense subsets using essentially the same argument as can be used to show it is not feebly compact.

Later we need the following technical lemma.

**Lemma 3.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer and $\lambda$ be an arbitrary infinite cardinal. Let $\tau$ be a feebly compact shift-continuous $T_1$-topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Then for every $\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^n$ and any open neighbourhood $U(\alpha)$ of $\alpha$ in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ there exist finitely many $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha\setminus\{\alpha\}$ such that*

$$\mathscr{I}_\lambda^n\setminus\mathscr{I}_\lambda^{n-1}\cap{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha\subseteq U(\alpha)\cup{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha_1\cup\cdots\cup{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha_k.$$

*Proof.* Suppose to the contrary that there exists a feebly compact shift-continuous $T_1$-topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ which satisfies the following property: some element $\alpha$ of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ has an open neighbourhood $U(\alpha)$ of $\alpha$ in $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ such that

$$\mathscr{I}_\lambda^n\setminus\mathscr{I}_\lambda^{n-1}\cap{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha\nsubseteq U(\alpha)\cup{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha_1\cup\cdots\cup{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha_k,$$

for any finitely many $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha\setminus\{\alpha\}$. We observe that Lemma 2 implies that without loss of generality we may assume that $U(\alpha)\subseteq{\uparrow_\preccurlyeq}\alpha$.

Fix such an element $\alpha$ of $\mathscr{I}_\lambda^n$ and its open neighbourhood $U(\alpha)$ with the above determined property. Then our assumption implies that there exists $\alpha_1 \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus U(\alpha)$ such that the set

$$\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1} \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \setminus U(\alpha)$$

is infinite and fix an arbitrary $\gamma_1 \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1} \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \setminus U(\alpha)$. Next, by induction using our assumption we construct sequences $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ and $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of the distinct points of the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ such that the following conditions hold:

($a$) $\alpha_{i+1} \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus \big(U(\alpha) \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \dots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_i\big)$ and the set

$$\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1} \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_{1+1} \setminus \big(U(\alpha) \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \dots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_i\big)$$

is infinite;

($b$) $\gamma_{i+1} \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1} \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \setminus \big(U(\alpha) \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \dots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_i\big)$,

for all positive integers $i$.

By Lemma 2 and Theorem 14 of [4] the space ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is feebly compact. Then Lemma 1 implies that the infinite family of non-empty open subsets $\mathscr{U} = \{\{\gamma_i\} : i \in \mathbb{N}\}$ is locally finite, which contradicts the feeble compactness of ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$. The obtained contradiction implies the statement of the lemma. □

**Theorem 3.** *Let $n$ be an arbitrary positive integer and $\lambda$ be an arbitrary infinite cardinal. Then every shift-continuous semiregular feebly compact $T_1$-topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is compact.*

*Proof.* We shall prove the statement of the theorem by induction. First we observe that for every element $\alpha$ of a semiregular feebly compact $T_1$-semitopological semigroup $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ with $\operatorname{rank}\alpha = n-1, n$ the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is compact. Indeed, by Lemma 2 for every $\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ is open-and-closed in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$, and hence we have that $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is an open discrete subspace of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and using Theorem 14 of [4] we obtain that ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is feebly compact, which implies that the space ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is compact.

Next we shall prove a more stronger step of induction: *if for every element $\alpha$ of a semiregular feebly compact $T_1$-semitopological semigroup $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ with $\operatorname{rank}\alpha > l \leqslant n$ the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is compact, then ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ is compact for every $\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\alpha = l$.*

Suppose to the contrary that there exists a semiregular feebly compact $T_1$-semitopological semigroup $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ such that for some positive integer $l \leqslant n$ the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is compact for every $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\alpha > l$, but there exists $\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\beta = l$ such that the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ is not compact.

First we observe that our assumption that the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha$ is compact and Corollary 3.1.14 of [8] imply that the following family

$$\mathscr{B}_{\mathsf{c}}(\alpha) = \big\{U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus ({\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \dots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_k) \colon \alpha_i \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus \{\alpha\}, i = 1, \dots, k\big\}$$

is a base of topology at the point $\alpha$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ for every $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\alpha > l$.

Then the Alexander Subbase Theorem (see [1, Theorem 1] or [8, p. 221, 3.12.2(a)]) and Lemma 2 imply that there exists a base $\mathscr{B}$ of the topology $\tau$ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ with the following properties:

($i$) $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}(\gamma) \colon \gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n\}$ and for every $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n$ the family $\mathscr{B}(\gamma)$ is a base at the point $\gamma$;

($ii$) $U(\gamma) \subseteq {\uparrow_{\preccurlyeq}}\gamma$ for any $U(\gamma) \in \mathscr{B}(\gamma)$;

($iii$) $\mathscr{B}(\gamma) = \mathscr{B}_{\mathsf{c}}(\gamma)$ for every $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n$ with $\operatorname{rank}\gamma > l$;

($iv$) there exists a cover $\mathscr{U}$ of the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ by members of the base $\mathscr{B}$ which has not a finite subcover.

We claim that the subspace ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ of $(\mathscr{I}_{\lambda}^{n},\tau)$ contains an infinite closed discrete subspace $X$. Indeed, let $\mathscr{U}_0$ be a subfamily of $\mathscr{U}$ such that

$$\{\beta\}\cup\left({\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta\cap\mathscr{I}_{\lambda}^{n}\setminus\mathscr{I}_{\lambda}^{n-1}\right)\subseteq\bigcup\mathscr{U}_0.$$

Since the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ is not compact and ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\gamma$ is compact for any $\gamma\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta\setminus\{\beta\}$, without loss of generality we may assume that there exists $k>\operatorname{rank}\beta$ such that the following conditions hold:

($a$) there exist infinitely many elements $\zeta\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ with $\operatorname{rank}\zeta=k$ such that $\zeta\notin\bigcup\mathscr{U}_0$;

($b$) $\varsigma\in\bigcup\mathscr{U}_0$ for all $\varsigma\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ with $\operatorname{rank}\varsigma<k$.

It is obvious that the set

$$X={\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta\setminus\left(\bigcup\mathscr{U}_0\setminus\bigcup\left\{{\uparrow_{\preccurlyeq}}\varsigma\colon\ \operatorname{rank}\varsigma>k\right\}\right)$$

is requested.

Fix an arbitrary regular open neighbourhood $U(\beta)$ of the point $\beta$ in $(\mathscr{I}_{\lambda}^{n},\tau)$ such that $U(\beta)\cap X=\varnothing$. By Lemma 3 there exist finitely many $\beta_1,\ldots,\beta_s\in{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ such that

$$\mathscr{I}_{\lambda}^{n}\setminus\mathscr{I}_{\lambda}^{n-1}\cap{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta\subseteq U(\beta)\cup{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta_1\cup\cdots\cup{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta_s.$$

It is obvious that the set $X\setminus({\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta_1\cup\cdots\cup{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta_s)$ is infinite. For every $\delta\in X$ the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\delta$ is compact and open, and moreover by Lemma 1 the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\delta\setminus\left({\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta_1\cup\cdots\cup{\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta_s\right)$ contains infinitely many points of the neighbourhood $U(\beta)$. This implies that $\operatorname{int}_{\mathscr{I}_{\lambda}^{n}}\left(\operatorname{cl}_{\mathscr{I}_{\lambda}^{n}}(U(\beta))\right)\cap X\neq\varnothing$, which contradicts the assumption that $U(0)\cap X=\varnothing$. The obtained contradiction implies that the subspace ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\beta$ of $(\mathscr{I}_{\lambda}^{n},\tau)$ is compact, which completes the proof of the theorem. ☐

**Acknowledgements.** The author acknowledges Taras Banakh and the referee for useful important comments and suggestions.

## REFERENCES

1. J. W. Alexander, *Ordered sets, complexes and the problem of compactification*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **25** (1939), 296–298.
2. A. V. Arhangel'skii, *On spaces with point-countable base*, Topological spaces and their mappings, Riga, 1985, P. 3–7 (in Russian).
3. A. V. Arkhangel'skii, *Topological function spaces*, Kluwer Publ., Dordrecht, 1992.
4. R. W. Bagley, E. H. Connell, and J. D. McKnight, Jr., *On properties characterizing pseudo-compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), no. 3, 500–506.
5. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
6. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vols. **I** and **II**, Marcell Dekker, Inc., New York and Basel, 1983 and 1986.
7. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vols. **I** and **II**, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961 and 1967.
8. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
9. G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, and D. S. Scott, *Continuous lattices and domains*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

10. O. Gutik, *On closures in semitopological inverse semigroups with continuous inversion*, Algebra Discrete Math. **18** (2014), no. 1, 59-–85.
11. O. Gutik, J. Lawson, and D. Repovš, *Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups*, Semigroup Forum **78** (2009), no. 2, 326–336.
12. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *On topological semigroups of matrix units*, Semigroup Forum **71** (2005), no. 3, 389–400.
13. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Topological semigroups of matrix units*, Algebra Discrete Math. (2005), no. 3, 1–17.
14. O. Gutik, K. Pavlyk, and A. Reiter, Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt $\lambda^0$-extensions, Mat. Stud. **32** (2009), no. 2, 115–131.
15. O. V. Gutik and O. V. Ravsky, *Pseudocompactness, products and topological Brandt $\lambda^0$-extensions of semitopological monoids*, Math. Methods and Phys.-Mech. Fields **58** (2015), no. 2, 20–37; reprinted version: J. Math. Sc. **223** (2017), no. 1, 18–38.
16. O. V. Gutik and A. R. Reiter, *Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$*, Math. Methods and Phys.-Mech. Fields **52** (2009), no. 3, 7–14; reprinted version: J. Math. Sc. **171** (2010), no. 4, 425–432.
17. O. Gutik and A. Reiter, *On semitopological symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. **72** (2010), 94–106 (in Ukrainian).
18. O. Gutik and O. Sobol, *On feebly compact topologies on the semilattice* $\exp_n \lambda$, Mat. Stud. **46** (2016), no. 1, 29–43.
19. O. Gutik and O. Sobol, *On feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice* $\exp_n \lambda$, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. **82** (2016), 128–136.
20. D. W. Hajek and A. R. Todd, *Compact spaces and infra H-closed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), no. 2, 479–482.
21. H. Herrlich, *Wann sind alle stetigen Abbildungen in $Y$ konstant?*, Math. Z. **90** (1965), 152–154.
22. M. Katětov, Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume, Čas. Mat. Fys. **69** (1940), no. 2, 36–49.
23. M. V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
24. M. Matveev, *A survey of star covering properties*, Topology Atlas preprint, April 15, 1998.
25. R. A. McCoy, *A filter characterization of regular Baire spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 268–270.
26. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
27. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984.
28. J. E. Vaughan, *Countably compact and sequentially compact spaces*, Handbook of set-theoretic topology, K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 569–602.
29. V. V. Wagner, *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **84** (1952), 1119–1122 (in Russian).

*Стаття: надійшла до редколегії 04.08.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

ON FEEBLY COMPACT SEMITOPOLOGICAL ...
*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83*

# ПРО СЛАБКО КОМПАКТНІ НАПІВТОПОЛОГІЧНІ СИМЕТРИЧНІ ІНВЕРСНІ НАПІВГРУПИ ОБМЕЖЕНОГО СКІНЧЕННОГО РАНГУ

**Олег ГУТІК**

*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mails: o_gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com*

Ми вивчаємо слабко компактні $T_1$-топології на симетричній інверсній напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ скінченних перетворень рангу $\leqslant n$, які перетворюють її в напівтопологічну напівгрупу. Для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ і для кожного нескінченного кардинала $\lambda$ побудована гаусдорфова зліченно пракомпакна некомпактна топологія на напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$, яка перетворює її в напівтопологічну напівгрупу. Доведено, що для довільного натурального числа $n$ і для довільного нескінченного кардинала $\lambda$ для $T_1$-топології $\tau$ на напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ такі умови є еквівалентними: $(i)$ $\tau$ — зліченно пракомпактна; $(ii)$ $\tau$ — слабко компактна; $(iii)$ $\tau$ — $d$-слабко компактна; $(iv)$ простір $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є H-замкненим; $(v)$ простір $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$-компактним для дискретного зліченного простору $\mathbb{N}_{\mathfrak{d}}$; $(vi)$ простір $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є $\mathbb{R}$-компактним; $(vii)$ простір $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є інфра H-замкненим. Також доведено, що для довільного натурального числа $n$ і для довільного нескінченного кардинала $\lambda$ кожна напіврегулярна слабко компактна $T_1$-топологія на $\mathscr{I}_\lambda^n$, яка перетворює її в напівтопологічну напівгрупу, є компактною.

*Ключові слова:* напівгрупа, інверсна напівгрупа, напівтопологічна напівгрупа, компактний, зліченно компактний, зліченно пракомпактний, слабко компактний, H-замкнений, інфра H-замкнений, $X$-компактний, напіврегулярний простір.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 58–71*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 58–71*

УДК 515.124

# ПЛОСКО РОЗМІЩЕНІ МНОЖИНИ ТОЧОК У МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

**Валерій КУЗЬМИЧ**

*Херсонський державний університет*
*вул. Університетська, 27, 73000, Херсон*
*e-mails: kuzmich@ksu.ks.ua, kuzmich121251@ukr.net*

Розглянуто поняття кута у довільному метричному просторі як упорядкованої трійки елементів цього простору. Як числову характеристику кута вибрали значення його косинуса у геометрії Евкліда, як це пропонував О. Д. Александров. Такий підхід дає змогу ввести поняття плоского розміщення для точок метричного простору, не застосовуючи для цього поняття його повноти. Праця продовжує дослідження В. Ф. Кагана, який вичерпно вивчив поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Наведено приклади застосування цих понять у конкретних метричних просторах.

*Ключові слова:* метричний простір, пряма лінія, прямолінійний образ, площина, паралельність, перпендикулярність, тетраедр.

**Вступ.** У довільному метричному просторі $(X, \rho)$ єдиною його числовою характеристикою є відстань $\rho(a, b)$ між довільними елементами (точками) $a$ і $b$ простору. Цим частково можна пояснити значні проблеми у спробах провести його "геометризацію", тобто ввести аналоги основних геометричних понять геометрії Евкліда — прямої лінії, кута, лінії, площини, поверхні. Введення цих понять потребує властивості повноти простору. Евклід у своїх "Началах" означив лінію як "довжину без ширини", а пряму лінію як "ту, що рівно розміщена стосовно до точок на ній" [1, с. 11]. Аналогічні означення, які ґрунтуються на інтуїтивному сприйнятті цих об'єктів, Евклід дав площині, куту. Розуміючи недосконалість цих означень, Д. Гільберт в "Основах геометрії" описав властивості основних геометричних понять через співвідношення між ними, які подано у вигляді груп аксіом [2, с. 3–4]. Поняття кута Д. Гільберт вводить як систему двох променів [2, с. 10]. У метричному просторі кут між двома геодезичними означають як границю неперервного відображення певної множини плоских кутів [3, с. 35].

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 30L05

На наш погляд, у довільному метричному просторі, в окремих випадках (не намагаючись створити повний аналог геометрії Евкліда), можна ввести поняття кута, паралельності та перпендикулярності без вимоги повноти цього простору. Аналогічно В. Ф. Каган розглядав поняття "прямолінійного образу" множини точок метричного простору як аналог прямої лінії [4, с. 527]. За ознаку цих властивостей можна взяти одну з числових характеристик плоского кута у геометрії Евкліда [3, с. 36]. У цьому випадку можна ввести поняття "плоского образу" множини точок довільного метричного простору як аналог площини у геометрії Евкліда. Як ознаки належності точок до "плоского образу" можна використати умову рівності нулю об'єму тетраедра, усі вершини якого належать одній площині [5].

**1. Постановка задачі.** Надалі будемо розглядати метричний простір, який містить не менше чотирьох точок (усі точки простору будемо вважати різними). Ми не розглядатимемо питання існування точок простору, які задовольняють певні умови, усі співвідношення будемо визначати лише між заданими точками. Такий підхід дещо звужує область застосування результатів, однак дасть змогу уникнути необхідності обґрунтування існування таких точок.

Спочатку дамо означення кута для трьох точок метричного простору.

**Означення 1.** Нехай $a$, $b$ і $c$ — довільні точки метричного простору $(X, \rho)$. Упорядковану трійку $(a, b, c)$ цих точок будемо називати *кутом з вершиною у точці* $b$, і позначати: $\angle(a, b, c)$. Пари точок $(a, b)$ і $(b, c)$ будемо називати *сторонами кута.*

Ми будемо користуватись комутативним (симетричним) означенням кута, тобто кути $\angle(a, b, c)$ і $\angle(c, b, a)$ вважатимемо одним кутом.

Щоб порівняти кути між собою, введемо їхню числову характеристику, використавши значення косинуса кута трикутника через довжини трьох його сторін у геометрії Евкліда [3, с. 36].

**Означення 2.** Нехай $a$, $b$ і $c$ — довільні точки метричного простору $(X, \rho)$. *Характеристикою кута* $\angle(a, b, c)$, або *кутовою характеристикою*, будемо називати дійсне число $\varphi(a, b, c)$, яе обчислюється за формулою

$$\varphi(a, b, c) = \frac{\rho^2(a, b) + \rho^2(b, c) - \rho^2(a, c)}{2\rho(a, b)\rho(b, c)}. \tag{1}$$

Метричний простір $(X, \rho)$, в якому введено поняття кута за означенням 1 і його характеристику за формулою (1), називатимемо *метричним простором з кутовою характеристикою* і позначати $\Pi$.

З рівності (1) легко отримати умову "прямолінійного розміщення" трьох точок простору $\Pi$. Справді, при $\varphi(a, b, c) = 1$ отримуємо рівність: $\rho(a, b) = \rho(b, c) + \rho(a, c)$, або $\rho(b, c) = \rho(a, b) + \rho(a, c)$. У цьому випадку кут $\angle(a, b, c)$ треба вважати нульовим, оскільки його вершина, точка $b$, "лежить поза точками" $a$ і $c$. При $\varphi(a, b, c) = -1$ отримуємо рівність: $\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c)$, і кут $\angle(a, b, c)$ треба вважати розгорнутим, оскільки його вершина, точка $b$, "лежить між точками" $a$ і $c$.

Тепер можна дати означення "прямолінійного розміщення" трьох точок простору з використанням кутової характеристики.

**Означення 3.** Будемо казати, що точки $a, b, c$ простору $\Pi$ ***прямолінійно розміщені***, якщо $\varphi(a, b, c) = \pm 1$.

Із наведеного випливає, що з трьох прямолінійно розміщених точок одна "лежить між двома іншими", кожна з яких "лежить поза двома іншими".

**Означення 4.** Будемо казати, що множина $A$ точок простору $\Pi$ прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені (див. [4, с. 527]).

**Приклад 1.** Для ілюстрації означення 4 розглянемо простір $R_1^n$, елементами якого є впорядковані групи з $n$ дійсних чисел $x = (x_1, ..., x_n)$. Якщо відстань між точками $x$ і $y$ простору означити за формулою $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, то цей простір стає метричним [6, с. 42]. Нехай для будь-яких трьох точок $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ і $z = (z_1, ..., z_n)$ множини $P$ виконуються нерівності $x_k \leqslant y_k \leqslant z_k$ для усіх значень $k = 1, 2, ..., n$. Доведемо, що множина $P$ прямолінійно розміщена у просторі $R_1^n$. Справді, правильні рівності

$$\rho(x, z) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k) = \sum_{k=1}^{n} ((z_k - y_k) + (y_k - x_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k) + \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) = \sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| =$$

$$= \rho(y, z) + \rho(x, y),$$

а це й означає, що точки $x$, $y$ і $z$ розміщені прямолінійно. З довільності вибору цих точок, за означенням 4 випливає прямолінійна розміщеність множини $R_1^n$.

З прикладу 1 можна зробити висновок, що прямолінійна розміщеність точок простору характеризує певну "монотонність" множини цих точок стосовно метрики простору.

Ми не будемо детальніше розглядати властивість прямолінійної розміщеності точок метричного простору, оскільки досить вичерпно для точок прямої лінії у геометрії Евкліда це зроблено у праці В. Ф. Кагана [7, розділ XIX].

Ми вважаємо, що досить наочним є наступний приклад відмінності між аксіоматичним методом геометризації метричного простору та запропонованим у цій роботі.

**Приклад 2.** Розглянемо простір $C_{[0,1]}$ функцій, неперервних на відрізку $[0, 1]$. Якщо відстань між елементами $f(x)$ та $g(x)$ простору визначити за правилом

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|,$$

то він стає метричним [6, с. 43]. У цьому просторі візьмемо чотири елементи

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x - 2, \quad y_4 = -x.$$

Знайдемо відстані між цими елементами

$$\rho(y_1, y_2) = 1,\ \rho(y_1, y_3) = 3,\ \rho(y_1, y_4) = 3,\ \rho(y_2, y_3) = 2,\ \rho(y_2, y_4) = 2,\ \rho(y_3, y_4) = 2.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = -1, \quad \varphi(y_1, y_2, y_4) = -1, \quad \varphi(y_3, y_2, y_4) = 0,5.$$

З першої рівності, за означенням 3, випливає, що точки $y_1, y_2, y_3$ розміщені прямолінійно, а друга рівність свідчить про те, що точки $y_1, y_2, y_4$ теж прямолінійно розміщені. У евклідовій геометрії це означає, що усі чотири точки прямолінійно розміщені, а точки $y_3$ і $y_4$ збігаються [7, с. 260]. Однак третя рівність суперечить цьому.

Приклад 2 вказує на недостатність однієї лиш метрики для однозначності "прямолінійного образу". Цей факт можна пояснити тим, що у геометрії Евкліда відповідна властивість закріплена аксіомами [2, с. 3]. Неевклідову інтерпретацію прикладу 2 можна побачити на рис. 1. На ньому за відстань між точками простору взято як довжину певної дуги, що з'єднує ці точки.

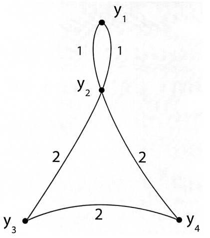


Рис. 1. Неоднозначність прямолінійної розміщеності точок.

Використовуючи рівність (1) можна, за аналогією з геометрією Евкліда, дати таке означення "*перпендикулярного розміщення*" точок простору.

**Означення 5.** Пари точок $(a, b)$ і $(b, c)$ простору $\Pi$ будемо називати *перпендикулярно розміщеними*, якщо виконується рівність $\varphi(a, b, c) = 0$. Кут $\angle(a, b, c)$ називатимемо *прямим.*

Прикладом перпендикулярного розміщення пар точок у метричному просторі можуть слугувати ортогональні вектори евклідового простору (лінійного простору з введеним у ньому скалярним добутком). Зокрема, якщо до ортогонального нормованого базису простору $l_2$ (множина різних послідовностей $\{x_n\}$ дійсних чисел, для яких виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, а відстань між двома точками $x$ і $y$ цього простору визначається за формулою $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$), приєднати точку $\{0\}$, то отримаємо таку множину точок цього простору:

$$e_0(0, 0, 0, \ldots),\ e_1(1, 0, 0, \ldots),\ e_2(0, 1, 0, \ldots),\ e_3(0, 0, 1, \ldots), \ldots .$$

Будь-який кут $\angle(e_i, e_0, e_k)$ цієї множини є прямим, оскільки $\rho(e_0, e_i) = \rho(e_0, e_k) = 1$ і $\rho(e_i, e_k) = \sqrt{2}$. За формулою (1) отримаємо $\varphi(e_i, e_0, e_k) = 0$, для будь-яких значень $i \neq k \neq 0$.

**2. Основні результати.** Для введення поняття плоского розміщення точок метричного простору використаємо умову достатню для того, щоб чотири різні точки належали одній площині у геометрії Евкліда. Така умова існує [8, с. 83]. Для чотирьох різних точок, що належать одній площині, шість відстаней $a, b, c, d, e, f$ між ними задовольняють рівність

$$a^2c^2(b^2 + d^2 + e^2 + f^2 - a^2 - c^2) + b^2d^2(a^2 + c^2 + e^2 + f^2 - b^2 - d^2)+$$

$$+e^2f^2(a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2) = a^2b^2e^2 + b^2c^2f^2 + c^2d^2e^2 + a^2d^2f^2.$$

Фактично, ця рівність означає рівність нулю об'єму тетраедра, для якого ці чотири точки є вершинами. Це випливає з відомої формули Юнгіуса об'єму тетраедра через довжини його ребер [9, с. 99–100]. Наведену вище рівність можна записати за допомогою визначника Келі-Менгера

$$\begin{vmatrix} 0 & a & e & d & 1 \\ a & 0 & b & f & 1 \\ e & b & 0 & c & 1 \\ d & f & c & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Обидві рівності занадто складні у використанні. У разі використання кутових характеристик ці умови можна спростити. У [5] ми отримани аналог формули Юнгіуса з використанням плоских кутів при одній вершині тетраедра. У цій же праці описано калькулятор, за допомогою якого можна обчислити об'єм тетраедра за довжинами усіх його ребер. Калькулятор враховує усі можливі комбінації цих ребер і робить висновок про існування тетраедра для кожної з комбінацій. Сам калькулятор розміщено за адресою:

http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645.

Повернувшись до прикладу 2 цієї праці, за допомогою калькулятора легко довести, що у просторі $C_{[0,1]}$ не існує тетраедра з вершинами у точках $y_1, y_2, y_3, y_4$. Тобто, у геометрії Евкліда неможливо побудувати тетраедр з такими довжинами ребер, при заданій орієнтації його вершин. Цей факт теж пояснює неоднозначність, яка виникла з прямолінійною розміщеністю цих точок у просторі $C_{[0,1]}$.

Якщо через $a_1, a_2, a_3$ позначити довжини трьох ребер тетраедра, що виходять з однієї вершини, а через $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ відповідні плоскі кути між ними, то формула об'єму тетраедра набуде вигляду [5, с. 61]

$$V = \frac{a_1a_2a_3}{6}\sqrt{1 + 2cos\gamma_{12}cos\gamma_{13}cos\gamma_{23} - cos^2\gamma_{12} - cos^2\gamma_{13} - cos^2\gamma_{23}}.$$

Тепер умову рівності нулю об'єма тетраедра можна записати набагато простіше

$$1 + 2cos\gamma_{12}cos\gamma_{13}cos\gamma_{23} - cos^2\gamma_{12} - cos^2\gamma_{13} - cos^2\gamma_{23} = 0.$$

Використовуючи визначник третього порядку, цю рівність можна записати так:

$$\begin{vmatrix} 1 & cos\gamma_{12} & cos\gamma_{13} \\ cos\gamma_{12} & 1 & cos\gamma_{23} \\ cos\gamma_{13} & cos\gamma_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отриману рівність тепер можна використати для означення плоского розміщення точок метричного простору.

**Означення 6.** Будемо казати, що точки $a, b, c, d$ простору $\Pi$ *плоско розміщені*, якщо виконується рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Це означення має властивість симетричності, тобто, у разі виконання рівності (2) вона буде виконуватись і для випадків, коли за вершину кутів вибирати точки $a, c, d$ (об'єм піраміди все одно дорівнюватиме нулю).

Означення 6 можна розглядати як узагальнення означення 3. Справді, рівність $\varphi(a,b,c) = \pm 1$, що за означенням 3 є ознакою прямолінійного розміщення трьох точок простору $\Pi$, можна записати за допомогою визначника другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) \\ \varphi(a,b,c) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для множини точок простору природно навести таке означення.

**Означення 7.** Будемо казати, що множина $A$ точок простору $\Pi$ плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені.

Повернувшись знову до прикладу 2 цієї праці, перепозначимо точки простору: $y_1 = a, y_2 = b, y_3 = c, y_4 = d$, і підставимо у рівність (2) відповідні значення кутових характеристик

$$\varphi(a,b,c) = -1, \quad \varphi(a,b,d) = -1, \quad \varphi(c,b,d) = \frac{1}{2}.$$

Отримаємо рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то за означенням 6 точки $a, b, c, d$ не є плоско розміщеними. Цей факт додатково пояснює неоднозначність прямолінійного розміщення точок $y_1, y_2, y_3, y_4$.

**Приклад 3.** Наведемо приклад плоского розміщення точок простору. Для цього у просторі $C_{[0,1]}$ візьмемо чотири точки

$$y_1 = x, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = x - 1, \quad y_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 0,5).$$

Знайдемо відстані між цими точками

$$\rho(y_1, y_2) = 1, \quad \rho(y_1, y_3) = 1, \quad \rho(y_1, y_4) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\rho(y_2, y_3) = 1, \quad \rho(y_2, y_4) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \rho(y_3, y_4) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_4, y_2) = -0{,}5, \quad \varphi(y_1, y_4, y_3) = -0{,}5, \quad \varphi(y_2, y_4, y_3) = -0{,}5.$$

Для зручності обчислень перепозначимо точки

$$y_1 = a, \quad y_4 = b, \quad y_2 = c, \quad y_3 = d.$$

Підставимо ці значення у формулу (2). Матимемо:

$$\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

За означенням 6 точки $y_1, y_2, y_3, y_4$ плоско розміщені.

З іншого боку, легко помітити, що ніякі три з цих точок не розміщені прямолінійно (немає відстані, що дорівнює сумі двох інших). У геометрії Евкліда точка $y_4$ є центром рівностороннього трикутника з вершинами у точках $y_1, y_2, y_3$.

Властивість прямолінійності розміщення точок значною мірою залежить від метрики простору. Про це свідчить такий приклад.

**Приклад 4.** Розглянемо простір $C_L$ функцій, неперервних на відрізку [0;1], в якому відстань між точками $f(x)$ та $g(x)$ обчислюється за правилом

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Такий простір є метричним [10, с. 105]. Функції

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x - 2, \quad y_4 = -x,$$

розглянуті у прикладі 2, також є точками простору $C_L$. Знайдемо відстані між ними у цьому просторі

$$\rho(y_1, y_2) = 1, \quad \rho(y_1, y_3) = 3, \quad \rho(y_1, y_4) = 2,$$

$$\rho(y_2, y_3) = 2, \quad \rho(y_2, y_4) = 1, \quad \rho(y_3, y_4) = 1.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = -1, \quad \varphi(y_1, y_2, y_4) = -1, \quad \varphi(y_3, y_2, y_4) = 1.$$

З цих рівностей, за означенням 3, випливає, що усі чотири точки розміщені прямолінійно у такому порядку: $y_1, y_2, y_4, y_3$.

**Лема 1.** *Якщо точки $a, b, c, d$ простору П прямолінійно розміщені, то вони плоско розміщені.*

*Доведення.* Без втрат для загальності вважатимемо, що точки розміщені у тому самому порядку що і записані, тобто, точка $b$ розташована між точками $a$ і $c$, а точка $c$ розташована між точками $b$ і $d$. У цьому випадку кутові характеристики будуть: $\varphi(a, b, c) = -1, \varphi(a, b, d) = -1, \varphi(c, b, d) = 1$. Підставивши ці значення у рівність (2), отримаємо рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, за означенням 6 точки $a, b, c, d$ плоско розміщені. □

З леми 1 випливає, що точки $y_1, y_2, y_3, y_4$, які розглядали у прикладі 4, плоско розміщені у просторі $C_L$.

Надалі нам потрібне буде поняття суміжного кута у метричному просторі. У геометрії Евкліда це кут, який доповнює заданий кут до розгорнутого. Вище ми довели, що чотири точки розглянуті у прикладі 2 не є плоско розміщеними, хоча серед них є дві трійки точок, які розміщені прямолінійно. Отже, для введення поняття суміжного кута у довільному метричному просторі потрібні будуть додаткові вимоги до точок, що утворюють ці кути.

Спочатку визначимо критерій плоскої розміщеності чотирьох точок простору $\Pi$ у випадку, коли три з них прямолінійно розміщені.

**Лема 2.** *Нехай точки $a, b, c$ простору $\Pi$ прямолінійно розміщені, а кут $\angle(a, b, c)$ розгорнутий. Для того, щоб точки $a, b, c, d$ цього простору були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\varphi(a, b, d) = -\varphi(c, b, d)$.*

*Доведення.* Припустимо, що точки $a, b, c, d$ плоско розміщені. Оскільки, за умовою, кут $\angle(a, b, c)$ розгорнутий, то виконується рівність $\varphi(a, b, c) = -1$. Із умови (2) плоскої розміщеності точок $a, b, c, d$ отримуємо рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \varphi(c,b,d) \\ -1 & 1 & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(c,b,d) & \varphi(a,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$1 - 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

З цієї рівності отримуємо $(\varphi(a,b,d) + \varphi(c,b,d))^2 = 0$, або $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$.

Нехай тепер, навпаки, виконується рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$. Підставимо значення кутових характеристик відповідних кутів у ліву частину формули (2). Матимемо

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -\varphi(c,b,d) \\ -1 & 1 & \varphi(c,b,d) \\ -\varphi(c,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \varphi^2(c,b,d) + \varphi^2(c,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

За означенням 6 точки $a, b, c, d$ плоско розміщені. □

Зауважимо, що лема 2 справджується також у випадку, коли усі чотири точки розміщені прямолінійно, оскільки у цьому випадку теж виконується рівність, наведена у формулюванні леми. Тобто, лема 2 узагальнює результат леми 1.

Із леми 2 випливає, що рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$ логічно взяти за основу означення суміжного кута.

**Означення 8.** Нехай точки $a, b, c$ простору $\Pi$ прямолінійно розміщені, кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим, а точка $d$ цього простору така, що виконується рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$. Тоді кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ будемо називати *суміжними.*

Із означення 8 і леми 2 випливає, що точки, які утворюють суміжні кути, плоско розміщені. Крім того, розгорнутий і нульовий кути — суміжні, а з рівності $0 = -0$ випливає, що кут суміжний з прямим кутом теж є прямим. Зокрема, у прикладі 4 кути $\angle(y_1, y_2, y_4)$ і $\angle(y_3, y_2, y_4)$ є суміжними у просторі $C_L$, оскільки виконуються рівності $\varphi(y_1, y_2, y_4) = -1$ і $\varphi(y_3, y_2, y_4) = 1$, а усі чотири точки розміщені прямолінійно.

З іншого боку, чотири точки з прикладу 2 не утворюють суміжні кути у просторі $C_{[0,1]}$, інакше, за лемою 2, вони мали бути плоско розміщеними.

У геометрії Евкліда суміжний кут розуміють як кут, який доповнює заданий до розгорнутого (див. [1, с. 11] і [2, с. 12]). У просторі $\Pi$ такого означення суміжного кута дати не можна, оскільки у цьому просторі навіть для прямого кута, кут який доповнює його до розгорнутого, не обов'язково є прямим.

**Приклад 5.** Розглянемо точки

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x - 2, \quad y_4 = -x$$

простору $C_{[0,1]}$, які розглядали у прикладі 2. Візьмемо точку $y_5 = (1 - \sqrt{2})x + 1$, що також належить простору $C_{[0,1]}$. Знайдемо відстані

$$\rho(y_1, y_5) = \sqrt{2}, \quad \rho(y_2, y_5) = 1, \quad \rho(y_3, y_5) = 3, \quad \rho(y_4, y_5) = 3 - \sqrt{2}.$$

Крім того, $\rho(y_1, y_2) = 1$.

Отож, кут $\angle(y_1, y_2, y_5)$ є прямим, оскільки за формулою (1) отримаємо $\varphi(y_1, y_2, y_5) = 0$. У прикладі 2 доведено, що точки $y_1, y_2, y_3$ прямолінійно розміщені, і точки $y_1, y_2, y_4$ теж прямолінійно розміщені. Тому варто очікувати, що кути $\angle(y_3, y_2, y_5)$ і $\angle(y_4, y_2, y_5)$, які доповнюють кут $\angle(y_1, y_2, y_5)$ до розгорнутого, теж мають бути прямими. Однак за формулою (2) отримуємо: $\varphi(y_3, y_2, y_5) = -1$ і $\varphi(y_4, y_2, y_5) = \dfrac{3\sqrt{2} - 3}{2}$.

Отже, приклад 5, на наш погляд, засвідчує доречність означення 8 для введення поняття суміжного кута у просторі $\Pi$.

Теорема 1, як і лема 2, дає критерій плоскої розміщеності чотирьох точок простору $\Pi$ у випадку, коли три з них утворюють прямий кут.

**Теорема 1.** *Нехай у метричному просторі $\Pi$ кут $\angle(a, b, c)$ є прямим. Для того, щоб точки $a, b, c, d$ були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi^2(a, b, d) + \varphi^2(c, b, d) = 1. \tag{3}$$

*Доведення.* З означення 5 випливає рівність: $\varphi(a, b, c) = 0$. Підставимо це значення у рівність (2) і розкриємо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varphi(a, b, d) \\ 0 & 1 & \varphi(c, b, d) \\ \varphi(a, b, d) & \varphi(c, b, d) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \varphi^2(a, b, d) - \varphi^2(c, b, d).$$

Із цієї рівності та означення 6 випливає, що рівність (3) необхідна і достатня для того, щоб за умови теореми точки $a, b, c, d$ були плоско розміщені. □

Ця теорема має самостійне значення, оскільки за її допомогою у довільному метричному просторі можна визначити прямокутну систему координат стосовно трьох фіксованих точок цього простору.

Теорема 2 дає змогу визначити встановлювати рівність числових характеристик кутів, які мають прямолінійно розміщені відповідні сторони.

**Теорема 2.** *Нехай $a, b, c, d$ точки простору $\Pi$, а кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим. Для того, щоб виконувалась рівність $\varphi(b, a, d) = \varphi(c, a, d)$, необхідно і достатньо, щоб кути $\angle(a, b, d)$ і $\angle(c, b, d)$ були суміжними.*

*Доведення.* За умовою теореми кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим, і отже, точки $a, b, c$ прямолінійно розміщені. Звідси отримуємо рівність $\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

Припустимо, що кути $\angle(a, b, d)$ і $\angle(c, b, d)$ суміжні. Тоді виконується рівність $\varphi(a, b, d) = -\varphi(c, b, d)$. Підставимо у цю рівність відповідні значення кутових характеристик. Матимемо

$$\frac{\rho^2(a, b) + \rho^2(b, d) - \rho^2(a, d)}{2\rho(a, b)\rho(b, d)} = -\frac{\rho^2(b, c) + \rho^2(b, d) - \rho^2(c, d)}{2\rho(b, c)\rho(b, d)};$$

$$\rho(b, c)(\rho^2(a, b) + \rho^2(b, d) - \rho^2(a, d)) = -\rho(a, b)(\rho^2(b, c) + \rho^2(b, d) - \rho^2(c, d));$$

$$\begin{aligned}\rho(b, c)\rho^2(a, b) + \rho(b, c)\rho^2(b, d) - \rho(b, c)\rho^2(a, d)) = \\ = -\rho(a, b)\rho^2(b, c) - \rho(a, b)\rho^2(b, d) + \rho(a, b)\rho^2(c, d);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(b, c)\rho^2(a, d) - \rho(b, c)\rho^2(b, d) - \rho(a, b)\rho^2(b, d) = \\ = \rho(b, c)\rho^2(a, b) + \rho(a, b)\rho^2(b, c) - \rho(a, b)\rho^2(c, d).\end{aligned}$$

Додамо до обох частин рівності вираз

$$\rho^3(a, b) + \rho^2(a, b)\rho(b, c) + \rho(a, b)\rho^2(a, d).$$

Одержуємо

$$\begin{aligned}\rho^3(a, b) + \rho^2(a, b)\rho(b, c) + \rho(a, b)\rho^2(a, d) + \rho(b, c)\rho^2(a, d) - \rho(b, c)\rho^2(b, d) - \\ - \rho(a, b)\rho^2(b, d) = \rho^3(a, b) + \rho^2(a, b)\rho(b, c) + \rho(a, b)\rho^2(a, d) + \\ + \rho(b, c)\rho^2(a, b) + \rho(a, b)\rho^2(b, c) - \rho(a, b)\rho^2(c, d).\end{aligned}$$

Згрупуємо у лівій частині рівності перший, третій і шостий доданки, винесемо з них за дужки множник $\rho(a, b)$, а згрупувавши другий, четвертий і п'ятий доданки, винесемо з них за дужки множник $\rho(b, c)$. У правій частині рівності винесемо з усіх доданків за дужки множник $\rho(a, b)$. У підсумку отримаємо рівність

$$\begin{aligned}\rho(a, b)(\rho^2(a, b) + \rho^2(a, d) - \rho^2(b, d)) + \rho(b, c)(\rho^2(a, b) + \rho^2(a, d) - \rho^2(b, d)) = \\ = \rho(a, b)((\rho^2(a, b) + 2\rho(a, b)\rho(b, c) + \rho^2(b, c)) + \rho^2(a, d) - \rho^2(c, d));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\rho(a, b) + \rho(b, c))(\rho^2(a, b) + \rho^2(a, d) - \rho^2(b, d)) = \\ = \rho(a, b)((\rho(a, b) + \rho(b, c))^2 + \rho^2(a, d) - \rho^2(c, d)),\end{aligned}$$

або

$$\rho(a, c)(\rho^2(a, b) + \rho^2(a, d) - \rho^2(b, d)) = \rho(a, b)(\rho^2(a, c) + \rho^2(a, d) - \rho^2(c, d)).$$

Поділимо обидві частини рівності на вираз $2\rho(a, b)\rho(a, c)\rho(a, d)$. Отримаємо рівність

$$\frac{\rho^2(a, b) + \rho^2(a, d) - \rho^2(b, d)}{2\rho(a, b)\rho(a, d)} = \frac{\rho^2(a, c) + \rho^2(a, d) - \rho^2(c, d)}{2\rho(a, c)\rho(a, d)},$$

або $\varphi(b,a,d)=\varphi(c,a,d)$.

Оскільки ми провели тотожні перетворення (ні одна з відстаней не дорівнює нулю), то, провівши ці перетворення у зворотному порядку, отримаємо початкову рівність, що і доводить теорему. □

Теорема 2 дає умову рівності кутових характеристик кутів, у яких спільна вершина, а сторони прямолінійно розміщені. Цю умову можна використати як означення рівності самих кутів.

Порівнявши лему 2 і теорему 2, можна зробити висновок про те, що у випадку, коли у просторі $\Pi$ є три прямолінійно розміщені точки $a,b,c$, а кут $\angle(a,b,c)$ розгорнутий, то множину усіх точок $d$ цього простору, плоско розміщених із заданими, можна описати як точки, для яких кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ — суміжні, або для яких кути $\angle(b,a,d)$ і $\angle(c,a,d)$ мають рівні характеристики.

Як і у випадку прямолінійного розміщення точок простору $\Pi$, треба очікувати неоднозначності при плоскому розміщенні точок цього простору. Справді, про це свідчить такий приклад.

**Приклад 6.** Розглянемо точки

$$y_1=x+1,\quad y_2=x,\quad y_5=(1-\sqrt{2})x+1$$

простору $C_{[0,1]}$, які ми розглядали у прикладах 2 і 5. Крім того, розглянемо точки $y_6=(\sqrt{2}-1)(x-1)$ і $y_7=(2-\sqrt{2})x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, що також належать простору $C_{[0,1]}$. Знайдемо відстані

$$\rho(y_1,y_2)=1,\quad \rho(y_1,y_5)=\sqrt{2},\quad \rho(y_1,y_6)=2,\quad \rho(y_1,y_7)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \rho(y_2,y_5)=1,$$

$$\rho(y_2,y_6)=1,\quad \rho(y_2,y_7)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \rho(y_5,y_6)=\sqrt{2},\quad \rho(y_5,y_7)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \rho(y_6,y_7)=2-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Із отриманих рівностей випливає, що точки $y_1,y_2,y_6$ прямолінійно розміщені, оскільки виконується рівність

$$\rho(y_1,y_6)=\rho(y_1,y_2)+\rho(y_2,y_6).$$

Доведемо, що кут $\angle(y_5,y_2,y_6)$ є прямим. Справді, за формулою (1) маємо $\varphi(y_5,y_2,y_6)=0$. Крім того, у прикладі 5 довели, що кут $\angle(y_1,y_2,y_5)$ теж є прямим. Отож, ці кути є суміжними, і за теоремою 2 точки $y_1,y_2,y_5,y_6$ — плоско розміщені.

Тепер доведемо, що точки $y_1,y_2,y_5,y_7$ теж плоско розміщені. Для цього за формулою (1) обчислимо кутові характеристики

$$\varphi(y_1,y_2,y_7)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{і}\quad \varphi(y_5,y_2,y_7)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, виконується рівність

$$\varphi^2(y_1,y_2,y_7)+\varphi^2(y_5,y_2,y_7)=1.$$

Оскільки кут $\angle(y_1,y_2,y_5)$ є прямим, то з отриманої рівності і теореми 1 випливає, що точки $y_1,y_2,y_5,y_7$ — плоско розміщені.

Для двох розглянутих множин точок три точки $y_1, y_2, y_5$ — спільні. У геометрії Евкліда цього достатньо для того, щоб усі п'ять точок $y_1, y_2, y_5, y_6, y_7$ належали одній площині. Однак у просторі *П* це не завжди виконується. Доведемо, що точки $y_2, y_5, y_6, y_7$ не є плоско розміщеними. Для цього обчислимо кутову характеристику

$$\varphi(y_6, y_2, y_7) = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Отож, виконується рівність

$$\varphi^2(y_5, y_2, y_7) + \varphi^2(y_6, y_2, y_7) = \frac{5}{8}.$$

Оскільки кут $\angle(y_5, y_2, y_6)$ є прямим, то за теоремою 1 точки $y_2, y_5, y_6$, і $y_7$ не є плоско розміщеними.

Більше того, точки $y_1, y_2, y_6, y_7$ теж не є плоско розміщеними. Щоб упевнитись у цьому, за теоремою 2 достатньо порівняти характеристики кутів $\angle(y_1, y_2, y_7)$ і $\angle(y_6, y_2, y_7)$, оскільки точки $y_1, y_2, y_6$ прямолінійно розміщені.

Крім того, можна довести, що точки $y_1, y_5, y_6, y_7$ теж не є плоско розміщеними. Справді, точки $y_1, y_5, y_7$ прямолінійно розміщені, оскільки виконується рівність

$$\rho(y_1, y_5) = \rho(y_1, y_7) + \rho(y_5, y_7).$$

Крім того, кут $\angle(y_1, y_7, y_5)$ є розгорнутим. Тепер відповідно до леми 2 достатньо довести, що виконується співвідношення $\varphi(y_1, y_7, y_6) \neq -\varphi(y_5, y_7, y_6)$. Для цього обчислимо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_7, y_6) = -\frac{3}{4}, \quad \varphi(y_5, y_7, y_6) = \frac{1}{4}.$$

Отже, точки $y_1, y_5, y_6, y_7$ не є плоско розміщеними.

Із рівності (2) можна отримати критерій плоского розміщення чотирьох точок метричного простору дещо в іншому вигляді, ніж у означенні 6.

**Теорема 3.** *Для того, щоб точки $a, b, c, d$ простору П були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a, b, c) = \varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d) \pm \sqrt{(1 - \varphi^2(a, b, d))(1 - \varphi^2(c, b, d))}. \tag{4}$$

*Доведення.* Перевіримо виконання рівності (2) у разі виконання умови теореми. Для цього розкриємо визначник у лівій частині рівності і підставимо в отриманий вираз рівність (4). Матимемо

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 2\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,c) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) =$$

$$=1 + 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)(\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1 - \varphi^2(a,b,d))(1 - \varphi^2(c,b,d))})-$$

$$- (\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1 - \varphi^2(a,b,d))(1 - \varphi^2(c,b,d))})^2 - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) =$$

$$= 1 + \varphi^2(a,b,d)\varphi^2(c,b,d) - (1 - \varphi^2(a,b,d))(1 - \varphi^2(c,b,d)) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) = 0.$$

Оскільки рівність (2) виконується, то точки $a, b, c, d$ плоско розміщені.

Тепер припустимо, що точки $a, b, c, d$ плоско розміщені у просторі $\Pi$. Тоді (наприклад, для точки $b$) має виконуватись рівність (2). Розкривши визначник у лівій частині, отримуємо рівність

$$1 + 2\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,c) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) = 0,$$

або

$$\varphi^2(a,b,c) - 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)\varphi(a,b,c) + \varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння стосовно $\varphi(a,b,c)$, отримуємо рівність (4). ☐

Лема 2 є частинним випадком теореми 3. Справді, за умовами леми 2 отримаємо

$$\varphi(a,b,c) = -1, \quad \varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d),$$

і рівність (4) перетворюється у тотожність.

У геометрії Евкліда рівність (4) має просте геометричне тлумачення: одна з вершин тетраедра розташована у площині основи, що утворена трьома іншими його вершинами. У цьому легко впевнитись, помітивши, що рівність (4) є аналогом формул косинуса суми або різниці двох кутів.

**3. Висновки.** З наведеного вище випливає, що у метричному просторі можна розглядати основні поняття евклідової геометрії без вимоги повноти самого простору. Однак значно зростає складність визначенням співвідношень між окремими множинами точок простору, оскільки не виконуються класичні аксіоми геометрії. Ці аксіоми необхідно замінювати певними аналітичними співвідношеннями між точками цих множин, і від самих співвідношень залежатиме внутрішня геометрична конструкція метричного простору.

Надалі треба працювати у напрямку визначення умов паралельності множин точок метричного простору та визначення співвідношень між поняттями паралельності та перпендикулярності множин точок метричного простору, які аналогічні до відомих класичних співвідношень.

Автор вдячний Ю. В. Кузьмичу за графічну підтримку тексту роботи.

## Список використаної літератури

1. *Начала Евклида. Книги I–VI*, Пер. с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовский, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1948.
2. Д. Гильберт, *Основания геометрии*, Сеятель, Петроград, 1923.
3. А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1948.
4. В. Ф. Каган, *Очерки по геометрии*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1963.
5. В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич, *Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра*, Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. пед. науки **36(249)** (2012), 55–64.
6. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища школа, Київ, 1974.
7. В. Ф. Каган, *Основания геометрии*, Ч. 2, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1956.
8. Я. П. Понарин, *Элементарная геометрия*, Ч. 1, МЦНМО, Москва, 2004.
9. Я. П. Понарин, *Элементарная геометрия*, Ч. 2, МЦНМО, Москва, 2006.

10. М. О. Давидов, *Курс математичного аналізу*, Ч. 3, Вища школа, Київ, 1979.

*Стаття: надійшла до редколегії 31.05.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# FLAT PLACEMENT SET OF POINTS IN A METRIC SPACE

**Valery KUZ'MICH**

*State University of Kherson*
*27, Universytetska Str., 73000, Kherson, Ukraine*
*e-mails: kuzmich@ksu.ks.ua, kuzmich121251@ukr.net*

We consider the concept of angle in any metric space, a landscaped three elements of this space. As the numerical of this angle we choose the cosine in the Euclidean geometry, as is proposed by A. D. Aleksandrov. This approach allows us to introduce the concept of a flat placement for points of a metric space without applying this concept to its completeness. The paper, in some way, continues the investigations of V. F. Kagan, who exhaustively studied the concept of straight placing points in metric space. Examples of application of these concepts in specific metric spaces are given.

*Key words:* metric space, a straight line, straight image, plane, parallelism, perpendicularity, tetrahedron.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 72–81*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 72–81*

---

УДК 517.53

# ПРО КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

**Тетяна САЛО**[1], **Олег СКАСКІВ**[2], **Ольга ТАРНОВЕЦЬКА**[3]

[1]*Національний університет “Львівська політехніка”*
*вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів*
*e-mail: tetyan.salo@gmail.com*
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79001, Львів*
*e-mail: olskask@gmail.com*
[3] *Чернівецький факультет НТУ “Харківський політехнічний інститут”*
*вул. Головна, 203-а, 58018, Чернівці*
*e-mail: savinskaolga@gmail.com*

Досліджуємо класи збіжності кратних рядів Діріхле.

*Ключові слова:* цілі функції, кратні ряди Діріхле, максимальний член, клас збіжності.

**1. Вступ.** Нехай $\mathbb{R}^p$ і $\mathbb{C}^p$ – дійсний і комплексний векторні простори, відповідно; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $p \in \mathbb{N}$. Для $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ писатимемо $a < b$, відповідно $a \leqslant b$, якщо $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant p)\colon a_j < b_j$, відповідно $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant p)\colon a_j \leqslant b_j$. Для $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{C}^p$ позначимо $\langle z, w \rangle = z_1 w_1 + \ldots + z_p w_p$, $\|z\| = z_1 + \ldots + z_p$, $\mathrm{Re}\, z = (\mathrm{Re}\, z_1, \dots, \mathrm{Re}\, z_p)$, а для $R = (r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо $\Pi_R = \{z \in \mathbb{C}^p \colon \mathrm{Re}\, z < R\}$.

- i) Область $G \subset \mathbb{C}^p$ слідом за [1, с.294] називатимемо *полілінійною областю*, якщо $z = (z_1, \dots, z_p) \in G \iff z + iy = (z_1 + iy_1, \dots, z_p + iy_p) \in G$ для кожного $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.
- ii) Полілінійна область $G$ належить до класу $\sigma$ (див. [1, с.299]), якщо існують $R_*, R^* \in \mathbb{R}^p$ такі, що $R_* < R^*$ і $\Pi_{R_*} \subset G \subset \Pi_{R^*}$.
- iii) Нарешті, для $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^p$, $A_j > 0$ $(1 \leq j \leq p)$, $A$-подібною системою областей ([1, с.301]) називаємо систему областей $\{G_+(r, A)\}_{r \geqslant 0}$, де $G_+(r, A) = G + rA$ (тобто, паралельне перенесення $G$ на вектор $rA$), а $G$ – полілінійна область.

Умова “$(\forall j)\colon\ A_j > 0$” у наведеному щойно означенні з [1] забезпечує рівність $\mathbb{C}^p = \bigcup_{r \geq 0} G_+(r, A)$, тобто, що система областей $\{G_+(r, A)\}$ є вичерпанням простору $\mathbb{C}^p$ таким, що $G_+(r^{(1)}, A) \subset G_+(r^{(2)}, A)$ для всіх $r^{(1)} < r^{(2)}$.

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 30D10, 32A15, 11F68

Через $\Sigma_+^p$ позначатимемо клас вичерпань $\mathbb{G}_+ = \{G_+(r,A)\}$ простору $\mathbb{C}^p$, які мають властивості i)-iii). Прикладами вичерпань з класу $\Sigma_+^p$ є такі системи областей

$$\mathbb{G}_1 = \{G(r,A)\}, \quad G(r,A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon\ \mathrm{Re}\ z < rA\},$$

$$\mathbb{G}_2 = \{G(r,A)\}, \quad G(r,A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon\ (\mathrm{Re}\ z - rA) < B\},\ B \in \mathbb{R}^p,$$

$$\mathbb{G}_3 = \{G(r,A)\}, \quad G(r,A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon\ \|\mathrm{Re}\ z\| < r\|A\|\}, \quad A = (A_1, \dots, A_p) \in \mathbb{R}_+^p.$$

Нехай $H^p$ клас цілих в $\mathbb{C}^p$, обмежених у довільній полінійній області

$$\Pi_R = \{z \in \mathbb{C}^p :\ \mathrm{Re}\ z_1 < R_1, \dots, \mathrm{Re}\ z_p < R_p\},$$

$R = (R_1, \dots, R_p) \in \mathbb{R}_+^p$, функцій. Для функції $F \in H^p$ і $x \in \mathbb{R}^p$ очевидно, що

$$M(x,F) \equiv \sup\{|F(x+iy)| :\ y \in \mathbb{R}^p\} < +\infty.$$

Для функції $F \in H^p$ і $r > 0$ позначимо

$$S_F(r,A) = \sup\{|F(z)| :\ z \in G(r,A)\}.$$

Нехай $\Lambda^p = (\lambda_n)$, $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \dots, n_p)$ і $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Через $H^p(\Lambda^p)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних скрізь в $\mathbb{C}^p$) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{\langle z, \lambda_n \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^p$$

таких, що $(\forall j)\colon\ \#\{n_j\colon a_{(n_1,\dots,n_j,\dots,n_p)} \neq 0\} = +\infty$.

Очевидно, що $H^p(\Lambda^p) \subset H^p$.

Для $x \in \mathbb{R}_+^p$ нехай $\mu(x,F) = \max\{|a_n| e^{\langle x, \lambda_n \rangle}\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ – максимальний член ряду Діріхле $F \in H^p(\Lambda^p)$.

Нехай $G_1(r,A)$ – образ $G(r,A)$ в $\mathbb{R}^p$ при відображенні $w = \mathrm{Re}\ z\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{R}^p$,

$$\mu_F(r,A) \overset{def}{=} \max\{d_m(G)|a_m| \exp\big(r\langle A, \lambda_m \rangle\big)\colon m \in \mathbb{Z}_+^p\},$$

$$d_m(G) \overset{def}{=} \exp\Big(\sup\Big\{\langle \sigma, \lambda_m \rangle :\ \sigma \in G_1(0,A)\Big\}\Big).$$

Сліюом за [2] (див. також [5]) скажемо, що цілий ряд Діріхле $F \in H^1(\Lambda^1)$ *належить до класу збіжності*, якщо виконується умова

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln M(r,F) dr < +\infty, \tag{1}$$

де $0 < \rho < +\infty$. За нерівністю Коші $\mu(r,F) \leq M(r,F)$ $(r \geqslant 0)$ з умови (1) випливає, що

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu(r,F) dr < +\infty. \tag{2}$$

У [4] зазначено таке: якщо для цілого ряду Діріхле $F \in H^1(\Lambda^1)$

$$\ln n = O(\lambda_n) \quad (n \to +\infty), \tag{3}$$

то з умови (2) випливає, що виконується умова (1). У працях [3, 4] знаходимо таку теорему.

**Теорема А** (О. М. Мулява [3, 4])**.** *Нехай показники* $\Lambda^1$ *задовольняють умову* (3), *а* $\rho\in(0,+\infty)$. *Тоді для того, щоб виконувалась умова* (1), *необхідно, а у випадку, коли послідовність* $(\varkappa_n(F))$ *неспадна,* $\varkappa_n(F)\overset{def}{=}\frac{\ln|a_{n-1}|-\ln|a_n|}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}$, *і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda_k-\lambda_{k-1})|a_k|^{\rho/\lambda_k}<+\infty. \tag{4}$$

На Львівському регіональному семінарі з математичного аналізу (1999) проф. М. М. Шеремета сформулював таку проблему: *знайти необхідну і достатню умову на показники* $\Lambda^1$, *за якої умови* (1) *і* (2) *були би еквівалентними для кожного ряду Діріхле* $F\in H^1(\Lambda^1)$. У [5] доведено таку теорему, яка дає повний розв'язок сформульованої проблеми.

**Теорема Б** (П. В. Філевич, С. І. Фединяк [5])**.** *Нехай* $\rho\in(0;+\infty)$. *Для того, щоб для кожного ряду Діріхле* $F\in H^1(\Lambda^1)$ *з умови* (2) *випливала умова* (1) *необхідно і достатньо, щоб для послідовності* $\Lambda^1$ *виконувалась умова* (3).

**2. Основні результати.** У випадку цілих кратних рядів Діріхле з класу $H^p(\Lambda^p)$, $p\geqslant 2$, природно розглянути такі класи збіжності:

$$\int_0^{+\infty}e^{-r\rho}\ln S_F(r,A)dr<+\infty,\quad \rho\in\mathbb{R}_+, \tag{5}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p_+}e^{-\langle x,\rho\rangle}\ln M(x,F)dx<+\infty,\quad \rho=(\rho_1,\dots,\rho_p)\in\mathbb{R}^p_+, \tag{6}$$

та

$$\int_0^{+\infty}e^{-r\rho}\ln\mu_F(r,A)dr<+\infty, \tag{7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p_+}e^{-\langle x,\rho\rangle}\ln\mu(x,F)dx<+\infty,\quad \rho=(\rho_1,\dots,\rho_p)\in\mathbb{R}^p_+. \tag{8}$$

Нескладно доводиться таке твердження (див. також [6]).

**Твердження 1.** *Нехай* $F\in H^p(\Lambda^p)$. *Якщо для послідовності* $\Lambda^p$ *виконується умова*

$$(\forall j,\ 1\leqslant j\leqslant p):\ \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\ln k}{\lambda_k^{(j)}}\overset{def}{=}\tau_j<+\infty, \tag{9}$$

*то існує стала* $C=C(\varepsilon,\Lambda^p)>0$ *така, що для кожного* $\varepsilon\in\mathbb{R}^p_+$ *і для всіх* $x\in\mathbb{R}^p$ *виконується нерівність*

$$M(x,F)\leqslant C\mu(x+\tau+\varepsilon,F),\quad \tau=(\tau_1,\dots,\tau_p)\in\mathbb{R}^p. \tag{10}$$

Справді,

$$M(x,F)\leqslant\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}e^{-(\tau+\varepsilon,\lambda_n)}|a_n|e^{(x+\tau+\varepsilon,\lambda_n)}\leqslant C\mu(x+\tau+\varepsilon,F),\quad C=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}e^{-(\tau+\varepsilon,\lambda_n)}.$$

Але з умови (9) для кожного $j$ випливає, що $\lambda_k^{(j)} > \ln k/(\tau_j + \varepsilon_j/2)$ $(k \geqslant k_0)$, де $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \ldots, \varepsilon_p)$. Звідки

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(\tau_j+\varepsilon_j)\lambda_k^{(j)}} \leqslant \sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\frac{\tau_j+\varepsilon_j}{\tau_j+\varepsilon_j/2}\ln k} + \sum_{k=0}^{k_0-1} e^{-(\tau_j+\varepsilon_j)\lambda_k^{(j)}} \overset{def}{=} C_j < +\infty.$$

Тому $C \leqslant C_1 + \ldots + C_p < +\infty$.

З твердження 1 і нерівності Коші $\mu(x, F) \leqslant M(x, F)$ $(x \in \mathbb{R})$ негайно отримуємо таке твердження.

**Твердження 2.** *Якщо для послідовності показників* $\Lambda^p$ *виконується умова* (9), *то для кожного ряду Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$ *умова* (6) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (8).

Нескладно доводиться також таке твердження, з якого випливає аналог теореми Б.

**Твердження 3.** *Для будь-якої послідовності показників* $\Lambda^p$ *такої, що умова* (9) *не виконується, і для кожного* $\rho \in \mathbb{R}_+^p$ *існує ряд Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$, *для якого умова* (8) *виконується з* $\rho$, *а умова* (6) *не виконується з* $\rho$.

*Доведення.* Не зменшуючи загальності міркувань припустимо, що умова (9) не виконується при $j = 1$. За теоремою Б існує цілий ряд Діріхле $f_1 \in H^1(\Lambda^1)$, $\Lambda^1 = (\lambda_k^{(1)})$ такий, що

$$f_1(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(1)} e^{r\lambda_k^{(1)}}, \quad a_k^{(1)} \geqslant 0 \geqslant (k \geqslant 0), \tag{11}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln M(r, f_1) dr = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu(r, f_1) dr < +\infty.$$

Виберемо тепер цілі ряди Діріхле $f_j \in H^1(\Lambda^j)$, $\Lambda^j = (\lambda_k^{(j)})$, $2 \leqslant j \leqslant p$ такі, що $\ln\ln \mu(r, f_j) \leqslant r\rho_j/2$, $\ln M(r, f_j) \geqslant 1$, $(r > 0)$ і розглянемо $F(x) = \prod\limits_{j=1}^{p} f_j(x_j)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$. Тоді, оскільки $M(x, F) = \prod\limits_{j=1}^{p} M(x_j, f_j)$ $(x \geqslant (1, \ldots, 1))$, а $\mu(x, F) = \prod\limits_{j=1}^{p} \mu(x_j, f_j)$, то для $x' = (x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}_+^{p-1}$, $\rho' = (\rho_2, \ldots, \rho_p) \in \mathbb{R}_+^{p-1}$ маємо

$$\int_{\mathbb{R}_+^p} e^{-\langle x,\rho\rangle} \ln M(x, F) dx \geqslant \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{p-1}} e^{-\langle x,\rho\rangle} \Big( \ln M(x_1, f_1) + \ln \prod_{j=2}^{p} M(x_j, f_j) \Big) dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\mathbb{R}_+^{p-1}} e^{-\langle x',\rho'\rangle} \Big( \int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1} \ln M(x_1, f_1) dx_1 \Big) dx' = +\infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^p_+} e^{-\langle x,\rho\rangle} \ln\mu(x,F)dx \leqslant \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+} e^{-\langle x,\rho\rangle}\Big(\ln\mu(x_1,f_1)+\ln\prod_{j=2}^{p}\mu(x_j,f_j)\Big)dx =$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1}\ln\mu(x_1,f_1)dx_1\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+} e^{-\langle x',\rho'\rangle}dx'+$$

$$+\int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1}dx_1\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+}\Big(e^{-\langle x',\rho'\rangle}\ln\prod_{j=2}^{p}\mu(x_j,f_j)\Big)dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho_2\cdots\rho_p}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1}\ln\mu(x_1,f_1)dx_1+\frac{1}{\rho_1}\cdot\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+} e^{-\langle x',\rho'\rangle}\sum_{j=2}^{p} e^{x_j\rho_j/2}dx' < +\infty.$$

Переконаємось, що вибір таких функцій $f_j$ $(2 \leqslant j \leqslant p)$ можливий. Справді, нехай $f_j(x_j) = e+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(j)} e^{x_j\lambda_k^{(j)}}$ $(2 \leqslant j \leqslant p)$, тобто, $a_0^{(j)} = e$, а $\ln a_k^{(j)} = \min\{-k\lambda_k^{(j)}, b_k^{(j)}\}$, $b_k^{(j)} = \min\{\exp(t\rho_j/2)-t\lambda_k^{(j)}\colon\ t\geqslant 0\}$ $(k\geqslant 1)$. Тоді за нерівністю Коші $\ln M(x_j,f_j) = \ln f_j(x_j) \geqslant \ln a_0^{(j)} = 1$ $(x_j \geqslant 0)$, а

$$\ln\mu(t,f_j) = \ln\max\{\ln a_k^{(j)}+t\lambda_k^{(j)}\colon\ k\geqslant 1\} \leqslant \ln\max\{b_k^{(j)}+t\lambda_k^{(j)}\colon\ k\geqslant 1\} \leqslant e^{t\rho_j/2}.$$

□

Подібно до твердження 1 доводиться таке твердження.

**Лема 1.** *Нехай $F\in H^p(\Lambda^p)$. Якщо для послідовності $\Lambda^p$ виконується умова*

$$\varlimsup_{\|n\|\to+\infty}\frac{\ln\|n\|}{\langle A,\lambda_n\rangle} \overset{def}{=} \tau < +\infty, \tag{12}$$

*то існує стала $C = C(\varepsilon,\Lambda^p) > 0$ така, що для кожного $\varepsilon\in(0,+\infty)$ і для всіх $x\in\mathbb{R}^p$ виконується нерівність*

$$M(x,F) \leqslant C\mu(x+A((p+1)\tau+\varepsilon),F). \tag{13}$$

*Доведення.* Справді,

$$M(x,F) \leqslant \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-((p+1)\tau+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle}|a_n|e^{\langle x+((p+1)\tau+\varepsilon)A,\lambda_n\rangle} \leqslant C\mu(x+((p+1)\tau+\varepsilon)A,F),$$

$C=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-((p+1)\tau+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle}$. З умови (12) випливає, що $\langle A,\lambda_n\rangle > \ln\|n\|/(\tau+\varepsilon/(2p)$ $(\|n\|\geqslant k_0)$. Звідки,

$$C=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-((p+1)\tau+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle} \leqslant \sum_{k=k_0}^{+\infty}(k+1)^p e^{-\frac{\tau(p+1)+\varepsilon}{\tau+\varepsilon/(3p)}\ln k}+\sum_{\|n\|=0}^{k_0-1} e^{-(\tau(p+1)+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle} \leqslant$$

$$\leqslant 2^p\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\tau(p+1)+\varepsilon}{\tau+\varepsilon/(3p)}-p\right)\ln k}+\sum_{\|n\|=0}^{k_0-1} e^{-(\tau(p+1)+\varepsilon)\lambda_n} \overset{def}{=} C^*.$$

Але,

$$\frac{\tau(p+1)+\varepsilon}{\tau+\varepsilon/(3p)}-p \geqslant \frac{\tau+2\varepsilon/3}{\tau+\varepsilon/3} > 1.$$

Тому $C\leqslant C^* < +\infty$. □

**Лема 2** (нерівність Коші). *Нехай* $F \in H^p(\Lambda^p)$. *Тоді для кожного* $r > 0$ *і для всіх* $m \in \mathbb{Z}_+^p$

$$\mu_F(r, A) \overset{def}{=} \max\{d_m(G)|a_m|\exp\big(r\langle A, \lambda_m\rangle\big) : m \geqslant 0\} \leq$$
$$\leq \sup\Big\{\mu(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \leq S_F(r, A).$$

*Доведення.* Зауважимо, що ([1, с.353])

$$\sup\Big\{\exp(\langle\sigma, \lambda_m\rangle) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} = d_m(G)\exp\{r\langle A, \lambda_m\rangle\}. \tag{14}$$

Тому за нерівністю Коші $\mu(x, F) \leq M(x, F)$ $(x \in \mathbb{R}^p)$ для фіксованого $m \in \mathbb{Z}_+^p$ матимемо

$$d_m(G)|a_m|\exp\{r\langle A, \lambda_m\rangle\} \leq \sup\Big\{\mu(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \leq$$
$$\leq \sup\Big\{M(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{\sup\Big\{|F(\sigma + iy) : \ y \in \mathbb{R}^p\Big\} : \ \sigma \in G_1(r, A)\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{|F(z)| : \ z \in G(r, A)\Big\} = S_F(r, A).$$

□

**Лема 3.** *Нехай* $F \in H^p(\Lambda^p)$. *Якщо виконується умова* (12), *то для кожного* $r > 0$ *і довільного* $\varepsilon > 0$

$$S_F(r, A) = \sup\Big\{|F(z)| : \ z \in G(r, A)\Big\} = \sup\Big\{M(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\}, \tag{15}$$
$$S_F(r, A) \leqslant C\mu_F(r + (p+1)\tau + \varepsilon, A),$$

*де стала* $C > 0$ *з леми 1*

*Доведення.* Рівність (15) встановлено у доведенні леми 2. Для кожного $r > 0$, спочатку послідовно скористаємось нерівністю (13)

$$S_F(r, A) = \sup\Big\{|F(z)| : \ z \in G(r, A)\Big\} = \sup\Big\{M(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant C\sup\Big\{\mu(\sigma + ((p+1)\tau + \varepsilon)A, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \overset{def}{=} CS_1(r),$$

далі означенням вичерпання полілінійними А-подібними областями

$$S_1(r) = \sup\Big\{\max\Big\{|a_n|e^{\langle\sigma + ((p+1)\tau + \varepsilon)A, \lambda_n\rangle} : n \geqslant 0\Big\} : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{\sup\Big\{|a_n|e^{\langle\sigma + ((p+1)\tau + \varepsilon)A, \lambda_n\rangle} : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} : \ n \geqslant 0\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{|a_n|e^{(r + (p+1)\tau + \varepsilon)\langle A, \lambda_n\rangle}\sup\Big\{e^{\langle\sigma, \lambda_n\rangle} : \ \sigma \in \partial G_1(0, A)\Big\} : \ n \geqslant 0\Big\} \overset{\text{def}}{=} S_2(r),$$

а потім рівністю (14)

$$S_2(r) = \max\{d_n(G)|a_n|e^{(r + (p+1)\tau + \varepsilon)\langle A, \lambda_n\rangle} : \ n \geqslant 0\} = \mu_F(r + (p+1)\tau + \varepsilon, A).$$

Тепер остаточно отримуємо

$$S_F(r, A) \leqslant CS_1(r) = CS_2(r) = C\mu_F(r + (p+1)\tau + \varepsilon, A).$$

□

За допомогою лем 2 і 3 нескладно тепер отримати таке твердження.

**Теорема 1.** *Якщо для послідовності показників* $\Lambda^p$ *виконується умова* (12), *то для кожного ряду Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$ *умова* (5) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (7).

*Зауваження* 1. Умова (12) виконується тоді і лише тоді, коли виконується умова (9).

Доведемо такий аналог цитованої теореми Б.

**Теорема 2.** *Для будь-якої послідовності показників* $\Lambda^p$ *такої, що умова* (12) *не виконується, і для кожного* $\rho > 0$ *існує ряд Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$, *для якого умова* (7) *виконується з* $\rho$, *а умова* (5) *не виконується з* $\rho$ *для* $S_F(r, A)$ *і* $\mu_F(r, A)$ *означених за вичерпанням* $\mathbb{G}_1 = \{G_1(r, A)\}, \quad G_1(r, A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon\ Re\ z < rA\}$.

*Доведення.* З невеликими змінами повторюємо доведення твердження 3. У відповідності зі зауваженням 1, припущення, що умова (9) не виконується при $j = 1$, не зменшує загальності міркувань. Тоді нехай $f_j \in H^1(\Lambda^j)$ цілі ряди Діріхле з доведення твердження 3 такі, що $\rho_j < 2\rho$ $(2 \leqslant j \leqslant p)$. Виберемо тепер $F(z_1, z_2, \dots, z_p) = \prod_{j=1} pf_j(z_j/A_j)$, $A = (A_j, \dots, A_p)$.

Тоді

$$\ln S_F(r, A) = \sum_{j=1}^{p} \ln\sup\{|f_j(z_j/A_j)|\colon\ \mathrm{Re}\ z_j < rA_j\} = \ln M(r, f_1) + \sum_{j=2}^{p} \ln M(r, f_j) \geqslant$$

$$\geqslant \ln M(r, f_1) + p - 1,$$

$$\ln \mu_F(r, A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \ln\sup\{\max\{a_k^{(j)} e^{\mathrm{Re}\ z_j\lambda_k^{(j)}}\colon\ k \geqslant 0\}\colon\ \mathrm{Re}\ z \in \partial G_1(r, A)\}.$$

Звідси остаточно отримуємо

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln S_F(r, A) \geqslant \int_0^{+\infty} e^{-r\rho}\Big(\ln M(r, f_1) + p - 1\Big)dr = +\infty,$$

$$\ln \mu_F(r, A)dr = \sum_{j=1}^{p} \ln\sup\{\max\{a_k^{(j)} e^{\mathrm{Re}\ z_j\lambda_k^{(j)}/A_j}\colon\ k \geqslant 0\}\colon\ \mathrm{Re}\ z \in \partial G_1(r, A)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \ln \mu(r, f_j) \leqslant \ln \mu(r, f_1) + \sum_{j=2}^{p} e^{r\rho_j/2} \quad (r > 0) \Longrightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu_F(r, A)dr \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-r\rho}\Big(\ln \mu(r, f_1) + \sum_{j=2}^{p} e^{r\rho_j/2}\Big)dr < +\infty.$$

□

*2.1. Умови належності до класів збіжності, які визначаються умовами* (5) *та* (7). Зауважимо спочатку, що у випадку, коли $A \in \mathbb{R}_+^p$ послідовність невід'ємних чисел $\{\langle A, \lambda_n\rangle\}$ допускає впорядкування за неспаданням, тобто її можна подати у вигляді $\{\langle A, \lambda_n\rangle\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\} = \{\alpha_k\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$, при цьому для кожного $n_0 \in \mathbb{Z}_+^p$ існує

$k = k(n_0) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $\alpha_k = \langle A, \lambda_{n_0}\rangle$, а також для кожного $k \geqslant 0\colon\ \alpha_{k+1} \geqslant \alpha_k$; якщо ж $\#\{n\colon \langle A, \lambda_n\rangle = \langle A, \lambda_{n_0}\rangle\} = p$, то вважаємо, що

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_{k+p-1} < \alpha_{k+p}.$$

Нехай для кожного $k \geqslant 0$

$$b_k = d_n(G)|a_n|e^{r\langle A,\lambda_n\rangle - r\alpha_k} = d_n(G)|a_n|,$$

де $k = k(n)$ таке як і вище.

Тепер ми можемо сформулювати таку теорему.

**Теорема 3.** *Нехай $F \in H^p(\Lambda^p)$, а вектор $A \in \mathbb{R}^p_+$ такий, що послідовність невід'ємних чисел $\{\langle A, \lambda_n\rangle\}$ допускає впорядкування $\{\alpha_k\}$ за зростанням. Для того, щоб виконувалась умова* (7)*, необхідно, а у випадку, коли*

$$\varkappa_k \overset{def}{=} (\ln b_{k-1} - \ln b_k)/(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \nearrow +\infty, \qquad (1 \leqslant k \uparrow +\infty)$$

*і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k - \alpha_{k-1})b_k^{\rho/\alpha_k} < +\infty.$$

Для доведення теореми 3 достатньо з певними видозмінами повторити доведення теореми 2 з [4].

*2.2. Умови належності до класів збіжності, які визначаються умовами* (6) *і* (8). Розглянемо тут умови належності рядів Діріхле з класу $H^1(\Lambda^1)$ до класу збіжності інтеграла (8), тобто

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho}\ln\mu(r,F)dr < +\infty, \quad \rho \in (0,+\infty). \tag{16}$$

Спочатку для $F \in H^1(\Lambda^1)$ і $r > 0$ позначимо $\mu_k^* = -\ln a_k^*$, $\ln b_k^* = \lambda_k$, $t = -1/r$, де $a_k^*$ – коефіцієнти мажоранти Ньютона $F_N$ ряду Діріхле $F$. За побудовою мажоранти Ньютона

$$1)\ a_k^* \geqslant |a_k|\ (k \geqslant 0);\ 2)\ r_k \overset{def}{=} (\ln a_{k-1}^* - \ln a_k^*)/(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \nearrow +\infty (1 \leqslant k \uparrow +\infty);$$
$$3)\ \mu(r,F) = \max\{a_k^* e^{r\lambda_k}\colon k \geqslant 0\} = a_\nu^* e^{r\lambda_\nu}\ (\forall r \in [r_\nu, r_{\nu+1}],\ \forall \nu \geqslant 1).$$

Зауважимо, що для існування формальної мажоранти Ньютона (без гарантії збіжності відповідного формального ряду Діріхле) є умова

$$-\frac{\ln|a_k|}{\lambda_k} \to +\infty \quad (k \to +\infty),$$

яка випливає з того, що відповідний ряд Діріхле є збіжним у всій комплексній площині (а необхідна і достатня умова $(\forall r \in \mathbb{R})\colon\ \mu(r,F) < +\infty$). Тоді

$$\ln\mu(r,F) = \max\{\ln a_k^* + r\lambda_k\colon k \geqslant 0\} = \frac{1}{|t|}\max\{\ln b_k^* + t\mu_k^*\colon k \geqslant 0\} = \frac{1}{|t|}\ln\mu(t,\psi),$$

де $\mu(t,\psi)$ – максимальний член формального ряду Діріхле $\psi(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k^*e^{t\mu_k^*}$. Застосовуючи заміну змінної інтегрування $r=-1/t$, маємо

$$\int_1^{+\infty}e^{-r\rho}\ln\mu(r,F)dr=\int_{-1}^{0}e^{-\rho/|t|}\frac{\ln\mu(t,\psi)}{|t|^3}dt. \tag{17}$$

Далі нам потрібний один варіант теореми 1 з [4], який ми сформулюємо у такому вигляді.

**Твердження 4.** *Розглянемо формальний ряд Діріхле* $g(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_ke^{t\mu_k}$, *де* $\mu_k\leqslant\mu_{k+1}\to+\infty$ $(0\leqslant k\to+\infty)$, $b_k\geqslant 0$ $(k\geqslant 0)$. *Припустимо, що* $\mu(t,g)=\max\{b_ke^{t\mu_k}\colon k\geqslant 0\}<+\infty$ *для всіх* $t<0$ *і існує така послідовність* $\varkappa_k\nearrow 0$ $(k\uparrow+\infty)$, *що* $b_ke^{t\mu_k}=\mu(t,g)$ *для кожного* $t\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1}]$ *і кожного* $k\geqslant 1$.

*Тоді для того, щоб*

$$\int_{-1}^{0}\frac{\ln\mu(t,g)}{\beta(t)}dt<+\infty,$$

*необхідно і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\mu_k-\mu_{k-1})B\Big(\frac{1}{\mu_k}\ln\frac{1}{b_k}\Big)<+\infty,\quad B(x)=\int_x^0\frac{t-x}{\beta(t)}dt. \tag{18}$$

Відмінність твердження 4 від теореми 1 з [4] полягає у тому, що ми, з одного боку, замість збіжності ряду Діріхле припускаємо лише скінченність його максимального члена, а з іншого — відразу припускаємо, що хоча ряд і є формальним рядом Діріхле, але має структуру мажоранти Ньютона. Іншого у доведенні теореми 1 з [4] не використовується, тому ми тут не наводимо доведення нашого твердження 4 і відсилаємо читача до [4].

Нехай тепер $\mu_k=\mu_k^*$, $b_k=b_k^*$. Зауважимо, що $\mu_{k+1}>\mu_k$ $(k\geqslant k_0)$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $k_0=0$. Тоді $\varkappa_k=-1/r_k\nearrow 0$ $(1\leqslant k\uparrow+\infty)$. Але $\mu(t,g)=(\mu(r,F))^{1/r}$, $b_ke^{t\mu_k}=(a_k^*e^{r\lambda_k})^{1/r}$ для $t=-1/r$. Тому $b_ke^{t\mu_k}=\mu(t,g)$ для кожного $t\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1}]$ і кожного $k\geqslant 1$.

Застосуємо твердження 4 до правої частини в (17) з функцією $\beta(t)=|t|^3e^{\rho/|t|}$ і формальним рядом Діріхле $g(t)=\psi(t)$. Нескладними обчисленнями переконуємося, що $B(x)=|x|\rho^{-2}e^{-\rho/|x|}$. Тоді умову (18) перепишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\mu_k^*-\mu_{k-1}^*)\Big|\frac{1}{\mu_k^*}\ln\frac{1}{b_k^*}\Big|\exp\Big\{-\rho\Big|\frac{1}{\mu_k^*}\ln\frac{1}{b_k^*}\Big|^{-1}\Big\}<+\infty. \tag{19}$$

З огляду на введені на початку цього підрозділу позначення, умову (19) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\ln a_{k-1}^*-\ln a_k^*)\Big|\frac{\lambda_k}{-\ln a_k^*}\Big|\exp\Big\{-\rho\Big|\frac{-\ln a_k^*}{\lambda_k}\Big|\Big\}<+\infty. \tag{20}$$

Отже, отримуємо таке твердження.

**Твердження 5.** *Нехай* $F\in H^1(\Lambda^1)$. *Для того, щоб виконувалась умова* (16) *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (20), *де* $a_k^*$ *– коефіцієнти мажоранти Ньютона функції* $F$.

## Список використаної літератури

1. Ш. И. Стрелиц, *Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений*, Минтис, Вильнюс, 1972.
2. P. K. Kamthan A theorem on step functions. II, Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Ser. A **28** (1963), 65–69.
3. О. М. Мулява, *Класи збіжності в теорії рядів Діріхле*, Доп. НАН Укр. (1999), no. 3, 35–39.
4. О. М. Мулява, *Про класи збіжності рядів Діріхле*, Укр. матем. ж. **51** (1999), no. 11, 1485–1494.
5. P. V. Filevych and S. I. Fedynyak, *On belonging of entire Dirichlet series to convergence class*, Mat. Stud. **16** (2001), no 1, 57–60.
6. О. Б. Скасків, О. М. Трусевич, О. Г. Орищин, *Аналоги нерівності Валірона для деяких додатних рядів*, Вісник НУ "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. **540** (2005), 41–44.

# ON THE CONVERGENCE CLASSES FOR MULTIPLE DIRICHLET SERIES

**Tetyana SALO**[1], **Oleh SKASKIV**[2], **Olga TARNOVECKA**[3]

[1]*National University "Lvivs'ka Polytehnika"*
*Stepan Bandera Str., 12, 79013, Lviv, Ukraine*
*e-mail: tetyan.salo@gmail.com*
[2]*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mail: olskask@gmail.com*
[3]*Chernivtsi Dept. Nat. Tech. Univ. "Kharkiv Polytechnic Institute",*
*203-a, Holovna Str.,58018, Chernivtsi, Ukraine*
*e-mail: savinskaolga@gmail.com*

The classes of convergence of multiple Dirichlet series are studied.

*Key words:* entire functions, multiple Dirichlet series, maximum term, class of convergence.

*Стаття: надійшла до редколегії 27.11.2017*
*доопрацьована 05.12.2017*
*прийнята до друку 13.12.2017*

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 82–89*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 82–89*

---

УДК 517.53

# ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ЛЕЖАНДРА

**Юрій ТРУХАН**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mail: yurkotrukhan@gmail.com*

Досліджено властивості розв'язків рівняння Лежандра $(1-z^2)w''-$ $-2zw'+\lambda w=0$ при $\lambda\neq n(n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$ та функцій пов'язаних із ними, а саме обмеженість $l$-індексу, близькість до опуклості та можливе зростання.

*Ключові слова:* аналітична функція, обмеженість $l$-індексу, рівняння Лежандра, функція Лежандра першого роду, близькість до опуклості, зростання.

**1. Вступ.** Аналітична однолиста в крузі $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ функція

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Необхідною і достатньою умовою [1, с.203] для опуклості $f$ є умова $\mathrm{Re}\{1+zf''(z)/f'(z)\}>0\,(z\in\mathbb{D})$. Функція $f$ називається [1, с.583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція $\Phi$ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z))>0\,(z\in\mathbb{D})$. Близька до опуклої функція $f$ характеризується тим, що зовнішність $G$ області $f(\mathbb{D})$ заповнюється променями, яка виходять з $\partial G$ і цілком лежать в $G$. Кожна близька до опуклої функція є однолистою в $\mathbb{D}$, тому $a_1\neq 0$.

Нехай $D$ — довільна комплексна область, а функція $l(z)$ — додатна та неперервна в $D$ така, що для всіх $z\in D$

$$l(z)>\beta/\mathrm{dist}\{z,\partial D\},\quad \beta=\mathrm{const}>1. \tag{2}$$

Аналітична в $D$ функція $f$ називається функцією обмеженого $l$-індексу в $D$ [2, с. 7], якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in D$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\leq\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)}:\,0\leqslant k\leqslant N\right\}.$$

Найменше з таких чисел $N$ називається $l$-індексом і позначається $N(f,l;\,D)$.

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 30D15, 34M05

*Рівнянням Лежандра* називається [3, с. 214] диференціальне рівняння

$$(1-z^2)w''-2zw'+\lambda w=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

При $\lambda=n(n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, розв'язком цього рівняння є поліном, тому надалі обмежимося розглядом випадку $\lambda\neq n(n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, коли усі нетривіальні аналітичні в околі нуля розв'язки є трансцендентними функціями.

Знайдемо розв'язок рівняння (3) у вигляді (1). Оскільки

$$(1-z^2)\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)z^{n-2}-2z\sum_{n=1}^{\infty}a_nnz^{n-1}+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=0,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)z^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)z^n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_nnz^n+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=0.$$

Звідки $2a_2+\lambda a_0=0$, $6a_3+(\lambda-2)a_1=0$ і $(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n+1)a_n+\lambda a_n=0$. Тобто,

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

Бачимо, що коефіцієнти з парними номерами не залежать від коефіцієнтів із непарними номерами. Тому розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді

$$w(z)=C_1U(z^2)+C_2zV(z^2).$$

Знайдемо рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів степеневого розвинення функції $U(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_nz^n$. Якщо у (4) підставимо $n=2k-2$, то отримаємо $a_{2k}=$ $=a_{2(k-1)}((2k-2)(2k-1)-\lambda)/(2k(2k-1))$, а отже,

$$u_k=\frac{(2k-2)(2k-1)-\lambda}{2k(2k-1)}u_{k-1},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Зауважимо, якщо $u_0=0$, то $U(z)\equiv 0$. Подібно, для коефіцієнтів функції $V(z)=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_nz^n$, підставляючи в (4) $n=2k-1$, матимемо

$$v_k=\frac{2k(2k-1)-\lambda}{2k(2k+1)}v_{k-1},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Зрозуміло, якщо $v_0=0$, то $V(z)\equiv 0$.

Легко бачити, що функції $U(z)$ і $V(z)$ — аналітичні в $\mathbb{D}$.

**2. Геометричні властивості.** Для дослідження близькості до опуклості функцій $U(z)$ та $V(z)$ скористаємося такою лемою [4] (критерій Александера).

**Лема 1.** *Якщо* $a_1\geqslant 2a_2\geqslant\ldots\geqslant(n-1)a_{n-1}\geqslant na_n\geqslant\cdots>0$, *то функція* (1) *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

Якщо приймемо $u_0=-2/\lambda$, то з (5) отримаємо, що $u_1=1>0$. Оскільки для $n\geq 2$ маємо $\dfrac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}=1-\dfrac{\lambda}{(2n-1)(2n-2)}$, то $(n-1)u_{n-1}\geqslant nu_n>0$ для всіх $n\geq 2$ за умови $0\leqslant\lambda<6$.

Подібно, приймаючи $v_0 = 6/(2-\lambda)$ із (6) отримаємо, що $v_1 = 1 > 0$ і для $n \geq 2$ виконується $\dfrac{nv_n}{(n-1)v_{n-1}} = 1 - \dfrac{\lambda-2}{(2n+1)(2n-2)}$. Тому $(n-1)v_{n-1} \geqslant nv_n > 0$ за умови, що $0 \leqslant \dfrac{\lambda-2}{(2n+1)(2n-2)} < 1$ для всіх $n \geq 2$. Тобто, $2 \leqslant \lambda < 12$.

Отже, правильним є таке зауваження.

*Зауваження* 1. Якщо $0 < \lambda < 6$, то $U(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$, а якщо $2 < \lambda < 12$, то $V(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$.

**3. Зростання.** Оскільки з (5) випливає, що $u_n = u_0 \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(2k-2)(2k-1)-\lambda}{2k(2k-1)}$, а $\dfrac{(2k-2)(2k-1)-\lambda}{2k(2k-1)} = 1 - \dfrac{1}{k} - \dfrac{\lambda}{2k(2k-1)}$, то

$$\ln|u_n| = \sum_{k=1}^{n} \ln\left|1 - \frac{1}{k} - \frac{\lambda}{2k(2k-1)}\right| + \ln|u_0| = \ln\frac{1}{n} + O(1), \quad n \to \infty.$$

Тому існують сталі $0 < h \leqslant H < +\infty$ такі, що $\dfrac{h}{n} \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{H}{n}$, $n \geq 1$. Тому $M_U(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$, $r \uparrow 1$, де $M_U(r) = \max\{|U(z)| : |z| = r\}$. Використовуючи (6) і рівність $\dfrac{2k(2k-1)-\lambda}{2k(2k+1)} = 1 - \dfrac{1}{k} - \dfrac{\lambda-2}{2k(2k-1)}$, отримуємо $M_V(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$, $r \uparrow 1$. А отже, правильним є таке зауваження.

*Зауваження* 2. $M_U(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ та $M_V(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ при $r \uparrow 1$.

**4. Обмеженість $l$-індексу.** Дослідимо обмеженість $l$-індексу в $\mathbb{D}$ довільного розв'язку $w = L(z) = C_1U(z^2) + C_2zV(z^2)$ рівняння (3).

*Зауваження* 3. Якщо $N(f, l_*) \leq N$ і $l_*(r) \leq l^*(r)$, то неважко довести [2, с.23], що $N(f, l^*) \leq N$.

Тому, враховуючи (2), функцію $l(|z|)$ шукатимемо у вигляді $l(r) = \beta/(1-r)$, де $\beta > 1$ – якомога менше число.

Продиференціюємо рівняння (3) $n \geqslant 0$ раз. Отримаємо

$$(1-z^2)w^{(n+2)} - 2z(n+1)w^{(n+1)} + (\lambda - n(n+1))w^{(n)} = 0. \tag{7}$$

Звідки $w^{(n+2)} = \dfrac{2z}{1-z^2}(n+1)w^{(n+1)} - \dfrac{\lambda - n(n+1)}{1-z^2}w^{(n)}$. Тому при $l(|z|) = \beta/(1-|z|)$ і для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{|w^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(|z|)} \leq$$

$$\leq \frac{2|z|}{|1-z^2|l(|z|)} \frac{n+1}{n+2} \frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda| + n(n+1)}{|1-z^2|} \frac{1}{(n+2)(n+1)l^2(|z|)} \frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq$$

$$\le \frac{1}{(1-|z|)l(|z|)}\frac{n+1}{n+2}\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}+\frac{|\lambda|+n(n+1)}{(1-|z|)(1+|z|)}\frac{1}{(n+2)(n+1)l^2(|z|)}\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}$$

$$\le \frac{n+1}{\beta(n+2)}\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}+\frac{(|\lambda|+n(n+1))(1-|z|)/(1+|z|)}{\beta^2(n+2)(n+1)}\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\le$$

$$\le \frac{n+1}{\beta(n+2)}\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}+\frac{|\lambda|+n(n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)}\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\le$$

$$\le \max\left\{\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)},\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\right\}, \tag{8}$$

якщо для всіх $n\geqslant 0$

$$\frac{n+1}{\beta(n+2)}+\frac{n/\beta}{\beta(n+2)}+\frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)}\leqslant 1. \tag{9}$$

Із (8) випливає, що для всіх $n\geqslant 0$ виконується $\dfrac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\le\max\left\{\dfrac{|w'(z)|}{1!l(|z|)},|w(z)|\right\}$, а отже, $N(L,l)\leqslant 1$.

Знайдемо, для яких $\beta$ виконується нерівність (9). При $n\to\infty$ маємо $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta^2}\leqslant 1$, тобто $\beta\geqslant\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. Далі шукатимемо $\beta$ у вигляді $\beta=\max\left\{\dfrac{1+\sqrt5}{2},\sqrt{\dfrac{|\lambda|}{x}}\right\}$, де $x>0$. Тоді (9) виконується, якщо для всіх $n\geqslant 0$ виконується $\dfrac{n+1}{\beta(n+2)}+\dfrac{n/\beta}{\beta(n+2)}+$ $+\dfrac{\beta x/(n+1)}{\beta(n+2)}\leqslant 1$. Остання нерівність еквівалентна нерівності

$$\frac{\beta x}{n+1}\leqslant(\beta-1-\frac{1}{\beta})n+2\beta-1. \tag{10}$$

Оскільки при $\beta\geqslant\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ права частина нерівності (10) зростає за змінною $n$, а ліва спадає, то (10) виконується для всіх $n\geqslant 0$, якщо вона виконується при $n=0$, тобто при $x\leqslant 2-\dfrac{1}{\beta}$. Оскільки $2-\dfrac{1}{\beta}\geqslant 2-\dfrac{2}{1+\sqrt5}=\dfrac{2\sqrt5}{1+\sqrt5}$, то покладемо $x=\dfrac{2\sqrt5}{1+\sqrt5}$. Отримуємо таке твердження.

**Твердження 1.** *Для довільного розв'язку* $w=L(z)$ *рівняння* (3) *виконується* $N(L,l;\mathbb{D})\leqslant 1$ *з* $l(r)=\dfrac{\beta}{1-r}$, *де* $\beta=\max\left\{\dfrac{1+\sqrt5}{2},\sqrt{|\lambda|\dfrac{5+\sqrt5}{10}}\right\}$.

Дослідимо тепер обмеженість $l$-індексу в $\mathbb{D}$ похідних довільного порядку розв'язку $w=L(z)$ рівняння (3). Із (7) випливає, що для довільного $k\in\mathbb{N}$ і для всіх $n\geqslant 0$

$$(1-z^2)w^{(k+n+2)}-2z(k+n+1)w^{(k+n+1)}+(\lambda-(k+n)(k+n+1))w^{(k+n)}=0.$$

Тобто, $G(z)=L^{(k)}(z)$ задовольняє рівняння

$$(1-z^2)G^{(n+2)}-2z(k+n+1)G^{(n+1)}+(\lambda-(k+n)(k+n+1))G^{(n)}=0.$$

Тому при $l(|z|) = \beta/(1-|z|)$, $k \in \mathbb{N}$ і для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{|G^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(|z|)} \leq \frac{k+n+1}{\beta(n+2)}\frac{|G^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda|+(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)}\frac{|G^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|G^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}, \frac{|G^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\right\}, \tag{11}$$

якщо для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{k+n+1}{\beta(n+2)} + \frac{(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} + \frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leqslant 1. \tag{12}$$

Нехай $\beta = \max\left\{(k+1)(1+\sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|}\right\}$. Тоді

$$\frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leqslant \frac{1}{2} \tag{13}$$

для всіх $n \geqslant 0$. З нерівностей $2(k+n+1) \leqslant (k+1)(n+2)$ та $k+n \leqslant (k+1)(n+1)$ правильних при усіх $k \in \mathbb{N}$ та $n \geqslant 0$ випливає, що

$$\frac{k+n+1}{\beta(n+2)} \leqslant \frac{k+1}{2\beta} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{5}} \tag{14}$$

та

$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leqslant \frac{(k+1)^2}{2\beta^2} \leqslant \frac{2}{(1+\sqrt{5})^2}. \tag{15}$$

Оскільки сума правих частин нерівностей (13), (14) та (15) дорівнює 1, то з них випливає нерівність (12), а отже, і (11). Тому правильним є таке твердження.

**Твердження 2.** *Для довільного розв'язку $w = L(z)$ рівняння (3) і для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується $N(L^{(k)}, l; \mathbb{D}) \leqslant 1$ з $l(r) = \dfrac{\beta_k}{1-r}$, де $\beta_k = \max\left\{(k+1)(1+\sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|}\right\}$.*

**5. Загальна теорема.** Із тверджень 1–2 та зауважень випливає така теорема.

**Теорема 1.** *Якщо $\lambda \neq n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то довільний аналітичний в $\mathbb{D}$ розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді $L(z) = C_1U(z^2) + C_2zV(z^2)$ і $N(L, l; \mathbb{D}) \leqslant 1$ з $l(r) = \dfrac{\beta}{1-r}$, де $\beta = \max\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{|\lambda|\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right\}$. Також для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується $N(L^{(k)}, l; \mathbb{D}) \leqslant 1$ з $l(r) = \dfrac{\beta_k}{1-r}$, де $\beta_k = \max\left\{(k+1)(1+\sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|}\right\}$. Якщо $0 < \lambda < 6$, то $U(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$, а якщо $2 < \lambda < 12$, то $V(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$. Для функцій $U(z)$ та $V(z)$ виконуються асимптотичні рівності $M_U(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ та $M_V(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ при $r \uparrow 1$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.*

**6. Обмеженість $l$-індексу функції Лежандра першого роду.** Нехай тепер $\lambda = \nu(\nu+1)$, $\nu \in \mathbb{C}$. Найширше застосування має частковий розв'язок рівняння Лежандра, що позначається $P_\nu(z)$ і називається функцією Лежандра першого роду. Відомо [3, с.220], що $P_\nu(z) = F(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1-z}{2})$, де $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ — гіпергеометрична функція, аналітична в $\mathbb{D}$. А отже, $P_\nu(z)$ задає аналітичну в $D = \{z : |z-1| < 2\}$ функцію. Дослідимо обмеженість $l$-індексу цієї функції в $D$.

*Зауваження* 4. Якщо $N(f, l; G) = N$, а $f_1(z) = f(\frac{z-z_0}{a})$, то $N(f_1, l_1; G_1) = N$, де $l_1(z) = \frac{1}{|a|} l(\frac{z-z_0}{a})$, $G_1 = z_0 + aG = \{z_0 + az : z \in G\}$.

Зважаючи на зауваження, дослідимо спершу обмеженість $l$-індексу функції $F(z) = F(\nu+1, -\nu, 1; z)$ в $\mathbb{D}$. Наведемо міркування близькі до міркувань із [5], де досліджено обмеженість $l$-індексу гіпергеометричної функції при додатних значеннях параметрів $\alpha, \beta, \gamma$.

Для дослідження $l$-індексу в околі нуля нам потрібна така лема, що є безпосереднім наслідком леми з [6].

**Лема 2.** *Якщо функція* (1) *аналітична в* $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z : |z| \leq R\}$, $a_0 = 1$ *і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n \leq a(R) < 1, \tag{16}$$

*то* $N(f, l; \mathbb{D}_R) = 0$ *з* $l(|z|) = \dfrac{1 + a(R)}{(1 - a(R))(R - |z|)}$.

Якщо $z \in \mathbb{D}_{\xi R}$, $0 < \xi < 1$, то $R - |z| \geq (1-\xi)R$ і з леми 2 та зауваження 3 випливає, що $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) = 0$ з $l(|z|) \equiv \dfrac{1 + a(R)}{(1-\xi)R(1 - a(R))}$. Тому правильна така лема.

**Лема 3.** *Якщо функція* (1) *аналітична в* $\mathbb{D}$ *і* $a_0 = 1$, *то для всіх* $\xi \in (0, 1)$ *і* $R \in (0, 1)$ *за умови* (16) *правильна рівність* $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) = 0$ *з* $l(|z|) \equiv \dfrac{1 + a(R)}{(1-\xi)R(1 - a(R))}$.

Із степеневого розвинення гіпергеометричної функції [3, с. 48] отримуємо

$$F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(j-\nu)(j+\nu+1)}{(j+1)^2} \right) z^k.$$

Оскільки при $|\lambda| \leq 1$ маємо $\left|\frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+1)^2}\right| = \left|\frac{k^2+k-\lambda}{(k+1)^2}\right| \leq 1$, то $|A_k| \leq 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Тому, при $R = 1/4$ одержуємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n| R^n \leq \frac{1}{3} = a(R)$. Прийнявши $\xi = 2/5$ в лемі 3 отримаємо $N(F, 40/3; \mathbb{D}_{1/10}) = 0$. При $|\lambda| > 1$ матимемо $\left|\frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+1)^2}\right| \leq |\lambda|$, а тому $|A_k| \leq |\lambda|^k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. При $R = 1/4|\lambda|$ одержуємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n| R^n \leq \frac{1}{3} = a(R)$. А отже, при $\xi = 2/5$ з леми 3 одержуємо $N(F, 40|\lambda|/3; \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) = 0$. Тобто, правильним є таке твердження.

**Твердження 3.** *Якщо* $|\lambda| \leq 1$, *то* $N(F, 40/3; \mathbb{D}_{1/10}) = 0$, *а якщо* $|\lambda| > 1$, *то* $N(F, 40|\lambda|/3; \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) = 0$.

Для дослідження обмеженості $l$-індексу на решті одиничного кругу використаємо такий факт, що гіпергеометрична функція $F(z)$ задовольняє гіпергеометричне рівняння Гауса [3, с. 45]

$$z(z-1)w''+(2z-1)w'-\lambda w=0.$$

Продиференціюємо його $n\geq 0$ разів і отримаємо

$$z(z-1)w^{(n+2)}+(2z-1)(n+1)w^{(n+1)}+(n(n+1)-\lambda)w^{(n)}=0. \tag{17}$$

Звідси, для $|\lambda|\leq 1$ при $\frac{1}{10}\leq|z|<1$ і $l(z)=\frac{40/3}{1-|z|}$ матимемо для всіх $n\geqslant 0$

$$\frac{|F^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(z)}\leq$$

$$\leq\frac{2|z|+1}{|z||z-1|}\frac{3(1-|z|)}{40}\frac{n+1}{n+2}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}+\frac{9(1-|z|)^2}{1600|z||z-1|}\frac{n(n+1)+|\lambda|}{(n+2)(n+1)}\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\leq$$

$$\leq\frac{2|z|+1}{|z|}\frac{3}{40}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}+\frac{1-|z|}{|z|}\frac{9}{1600}\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\leq$$

$$\leq\frac{9}{10}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}+\frac{81}{1600}\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\leq\max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)},\ \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\right\}.$$

Звідси легко випливає, що для всіх $n\geqslant 0$ виконується

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\leq\max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!l(z)},\ |F(z)|\right\},$$

а отже, $N(F,l;\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/10})\leqslant 1$. Тому правильне таке твердження.

**Твердження 4.** *Якщо* $|\lambda|\leq 1$, *то* $N(F,\frac{40/3}{1-|z|};\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/10})\leq 1$.

Для $|\lambda|>1$ при $\frac{1}{10|\lambda|}\leq|z|<1$ і $l(z)=\frac{40|\lambda|/3}{1-|z|}$ з (17) одержуємо

$$\frac{|F^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(z)}\leq\left(2+\frac{1}{|z|}\right)\frac{3}{40|\lambda|}\frac{n+1}{n+2}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}+$$

$$+\left(\frac{1}{|z|}-1\right)\frac{9}{1600|\lambda|}\left(\frac{n}{|\lambda|(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}\right)\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\leq$$

$$\leq\left(\frac{15|\lambda|+3}{20|\lambda|}+\frac{9}{160}\left(\frac{1}{|\lambda|}+\frac{1}{2}\right)\right)\max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)},\ \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\right\}\leq$$

$$\leq\max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)},\ \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\right\}$$

для всіх $n\geqslant 0$. Тому правильне таке твердження.

**Твердження 5.** *Якщо* $|\lambda|>1$, *то* $N(F,\frac{40\lambda/3}{1-|z|};\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_{1/10|\lambda|})\leq 1$.

Із тверджень 3-5 та зауваження 3 легко отримуємо таке твердження.

**Твердження 6.** *Для* $F(z)=F(\nu+1,-\nu,1;z)$ *виконується* $N(F,l;\mathbb{D})\leq 1$ *з* $l(z)=\frac{\beta}{1-|z|}$, *де* $\beta=\frac{40}{3}\max\{1,\ |\nu(\nu+1)|\}$.

Враховуючи зауваження 4 із твердження 6 отримуємо таку теорему.

**Теорема 2.** *Функція Лежандра першого роду $P_\nu(z)$ є обмеженого $l$-індексу в $D = \{z : |z-1| < 2\}$ з $l(z) = \dfrac{\beta}{2-|z-1|}$, де $\beta = \frac{40}{3}\max\{1, |\nu(\nu+1)|\}$, а величина $l$-індексу не перевищує 1.*

Зауважимо, що умова (2) для круга з теореми набуває вигляду

$$l(z) > \frac{\beta}{2-|z-1|}, \quad \beta > 1.$$

## Список використаної літератури

1. G. M. Golusin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
2. M. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publishers, Lviv, 1999.
3. Д. С. Кузнецов, *Специальные функции*, Высшая школа, Москва, 1965.
4. A. W. Goodman, *Univalent function*, Vol. **II**, Mariner Publishing Co., 1983.
5. М. М. Шеремета, *Властивості гіпергеометричної функції з невід'емними коефіцієнтами*, Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. **70** (2009), 183–190.
6. M. M. Sheremeta and Yu.S. Trukhan, *Properties of the solutions of the Gauss equation*, Mat. Stud. **41** (2014), no. 2, 157–167.

*Стаття: надійшла до редколегії 07.10.2016*
*доопрацьована 21.04.2017*
*прийнята до друку 22.04.2017*

# PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE LEGENDRE EQUATION

**Yuriy TRUKHAN**

*Ivan Franko Lviv National University,*
*1, Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mail: yurkotrukhan@gmail.com*

We investigate growth, closeness to convexity and boundedness of $l$-index for the solutions of the Legendre equation $(1-z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0$ if $\lambda \neq n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, and of some functions related to these solutions are investigated.

*Key words:* analytic function, boundedness of $l$-index, Legendre equation, Legendre function of the first kind, closeness to convexity, growth.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 90–99*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 90–99*

УДК 517.55, 517.57

# ON DECREASE OF NONPOSITIVE $\mathcal{M}$-SUBHARMONIC FUNCTIONS IN THE UNIT BALL

**Igor CHYZHYKOV, Mariia VOITOVYCH**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: chyzhykov@yahoo.com, urkevych@gmail.com*

We describe asymptotic behavior of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball in terms of smoothness properties of the measure which is determined by the Riesz measure and boundary values on the unit sphere. We generalize recent results of the second author using more general growth (decrease) scale.

*Key words:* $\mathcal{M}$-subharmonic function, Green potential, unit ball, Riesz measure

Let us introduce definitions and notations which will be used in this paper. Let $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ denote the $n$-dimensional complex space with the inner product $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$, and the corresponding norm $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$, $z, w \in \mathbb{C}^n$. We denote by $B$ the unit ball $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ with the boundary $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$.

Let $u$ be a measurable function locally integrable on $B$. For $0 < p < \infty$ we define

$$m_p(r, u) = \left( \int_S |u(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \ 0 < r < 1,$$

where $d\sigma$ is the Lebesgue measure on the unit sphere $S$ normalized so that $\sigma(S) = 1$.

We are interested in description of asymptotic behavior of $m_p(r, u)$, where $u$ belongs to a class of subharmonic functions in $B$. Such problems were considered in [4], [5], [8], [1], [2], [10]. The aim of this paper is to generalize results [10] in two directions. We start with definition of $\mathcal{M}$-subharmonic functions which are the main object of our research.

For $z, w \in B$, define the *involutive automorphism* $\varphi_w$ of the unit ball $B$ given by

$$\varphi_w(z) = \frac{w - P_w z - (1 - |w|^2)^{1/2} Q_w z}{1 - \langle z, w\rangle}$$

where $P_0 z = 0$, $P_w z = \frac{\langle z, w\rangle}{|w|^2} w$, $w \neq 0$, is the orthogonal projection of $\mathbb{C}^n$ onto the subspace generated by $w$ and $Q_w = I - P_w$ ([6, 7]).

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 31B25; 31C05

The *invariant Laplacian* $\tilde{\Delta}$ on $B$ is defined by

$$\tilde{\Delta}f(a) = \Delta(f \circ \varphi_a)(0),$$

where $f \in C^2(B)$, $\Delta$ is the ordinary Laplacian. We note that $u \in C^2$ is an $\mathcal{M}$-subharmonic function if and only if $(\tilde{\Delta}u)(a) \geqslant 0$ for all $a \in B$.

The *Green function* for the invariant Laplacian ([3], [9], [7, Chap. 6.2]) is defined by $G(z,w) = g(\varphi_w(z))$, where $g(z) = \frac{n+1}{2n}\int_{|z|}^{1}(1-t^2)^{n-1}t^{-2n+1}dt$.

If $\mu$ is a nonnegative Borel measure on $B$, the function $G_\mu$ defined by

$$G_\mu(z) = \int_B G(z,w)d\mu(w)$$

is called the *(invariant) Green potential* of $\mu$, provided $G_\mu \not\equiv +\infty$. It is known that ([7, Chap. 6.4]) the last condition is equivalent to

$$\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty. \tag{1}$$

An upper semicontinuous function $u : B \to [-\infty, \infty)$, with $u \not\equiv -\infty$, is $\mathcal{M}$-*subharmonic* on $B$ if

$$u(a) \leqslant \int_S u(\varphi_a(r\xi))d\sigma(\xi) \tag{2}$$

for all $a \in B$ and all $r$ sufficiently small. A continuous function $u$ for which the equality holds in (2) is said to be $\mathcal{M}$-*harmonic* on $B$.

Let $C_0^2(B)$ denote the class of twice continuously differentiable functions with compact support in $B$. For the $\mathcal{M}$-subharmonic functions the following theorem holds.

**Theorem A** ([7]). *If $u$ is $\mathcal{M}$-subharmonic on $B$, then there exists a unique Borel measure $\mu_u$ on $B$ such that*

$$\int_B \psi d\mu_u = \int_B u\tilde{\Delta}\psi d\tau \tag{3}$$

*for all $\psi \in C_0^2(B)$, where $d\tau(z) = \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}}$ is the invariant volume measure on $B$, $A$ is the volume measure, i.e. $d\mu_u = \tilde{\Delta}ud\tau$ in the sense of distributions.*

If $u$ is $\mathcal{M}$-subharmonic on $B$, the unique Borel measure $\mu_u$ satisfying (3) is called the *Riesz measure* of $u$.

For $z \in B$, $\xi \in S$

$$\mathcal{P}(z,\xi) = \left\{\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,\xi\rangle|^2}\right\}^n, \quad \mathcal{P}[\mu](z) = \int_S \mathcal{P}(z,\xi)d\mu(\xi) \tag{4}$$

are called the *Poisson kernel* of $B$ and the *Poisson integral*, respectively, where $\mu$ is a complex Borel measure on $S$.

An $\mathcal{M}$-subharmonic function $u$ on $B$ has an $\mathcal{M}$-*harmonic majorant* on $B$ if there exists an $\mathcal{M}$-harmonic function $h$ on $B$ such that $u(z) \leqslant h(z)$ for all $z \in B$. Furthermore, if there exists an $\mathcal{M}$-harmonic function $H$ satisfying $u(z) \leqslant H(z)$, for all $z \in B$, and $H(z) \leqslant h(z)$ for any $\mathcal{M}$-harmonic majorant $h$ of $u$, then $H$ is called the *least $\mathcal{M}$-harmonic majorant* of $u$, and will be denoted by $H_u$.

**Theorem B (Riesz Decomposition Theorem,** [9, Th.2.16]**).** *Suppose that* $u \not\equiv -\infty$ *is* $\mathcal{M}$*-subharmonic on* $B$ *and has an* $\mathcal{M}$*-harmonic majorant on* $B$*. Then*

$$u(z) = H_u(z) - \int_B G(z,w)d\mu_u(w), \tag{5}$$

*where* $\mu_u$ *is the Riesz measure of* $u$ *and* $H_u$ *is the least* $\mathcal{M}$*-harmonic majorant* $u$*.*

Note that, if $u \leqslant 0$, $u \not\equiv -\infty$, is $\mathcal{M}$-subharmonic on $B$, then $v \equiv 0$ is an $\mathcal{M}$-harmonic majorant. Therefore, for $H_u$ in representation (5), we have $H_u(z) \leqslant 0$, $z \in B$. Since, every (nonnegative) $\mathcal{M}$-harmonic function on $B$ can be represented by the Poisson integral ([7, Prop. 5.10]), there exists a nonnegative Borel measure $\nu$ on $S$ such that

$$H_u(z) = -\mathcal{P}[\nu](z), \ z \in B. \tag{6}$$

Define for $a, b \in \bar{B}$ the *nonisotropic metric* on $S$ by $d(a,b) = |1 - \langle a, b\rangle|^{1/2}$ ([6, Chap. 5.1]). For $\xi \in S$ and $\delta > 0$ we set $C(\xi, \delta) = \{z \in B : d(z, \xi) < \delta^{1/2}\}$.

Given an $\mathcal{M}$-subharmonic function $u$, let us define

$$d\lambda(w) = \frac{4n^2}{n+1} d\nu(w) + (1 - |w|^2)^n d\mu_u(w) \tag{7}$$

for $w \in \bar{B}$, where $\nu$ is the nonnegative Borel measure on $S$ defined by (6), $\mu_u$ is its Riesz measure.

In [10] the second author described the growth of $p$th means, $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ in terms of smoothness properties of the measure $\lambda$.

**Theorem C.** *Let* $u$ *be a nonpositive* $\mathcal{M}$*-subharmonic function in* $B$*,* $u \not\equiv -\infty$*,* $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$*,* $0 \leqslant \gamma < 2n$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Then*

$$m_p(r, u) = O\left((1-r)^{\gamma - n}\right), \ r \uparrow 1 \tag{8}$$

*holds if and only if*

$$\left( \int_S \lambda^p \left(C(\xi, \delta)\right) d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right), \ 0 < \delta < 1. \tag{9}$$

As a corollary we have got criteria of the growth of $p$th means, $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, of the invariant Green potential in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ in terms of smoothness properties of the Riesz measure ([2]) that generalize a result of M. Stoll [8].

Note that in Theorem C the growth of $\mathcal{M}$-subharmonic functions is described by using power functions, and the case $\gamma = 2n$ is not covered. An example from [1] shows that (9) does not imply (8) in the case $n = 1$ and $\gamma = 2$ . More precisely, it is proved that for the measure $d\mu(w) = \frac{dA(w)}{1-|w|}$ one has

$$m_p(r, u) = (1 + o(1))2\pi(1-r)\log\frac{1}{1-r}, \quad r \uparrow 1, \tag{10}$$

while $\left( \int_0^{2\pi} \lambda^p(\mathcal{C}(\varphi, \delta))\, d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \delta^2$, $\delta \to 0+$.

The purpose of this paper is to describe the asymptotic behavior of the $p$th means of $\mathcal{M}$-subharmonic functions by using a wider class than that of power functions and to investigate the case $\gamma = 2n$.

The following theorem is a generalization of Theorem C and the main result of this paper.

**Theorem 1.** *Let $u$ be a nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic function in $B$, $n \in \mathbb{N}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 \leqslant p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Let $\Phi\colon [0,2] \to [0,\infty)$ be a function such that for all $t > 1$ and $0 < t\delta < 2$ we have*

$$\Phi(t\delta) = O\left(\frac{t^{2n}}{\psi(\log(e+t))}\Phi(\delta)\right) \tag{11}$$

*for some positive increasing function $\psi$ satisfying $\int_1^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < \infty$ and $\psi(ct) \asymp \psi(t)$, $c > 1$. Then*

$$m_p\left(r,u\right) = O\left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n}\right), \ r \uparrow 1 \tag{12}$$

*holds if and only if*

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\Phi(\delta)\right), \ 0 < \delta < 1. \tag{13}$$

Specifying $\psi$ in Theorem 1 we can get the following corollary.

**Corollary 1.** *Let $u$ be a nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic function in $B$, $u \not\equiv -\infty$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Let $\varepsilon > 0$, $\Phi\colon [0,2] \to [0,\infty)$ be an increasing function such that for all $t > 1$ and $0 < t\delta \leqslant 2$ we have $\Phi(t\delta) = O\left(\frac{t^{2n}}{\log^{1+\varepsilon}(e+t)}\Phi(\delta)\right)$. Then*

$$m_p\left(r,u\right) = O\left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n}\right), \ r \uparrow 1$$

*holds if and only if*

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\Phi(\delta)\right), \ 0 < \delta < 1.$$

**Example 1.** The function $\Phi(t) = \frac{t^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{t}}$, $t \in [0,2]$, where $\alpha \in (0,2n)$, $\beta \in \mathbb{R}$ satisfies the assumptions of Theorem 1.

In fact, let firstly, $\beta \leqslant 0,\ 0 < \alpha < 2n$. Since $(\log \frac{e}{\delta})^\beta < (\log \frac{e}{t\delta})^\beta$, $t > 1$ we get

$$\Phi(t\delta) = \frac{t^\alpha \delta^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{t\delta}} \leqslant \frac{c_0 t^{2n}}{\log^k(e+t)} \frac{\delta^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{\delta}} = \frac{c_0 t^{2n}}{\log^k(e+t)}\Phi(\delta),$$

where $k > 1$, $c_0 = \max_{t>1} \frac{\log^k(1+t)}{t^{2n-\alpha}}$.

Now, let $\beta > 0,\ 0 < \alpha < 2n$. Since

$$\frac{(\log \frac{e}{\delta})^\beta}{(\log \frac{e}{t\delta})^\beta} = \left(1 + \frac{\log t}{\log \frac{e}{t\delta}}\right)^\beta \le \left(1 + \frac{\log t}{\log \frac{e}{2}}\right)^\beta, \ 0 < t\delta \leqslant 2$$

we deduce

$$\Phi(t\delta) = \frac{t^\alpha \delta^\alpha}{\log^\beta \frac{e}{t\delta}} \leqslant \frac{\tilde{c_0} t^{2n}}{\log^k (e+t)} \Phi(\delta),$$

where $k > 1$, $\tilde{c_0} = \max\limits_{t>1} \frac{(1+\frac{\log t}{\log \frac{e}{2}})^\beta \log^k(e+t)}{t^{2n-\alpha}}$. Thus, the function $\Phi(t)$ satisfies inequality (11) with $\psi(x) = x^k$, $k > 1$.

One can check that the function $\Phi(t) = \frac{t^{2n}}{\log^\beta \frac{e}{t}}$, $t \in (0, 2]$, $\Phi(0) = 0$ does not satisfy (11) for any $\beta \in \mathbb{R}$. In this limit case we have the following statement.

**Theorem 2.** *Let $u$ be a nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic function in $B$, $n \in \mathbb{N}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Let $\beta > 1$ and $\varkappa > 1$. If*

$$\left( \int_S \lambda^p \left( C(\xi, \delta) \right) d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} = O\left( \delta^{2n} \log^\beta \frac{e}{\delta} \right), \ 0 < \delta < 2, \tag{14}$$

*then*

$$m_p(r, u) = O\left( (1-r)^n \log^{\beta+\varkappa} \frac{e}{1-r} \right), \ r \uparrow 1. \tag{15}$$

*Proof of Theorem 1. Sufficiency.* Let us define the kernel

$$K(z, w) = \begin{cases} \dfrac{G(z,w)}{(1-|w|^2)^n}, & \text{if } w \in B, \ z \in B; \\ \dfrac{n+1}{4n^2} \mathcal{P}(z, \xi), & \text{if } w \in S, \ z \in B. \end{cases}$$

The following properties of $K(z, w)$ are described in [10] and will be used later.

**Proposition A.** *For $z, w = \rho\xi \in \bar{B}$ the following hold:*

a) *For $w \in \{w : \ |\varphi_w(z)| \geqslant \frac{1}{4}\}$ the inequality*

$$0 \leqslant K(z, w) \leqslant c \frac{(1-|z|^2)^n}{|1 - \langle z, w \rangle|^{2n}} \tag{16}$$

*holds for some $c > 0$.*

b) $\lim\limits_{\rho \to 1-} \frac{G(z, \rho\xi)}{(1-\rho^2)^n} = \frac{n+1}{4n^2} \mathcal{P}(z, \xi)$ *uniformly in $\xi \in S$.*

c)

$$|K(z, w)| \geqslant \frac{n+1}{4n^2} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1 - \langle z, w \rangle|^{2n}}, \ z \in B, \ w \in \bar{B}. \tag{17}$$

Denote

$$B^*\Big(z, \frac{1}{4}\Big) = \Big\{ w \in B : |\varphi_w(z)| < \frac{1}{4} \Big\}.$$

Since representation for $\mathcal{M}$-subharmonic functions (5) can be rewritten as

$$u(z) = -\int_{\bar{B}} K(z, w) d\lambda(w),$$

let us estimate the absolute values of

$$u_1(z) := \int\limits_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} K(z,w)d\lambda(w) \ \text{ and } \ u_2(z) := \int\limits_{B\setminus B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} K(z,w)d\lambda(w).$$

We start with $u_1$. In this case

$$d\lambda(w) = (1-|w|^2)^n d\mu_u(w) \ \text{ and } \ u_1(z) = \int\limits_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu_u(w).$$

Thus we can use the same method of proof as that in the proof of Theorem 1.5 ([2]).

By definition

$$0 \leqslant u_1(z) = \int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} G(z,w)d\mu(w) = \int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} g(\varphi_w(z))d\mu(w).$$

Now we need the following lemma.

**Lemma A** ([7])**.** *Let $0 < \delta < \frac{1}{2}$ be fixed. Then $g$ satisfies the following two inequalities:*

$$g(z) \geqslant \frac{n+1}{4n^2}(1-|z|^2)^n, \ z \in B,$$

$$g(z) \leqslant c(\delta)(1-|z|^2)^n, \ z \in B, |z| \geqslant \delta, \tag{18}$$

*where $c(\delta)$ is a positive constant. Furthermore, if $n > 1$ then*

$$g(z) \asymp |z|^{-2n+2}, \qquad |z| \leqslant \delta. \tag{19}$$

By (19) we have $g(z) \leqslant c|z|^{-2n+2}$ for $|z| \leqslant \frac{1}{4}$ and some positive constant $c$. Thus,

$$|u_1(z)| \leqslant c\int_{B^*\left(z,\frac{1}{4}\right)} |\varphi_w(z)|^{-2n+2}\, d\mu(w).$$

Denote $z = r\xi$, where $r = |z|$, $\frac{1}{2} < r < 1$ and $w = |w|\eta$, $\xi, \eta \in S$. Let

$$K(z,\sigma_1,\sigma_2) = \{w \in B : |r-|w|| \leqslant \sigma_1, d(\xi,\eta) \leqslant \sigma_2\}.$$

The following inclusion is proved in [2]

$$B^*\left(z, \frac{1}{4}\right) \subset K\left(z, \frac{2}{3}(1-r), 4\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{20}$$

We denote

$$K(z) := K\left(z, \frac{2}{3}(1-r), 4\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\right),$$
$$\tilde{K}(z) := K\left(z, \frac{2}{3}(1-r), 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\right).$$

In [2] it is proved that

$$\begin{aligned} I_1 :=& \int_S |u_1(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \\ \leqslant& c_1(1-r)^n \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \mu^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) d\mu(|w|\eta). \end{aligned}$$

To obtain the final estimate of $I_1$, for a fixed $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, we define the measure $\nu_1$ on the balls $\{D(\eta, t) : \eta \in S, t > 0\}$ by

$$\nu_1(D(\eta,t)) = \lambda\Big(\Big\{\rho\zeta \in B : |\rho - r| < \frac{2}{3}(1-r), d(\zeta,\eta) < t\Big\}\Big).$$

It can be expanded to the family of all Borel sets on $B$ in the standard way. It is clear that

$$\nu_1(D(\eta,t)) \asymp (1-r)^n \mu\Big(\Big\{\rho\zeta \in B : |\rho - r| < \frac{2}{3}(1-r), d(\zeta,\eta) < t\Big\}\Big).$$

**Lemma B** ([2]). *Let $\nu$ be a finite positive Borel measure on $S$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, and $p \geq 1$. Then*

$$\int_S \nu^{p-1}(D(\xi,\delta))d\nu(\xi) \leqslant \frac{N^p}{\delta^{2n}} \int_S \nu^p(D(\xi,\delta))\, d\sigma(\xi),$$

*where $N$ is a positive constant independent of $p$ and $\delta$.*

By using Lemma B we get

$$\begin{aligned} I_1 \leq& \frac{c_2}{(1-r)^{n(p-1)}} \int\limits_{||w|-r|<\frac{2}{3}(1-r)} \lambda^{p-1}\left(\tilde{K}\,(r\eta)\right) d\lambda(|w|\eta) \\ =& \frac{c_2}{(1-r)^{n(p-1)}} \int_S \nu_1^{p-1}\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\nu_1(\eta) \\ \leqslant& \frac{c_2 N^p}{(128)^n(1-r)^{np}} \int_S \nu_1^p\left(D(\eta, 8\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}})\right) d\sigma(\eta) \\ =& \frac{c_3(n,p)}{(1-r)^{np}} \int_S \lambda^p\left(\tilde{K}(r\eta)\right) d\sigma(\eta). \end{aligned}$$

Note that if $\rho\zeta \in \tilde{K}(r\eta)$ then

$$|1 - \langle\rho\zeta,\eta\rangle| \leqslant |1 - \langle\zeta,\eta\rangle| + (1-\rho)\,|\langle\zeta,\eta\rangle| \leqslant (4c_4^2 + c_5 + 1)(1-r). \tag{21}$$

Hence, by the assumption of the theorem

$$\begin{aligned} I_1 \leqslant& c_3(1-r)^{-np} \int_S \lambda^p\left(C(\eta, (4c_2^2 + c_1 + 1)(1-r))\right) d\sigma(\eta) \\ \leqslant& c_6(1-r)^{-np}\Phi^p((4c_2^2 + c_1 + 1)(1-r)). \end{aligned} \tag{22}$$

Since for all $t > 1$ and $0 < t\delta < 2$ the inequality $\Phi(t\delta) \leq \frac{t^{2n}}{\psi(\log(e+t))}\Phi(\delta)$ holds we get

$$I_1 \leqslant c_6(1-r)^{-np}\frac{(4c_2^2 + c_1 + 1)^{2np}}{\psi^p(\log(4c_2^2 + c_1 + 2))}\Phi^p(1-r) = \tilde{c_6}\frac{\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}$$

where $\psi$ is a positive increasing function satisfying $\int_1^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < \infty$.

$$\int_S |u_1(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leqslant \tilde{c_6}\left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n}\right)^p. \tag{23}$$

Let us estimate

$$u_2(z) = -\int_B K(z,w)d\tilde\lambda(w)$$

where $d\tilde\lambda(w) = \frac{4n^2}{n+1}d\nu(w)+(1-|w|)^n\chi_{B\setminus B^*\left(z,\frac14\right)}(w)d\mu(w)$, $\chi_E$ is the characteristic function of a set $E$. We may assume that $|z| \geq \frac12$.

We denote

$$E_k = E_k(z) = \left\{w\in B : \left|1-\left\langle\frac{z}{|z|}, w\right\rangle\right| < 2^{k+1}(1-|z|)\right\}, \quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

One has that for $w\in E_{k+1}\setminus E_k$, $|1-\langle z,w\rangle| \geqslant 2^{k-1}(1-|z|)$.

By (16) we get that

$$|u_2(z)| \leqslant c\int_B \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\tilde\lambda(w) \leqslant c\int_B \frac{(1+|w|)^n(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\tilde\lambda(w).$$

Arguments from [2] give

$$|u_2(z)| \leqslant \frac{4^n c_7}{(1-|z|)^n}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{\tilde\lambda\left(E_k\right)}{2^{2n(k-2)}}.$$

By Hölder's inequality ($\frac1p+\frac1q=1$)

$$\left(\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{\tilde\lambda\left(E_k\right)}{2^{2nk}}\right)^p = \left(\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{\tilde\lambda\left(E_k\right)(\psi(k))^{\frac1q}}{2^{2nk}(\psi(k))^{\frac1q}}\right)^p$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{\tilde\lambda^p\left(E_k\right)(\psi(k))^{\frac pq}}{2^{2npk}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\right)^{p/q} \le C\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{\tilde\lambda^p\left(E_k\right)(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}}. \tag{24}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leqslant& \frac{c_8}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\int_S \frac{\tilde\lambda^p\left(E_k(r\xi)\right)(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}}d\sigma(\xi)\\
=&\frac{c_8}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}}\int_S \tilde\lambda^p\left(C\left(\xi, 2^{k+1}(1-r)\right)\right)d\sigma(\xi)\\
\le&\frac{c_8}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}}\Phi^p(2^{k+1}(1-r))\\
\le&\frac{c_8\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\left(\frac{2^{(k+1)2n}}{\psi(\log(e+2^{k+1}))}\right)^p\frac{(\psi(k))^{p-1}}{2^{2npk}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{c_8\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi^{p-1}(k)}{\psi^p(k\log 2)} \leq \frac{c_9\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}$$
$$\leq \frac{c_{10}\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}.$$

Thus
$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leqslant \frac{\tilde{c}_{10}(n,p,\gamma)\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}.$$
The latter inequality together with (23) completes the proof of the sufficiency.

*Necessity.* By (17)
$$|u(z)| \geqslant \int_B K(z,w)d\lambda(w) \geqslant \frac{n+1}{4n^2}\int_B \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\lambda(w)$$
$$\geqslant \frac{n+1}{4n^2}\int_{C(\xi,1-r)} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}d\lambda(w).$$
Further we argue as in the proof of Theorem 1.5 ([2]). Since, for $w \in C(\xi, 1-r)$, $|1-\langle z,w\rangle| \leqslant 2(1-|z|)$, we have
$$|u(z)| \geqslant \frac{n+1}{4^{n+1}n^2}\frac{\lambda(C(\xi,1-r))}{(1-r)^n}.$$

From the assumption of the theorem it follows that
$$\left(\frac{n+1}{2^{2(n+1)}n^2}\right)^p \int_S \frac{\lambda^p(C(\xi,1-r))}{(1-r)^{np}}d\sigma(\xi) \leqslant \int_S |u(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leqslant c_{11}^p\frac{\Phi^p(1-r)}{(1-r)^{np}}.$$
Thus
$$\int_S \lambda^p(C(\xi,1-r))d\sigma(\xi) \leqslant c_{11}^p\Phi^p(1-r), \quad 0<r<1.$$
□

*Proof of Theorem 2.* We choose $\psi(x) = x^{\varkappa}$. Repeating arguments from the proof of the sufficiency of Theorem 1 with $\Phi(\delta) = \delta^{2n}\log^{\beta}\frac{e}{\delta}$ we arrive to the estimate

$$\int_S |u_2(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \leqslant \frac{c_8}{(1-r)^{np}}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}\frac{k^{(p-1)\varkappa}}{2^{2npk}}(2^{k+1}(1-r))^{2np}\log^{\beta p}\frac{e}{2^{k+1}(1-r)}$$
$$= c_8 4^{np}(1-r)^{np}\log^{p(\beta+\varkappa)}\frac{e}{1-r}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}k^{(p-1)\varkappa}\frac{\log^{\beta p}\frac{e}{2^{k+1}(1-r)}}{(\log\frac{e}{2^{k+1}(1-r)}+\log 2^{k+1})^{p(\beta+\varkappa)}}$$
$$\leq c_8 4^{np}(1-r)^{np}\log^{p(\beta+\varkappa)}\frac{e}{1-r}\sum_{k=1}^{[\log_2\frac{1}{1-r}]}k^{(p-1)\varkappa}\frac{1}{(\log\frac{e}{2}+\log 2^{k+1})^{p\varkappa}}$$
$$\leq c_{12}(1-r)^{np}\log^{p(\beta+\varkappa)}\frac{e}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\varkappa}}$$
$$\leq c_{13}(1-r)^{np}\log^{p(\beta+\varkappa)}\frac{e}{1-r}.$$
This yields (15). Theorem 2 is proved. □

## References

1. I. Chyzhykov, *Asymptotic behaviour of pth means of analytic and subharmonic functions in the unit disc and angular distribution of zeros*, submitted.
2. I. Chyzhykov and M. Voitovych, *Growth description of pth means of the Green potential in the unit ball*, Complex Var. Elliptic Equ. **52** (2017), no. 7, 899–913.
3. K. T. Khan and J. Mitchell, *Green's function on the classical Cartan domains*, MRC Technical Summary Report (1967) no. 500.
4. G. R. MacLane and L. A. Rubel, *On the growth of the Blaschke products*, Can. J. Math. **21** (1969), 595–600.
5. Ya. V. Mykytyuk and Ya. V. Vasyl'kiv, *The boundedness criteria of integral means of Blaschke product logarithms*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Prirodozn Tekh. Nauki **8** (2000), 10—14 (in Ukrainian).
6. W. Rudin, *Theory functions in the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Springer, Berlin, 1980.
7. M. Stoll, *Invariant potential theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Cambridge Univ. Press, 1994.
8. M. Stoll, *Rate of growth of pth means of invariant potentials in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. **143** (1989), 480–499.
9. D. Ulrich, *Radial limits of $M$-subharmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 501–518.
10. M. Voitovych, *Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions,* Mat. Stud. **47** (2017), 20–26.

*Стаття: надійшла до редколегії 02.06.2017*
*доопрацьована 19.10.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# ПРО СПАДАННЯ НЕДОДАТНОЇ $\mathcal{M}$-СУБГАРМОНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ В ОДИНИЧНІЙ КУЛІ

**Ігор ЧИЖИКОВ, Марія ВОЙТОВИЧ**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mails: chyzhykov@yahoo.com, urkevych@gmail.com*

Описано асимптотичну поведінку недодатних $\mathcal{M}$-субгармонічних функцій в одиничній кулі в термінах гладкості міри, яка визначається її мірою Рісса та межовими значеннями на одиничній сфері. Узагальнено недавні результати другого автора, використовуючи загальнішу шкалу зростання (спадання).

*Ключові слова:* $\mathcal{M}$-субгармонійна функція, потенціал Гріна, одинична куля, міра Рісса.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. C. 100–108*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 100–108*

УДК 517.55

# BOUNDED L-INDEX IN JOINT VARIABLES AND ANALYTIC SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF PDE's IN BIDISC

**Nataliia PETRECHKO**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mail: petrechko.n@gmail.com*

The linear higher-order systems of PDE's with analytic coefficients in bidisc are considered. We study boundedness of the **L**-index in joint variables of their analytic solutions, where $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_1, z_2),\ l_2(z_1, z_2))$, $l_j\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}_+$ is continuous function, $j \in \{1, 2\}$, $\mathbb{D}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$. The main tool of investigations is known Hayman's theorem. Some analytic solutions in bidisc for these system of PDE's are given.

*Key words:* analytic function, bidisc, bivariate function, bounded **L**-index in joint variables, linear higher-order systems of PDE, analytic theory of PDE, analytic solution, linear higher-order differential equation.

**1. Introduction.** Let $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_1, z_2),\ l_2(z_1, z_2))$ be a positive continuous vector function in the unit bidisc $\mathbb{D}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$. Recently, we published few papers [7, 8, 9] which are devoted to the theory of analytic functions in $\mathbb{D}^2$. For these functions there was introduced a concept of bounded **L**-index in joint variables (see definition below). Also we deduced counterparts of known criteria of boundedness of **L**-index in joint variables. In this paper, we present an application of obtained theorems to system of PDE's.

The class of functions of bounded index have been used in the theory value distribution and differential equations (see full bibliography in [4]). In particular, every entire function is a function of bounded value distribution if and only if its derivative is a function of bounded index [15]. Similar result for entire bivariate function are deduced by F. Nuray and R. F. Patterson [21]. It is known that every entire solution of the differential equation $f^{(n)}(t) + \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}(t) = 0$ $(t \in \mathbb{C})$ is a function of bounded index [24]. More general results for entire solutions of PDE's are obtained by A. I. Bandura and O. B. Skaskiv [1, 2, 4, 10]. But there are only two researches [13, 23] where authors study bounded index of entire solutions for systems of PDE's. In particular, M. T. Bordulyak

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 32W50, 32A10, 35G35, 34M03, 30J99

[13] considered the next system

$$a_j(z)f^{(K_j^0)}(z)+\sum\nolimits_{\|K\|\le s-1}g_{K,j}(z)f^{(K)}(z)=h_j(z),\ j\in\{1,\dots,m\} \tag{1}$$

where for all $j\in\{1,\dots,m\}$ $\|K_j^0\|=s$, $\{f^{(K_j^0)}(z)\}_{j=1}^m$ is the set of all possible $s$-order partial derivatives of the function $f$, the entire functions $a_j$, $g_{K,j}$, $h_j$ are functions with separable variables of the form $g(z)=\prod_{j=1}^n g_j(z_j)$. She obtained sufficient conditions for boundedness of the **L**-index in joint variables for every entire solution of system (1), where $\mathbf{L}(z)=(l_1(|z_1|),\dots,l_n(|z_n|))$ and each function $l_j\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ is continuous. Earlier M. Salmassi [23] established that every entire solution of the system

$$\begin{cases}a_0f^{(n_1,0)}(z)+a_1f^{(n_1-1,0)}(z)+\ldots+a_{n_1}f(z)=g(z),\ a_0\ne0,\\ b_0f^{(0,n_2)}(z)+b_2f^{(0,n_2-1)}(z)+\ldots+b_{n_2}f(z)=h(z),\ b_0\ne0,\end{cases}\quad z=(z_1,z_2), \tag{2}$$

is a function of bounded index in joint variables, where $a_j\in\mathbb{C}$, $b_i\in\mathbb{C}$, $h(z)$ and $g(z)$ are arbitrary entire functions in $\mathbb{C}^2$ of bounded index in joint variables. Unlike M. T. Bordulyak, he did not suppose that $h(z)$ and $g(z)$ are functions with separable variables.

In the present paper, we consider homogeneous systems of form (1) in two variables with analytic coefficients in the unit bidisc. As M. Salmassi, we do not assume that the coefficients are functions with separable variables. At first, three systems of PDE's with specified coefficients are studied. For each system we find a function $\mathbf{L}=(l_1,l_2)$ such that every its analytic solution has bounded **L**-index in joint variables. Finally, the developed methods helps us to deduce sufficient conditions providing boundedness of **L**-index of analytic solutions for a more general homogeneous system.

Note that the same problem is considered in [12] for analytic functions in the unit ball.

## 2. Main definitions and notations.

We consider two-dimensional complex space $\mathbb{C}^2$. This helps to distinguish main methods of investigation.

We need some standard notations. Denote $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$, $\mathbf{0}=(0,0)\in\mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{1}=(1,1)\in\mathbb{R}^2_+$, $R=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}^2_+$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$. For $A=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, $B=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ we will use formal notations without violation of the existence of these expressions

$$AB=(a_1b_1,a_2b_2),\quad A/B=(a_1/b_1,a_2/b_2),\ b_1\ne0,\ b_2\ne0,\quad A^B=a_1^{b_1}a_2^{b_2},\ b\in\mathbb{Z}^2_+,$$

and the notation $A<B$ means that $a_j<b_j$, $j\in\{1,2\}$; the relation $A\leqslant B$ is defined similarly. For $K=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2_+$ denote $\|K\|=k_1+k_2$, $K!=k_1!k_2!$.

The bidisc $\{z\in\mathbb{C}^2:\ |z_j-z_j^0|<r_j,\ j=1,2\}$ is denoted by $\mathbb{D}^2(z^0,R)$ and the closed bidisc $\{z\in\mathbb{C}^2:\ |z_j-z_j^0|\leqslant r_j,\ j=1,2\}$ is denoted by $\mathbb{D}^2[z^0,R]$, $\mathbb{D}^2=\mathbb{D}^2(\mathbf{0},\mathbf{1})$, $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$. For $p$, $q\in\mathbb{Z}_+$ and the partial derivative $\frac{\partial^{p+q}F(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}$ of analytic function $F(z)$ in $\mathbb{D}^2$ we will use the notation

$$F^{(p,q)}(z)=F^{(p,q)}(z_1,z_2):=\frac{\partial^{p+q}F(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}.$$

Let $\mathbf{L}(z)=(l_1(z),l_2(z))$, where $l_j(z):\mathbb{D}^2\to\mathbb{R}_+$ is a continuous function such that

$$(\forall z\in\mathbb{D}^2)\colon\ l_j(z)>\beta/(1-|z_j|),\ j\in\{1,2\},$$

where $\beta > 1$ is a some constant. S. N. Strochyk, M. M. Sheremeta, V. O. Kushnir [17], [27] imposed a similar condition for a function $l\colon G \to \mathbb{R}_+$, where $G$ is arbitrary domain in $\mathbb{C}$. A. I. Bandura and O. B. Skaskiv [11, 12] used the similar condition to consider analytic functions in the unit ball of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables.

An analytic function $F\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ [7, 8, 9] is called a function of *bounded* $\mathbf{L}$*-index (in joint variables),* if there exists $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that for all $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ and for all $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2_+$

$$\frac{1}{p_1!p_2!}\frac{|F^{(p_1,p_2)}(z)|}{l_1^{p_1}(z)l_2^{p_2}(z)} \leqslant \max\left\{\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)} : 0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n_0\right\}. \tag{3}$$

The least such integer $n_0$ is called the $\mathbf{L}$*-index in joint variables of the function* $F(z)$ and is denoted by $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{D}^2) = n_0$. This is an analog of the definition of entire function of bounded $\mathbf{L}$-index or bounded index ($\mathbf{L} \equiv 1$) in joint variables in $\mathbb{C}^2$ (see [5], [20, 21, 22]) and the definition of analytic in a domain function of bounded index [16]. Note that a primary definition of entire in $\mathbb{C}$ function of bounded index was supposed by B. Lepson [19]. Other approach (so-called $L$-index in a direction) is considered in [4, 1, 6].

By $Q(\mathbb{D}^2)$ we denote the class of functions $\mathbf{L}$, which satisfy the condition

$$(\forall r_j \in [0, \beta],\ j \in \{1, 2\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(R) \leqslant \lambda_{2,j}(R) < \infty, \tag{4}$$

where

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0\in\mathbb{D}^2} \inf\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^2\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\},$$
$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0\in\mathbb{D}^2} \sup\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in \mathbb{D}^2\left[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\},$$

It is easy to prove that the function $L_1(z_1, z_2) = (\beta'/(1 - |z_1|), \beta'/(1 - |z_2|))$ belongs to $Q(\mathbb{D}^2)$, where $\beta' > \beta$. We need the following theorem from [8].

**Теорема 1** ([8]). *Let* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. *An analytic function* $F$ *in* $\mathbb{D}^2$ *has bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables if and only if there exist* $p \in \mathbb{Z}_+$ *and* $c \in \mathbb{R}_+$ *such that for each* $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ *the next inequality*

$$\max\left\{\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z)l_2^{j_2}(z)} : j_1 + j_2 = p + 1\right\} \leqslant c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)} : k_1 + k_2 \leqslant p\right\}$$

*holds.*

This proposition and its generalizations [26, 18, 5, 8] are analogs of known Hayman's Theorem [15] in theory of functions of bounded index. M.T. Bordulyak [14] apllied the theorem to investigate $l$-index boundedness of entire solutions of linear high-order differential equations. Later, A. I. Bandura and O. B. Skaskiv [2] used the same method to study bounded $L$-index in direction of entire solutions of PDE's. We will apply Theorem 1 to systems of PDE's.

**3. General result.** Let us consider the following system of PDE's

$$\begin{cases} a_{1,k,0}(z)F^{(k,0)}(z)+\sum\limits_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}a_{1,j_1,j_2}(z)F^{(j_1,j_2)}(z)=0,\\ a_{2,k-1,1}(z)F^{(k-1,1)}(z)+\sum\limits_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}a_{2,j_1,j_2}(z)F^{(j_1,j_2)}(z)=0\\ \dots\\ a_{k+1,0,k}(z)F^{(0,k)}(z)+\sum\limits_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}a_{k+1,j_1,j_2}(z)F^{(j_1,j_2)}(z)=0. \end{cases} \tag{5}$$

**Theorem 1.** *Let $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{D}^2)$, $a_{i,j_1,j_2}(z)$ be analytic functions in $\mathbb{D}^2$, which satisfy the following conditions for all $z\in\mathbb{D}^2$ :*

$$|a_{i,j_1,j_2}(z)|l_1^{j_1}(z)l_2^{j_2}(z)\leqslant Cl_1^{k+1-i}(z)l_2^{i-1}(z)|a_{i,k+1-i,i-1}(z)|,\quad a_{i,k+1-i,i-1}(z)\neq 0, \tag{6}$$

*where $0\leq j_1+j_2\leq k-1$, $i\in\{1,\dots,k+1\}$ and $C>0$ is some constant. If analytic function $F(z_1,z_2)$ in $\mathbb{D}^2$ is a solution of (5) then $F(z_1,z_2)$ is of bounded* **L***-index in joint variables.*

*Proof.* From the first equation we have:

$$|F^{(k,0)}(z)|\leqslant\frac{\Big|\sum\limits_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}a_{1,j_1,j_2}(z)F^{(j_1,j_2)}(z)\Big|}{|a_{1,k,0}(z)|}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}\frac{|a_{1,j_1,j_2}(z)|}{|a_{1,k,0}(z)|}|F^{(j_1,j_2)}(z)|\leqslant\sum_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}Cl_1^{k-j_1}(z)l_2^{-j_2}(z)|F^{(j_1,j_2)}(z)|,$$

whence

$$\frac{|F^{(k,0)}(z)|}{l_1^k(z)l_2^0(z)}\leqslant\sum_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}Cl_1^{-j_1}(z)l_2^{-j_2}(z)|F^{(j_1,j_2)}(z)|\leqslant C_1\max_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z)l_2^{j_2}(z)}$$

Similarly, for $i$-th equation of system (5) it can be proved that

$$\frac{|F^{(k-i,i)}(z)|}{l_1^{k-i}(z)l_2^{i}(z)}\leqslant C_i\max_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z)l_2^{j_2}(z)}$$

Finally, we obtain

$$\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z)|}{l_1^{k_1}(z)l_2^{k_2}(z)}:k_1+k_2=k\right\}\leqslant\max_{1\leq i\leq k+1}C_i\cdot\max_{0\leqslant j_1+j_2\leqslant k-1}\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z)|}{l_1^{j_1}(z)l_2^{j_2}(z)}.$$

By Theorem 1 this means that $F(z_1,z_2)$ is of bounded **L**-index in joint variables. ☐

To formulate one-dimensional corollary, we consider the following linear higher-order differential equation:

$$a_k(t)f^{(k)}(t)+\sum_{j=0}^{k-1}a_j(t)f^{(j)}(t)=0. \tag{7}$$

**Corollary 1.** *Let $l\in Q(\mathbb{D})$ and analytic functions $a_j(t)$ in $\mathbb{D}$ satisfy the conditions:*

$$(\forall t\in\mathbb{D})\ \ (\forall j\in\{0,1,\dots,k-1\})\ \ |a_j(t)|l^j(t)\leqslant Cl^k(t)|a_k(t)|,\quad a_k(t)\neq 0, \tag{8}$$

*where $C > 0$ is a some constant. If an analytic function $f$ in $\mathbb{D}$ satisfies equation (7) then $f$ has bounded $l$-index.*

M. Sheremeta [25] considered equation (7) with coefficients which are analytic functions of bounded $l$-index. As M. Bordulyak in [14] for entire functions, we replaced the restriction by inequality (8). Thus, Corollary 1 is a new proposition for analytic functions in the unit disc.

## 4. Examples of linear higher-order systems of PDE.

**Corollary 2.** *Every analytic function $F(z_1, z_2)$ in $\mathbb{D}^2$, satisfying the following system of partial differential equations*

$$(9)\qquad \begin{cases} 2F^{(2,0)}(z_1,z_2) + \frac{3}{(z_1-1)}\cdot F^{(1,0)}(z_1,z_2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z_1-1)^3(z_2+1)}\cdot F(z_1,z_2) = 0, \\ 2F^{(0,2)}(z_1,z_2) + \frac{3}{(z_2+1)}\cdot F^{(0,1)}(z_1,z_2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z_1-1)(z_2+1)^3}\cdot F(z_1,z_2) = 0, \\ 2F^{(1,1)}(z_1,z_2) + \frac{1}{(z_2+1)}\cdot F^{(1,0)}(z_1,z_2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z_1-1)^2(z_2+1)^2}\cdot F(z_1,z_2) = 0, \end{cases}$$

*is a function of bounded* **L***-index in joint variables, where*

$$(10)\ \ \mathbf{L}(z) = (l_1(z), l_2(z)) = \left(\frac{1}{\sqrt{|1-z_1||1+z_2|}(1-|z_1|)}, \frac{1}{\sqrt{|1-z_1||1+z_2|}(1-|z_2|)}\right).$$

*Proof.* Using (4) it is easy to show that the function $\mathbf{L}$ belongs to $Q(\mathbb{D}^2)$ (see similar propositions in [3]). Now we check validity of (6) for system (9):

$$\frac{3l_1(z)}{|z_1-1|} = \frac{3}{|z_1-1|\sqrt{|1-z_1||1+z_2|}(1-|z_1|)} \le \frac{6}{(\sqrt{|1-z_1||1+z_2|}(1-|z_1|))^2} \le 2Ml_1^2(z),$$

$$\frac{3l_2(z)}{|z_2+1|} = \frac{3}{|z_2+1|\sqrt{|1-z_1||1+z_2|}(1-|z_2|)} \le \frac{6}{(\sqrt{|1-z_1||1+z_2|}(1-|z_2|))^2} \le 2Ml_2^2(z),$$

$$\frac{l_1(z)}{|z_2+1|} = \frac{1}{|z_2+1|\sqrt{|1-z_1||1+z_2|}(1-|z_1|)} \le \frac{2}{|1-z_1||1+z_2|(1-|z_1|)(1-|z_2|)} \le$$
$$\le 2Ml_1(z)l_2(z),$$

$$\frac{1}{2|z_1-1|^3|z_2+1|} \le \frac{1}{2|1-z_1||1+z_2|(1-|z_1|)^2} \le 2Ml_1^2(z),$$

$$\frac{1}{2|z_1-1||z_2+1|^3} \le \frac{1}{2|1-z_1||1+z_2|(1-|z_2|)^2} \le 2Ml_2^2(z),$$

$$\frac{1}{2|z_1-1|^2|z_2+1|^2} \le \frac{1/2}{|1-z_1||1+z_2|(1-|z_1|)(1-|z_2|)} \le 2Ml_1(z)l_2(z).$$

Hence, by Theorem 1 the function $F$ has bounded **L**-index in joint variables. □

**Example 1.** The function

$$F(z_1,z_2) = \cos\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!((z_1-1)(z_2+1))^n},$$

is a solution of system (9). Indeed, formally find all first and second order partial derivatives

$$F^{(1,0)}(z_1,z_2)=\sin\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{1}{2(z_1-1)\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}},$$

$$F^{(0,1)}(z_1,z_2)=\sin\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}(z_2+1)},$$

$$\begin{aligned}F^{(2,0)}(z_1,z_2)&=-\cos\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{1}{4(z_1-1)^3(z_2+1)}-\\&-\sin\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{3}{4(z_1-1)^2\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}},\\F^{(0,2)}(z_1,z_2)&=-\cos\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{1}{4(z_1-1)(z_2+1)^3}-\\&-\sin\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{3}{4\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}(z_2+1)^2},\\F^{(1,1)}(z_1,z_2)&=-\cos\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{1}{4(z_1-1)^2(z_2+1)^2}-\\&-\sin\frac{1}{\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)}}\cdot\frac{1}{4(\sqrt{(z_1-1)(z_2+1)})^3}.\end{aligned}$$

We choose a branch of square root such that $\sqrt{1}=1$ and take into account that $\frac{1}{\sqrt{w}}\sin\frac{1}{\sqrt{w}}$ can be extended to an entire function. Substituting these derivatives in system (9), it is easy to check that the function $F(z_1,z_2)$ is its solution. Then by Corollary 2 the function $F$ has bounded **L**-index in joint variables with **L** given in (10).

**Corollary 3.** *Every analytic function $F(z_1,z_2)$ in $\mathbb{D}^2$, satisfying the following system of partial differential equations*

$$(11)\qquad\begin{cases}F^{(2,0)}(z_1,z_2)+\frac{1}{(z_1+1)^2(z_2-1)}\cdot F^{(1,0)}(z_1,z_2)-\frac{2}{(z_1+1)^3(z_2-1)}\cdot F(z_1,z_2)=0\\F^{(0,2)}(z_1,z_2)+\frac{1}{(z_1+1)(z_2-1)^2}\cdot F^{(0,1)}(z_1,z_2)-\frac{2}{(z_1+1)(z_2-1)^3}\cdot F(z_1,z_2)=0\\F^{(1,1)}(z_1,z_2)+\frac{1}{(z_1+1)(z_2-1)^2}\cdot F^{(1,0)}(z_1,z_2)-\frac{1}{(z_1+1)^2(z_2-1)^2}\cdot F(z_1,z_2)=0,\end{cases}$$

*is a function of bounded* **L***-index in joint variables, where*

$$(12)\qquad\mathbf{L}(z)=(l_1(z),l_2(z))=\left(\frac{1}{|1+z_1||1-z_2|(1-|z_1|)},\frac{1}{|1+z_1||1-z_2|(1-|z_2|)}\right).$$

To prove Corollary 3 it is sufficient to check assumptions of Theorem 1.

**Example 2.** Analytic function in the unit bidisc

$$F(z_1,z_2)=\exp\left(\frac{1}{(z_1+1)(z_2-1)}\right),$$

satisfies system of partial differential equations (11). Hence, by Corollary 3 the function $F$ is of bounded **L**-index in joint variables, where **L** is given in (12).

**Corollary 4.** *An analytic function $F(z_1, z_2)$ in $\mathbb{D}^2$, satisfying the following system of partial differential equations*

$$\begin{cases} F^{(2,0)}(z_1,z_2)+\frac{2}{(z_1+1)}\cdot F^{(1,0)}(z_1,z_2)-\frac{1}{(z_2-1)^2}\cdot F(z_1,z_2)=0\\ F^{(0,2)}(z_1,z_2)+\frac{2+z_1}{z_2-1}\cdot F^{(0,1)}(z_1,z_2)-\frac{2+z_1}{(z_2-1)^2}\cdot F(z_1,z_2)=0\\ F^{(1,1)}(z_1,z_2)+\frac{1}{(z_1+1)}\cdot F^{(0,1)}(z_1,z_2)+\frac{z_1}{(z_2-1)^3}\cdot F(z_1,z_2)=0, \end{cases} \tag{13}$$

*has bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables, where*

$$\mathbf{L}(z)=(l_1(z),l_2(z))=\left(\frac{1+\frac{1}{|z_2-1|}}{1-|z_1|};\frac{1+\frac{|z_1|}{|z_2-1|}}{1-|z_2|}\right). \tag{14}$$

In view of Theorem 1 it is necessary to check validity of (6) (see a scheme in Corollary 2).

**Example 3.** Analytic function in the unit bidisc

$$F(z_1,z_2)=\frac{z_2-1}{z_1+1}\exp\frac{z_1}{z_2-1},$$

is a solution of system of partial differential equations (13). By Corollary 4 the function $F$ has bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables, where $\mathbf{L}$ is given in (14).

## REFERENCES

1. A. I. Bandura and O. B. Skaskiv, *Entire functions of bounded L-index in direction,* Mat. Stud. **27** (2007), no. 1, 30–52 (in Ukrainian).
2. A. I. Bandura and O. B. Skaskiv, *Sufficient sets for boundedness L-index in direction for entire functions,* Mat. Stud. **30** (2008), no. 2, 177–182.
3. A. I. Bandura, *Properties of positive continuous functions in* $\mathbb{C}^n$, Carpathian Math. Publ. **7** (2015), no. 2, 137–147, doi:10.15330/cmp.7.2.137-147.
4. A. Bandura and O. Skaskiv, *Entire functions of several variables of bounded index,* Lviv: Publisher I. E. Chyzhykov, 2016.
5. A. Bandura, *New criteria of boundedness of* $\mathbf{L}$*-index in joint variables for entire functions,* Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13** (2016), 58–67 (in Ukrainian).
6. A. I. Bandura, *Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction,* Mat. Stud. **47** (2017), no. 1, 27–32, doi:10.15330/ms.47.1.27-32.
7. A. I. Bandura, N. V. Petrechko, and O. B. Skaskiv, *Analytic functions in a polydisc of bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables,* Mat. Stud. **46** (2016), no. 1, 72–80.
8. A. I. Bandura, N. V. Petrechko, and O. B. Skaskiv, *Maximum modulus of analytic in a bidisc functions of bounded* $\mathbf{L}$*-index and analogue of Theorem of Hayman,* Math. Bohem. (accepted).
9. A. I. Bandura and N. V. Petrechko, *Properties of power series of analytic in a bidisc functions of bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables*, Carpathian Math. Publ. **9** (2017), no. 1, 6–12, doi:10.15330/cmp.9.1.6-12.
10. A. Bandura, O. Skaskiv, and P. Filevych, *Properties of entire solutions of some linear PDE's*, J. Appl. Math. Comput. Mech. **16** (2017), no. 2, 17–28, doi:10.17512/jamcm.2017.2.02.

11. A. Bandura and O. Skaskiv, *Analytic in an unit ball functions of bounded* **L***-index in joint variables*, Ukr. Mat. Visn. **14** (2017), no. 1, 1–15.
12. A. Bandura and O. Skaskiv, *Analytic function in the unit ball,* Beau Bassin, LAP Lambert Acad. Publ., 2017.
13. M. T. Bordulyak, *Boundedness of L-index of entire functions of several complex variables*, Diss. ... Cand. Phys. and Math. Sciences, Lviv University, Lviv, 1996, 100 p. (in Ukrainian).
14. M. T. Bordulyak, *On the growth of entire solutions of linear differential equations,* Mat. Stud. **13**, (2000), no. 2, 219–223.
15. W. K. Hayman, *Differential inequalities and local valency,* Pacific J. Math. **44** (1973), no. 1 , 117–137.
16. G. J. Krishna and S. M. Shah, *Functions of bounded indices in one and several complex variables,* In: Mathematical essays dedicated to A. J. Macintyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio, 1970, pp. 223–235.
17. V. O. Kushnir and M. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded l-index,* Mat. Stud. **12** (1999), no. 1, 59–66.
18. V. O. Kushnir, *Analogue of Hayman theorem for analytic functions of bounded l-index*, Visn. Lviv Univ., Ser. Mekh.-Math. **53** (1999), 48–51 (in Ukrainian).
19. B. Lepson, *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index,* Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc.: Providence, Rhode Island, **2** (1968), pp. 298–307.
20. F. Nuray and R. F. Patterson, *Entire bivariate functions of exponential type,* Bull. Math. Sci., **5** (2015), no. 2, 171–177. doi:10.1007/s13373-015-0066-x
21. F. Nuray and R. F. Patterson, *Multivalence of bivariate functions of bounded index,* Le Matematiche, **70** (2015), no. 2, 225–233.
22. M. Salmassi, *Functions of bounded indices in several variables,* Indian J. Math., **31** (1989), no. 3, 249–257.
23. M. Salmassi, *Some classes of entire functions of exponential type in one and several complex variables* / Mohammad Salmassi // Doctoral Dissertation, 1978, University of Kentucky.
24. S. M. Shah, *Entire functions of bounded index,* Proc Amer Math Soc. **19** (1968), no. 5, 1017–1022.
25. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index.* VNTL Publishers, Lviv, 1999.
26. M. N. Sheremeta, *Entire functions and Dirichlet series of bounded l-index*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., (1992), no. 9, 81–87. (in Russian). Engl. transl.: Russian Math. (Iz. VUZ). **36** (1992), no.9, 76–82.
27. S. N. Strochik and M. N. Sheremeta, *Analytic in the unit disc functions of bounded index*, Dopov. Akad. Nauk Ukr. **1** (1993), 19–22 (in Ukrainian).

*Стаття: надійшла до редколегії 02.06.2017*
*доопрацьована 30.10.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# ОБМЕЖЕНІСТЬ L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ ТА АНАЛІТИЧНІ У БІКРУЗІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ СИСТЕМ РЧП

**Наталія ПЕТРЕЧКО**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mail: petrechko.n@gmail.com*

Розглянуто системи лінійних рівнянь з частинними похідними вищих порядків з аналітичними у бікрузі коефіцієнтами. Досліджено обмеженість **L**-індексу за сукупністю змінних їхніх аналітичних розв'язків, де $\mathbf{L}(z_1, z_2) = (l_1(z_1, z_2),\ l_2(z_1, z_2))$, $l_j : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція, $j \in \{1, 2\}$, $\mathbb{D}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$. Основним засобом дослідження є теорема Хеймана. Наведено деякі аналітичні у бікрузі розв'язки таких систем рівнянь з частинними похідними.

*Ключові слова:* аналітична функція, бікруг, функція двох змінних, обмежений **L**-індекс за сукупністю змінних, система лінійних РЧП вищих порядків, аналітична теорія диференціальних РЧП, аналітичний розв'язок, лінійне диференціальне рівняння вищих порядків.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 109–122*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 109–122*

УДК 517.9

# ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

**Микола БОКАЛО, Ірина СКІРА**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mails: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com*

Доведено коректність задачі Фур'є для анізотропних еліптично-параболічних інтегро-диференціальних систем зі змінними показниками нелінійності без обмежень на зростання розв'язків і вихідних даних при прямуванні часової змінної до $-\infty$.

*Ключові слова:* задача Фур'є, задача без початкових умов, система еліптично-параболічних рівнянь, функціонально-диференціальне рівняння.

## 1. Вступ.

Нехай $n, N$ – натуральні числа, $\mathbb{R}^n$ (відповідно, $\mathbb{R}^N$) – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, ..., x_n)$ (відповідно, $y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_N)$) дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{1/2}$ (відповідно, $|y| := (|y_1|^2 + ... + |y_N|^2)^{1/2}$). Позначаємо через $M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ – лінійний простір, складений з матриць $\zeta = (\zeta_{kl}) = (\zeta_{kl}; k = \overline{1,N}, l = \overline{0,n})$ розмірності $N \times (n+1)$ з дійсними елементами і наділений нормою $|\zeta| = (\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=0}^{n}|\zeta_{ij}|^2)^{1/2}$.

Вважаємо, що $\Omega$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, а $\partial\Omega$ (її межа) – кусково-гладка поверхня, причому $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де $\Gamma_0$ – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, $\Gamma_0$ може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі.

Позначаємо $S := (-\infty, 0)$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$, $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$.

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 35D30, 35K20, 35K55.

Розглядаємо *задачу*: знайти векторну функцію $u = \mathrm{col}(u_1 \dots u_N) : \overline{Q} \to \mathbb{R}^N$, яка задовольняє (в певному сенсі) систему рівнянь

$$(b_i(x)u_i)_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,\delta u) + a_{i0}(x,t,\delta u) + \int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u(y,t))dy =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t) + f_{i0}(x,t), \quad (x,t) \in Q\,, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{1}$$

та крайові умови

$$u_i\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{2}$$

де $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $(i = \overline{1,N})$, $a_{ij} : Q \times M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$, $c_i : \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N})$, $f_{ij} : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ – задані дійснозначні функції, причому $b_i(x) \geqslant 0\,(i = \overline{1,N})$ для майже всіх (м. в.) $x \in \Omega$.

Тут і далі $\nabla u := (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ – матриця, складена з похідних $u_{i,x_j}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$, $\delta u := (u, \nabla u)$, $\partial u_i(x,t)/\partial \nu_a := \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\delta u)\,\nu_j(x)$, $(x,t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі".

Прикладом систем вигляду (1), які вивчаються, є система

$$u_{i,t} - \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{a}_{ij}(x,t)|u_{i,x_j}|^{p_{ij}(x)-2}u_{i,x_j}\Big)_{x_j} + \widehat{a}_{i0}(x,t)|u_i|^{p_{i0}(x)-2}u_i +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \widehat{c}_{ik}(x,y,t)u_k(y,t)dy = f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q, \; i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

де $\widehat{a}_{ij}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ – вимірні, обмежені, додатні та відділені від нуля функції, $\widehat{c}_{ik}$ $(i,k = \overline{1,N})$ – вимірні й обмежені функції, $f_i$ $(i = \overline{1,N})$ – інтегровні з деяким степенем функції, $p_{ij} > 1$ $(i = \overline{1,N},\; j = \overline{0,n})$ – вимірні та обмежені функції, які називають ***показниками нелінійності.***

В останні десятиліття дуже активно вивчаються нелінійні диференціальні рівняння та їхні системи зі змінними показниками нелінійності, прикладами яких є (3) (див., наприклад, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Це пов'язано з тим, що такі рівняння і їхні системи виникають у математичному моделюванні різних типів фізичних процесів, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [11].

Як добре відомо, крайові задачі для лінійних та багатьох нелінійних параболічних рівнянь, заданих в необмежених знизу за часовою змінною областях (задачі Фур'є), є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані, крім крайових умов, накладені певні обмеження на їхнє зростання, коли часова змінна прямує до $-\infty$ ([12], [16], [17]). Проте є нелінійні параболічні рівняння, задачі Фур'є для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [1, 4, 5, 13, 15, 18, 19]. Тут розглядатимемо інтегро-диференціальні еліптично-параболічні системи, які мають таку саму властивість. Раніше для таких систем задачу Фур'є не розглядали. Зауважимо, що інтегро-диференціальні еліптично-параболічні рівняння та їхні системи широко використовують у математичному моделюванні складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці (наприклад, у теорії ядерних реакцій під час вивчення процесу уповільнення нейтронів у дифузії заряджених частинок у плазмі та в інших різноманітних задачах). Зокрема такі рівняння досліджували в [7, 8].

Зробивши додаткові припущення на вихідні дані, доведено однозначну розв'язність задач Фур'є для одного класу систем анізотропних вироджуваних параболічних рівнянь з інтегральними членами за відсутності обмежень на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних при прямування часової змінної до $-\infty$. Отримані результати є узагальненням і доповненням результатів, які отримали для параболічних рівнянь зі сталими показниками нелінійності [14].

## 2. Основні позначення та факти.

Нехай $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Припустимо, що або $G = \Omega$, або $G = \Omega \times I$, де $I$ – інтервал числової осі $\mathbb{R}$. Позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$ узагальнений простір Лебега, який складається з функцій $v \in L_1(G)$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де $\rho_{G,r}(v) := \int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx$, якщо $G = \Omega$, та $\rho_{G,r}(v) := \int\limits_{\Omega\times I} |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$, якщо $G = \Omega \times I$. На цьому просторі введемо норму $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\}$, з якою він є банаховим [12]. Якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ може бути ототожненим з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де $r'$ є функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Позначимо через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ лінійний простір вимірних функцій $g\colon Q \to \mathbb{R}$ таких, що їхнє звуження $g|_{Q_{t_1,t_2}}$ на $Q_{t_1,t_2}$ належить до $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1, t_2 \in S$. Цей простір є повним локально опуклим із системою півнорм $\big\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} \,\big|\, t_1, t_2 \in S,\, t_1 < t_2\big\}$. Послідовність $\{g_m\}$ — *сильно збіжна* (відповідно, *слабко збіжна*) в $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, якщо послідовність $\{g_m|_{Q_{t_1,t_2}}\}$ — сильно збіжна (відповідно, слабко збіжна) в $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1, t_2 \in S\,(t_1 < t_2)$. Аналогічно визначаємо простір $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Нехай $p = (p_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (p_{ij})$ – матрична функція, яка задовольняє умову

$(\mathcal{P})$ $2 \leqslant p_{ij}^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) =: p_{ij}^+ < +\infty$, причому $p_{i0}^- > 2$ $(i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n})$.

Через $p' = (p'_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (p'_{ij})$ позначатимемо матричну функцію таку, що $1/p_{ij}(x) + 1/p'_{ij}(x) = 1$ для м. в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.

Нехай $W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N) := \{v = \mathrm{col}(v_1,\dots,v_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ – вимірна $|\,\partial_j v_i \in L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega)$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})\}$ з нормою $\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)} := \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=0}^{n} \|\,\partial_j v_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega)}$, де тут і далі $\partial_0 w := w$, $\partial_j w := w_{x_j}$ $(j=\overline{1,n})$ для $w:\Omega\to\mathbb{R}$. Цей простір є банаховим і його називають узагальненим простором Соболєва.

Позначимо через $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ замикання простору

$$\widetilde{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N) := \big\{v\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)\,\big|\,\operatorname{supp} v - \text{обмежена множина},\quad v\big|_{\Gamma_0}=0\big\}$$

в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Для зручності викладення матеріалу позначимо $\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Для довільних $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ $(t_1<t_2)$ введемо простір

$$W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N) := \big\{w\colon Q_{t_1,t_2}\to\mathbb{R}^N \mid \partial_j w_i\in L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})\,(i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n})\big\}$$

з нормою $\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)} := \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=0}^{n}\|\partial_j w_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)}$.

Через $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$ позначимо підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot),}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$, складений з функцій $w$ таких, що $w(\cdot,t)\in\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ для майже всіх $t\in[t_1,t_2]$.

Введемо лінійний простір $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N)$, складений з визначених на $Q$ вимірних функцій, звуження яких на $Q_{t_1,t_2}$ належить до $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$ для будь-яких $t_1,t_2\in S$ $(t_1<t_2)$. Цей простір є повним локально опуклим із сім'єю півнорм $\big\{\|h\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\|\|\partial_j h_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})}\big|\,t_1,t_2\in S\ (t_1<t_2)\big\}$.

Далі протягом усієї роботи будемо вважати, що

($\mathcal{B}$) для кожного $i\in\{1,\dots,N\}$ функція $b_i:\Omega\to\mathbb{R}$ – вимірна і $0\leqslant b_i(x)\leqslant 1$ для м. в. $x\in\Omega$.

Нехай $\Omega_{0,i} := \{x\in\Omega\,|\,b_i(x)>0\}$ і $\widetilde{b}_i(x) := b_i(x)$, якщо $x\in\Omega_{0,i}$, та $\widetilde{b}_i(x) := 1$, якщо $x\in\Omega\setminus\Omega_{0,i}$, для кожного $i\in\{1,\dots,N\}$. Позначимо $b := \operatorname{col}(b_1,\dots,b_N)$ і нехай $H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)$ лінійний простір функцій вигляду $w=\operatorname{col}(w_1=\widetilde{b}_1^{-1/2}v_1,\dots,w_N=\widetilde{b}_N^{-1/2}v_N)$, де $v_i\in L_2(\Omega)$ для кожного $i\in\{1,\dots,N\}$. Введемо на $H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)$ півнорму $\|w_i\|_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \big(\int_\Omega\sum\limits_{i=1}^{N}b_i(x)|w_i(x)|^2dx\big)^{1/2}$. Легко перевірити, що $H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)$ — поповнення лінійного простору $\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ за півнормою $\|\cdot\|_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ ([12]).

Позначимо через $C(S;B)$, де $B$ – лінійний простір з нормою чи півнормою $\|\cdot\|_B$, простір функцій $v\colon S\to B$ таких, що їхнє звуження на будь-який інтервал $[t_1,t_2]\subset S$ належить до $C([t_1,t_2];B)$. Простір $C(S;B)$ є повним локально опуклим з сім'єю півнорм $\big\{\|v\|_{C([t_1,t_2];B)} := \max_{t\in[t_1,t_2]}\|v(t)\|_B\ \big|\ t_1,t_2\in S\ (t_1<t_2)\big\}$. У цьому просторі послідовність $\{g_m\}$ є збіжною, якщо послідовність $\{g_m|_{[t_1,t_2]}\}$ є збіжною в $C([t_1,t_2];B)$ для будь-яких $t_1,t_2\in S$ $(t_1<t_2)$.

Визначимо простір

$$\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N) := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N)\cap C(S;H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)),$$

який є повним лінійним локально опуклим з сім'єю півнорм

$$\Big\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\|\partial_j h_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})}+\|h\|_{C([t_1,t_2];H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))}\,\Big|\,t_1,t_2\in S,\ t_1<t_2\Big\}.$$

## 3. Постановка задачі та формулювання основних результатів.

Передусім дамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(2), а для цього введемо відповідні обмеження на вихідні дані, тобто визначимо класи вихідних даних.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину матричних функцій $(a_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (a_{ij})$, які задовольняють умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$ та $j \in \{0,\dots,n\}$ функція $a_{ij}(x,t,\xi)$, $(x,t) \in Q$, $\xi = (\xi_{kl}) \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_{ij}(x,t,\cdot) : M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для будь-якого $\xi \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ функція $a_{ij}(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна; крім того, $a_{ij}(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$;

($\mathcal{A}_2$) для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$ та $j \in \{0,\dots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$|a_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant h_{ij}(x,t)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{n}|\xi_{kl}|^{p_{kl}(x)/p'_{ij}(x)}\Big) + g_{ij}(x,t),$$

де $h_{ij} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

($\mathcal{A}_3$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi^1, \xi^2 \in M^{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}(a_{ij}(x,t,\xi^1) - a_{ij}(x,t,\xi^2))(\xi^1_{ij} - \xi^2_{ij}) \geqslant$$

$$\geqslant K_1\sum_{k=1}^{N}|\xi^1_{k0} - \xi^2_{k0}|^2 + K_2\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{n}|\xi^1_{kl} - \xi^2_{kl}|^{p_{kl}(x)},$$

де $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ – сталі.

Нехай $\mathbb{C}$ — множина векторних функцій $\mathrm{col}(c_1 \dots c_N)$, які задовольняють такі умови:

($\mathcal{C}_1$) для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$ функція $c_i(x,y,t,\eta), (x,y,t,\eta) \in \Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$ функція $c_i(x,y,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ — неперервна, а для всіх $s \in \mathbb{R}$ функція $c_i(\cdot,\cdot,\cdot,\eta) : \Omega\times\Omega\times S \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом; $c_i(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$.

($\mathcal{C}_2$) для кожного $i \in \{1,\dots,N\}$, довільних $\eta^1, \eta^2 \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$ виконується нерівність

$$|c_i(x,y,t,\eta^1) - c_i(x,y,t,\eta^2)| \leq L|\eta^1 - \eta^2|,$$

де $L > 0$ — стала.

Через $\mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$ позначатимемо множину матричних функцій $(f_{ij};\ i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (f_{ij})$ таких, що $f_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ і для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ функція $f_{ij}$ зануляється в околі $\Sigma_1$.

**Означення 1.** Нехай $b = \mathrm{col}(b_1,\dots,b_N)$ і $p = (p_{ij})$ задовольняють умови, відповідно, ($\mathcal{B}$) та ($\mathcal{P}$), $(a_{ij}) \in \mathbb{A}_p$, $\mathrm{col}(c_1,\dots,c_N) \in \mathbb{C}$, $(f_{ij}) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$. *Узагальненим розв'язком* задачі (1)–(2) назвемо векторну функцію $u \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N)$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \Big\{ \sum_{j=0}^n a_{ij}(x,t,\delta u)\partial_j v_i \varphi_i +$$

$$+ v_i\varphi_i \int\limits_\Omega c_i(x,y,t,u(y,t))\,dy - b_i(x) u_i v_i {\varphi_i}' \Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}\partial_j v_i \varphi_i\,dxdt \tag{4}$$

$\forall v = \mathrm{col}(v_1,\ldots,v_N) \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $\forall \varphi = \mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N) \in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N)$.

Тут і далі під $C^1_c(I;\mathbb{R}^N)$, де $I$ — інтервал числової осі, розуміємо лінійний простір векторних функцій $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$, компоненти яких є фінітними неперервно диференційовними функціями.

**Теорема 1.** *Нехай $b = col(b_1,\ldots,b_N)$ і $p = (p_{ij})$ задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, $(a_{ij}) \in \mathbb{A}_p$, $col(c_1,\ldots,c_N) \in \mathbb{C}$, $(f_{ij}) \in \mathbb{F}_{p',loc}$ і, крім того, виконується нерівність*

$$K_1 > L mes_n \Omega. \tag{5}$$

*Тоді існує единий узагальнений розв'язок задачі (1)–(2), причому для будь-яких $R, R_0, t_0$ таких, що $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 < 0$, правильна оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big[ \sum_{j=1}^n |\partial_j u_i(x,t)|^{p_{ij}(x)} + |u_i(x,t)|^2 \Big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big\{ \sum_{i=1}^N R^{-2/(p^+_{i0}-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n |f_{ij}|^{p'_{ij}(x)}\,dxdt \Big\}, \tag{6}$$

*де $C_1 > 0$ – стала, яка залежить лише від $K_1, K_2, L, mes_n\Omega$ і $p^-_{ij}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.*

**4. Допоміжні твердження.** Сформулюємо та доведемо твердження, які використаємо для доведення теореми 1.

**Лема 1.** *Нехай $b = col(b_1,\ldots,b_N)$ і $p = (p_{ij})$ задовольняють умови, відповідно, $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, а $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ – довільні числа, причому $t_1 < t_2$. Припустимо, що функція $w \in \widetilde{W}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n g_{ij}\partial_j v_i \varphi_i - b_i w_i v_i \varphi'_i \Big\}\,dxdt = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N),\ \forall \varphi \in C^1_c((t_1,t_2);\mathbb{R}^N) \tag{7}$$

*для деяких $g_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\,loc}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n})$. Тоді $w \in C\big([t_1,t_2]; H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)\big)$ і для будь-яких $\theta \in C^1([t_1,t_2])$, $v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\tau_1, \tau_2 \in [t_1,t_2]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ виконуються* *рівності*

$$\theta(\tau_2)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)w_i(x,\tau_2)v_i(x)\,dx - \theta(\tau_1)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)w_i(x,\tau_1)v_i(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big\{\Big(\sum_{j=0}^n g_{ij}v_{i,x_j}\Big)\theta - b_iw_iv_i\theta'\Big\}\,dxdt = 0, \tag{8}$$

$$\frac12\theta(t_2)\|w(\cdot,t_2)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)} - \frac12\theta(t_1)\|w(\cdot,t_1)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)} -$$

$$-\frac12\int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^N \|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}\theta'(t)\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n g_{ij}\partial_j w_i\Big)\theta\,dxdt = 0. \tag{9}$$

Це твердження доводиться аналогічно як лема 2 [6].

**Лема 2.** *Нехай* $b = col(b_1,\dots,b_N)$ *і* $p = (p_{ij})$ *задовольняють умови, відповідно,* $(\mathcal{B})$ *та* $(\mathcal{P})$, $(a_{ij}) \in \mathbb{A}_p$, $col(c_1,\dots,c_N) \in \mathbb{C}$ *і для кожного* $l \in \{1,2\}$ *функції* $u^l \in \mathbb{U}^b_{p,loc}(Q;\mathbb{R}^N)$, $(f^l_{ij}) \in \mathbb{F}_{p',loc}$ *такі, що правильна тотожність*

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N\Big\{\sum_{j=0}^n a_{ij}(x,t,\delta u^l)\partial_j v_i\varphi_i + v_i\varphi_i\int\limits_\Omega c_i(x,y,t,u^l(y,t))\,dy - b_i(x)u^l_iv_i\varphi'_i\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n f^l_{ij}\partial_j v_i\varphi_i dxdt \quad \forall v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N),\ \forall\varphi \in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N). \tag{10}$$

*Тоді для довільних чисел* $R$, $R_0$, $t_0$ *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \leqslant 0$, *виконується нерівність*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|u^1_i(x,t) - u^2_i(x,t)|^2\,dx +$$

$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=0}^n |\partial_j u^1_i - \partial_j u^2_i|^{p_{ij}(x)} + |u^1_i - u^2_i|^2\Big]\,dxdt \leqslant C_1\Big\{\sum_{i=1}^N R^{-2/(p^+_{i0}-2)} +$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n |f^1_{ij} - f^2_{ij}|^{p'_{ij}(x)}dxdt\Big\}, \tag{11}$$

*де* $C_1 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* $K_1, K_2, L, mes_n\Omega$ *і* $p^-_{ij}(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.

*Доведення.* Нехай $R, R_0, t_0$ такі, як у формулюванні леми, і $\eta(t) := t - t_0 + R$, $t \in \mathbb{R}$. Для заданих $v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\varphi \in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N)$ розглянемо тотожність (10) при $l = 1$ та цю саму тотожність при $l = 2$ і віднімемо ці тотожності. Прийнявши для майже всіх $(x,t) \in Q$

$$\begin{gathered} u_i^{12}(x,t) := u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)\ (i=\overline{1,N}), \\ a_{ij}^{12}(x,t) := a_{ij}(x,t,\delta u^1(x,t)) - a_{ij}(x,t,\delta u^2(x,t))\ (i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n}), \\ c_i^{12}(x,y,t) := c_i(x,y,t,u^1(y,t)) - c_i(x,y,t,u^2(y,t))\ (i=\overline{1,N}), \\ f_{ij}^{12}(x,t) := f_{ij}^1(x,t) - f_{ij}^2(x,t)\ (i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n}), \end{gathered}$$

у підсумку отримаємо рівність

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \Big\{ \sum_{j=0}^n a_{ij}^{12}\partial_j v_i\varphi_i + v_i\varphi_i \int\limits_\Omega c_i^{12}\,dy - \ b_i u_i^{12} v_i \varphi_i' \Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}^{12}(x,t)\partial_j v_i \varphi_i\,dxdt, \tag{12}$$

до якої застосуємо лему 1 з $\tau_1 = t_0 - R$, $\tau_2 = \tau \in (t_0 - R, t_0]$, $w_i = u_i^{12}$, $g_{ij} = a_{ij}^{12} - f_{ij}^{12}$ $(i=\overline{1,N}, j=\overline{0,N})$, $\theta = \eta^s$, $s := \max\limits_{i=\{1,\dots,N\}} p_{i0}^-/(p_{i0}^- - 2)$. У підсумку здобудемо рівність

$$\eta^s(\tau)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2 dx + 2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big( \sum_{j=0}^n a_{ij}^{12}\,\partial_j u_i^{12} + u_i^{12}\int\limits_\Omega c_i^{12}\,dy \Big)\eta^s\,dxdt =$$

$$= s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i|u_i^{12}|^2\eta^{s-1}\,dxdt + 2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n f_{ij}^{12}\partial_j u^{12}\,\eta^s\,dxdt. \tag{13}$$

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (13). Згідно з умовою $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n a_{ij}^{12}\partial_j u_i^{12}\eta^s\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant K_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N |u_i^{12}|^2\eta^s\,dxdt + K_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n |\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt. \tag{14}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$ і нерівність Коші-Буняковського, отримуємо оцінку

$$\Big| \int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N u_i^{12}(x,t)\Big(\int\limits_\Omega c_i^{12}(x,y,t)\,dy\Big)\eta^s(t)\,dxdt \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^N \int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \big|u_i^{12}(x,t)\big| \Big(\int\limits_\Omega \big|c_i^{12}(x,y,t)\big|\ dy\Big)\eta^s(t)\ dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L\sum_{i=1}^N \int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \big|u_i^{12}(x,t)\big| \Big(\int\limits_\Omega \big|u_i^{12}(y,t)\big|\ dy\Big)\eta^s(t)\ dxdt =$$

$$= L\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\Big(\int\limits_{\Omega}\big|u_i^{12}(x,t)\big|\,dx\Big)^2\eta^s(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big|u^{12}(x,t)\big|^2\,\eta(t)^s\,dxdt.$$

Звідси матимемо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}u_i^{12}\Big(\int\limits_{\Omega}c_i^{12}\,dy\Big)\eta^s\,dxdt > -L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u^{12}|^2\eta^s\,dxdt. \tag{15}$$

Далі використовуватимемо нерівність

$$ad \leqslant \varepsilon|a|^{r(x)} + \varepsilon^{-1/(r(x)-1)}\,|d|^{\,r'(x)} \tag{16}$$

для м. в. $x\in\Omega$ і будь-яких $a,d\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, де $r\in L_\infty(\Omega)$, $r(x)>1,\ 1/r(x)+1/r'(x)=1$ для м. в. $x\in\Omega$, яка є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,d\leqslant|a|^q/q+|d|^{q'}/q'$, $a,d\in\mathbb{R},\ q>1,\ 1/q+1/q'=1$.

Вибираючи (для майже кожного $x\in\Omega$) $r(x)=p_{i0}(x)/2$, $r'(x)=p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)$, $a=b_i(x)|u^{12}|^2\eta^{s/r(x)}$, $d=\eta^{s/r'(x)-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_1\in(0,1)$, на підставі (16) отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}b_i|u_i^{12}|^2\eta^{s-1}dxdt \leqslant \varepsilon_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}|u_i^{12}|^{p_{i0}(x)}\eta^s\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_1^{-2/(p_{i0}^{-}-2)}\eta^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\,dxdt, \tag{17}$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ – довільне число. Тут ми використали умову: $0\leqslant b(x)\leqslant 1$ для м. в. $x\in\Omega$.

Знову використавши нерівність (16), одержуємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}f_{ij}^{12}\,\partial_j u_i^{12}\eta^s\,dxdt \leqslant \varepsilon_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt+ \tag{18}$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_2^{-1/(p_{ij}^{-}-1)}|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt,$$

де $\varepsilon_2\in(0,1)$ – довільне число.

З (13) на підставі (14), (15), (17) і (18) за достатньо малих значеннях $\varepsilon_1$ і $\varepsilon_2$ отримаємо

$$(19)\quad \eta^s(\tau)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=1}^n|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u^{12}|^2\Big]\eta^s\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_2\Big\{\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\eta^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt\Big\},$$

де $C_2$ – стала, яка залежить тільки від $K_1,K_2,L,\mathrm{mes}_n\Omega$ і $p_{ij}^-$ $(i=\overline{1,N},j=\overline{1,n})$, а $\tau\in(t_0-R,t_0]$ – довільне число.

Оскільки $0\leqslant\eta(t)\leqslant R$ , коли $t\in[t_0-R,t_0]$, і $\eta(t)\geqslant R-R_0$, коли $t\in[t_0-R_0,t_0]$, то з нерівності (19) отримаємо нерівність

$$(20)\quad (R-R_0)^s\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+$$
$$+(R-R_0)^s\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=0}^n|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u_i^{12}|^2\Big]\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_2\Big\{\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N R^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}dxdt+$$
$$+R^s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\,dxdt\Big\}.$$

Поділимо отриману нерівність на $(R-R_0)^s$. Зауважимо таке: оскільки $R\geqslant\max\{1;2R_0\}$, то маємо $R/(R-R_0)=1+R_0/(R-R_0)\leqslant 2$. Врахувавши це та нерівність $R^{-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\leqslant R^{-p_{i0}^+/(p_{i0}^+-2)}$ (правильну через те, що $R\geqslant 1$ і $-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)\leqslant -p_{i0}^+/(p_{i0}^+-2)$ для м. в. $x\in\Omega$), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=0}^n|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u_i^{12}|^2\Big]\,dxdt\leqslant$$

$$(21)\quad\leqslant C_3\Big\{\sum_{i=1}^N R^{-p_{i0}^+/(p_{i0}^+-2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}dxdt+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\,dxdt\Big\},$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка залежить від $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ і $p_{ij}^-$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$, а $\tau \in (t_0 - R, t_0]$ – довільне число. Звідси, врахувавши, що $\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega} dxdt = R \cdot \mathrm{mes}_n\Omega$, отримаємо (11). □

**5. Обґрунтування основного результату.**

Доведемо теорему 1. Для цього спочатку переконаємося, що задача (1)–(2) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай $u^1 = \mathrm{col}(u_1^1, \dots, u_N^1)$, $u^2 = \mathrm{col}(u_1^2, \dots, u_N^2)$ – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 2 матимемо

$$\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|^2\,dxdt \leqslant C_1\sum_{i=1}^{N}R^{-2/(p_{i0}^+-2)}, \tag{22}$$

де $R$, $R_0$, $t_0$ – довільні числа такі, що $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Зафіксуємо числа $R_0 > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$ та перейдемо в (22) до границі при $R \to +\infty$. У підсумку отримаємо, що $u^1 = u^2$ майже скрізь на $Q_{t_0-R_0,t_0}$. Оскільки $R_0, t_0$ – довільні числа, то звідси одержуємо, що $u^1 = u^2$ майже всюди на $Q$. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Тепер перейдемо до доведення існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(2). Для цього для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо мішану задачу для системи (1) в області $Q_m = \Omega \times (-m, 0)$ з однорідною початковою умовою і крайовими умовами типу (2), а точніше, задачу на знаходження функції $u^m \in \widetilde{W}_{p(\cdot)}^{1,0}(Q_m;\mathbb{R}^N) \cap C([-m,0]; H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))$, яка задовольняє початкову умову

$$u_i^m|_{t=-m} = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

та інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_m}\sum_{i=1}^{N}\Big\{\sum_{j=0}^{n}a_{ij}(x,t,\delta u^m)\partial_j v_i\varphi_i + v_i\varphi_i\int\limits_{\Omega}c_i(x,y,t,u^m(y,t))\,dy - u_i^m v_i\varphi_i'\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}f_{ij}^m\partial_j v_i\varphi_i\,dxdt \quad \forall v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N),\ \forall\varphi \in C_c^1((-m,0);\mathbb{R}^N), \tag{23}$$

де $f_{ij}^m(x,t) := f_{ij}(x,t)$, якщо $(x,t) \in Q_m$, і $f_{ij}^m(x,t) := 0$, якщо $(x,t) \in Q \setminus Q_m$, для кожних $i \in \{1,\dots,N\}$, $j \in \{0,1,\dots,n\}$.

Існування та єдиність функції $u^m$ можна довести аналогічно, як це зроблено в [6] у випадку рівнянь другого порядку. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо $u^m$ нулем на $Q$ і за цим продовженням збережемо позначення $u^m$. Доведемо, що послідовність $\{u^m\}$ збігається в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$ до узагальненого розв'язку задачі (1)–(2). Для цього спочатку зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція $u^m$ є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (1)–(2) тільки тим, що замість $f_{ij}$ стоять $f_{ij}^m$

$(i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n})$. Отож, на підставі леми 2 для будь-яких натуральних чисел $m$ і $k$ матимемо

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|u_i^m(x,t)-u_i^k(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n}|\partial_j(u_i^m-u_i^k)|^{p_{ij}(x)}+|u_i^m-u_i^k|^2\Big]\,dxdt\leqslant C_1\Big\{\sum_{i=1}^{N}R^{-2/(p_{i0}^+-2)}+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|f_{ij}^m(x,t)-f_{ij}^k(x,t)|^{{p_{ij}}'(x)}\,dxdt\Big\}, \tag{24}$$

де $R, R_0, t_0$ – довільні числа такі, що $t_0\leqslant 0$, $R_0>0$, $R\geqslant\max\{1;2R_0\}$.

Покажемо, що при фіксованих $t_0$ і $R_0$ ліва частина нерівності (24) прямує до нуля при $m\to+\infty$, $k\to+\infty$. Справді, нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо $R\geqslant\max\{1,2R_0\}$ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_1\sum_{i=1}^{N}R^{-2/(p_{i0}^+-2)}<\varepsilon. \tag{25}$$

Це можна зробити, оскільки $p_{i0}^+-2>0$ $\forall i\in\{1,\dots,N\}$. Тоді для будь-яких $m,k\in\mathbb{N}$ таких, що $\max\{-m,-k\}\leqslant t_0-R$, маємо $f_{ij}^m=f_{ij}^k$ $(i=\overline{1,N},\ j=\overline{0,n})$ майже всюди на $\Omega\times(t_0-R,t_0)$, а отже, права частина нерівності (24) на підставі (25) є меншою за $\varepsilon$. Звідси випливає, що звуження членів послідовності $\{u^m\}$ на $Q_{t_0-R_0,t_0}$ утворює фундаментальну послідовність у просторі $\widetilde{W}_{p(\cdot)}^{m,0}(Q_{t_0-R_0,t_0};\mathbb{R}^N)\cap C([t_0-R_0,t_0];H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))$. Отже, на підставі довільності $t_0$ і $R_0$ існує функція $u\in\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$ така, що $u^m\to u$ в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$. Зауважимо, що в тотожності (23) можна замінити інтегрування по $Q_m$ на інтегрування по $Q$. Зробивши це, перейдемо в отриманій рівності до границі при $m\to\infty$. У підсумку отримаємо (4) для довільних $v\in\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\varphi\in C_c^1((-\infty;0);\mathbb{R}^N)$. Це означає, що функція $u$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(2). Оцінка (6) безпосередньо випливає з леми 2 для $u^1=u$, $u^2=0$, $f_{ij}^1=f_{ij}$, $f_{ij}^2=0\,(i=\overline{1,N},j=\overline{0,n})$.

## Список використаної літератури

1. М. М. Бокало, І. Б. Паучок, *Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності,* Мат. студії **24** (2006), no. 1, 25–48.
2. M. Bokalo and O. Domanska, *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces,* Mat. Stud. **28** (2007), no. 1, 77–91.
3. О. М. Бугрій, С. П. Лавренюк, *Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **56** (2000), 33–43.
4. М. М. Бокало, В. М. Сікорський, *Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації,* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **51** (1998), 85–98.

5. M. Bokalo, *Almost periodic solutions of anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity,* Electron. J. Differ. Equ. **169** (2014), 1–13.
6. M. M. Bokalo, O. M. Buhrii and R. A. Mashiyev, *Unique solvability of initial boundary value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity,* J. Nonl. Evol. Equ. Appl. **2013** (2014), 67–87.
7. O. Buhrii and N. Buhrii, *On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity,* New Trends in Mathematical Sciences **5** (2017), no. 3, 128–153.
8. O. Buhrii and N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity,* Open Math. **15** (2017), 859-–883.
9. В. Н. Самохин, *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации,* Дифференц. уравнения **32** (1996), no. 5, 643–651.
10. O. Kováčik and J. Rákosníc, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,\,p(x)}$,* Czech. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
11. M. Růžička, *Electroreological fluids: modeling and mathematical theory,* Springer, Berlin, 2000.
12. R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations,* Mathematical surveys and monographs 49, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
13. Н. М. Бокало, *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений,* Труды семинара имени И. Г. Петровского **14** (1989), 3–44.
14. М, Бокало, В. Дмитрів, *Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в анізотропних просторах,* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **59** (2001), 84–101.
15. Н. М. Бокало, *Корректность первой краевой задачи и задачи Коши для некоторых квазилинейных параболических систем без условий на бесконечности,* Труды семинара имени И. Г. Петровского **25** (2006), 35–54.
16. Mykola Bokalo and Alfredo Lorenzi, *Linear evolution first-order problems without initial conditions,* Milan J. Math. **77** (2009), 437–494.
17. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений,* Успехи мат. наук **31** (1976), no. 6, 142–166.
18. M. Bokalo, *Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains,* Electron. J. Differ. Equ. **178** (2010), 1–24.
19. М. М. Бокало, *Про коректність задачі Фур'є для системи рівнянь типу нестаціонарної фільтрації без умов на нескінченності,* Мат. студії **6** (1996), 85–98.
20. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач,* Мир, Москва, 1972.
21. А. А. Панков, *Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений,* Наукова думка, Київ, 1985, 184 с.

*Стаття: надійшла до редколегії 13.11.2017*
*доопрацьована 23.12.2017*
*прийнята до друку 27.12.2017*

# THE FOURIER PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL ELLIPTIC-PARABOLIC SYSTEMS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

**Mykola BOKALO, Iryna SKIRA**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mail: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com*

The existence and uniqueness of a weak solution of the Fourier problem for nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems are investigated without any assumptions on the solution behavior and growth of the initial data as time variable tends to $-\infty$.

*Key words:* Fourier problem, problem without initial condition, elliptic-parabolic systems, functional differential equation.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 123–138*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 123–138*

УДК 517.912

# ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛОКАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ЇЇ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

**Микола СЄРОВ, Марія СЄРОВА,**
**Олександр ОМЕЛЯН, Юлія ПРИСТАВКА**

*Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка*
*Першотравневий проспект, 24, 36011, Полтава*
*e-mail: yuliaprystavka@rambler.ru*

Побудовано нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Ці перетворення використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків цієї системи.

*Ключові слова:* система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, симетрія, метод Лі, інваріантність, максимальна алгебра інваріантності, лінеаризація, нелокальна заміна, система рівнянь Ван-дер-Ваальса, інваріантний анзац, редукція, точні розв'язки.

**1. Вступ.** Одна з центральних проблем сучасного теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь — розроблення ефективних алгоритмів побудови широких класів точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними та їхніх систем. Один із методів знаходження точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь — метод Софуса Лі, над застосуванням та розвитком якого працювало багато сучасних математиків, зокрема, представників київської школи групового аналізу, яку очолював В. І. Фущич.

Із часом стала очевидна обмеженість можливостей класичного методу С. Лі для побудови класів точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики. Адже кількість розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними, які вдається побудувати за допомогою класичного алгоритму Лі, обмежена кількістю операторів ліївської симетрії.

Один з напрямів подолання цієї обмеженості класичного методу С. Лі — пошук можливості знаходження нових (неліївських) симетрій, які дають змогу будувати ширші класи розв'язків рівнянь, що досліджуються. Результатом пошуку в цьому напрямі стали праці українських математиків під керівництвом В. І. Фущича (див.,

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 35B06, 35K57 наприклад, [8]–[10]). У цих працях для розширення класів симетрій рівнянь математичної фізики застосовано нелокальні перетворення. Раніше, в 1979 р., ці нелокальні перетворення застосував Г. Розен до лінеаризації нелінійного рівняння дифузії $u_t = \partial_x(u^{-2}u_x)$ до лінійного $z_0 = z_{11}$ (див. [14]).

У праці [11] Дж. Блуман, Г. Рід і С. Кумей вперше розглянули нелокальні перетворення еквівалентності у класі рівнянь

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x], \tag{1}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ – довільна гладка функція.

У 1990 р. Дж. Кінг в [13] нелокальні перетворення узагальнив і показав, що за допомогою цих перетворень нелінійне рівняння дифузії зводиться до рівняння того самого класу. У [12] нелокальні перетворення еквівалентності використані для побудови нелокальних анзаців, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь, лінеаризації рівняння (1), побудови нелокальних формул розмноження його розв'язків.

У працях [6, 7] поставлена та розв'язана задача узагальнення результатів праць [12, 13] на випадок системи нелінійних рівнянь дифузії

$$U_t = \partial_x[f(U)U_x], \tag{2}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $f(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

У нещодавніх працях [16, 17] нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для розширення класів розв'язків нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x + g(u)], \tag{3}$$

де $g(u)$ – довільна гладка функція.

Ми сукупність нелокальних перетворень використаємо для: лінеаризації, побудови нелокальних анзаців, побудови нелокальних формул розмноження розв'язків для системи рівнянь конвекції-дифузії

$$U_t = \partial_x\left[F(U)U_x + G(U)\right], \tag{4}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a\,(t,\ x)$, $t$ – часова змінна, $x$ – просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}\,(U)$, $g^a = g^a\,(U)$ – коефіцієнти дифузії та конвекції, відповідно, $a, b = \overline{1,2}$.

**2. Нелокальні перетворення системи конвекції-дифузії.** Розглянемо сукупність трьох перетворень (див. [7])

$$t = t,\ x = x,\ u^a = v^a_x, \tag{5}$$

де $v^a = v^a(t,\ x)$ – нові невідомі функції,

$$t = x_0,\ x = w^1,\ v^1 = x_1,\ v^2 = w^2, \tag{6}$$

де $x_0,\ x_1$ – нові незалежні змінні, $w^a = w^a\,(x_0,\ x_1)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0,\ x_1 = x_1,\ w^a_1 = z^a, \tag{7}$$

$z^a = z^a\,(x_0,\ x_1)$ – нові залежні змінні.

**Теорема 1.** *Перетворення* (5)—(7) *є перетвореннями еквівалентності системи* (4).

*Доведення.* Застосуємо до системи (4) нелокальну заміну вигляду (5) (див., наприклад, [13]). Підставимо (5) в (4) і проінтегруємо одержану систему за змінною $x$, отримаємо

$$U_t = F(V_x)V_{xx} + G(V_x), \tag{8}$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$.

Якщо до системи (8) застосувати перетворення годографа (6), то ця система зведеться до вигляду

$$\begin{aligned} w_0^1 &= \frac{1}{(w_1^1)^2}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_{11}^1 - w_1^1 f^{12} w_{11}^2] - w_1^2 g^1, \\ w_0^2 &= \frac{1}{(w_1^1)^3}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_1^2 - (f^{12} + w_1^2 f^{22}]w_{11}^1 + \\ &+ \frac{1}{(w_1^1)^2}(f^{22} + w_1^2 f^{12})w_{11}^2 - w_1^2 g^1 + g^2, \end{aligned} \tag{9}$$

де $w_\mu^a = \frac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $w_{11}^a = \frac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\mu = \overline{0,1}$, причому у формулах (9) $f^{ab} = f^{ab}\big(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}\big)$, $g^a = g^a\big(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}\big)$, $a, b = \overline{1,2}$.

Продиференціємо систему (9) за змінною $x_1$ та подіємо перетвореннями (7), одержимо таку систему

$$Z_0 = \partial_1[\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \tag{10}$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z)$, $\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$, $\psi^a = \psi^a(Z)$, $\mu = \overline{0,1}$, причому функції $\varphi^{ab}$, $\psi^a$ пов'язані з функціями $f^{ab}$, $g^a$ такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \varphi^{11} &= (z^1)^{-2}(f^{11} + z^2 f^{12}), \\ \varphi^{12} &= -(z^1)^{-1} f^{12}, \\ \varphi^{12} &= (z^1)^{-3}[(f^{11} + z^2 f^{12})z^2 - (f^{21} + z^2 f^{22})], \\ \varphi^{22} &= (z^1)^{-2}(f^{22} + z^2 f^{12}), \\ \psi^1 &= -z^1 g^1, \\ \psi^2 &= -z^2 g^1 + g^2, \end{aligned} \tag{11}$$

де $f^{ab} = f^{ab}\big(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\big)$, $g^a = g^a\big(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\big)$.

Отож, ми довели, що ланцюжок замін (5)—(7) зводить систему (4) до системи рівнянь того самого класу вигляду (10). Не важко переконатися, що система (10) за допомогою зазначених замін зводиться до системи (4). Теорема 1 доведена. □

**3. Лінеаризація системи** (4)**.** Якщо припустити, що система (4) лінійна, тобто $F(U) = \Lambda$, $G(U) = \Gamma(U)$, де $\Lambda = (\lambda_{ab})$, $\Gamma = (\gamma_{ac})$ – стала матриця, то, використавши формули (11), одержимо систему

$$\begin{aligned} z^1_0 &= \partial_1\left[\frac{\lambda_{11}+\lambda_{12}z^2}{(z^1)^2}z^1_1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1}z^2_1 - \gamma_{12}z^2\right], \\ z^2_0 &= \partial_1\left[\frac{z^2(\lambda_{11}+\lambda_{12}z^2)-(\lambda_{21}+\lambda_{22}z^2)}{(z^1)^3}z^1_1 + \right. \\ &\left. +\frac{\lambda_{22}-\lambda_{12}z^2}{(z^1)^2}z^2_1 + \frac{1}{z^1}(\gamma_{21}+(\gamma_{22}-\gamma_{11})z^2-\gamma_{12}(z^2)^2)\right], \end{aligned} \tag{12}$$

яка за допомогою перетворень (5)-(7) зводиться до лінійної системи вигляду

$$U_t = \Lambda U_{xx} + \Gamma U_x, \tag{13}$$

і навпаки.

**4. Симетрійні властивості системи** (13) **та її образу.**

**Лема 1.** *Перетворення вигляду*

$$U = AW + B, \tag{14}$$

*де* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_{ab}, \beta_a \in R$, *є перетвореннями еквівалентності системи* (4).

*Зауваження* 1. Наступні твердження про симетрійні властивості систем рівнянь конвекції-дифузії (12), (13) формулюватимемо з точністю до перетворень еквівалентності (14).

**Теорема 2.** *У залежності від вигляду матриць* $\Lambda$ *та* $\Gamma$ *максимальна алгебра інваріантності системи* (13) *задається такими операторами:*

1) *при* $\Lambda, \Gamma$ *– довільних основною алгеброю симетрії є алгебра,*

$$A_0 = \langle \partial_t, \partial_x, Q = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

2) *при*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \; \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

*де* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$,

$$A_1 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\gamma_1 t)Q_1 + (x+\gamma_2 t)Q_2, Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1},$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}, D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda_1 + \gamma_1(x+\gamma_1 t))Q_1 + (\lambda_2 + \gamma_2(x+\gamma_2 t))Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \left[\lambda_1 t + \frac{1}{2}(x+\gamma_1 t)^2\right]Q_1 + \left[\lambda_2 t + \frac{1}{2}(x+\gamma_2 t)^2\right]Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

3) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$, *де* $\gamma_1 \neq \gamma_2$,

$$A_2 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x + \gamma_1 t)Q_1 + (x + \gamma_2 t)Q_2, Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}u^1\partial_{u^1}, Q_2 = -\frac{1}{2\lambda}u^2\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \gamma_1(x + \gamma_1 t))Q_1 + (\lambda + \gamma_2(x + \gamma_2 t))Q_2,$$

$$Q_3 = e^{\frac{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}{4\lambda}t + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\lambda}x}u^2\partial_{u^1}, Q_4 = e^{\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4\lambda}t + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\lambda}x}u^1\partial_{u^2},$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\lambda t + \frac{1}{2}(x + \gamma_1 t)^2]Q_1 + [\lambda t + \frac{1}{2}(x + \gamma_2 t)^2]Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

4) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ m\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$,

$$A_3 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x + \gamma_1 t)Q_1 + m\gamma_1 tQ_2,$$

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}), Q_2 = -\frac{1}{2\lambda}u^1\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \gamma_1(x + \gamma_1 t))Q_1 + m\gamma_1 xQ_2,$$

$$Q_3 = u^1\partial_{u^1} + m\gamma_1(x + \gamma_1 t)Q_2, Q_4 = m\gamma_1(x + \gamma_1 t)[Q_3 - u^2\partial_{u^2}] + u^2\partial_{u^1},$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\lambda t + \frac{1}{2}(x + \gamma_1 t)^2]Q_1 + m\gamma_1 txQ_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

5) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$,

$$A_4 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x + \alpha t)Q_1 + \beta tQ_2,$$

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}), Q_2 = \frac{1}{2\lambda}(u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2}),$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \alpha x + (\alpha^2 - \beta^2)t)Q_1 + \beta(x + 2\alpha t)Q_2,$$

$$Q_3 = \cos\frac{\beta}{\lambda}(x + \alpha t)(u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}) - \sin\frac{\beta}{\lambda}(x + \alpha t)(u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}),$$

$$Q_4 = \sin\frac{\beta}{\lambda}(x + \alpha t)(u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}) + \cos\frac{\beta}{\lambda}(x + \alpha t)(u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}),$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)t^2 + \alpha tx + \frac{1}{2}x^2 + \lambda t]Q_1 + \beta t(x + \alpha t)Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

6) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$,

$$A_5 = \langle A_0, Q_2 = e^{\frac{\gamma_{11} - \gamma_{22}}{4\lambda}(2x + (\gamma_{11} + \gamma_{22})t)}u^1\partial_{u^2}\rangle;$$

7) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$,

$$A_6 = \langle A_5, D = 2t\partial_t - \frac{1}{2\lambda}(x + \gamma_1 t)Q + \frac{2k\lambda}{\gamma_2 - \gamma_1}u^1\partial_{u^2}\rangle;$$

8) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}$,

$$A_7 = \langle A_0, G = t\partial_x - \frac{1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t)Q + \frac{1}{2\lambda}(k(x+\gamma_1 t) - \gamma_2 t)Q_2, Q_2 = u^1\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - [\frac{\gamma_1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t) + \frac{1}{2}]Q + (\frac{k\gamma_1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t) - \frac{\gamma_2}{2\lambda}(x+2\gamma_1 t))Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4\lambda}[(x+\gamma_1 t)^2 + 2\lambda t]Q + \frac{1}{4\lambda}[k(x+\gamma_1 t)^2 - 2\gamma_2 t(x+\gamma_1 t)]Q_2\rangle;$$

9) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}$,

$$A_8{=}\langle A_0, G = t\partial_x - \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}(\alpha(x+\gamma_1 t) - \beta\gamma_2 t)Q - \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}(\beta(x+\gamma_1 t) + \alpha\gamma_2 t)Q_2,$$

$$Q_2 = u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}((\beta\gamma_2 - \alpha\gamma_1)x + (\alpha(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) + 2\beta\gamma_1\gamma_2)t - (\alpha^2+\beta^2))Q-$$

$$-\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}((\alpha\gamma_2 + \beta\gamma_1)x - (\beta(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - 2\alpha\gamma_1\gamma_2)t)Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \frac{1}{4(\alpha^2+\beta^2)}(2(\beta\gamma_2 - \alpha\gamma_1)tx + (\alpha(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) + 2\beta\gamma_1\gamma_2)t^2$$

$$-\alpha x^2 - 2(\alpha^2+\beta^2)t)Q - \frac{1}{4(\alpha^2+\beta^2)}(2(\alpha\gamma_2 + \beta\gamma_1)tx - (\beta(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - 2\alpha\gamma_1\gamma_2)t^2 + \beta x^2)Q_2, \rangle,$$

*причому для* $\beta^a$ *виконуються рівності* $L\beta = 0$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \; \end{pmatrix}$, $L = \partial_t - \Lambda\partial_{xx} - \Gamma\partial_x$.

Образом системи

$$U_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} U_{xx} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} U_x, \tag{16}$$

внаслідок перетворень (5)—(7) є система нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1[\lambda_1 \tfrac{z_1^1}{(z^1)^2}], \\ z_0^2 &= \partial_1[\tfrac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(z^1)^3} z^2 z_1^1 + \tfrac{\lambda_2}{(z^1)^2} z_1^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tfrac{z^2}{z^1}]. \end{aligned} \tag{17}$$

Для того, щоб порівняти лiївські симетрії системи (16)—(17), дослідимо максимальну алгебру інваріантності системи (17). Виконується наступне твердження.

**Теорема 3.** *Максимальною алгеброю інваріантності системи* (17) *є така алгебра*

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = x_1\partial_1 - z^1\partial_{z^1}, \quad z^1\partial_{z^2}, \quad z^2\partial_{z^2}\rangle. \tag{18}$$

Теорему 3 доводимо стандартним методом Лі (див., наприклад, [1, 3]).

З теореми 2 випливає, що максимальна алгебра інваріантності системи (17) містить меншу кількість ліївських операторів, ніж максимальна алгебра інваріантності системи (16). Використаємо цей факт для знаходження додаткових (неліївських) анзаців системи (17).

**5. Ліївські анзаци системи** (13) **та** (17)**.** Використаємо ліївську симетрію системи (16) для побудови її інваріантних анзаців.

Розв'язок системи (16) шукатимемо у вигляді

$$U = A(t,x)\varphi(\omega), \tag{19}$$

де $A(t,x) = (\alpha^{ab})$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$, $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(t,x)$, $\omega = \omega(t,x)$ – деякі гладкі функції, які знаходимо після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = d\tau, \tag{20}$$

$\varphi^a(\omega)$ – нові невідомі функції.

Максимальною алгеброю інваріантності системи (13), (17) є алгебра $A_1$. Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри визначаються формулами

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = c_1t^2 + 2c_2t + c_4,\\
&\xi^1 = c_1tx + c_3t + c_2x + c_5,\\
&\eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}\left[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_1t)^2+2\lambda_1t) + c_2(\gamma_1(x+\gamma_1t)+\lambda_1) + c_3(x+\gamma_1t) + c_6\right]u^1+\beta^1(t,x),\\
&\eta^2 = -\frac{1}{2\lambda_2}\left[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_2t)^2+2\lambda_2t) + c_2(\gamma_2(x+\gamma_2t)+\lambda_2) + c_3(x+\gamma_2t) + c_7\right]u^2+\beta^2(t,x),
\end{aligned}$$

де $c_1,\ldots,c_7$ – групові параметри. Система (20) має вигляд

$$\begin{aligned}
&\dot t = c_1t^2 + 2c_2t + c_4,\\
&\dot x = c_1tx + c_3t + c_2x + c_5,\\
&\dot u^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}\left[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_1t)^2 + 2\lambda_1t) + c_2(\gamma_1(x+\gamma_1t)+\lambda_1) + c_3(x+\gamma_1t) + c_6\right]u^1,\\
&\dot u^2 = -\frac{1}{2\lambda_2}\left[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_2t)^2 + 2\lambda_2t) + c_2(\gamma_2(x+\gamma_2t)+\lambda_2) + c_3(x+\gamma_2t) + c_7\right]u^2,
\end{aligned} \tag{21}$$

де $c_1,\ldots,c_7$ – довільні числові параметри. Проінтегруємо систему (21) методом, який викладений, наприклад, у [4, 7], наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються у підсумку.

$$\begin{aligned}
&u^1 = e^{k_1t}\varphi^1(\omega),\\
&u^2 = e^{k_2t}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = k_3t + x;
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&u^1 = e^{\frac{k}{2\lambda_1}t(x+\frac{1}{3}kt^2+\frac{\gamma_1}{2}t+k_1)}\varphi^1(\omega),\\
&u^2 = e^{\frac{k}{2\lambda_2}t(x+\frac{1}{3}kt^2+\frac{\gamma_2}{2}t+k_2)}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = \tfrac{1}{2}kt^2 + x;
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = t^{k_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(x+\frac{\gamma_1}{2}t)}\varphi^1(\omega),\\ &u^2 = t^{k_2} e^{-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2}(x+\frac{\gamma_2}{2}t)}\varphi^2(\omega);\\ &\omega = t^{-\frac{1}{2}}x, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = e^{-\frac{1}{4\lambda_1}[\gamma_1(2x+\gamma_1 t)+tx^2(t^2+1)^{-1}]-k_1 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega),\\ &u^2 = e^{-\frac{1}{4\lambda_2}[\gamma_2(2x+\gamma_2 t)+tx^2(t^2+1)^{-1}]-k_2 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^2(\omega),\\ &\omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{25}$$

де $k, k_1, k_2, k_3, k_4$ – довільні сталі, які виражаються через сталі $c_1, \ldots, c_7$.

Використаємо ліївську симетрію системи (17) для побудови інваріантних анзаців цієї системи.

Максимальною алгеброю інваріантності системи (17) є алгебра (18). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задаються формулами

$$\begin{aligned} &\xi^0 = c_1, \xi^1 = c_3 x_1 + c_2,\\ &\eta^1 = -c_3 z^1,\\ &\eta^2 = c_4 z^1 + c_5 z^2, \end{aligned}$$

де $c_1, \ldots, c_5$ – групові параметри. Система (20) має вигляд:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = c_1,\\ &\dot{x}_1 = c_3 x_1 + c_2,\\ &\dot{z}^1 = -c_3 z^1,\\ &\dot{z}^2 = c_4 z^1 + c_5 z^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (26), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті.

$$\begin{aligned} &z^1 = e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega),\\ &z^2 = k_2 e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega) + \varphi^2(\omega),\\ &\omega = x_1 e^{k_1 x_0}; \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &z^1 = e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega),\\ &z^2 = \frac{k_1}{k_1 - m} e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega) + e^{m x_0}\varphi^2(\omega),\\ &\omega = x_1 e^{k_1 x_0}; \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &z^1 = \varphi^1(\omega),\\ &z^2 = k_2 x_0 \varphi^1(\omega) + \varphi^2(\omega),\\ &\omega = x_1 + k_1 x_0; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &z^1 = \varphi^1(\omega),\\ &z^2 = e^{k_2 x_0}\varphi^2(\omega),\\ &\omega = x_1 + k_1 x_0, \end{aligned} \tag{30}$$

де $k_1, k_2, m$ – довільні сталі, які виражаються через сталі $c_1, \ldots, c_5$.

**6. Нелокальні анзаци системи** (17)**.** Раніше довели, що лінійна система (16), інваріантна відносно алгебри $AG_2(1;1)$, під дією композиції нелокальних перетворень (5)-(7) переходить у систему (17), яка неінваріантна відносно операторів $G$, П.

Неінваріантність системи (17) відносно алгебри $AG_2(1;1)$ звужує множину інваріантних анзаців цієї системи порівняно із системою (16), за допомогою яких можна було б звести (17) до системи звичайних диференціальних рівнянь і в подальшому побудувати точні розв'язки цієї системи.

Для відшукання додаткових неліївських анзаців системи (17) подіємо композицією нелокальних перетворень (5)-(7) на уже знайдені анзаци системи (16). Проілюструємо процес одержання неліївських анзаців на прикладі перетворення анзацу (25), який отримали з умови інваріантності цієї системи відносно оператора $X = \prod + \partial_t$.

Подіявши спочатку на формули (25) перетворенням (5), одержуємо:

$$\begin{aligned}
&v_x^1 = e^{-\frac{\gamma_1}{4\lambda_1}(2x+\gamma_1 t)-\frac{tx^2}{4\lambda_1(t^2+1)}-k_1 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega),\\
&v_x^2 = e^{-\frac{\gamma_2}{4\lambda_2}(2x+\gamma_2 t)-\frac{tx^2}{4\lambda_2(t^2+1)}-k_2 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Під дією перетворень годографа (6) анзац набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&w_1^1 = e^{\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1x_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\
&w_1^2 = e^{(\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{4\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)x_0}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}w^1.
\end{aligned} \tag{31}$$

Після дії перетворення (7) на цей анзац, остаточно одержуємо

$$\begin{aligned}
&z^1 = e^{\frac{\gamma_1}{\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1x_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\
&z^2 = e^{(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{2\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)x_0}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau,
\end{aligned} \tag{32}$$

де $\tau = \int z^1 dx_1$.

Аналогічно одержуємо образи ліївських анзаців (22)—(24) системи (16). Не вдаючись у деталі їхнього знаходження, наведемо остаточні результати.

Нелокальні анзаци для системи (17)

$$\begin{aligned}
&z^1 = e^{-\frac{k}{2\lambda_1}x_0(\tau+\frac{1}{3}kx_0^2+\frac{\gamma_1}{2}x_0+k_1)}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\
&z^2 = e^{(\frac{1}{2\lambda_2}-\frac{1}{2\lambda_1})kx_0(\tau+\frac{1}{3}kx_0^2)+\frac{k}{2}x_0[(\frac{\gamma_2}{2\lambda_2}-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1})x_0+\frac{k_2}{\lambda_2}-\frac{k_1}{\lambda_1}]}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = (\tfrac{1}{2}kx_0^2+\tau);
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&z^1 = x_0^{-k_1}e^{\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(\tau+\frac{\gamma_1}{2}x_0)}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\
&z^2 = x_0^{k_2-k_1}e^{(\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2})\tau+(\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{4\lambda_2})x_0)}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = x_0^{-\frac{1}{2}}\tau;
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&z^1 = e^{\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1x_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\
&z^2 = e^{(\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{4\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)x_0}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau,
\end{aligned} \tag{35}$$

де $\tau = \int z^1 dx_1$.

### 7. Нелокальна редукція системи (17).

Для знаходження невідомих функцій $\varphi^1, \varphi^2$, необхідно одержані вище нелокальні анзаци підставити у систему (17). У підсумку отримаємо, відповідно, такі редуковані системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \lambda_1\ddot{\varphi}^1 + \gamma_1\dot{\varphi}^1 + \frac{k}{2\lambda_1}(\omega + k_1)\varphi^1 = 0,\\ \lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \gamma_2\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{2\lambda_2}(\omega + k_2)\varphi^2 = 0; \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1\ddot{\varphi}^1 + \tfrac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^1 - k_1\varphi^1 = 0,\\ \lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 - k_2\varphi^2 = 0; \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1\ddot{\varphi}^1 + \left(\frac{\omega^2}{4\lambda_1^2} + \frac{k_1}{\lambda_1}\right)\varphi^1 = 0,\\ \lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \left(\frac{\omega^2}{4\lambda_2^2} + \frac{k_2}{\lambda_2}\right)\varphi^2 = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Нелокальні анзаци (33)—(35) для системи (17) не можливо одержати в рамках теорії С. Лі. Анзаци (33)—(35) редукують систему (17) до систем звичайних диференціальних рівнянь (36)—(38), відповідно.

### 8. Побудова нелокальних формул розмноження розв'язків для нелінійної системи (17).

Система (16), на відміну від системи (17), інваріантна відносно оператора

$$G = t\partial_x + (x + \gamma_1 t)Q_1 + (x + \gamma_2 t)Q_2,$$

де $Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}$, $Q_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}$.

Неважко переконатися (див., наприклад, [1]), що оператор

$$G = t\partial_x + (x + \gamma_1 t)Q_1 + (x + \gamma_2 t)Q_2$$

породжує перетворення

$$\begin{aligned} &\overset{1}{t} = \overset{2}{t},\\ &\overset{1}{x} = \overset{2}{x} + \theta\,\overset{2}{t},\\ &\overset{1}{u^1}(\overset{1}{t};\overset{1}{x}) = \overset{2}{u^1}(\overset{2}{t};\overset{2}{x})e^{-\frac{\theta}{2\lambda_1}((\frac{\theta}{2}+\gamma_1)\overset{2}{t}+\overset{2}{x})},\\ &\overset{1}{u^2}(\overset{1}{t};\overset{1}{x}) = \overset{2}{u^2}(\overset{2}{t};\overset{2}{x})e^{-\frac{\theta}{2\lambda_2}((\frac{\theta}{2}+\gamma_2)\overset{2}{t}+\overset{2}{x})}. \end{aligned} \tag{39}$$

Нехай, $\overset{2}{u^1} = u^1(\overset{2}{t};\overset{2}{x}); \overset{2}{u^2} = u^2(\overset{2}{t};\overset{2}{x})$ – деякий гладкий розв'язок системи

$$\overset{2}{U}_{\overset{2}{t}} = \Lambda\,\overset{2}{U}_{\overset{2}{x}\overset{2}{x}} + \Gamma\,\overset{2}{U}_{\overset{2}{x}}, \tag{40}$$

де $\Lambda, \Gamma$ задані у вигляді (15). Нехай дія оператора $G$ перетворює цей розв'язок системи (40) в такий розв'язок $\overset{1}{u^1} = u^1(\overset{1}{t};\overset{1}{x})$; $\quad \overset{1}{u^2} = u^2(\overset{1}{t};\overset{1}{x})$ системи

$$\overset{1}{U}_{\overset{1}{t}} = \Lambda\,\overset{1}{U}_{\overset{1}{x}\overset{1}{x}} + \Gamma\,\overset{1}{U}_{\overset{1}{x}}\ .$$

Позначимо $\overset{1}{t} = \overset{2}{t} = t, \overset{2}{x} = x, \theta = a$. Тоді запишемо ліївські формули розмноження розв'язків

$$\begin{aligned} &\overset{2}{u}{}^1(t;x) = \overset{1}{u}{}^1(t;at+x)e^{\frac{a}{2\lambda_1}((\frac{a}{2}+\gamma_1)t+x)}, \\ &\overset{2}{u}{}^2(t;x) = \overset{1}{u}{}^2(t;at+x)e^{\frac{a}{2\lambda_2}((\frac{a}{2}+\gamma_2)t+x)}, \\ &\overset{2}{x} = \overset{1}{x} - at. \end{aligned} \tag{41}$$

Для побудови нелокальних формул розмноження розв'язків системи (17) подіємо на ліївські формули розмноження розв'язків нелокальними перетвореннями (6), (7). (Використовуємо той факт, що для лінеаризації системи (17) достатньо лише перетворень (6), (7)).

Для дії на формули (41) перетворення (6) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &t = t, \quad \overset{1}{x} = \overset{1}{v}{}^1(t,\tau), \quad \overset{1}{u}{}^1(t,\overset{1}{x}) = \tau, \quad \overset{1}{u}{}^2(t,\overset{1}{x}) = \overset{1}{v}{}^2(t,\tau), \\ &t = t, \quad \overset{2}{x} = \overset{2}{v}{}^1(t,y), \quad \overset{2}{u}{}^1(t,\overset{2}{x}) = y, \quad \overset{2}{u}{}^2(t,\overset{2}{x}) = \overset{2}{v}{}^2(t,y), \end{aligned} \tag{42}$$

Подіявши перетвореннями (42) на формули (41) та продиференціювавши одержаний результат за змінною $y$, отримуємо

$$\begin{aligned} &\overset{2}{\underset{y}{v}}{}^1(t;y) = \tau_y \overset{1}{\underset{\tau}{v}}{}^1(t;\tau), \\ &\overset{2}{\underset{y}{v}}{}^2(t;y) = (\tfrac{y}{\tau})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} e^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2\lambda_2}at} \tau_y \left[ \overset{1}{\underset{\tau}{v}}{}^2(t;\tau) + \tfrac{a}{2\lambda_2} \overset{1}{v}{}^2(t;\tau) \overset{1}{\underset{\tau}{v}}{}^1(t;\tau) \right], \\ &\tau_y = \frac{1}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2\lambda_1} \overset{1}{\underset{\tau}{v}}{}^1(t;\tau))}. \end{aligned} \tag{43}$$

Щоб подіяти на формули (43) перетворення (7) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &t = t, \quad \tau = \tau(t;y), \quad \overset{1}{\underset{\tau}{v}}{}^1(t,\tau) = \overset{1}{z}{}^1(t;\tau), \quad \overset{1}{\underset{\tau}{v}}{}^2(t,\tau) = \overset{1}{z}{}^2(t,\tau), \\ &t = t, \quad y = y, \quad \overset{2}{\underset{y}{v}}{}^1(t,y) = \overset{2}{z}{}^1(t;y), \quad \overset{2}{\underset{y}{v}}{}^2(t,y) = \overset{2}{z}{}^2(t,y). \end{aligned} \tag{44}$$

Подіявши перетвореннями (44) на формули (43), одержуємо

$$\begin{aligned} &\overset{2}{z}{}^1(t;y) = \frac{\overset{1}{z}{}^1(t;\tau)}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2\lambda_1} \overset{1}{z}{}^1(t;\tau))}, \\ &\overset{2}{z}{}^2(t;y) = (\tfrac{y}{\tau})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1} e^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2\lambda_2}at} \frac{\tau\, \overset{1}{z}{}^2(t;\tau) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \int \overset{1}{z}{}^2(t;\tau)d\tau}{\tau^2[\tau^{-1} + \frac{a}{2\lambda_1} \overset{1}{z}{}^1(t;\tau)]} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\tau^{-1} \int \overset{1}{z}{}^2(t;\tau)d\tau, \\ &\tau_y = \frac{1}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2\lambda_1} \overset{1}{z}{}^1(t;\tau))}, \qquad \tau_t = \lambda_1(\overset{1}{z}{}^1)^{-2}\tau_y^{-2}\tau_{yy} + \frac{a}{\overset{1}{z}{}^1}. \end{aligned} \tag{45}$$

Зауважимо, що останнє рівняння у формулах (45) одержуємо внаслідок підстановки перших 3-х рівнянь (45) у систему рівнянь (16) при $\Lambda, \Gamma$ вигляду (15).

**9. Симетрійні властивості образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса.** Розглянемо систему рівнянь Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} u^1_t &= \lambda_1 u^1_{xx} - u^1 u^1_x + \mu u^2 u^2_x, \\ u^2_t &= \lambda_2 u^2_{xx} - u^1 u^2_x - u^2 u^1_x, \end{aligned} \tag{46}$$

де $x = (x_0,\, x_1)$, $u^a = u^a(x)$, $\lambda_1$ – коефіцієнт кінематичної в'язкості, $\lambda_2$ – коефіцієнт дифузії, $\mu$ – коефіцієнт конвекції, $a \in \{1, 2\}$; яку широко використовують у молекулярно-кінетичній теорії газів і рідин. Ця система входить до класу систем рівнянь конвекції-дифузії.

У [5] доведено, що система (46) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея

$$AG(1,1) = \left\langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + \partial_{u^1}, D = 2t\partial_t + x\partial_x - I, \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + tI + x\partial_{u^1} \right\rangle,$$

де $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}$, $\partial_{u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}$, $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$.

Якщо ж провести повний аналіз її симетричних властивостей, то одержимо таке твердження.

**Теорема 4.** *Максимальною алгеброю інваріантності системи* (46) *залежно від співвідношень між сталими є такі алгебри*

1) $AG(1,1)$, *якщо* $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu \neq 0$;
2) $\left\langle AG(1,1), u^2\partial_{u^2} \right\rangle$, *якщо* $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu = 0$;
3) $\left\langle AG(1,1), u^1\partial_{u^1} \right\rangle$, *якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu = 0$;
4) $\left\langle AG(1,1), u^2\partial_{u^1}, u^2\partial_{u^2} \right\rangle$, *якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu = 0$.

Якщо до системи (46) застосувати перетворення (5)—(7), то одержимо таку систему:

$$Z_0 = \partial_1 \left[ \frac{1}{\left(z^1\right)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^1 & 0 \\ \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) z^2 & \lambda_2 z^1 \end{pmatrix} Z_1 - \frac{1}{2\left(z^1\right)^2} \begin{pmatrix} \left(\mu\left(z^1\right)^2 - 1\right) z^1 \\ \left(\mu\left(z^2\right)^2 + 1\right) z^2 \end{pmatrix} \right], \tag{47}$$

яку назвемо *образом системи* (46).

Для того, щоб порівняти ліївські симетрії систем (46) та (47), дослідимо максимальну алгебру інваріантності системи (47). Виконується наступне твердження.

**Теорема 5.** *Максимальною алгеброю інваріантності системи* (47) *є алгебра*

1) $A^{bas} = \left\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + z^1\partial_{z^1} \right\rangle$, *якщо* $\mu \neq 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$;
2) $A = \left\langle A^{bas}, z^2\partial_{z^2} \right\rangle$, *якщо* $\mu = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$;
3) $A = \left\langle A^{bas}, z^2\partial_{z^2}, e^{\frac{x^1}{2}}\partial_{z^2} \right\rangle$, *якщо* $\mu = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, *де* $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\partial_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\partial_{z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2}$.

Теорема доводиться стандартним методом Лі (див. наприклад [2, 3]).

Зауважимо, що система Ван-дер-Ваальса має значно ширші ліїївські симетрії, ніж система (47). Використаємо цей факт для знаходження нелокальних анзаців і побудови розв'язків системи (47).

**10. Ліївські анзаци системи Ван-дер-Ваальса та її образу.** Використаємо ліївську симетрію системи (47) для побудови інваріантних анзаців та редукції цієї системи(див. [8]). Розв'язок системи (47) будемо шукати у вигляді (19).

У випадку $\mu \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ система (20) має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{t} = c_5 t^2 + 2c_4 t + c_1, \\ &\dot{x} = c_5 tx + c_4 x + c_3 t + c_2, \\ &\dot{u}^1 = -(c_5 t + c_4)u^1 + c_5 x + c_3, \\ &\dot{u}^2 = -(c_5 t + c_4)u^2. \end{aligned} \tag{48}$$

Проаналізувавши та розв'язавши систему (48), одержимо нееківалентні ліївські анзаци для системи (46)

$$\begin{aligned} &u^1 = \varphi^1(\omega), \\ &u^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = kt + mx; \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = \varphi^1(\omega) - kt, \\ &u^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = \tfrac{kt^2}{2} + x; \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega), \\ &u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \\ &\omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega) + t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x, \\ &u^2 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \\ &\omega = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x. \end{aligned} \tag{52}$$

Аналогічно отримуємо анзаци для системи (47)

$$\begin{aligned} &z^1 = \varphi^1(\omega), \\ &z^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = kx_0 + mx_1; \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} &z^1 = x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega), \\ &z^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = x_1 + k\ln x_0. \end{aligned} \tag{54}$$

**11. Нелокальні анзаци образу системи Ван-дер-Ваальса.** Для відшукання неліївських анзаців системи (47) подіємо композицією нелокальних перетворень (5)—(7) на вже знайдені анзаци системи (46). У підсумку отримаємо, що ліївські анзаци (49), (51) набудуть вигляду (53), (54), а анзаци (50), (52) перейдуть у нелокальні анзаци для системи (47)

$$\begin{aligned} &(z^1)^{-1} = \varphi^1(\omega) - kx_0, \\ &z^2 = z^1\varphi^2(\omega), \\ &\omega = \tau + \tfrac{1}{2}kx_0, \tau_1 = z^1; \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{(x_0^2+1)\varphi^1(\omega)}{\sqrt{x_0^2+1}+\tau x_0\varphi^1(\omega)}, \\ z^1 &= \frac{(x_0^2+1)\varphi^2(\omega)}{\sqrt{x_0^2+1}+\tau x_0\varphi^1(\omega)}, \\ \omega &= -\frac{1}{2}\frac{\tau^2 x_0}{x_0^2+1}; \tau_1 = z^1. \end{aligned} \tag{56}$$

**12. Редукція та розв'язки образу системи Ван-дер-Ваальса.** Підставивши анзаци (55), (56) у систему (47), одержимо такі редуковані системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 + k = 0, \\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^2\dot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 = 0; \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 - \omega = 0, \\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^2\dot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 = 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Одним із розв'язків редукованої системи (58) при $\mu > 0$ (див. [2, 3, 15]) є

$$\begin{aligned} \varphi^1(\omega) &= -\frac{\lambda_2}{\omega}, \\ \varphi^2(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big(\omega + \frac{\sqrt{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}}{\omega}\Big). \end{aligned} \tag{59}$$

Використавши анзац (56), знайдемо розв'язок системи (47), записаний у параметричному вигляді

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - \lambda_2 \ln \tau,$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\frac{(x_0^2+1)\tau}{x_0\tau^2 - \lambda_2(x_0^2+1)},$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\tau^2 + \sqrt{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}(x_0^2+1)}{x_0\tau^2 - \lambda_2(x_0^2+1)}.$$

**13. Висновки.** Отже, знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії (4), які пов'язують між собою різні системи цього класу. Ці перетворення можуть бути використані для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків цієї системи. Ми проілюстрували на прикладі образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Побудувавши ліївські анзаци для системи (46) та подіявши на них перетвореннями (5)—(7), знаходимо нелокальні анзаци для системи (47). Один із таких анзаців було використано для редукції системи (47) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язавши редуковану систему та використавши цей анзац, знайшли розв'язок системи (47). Водночас перетворення (5)—(7) зводять нелінійну систему (12) до лінійної системи вигляду (13). Для системи (12) у конкретному значенні параметрів $\lambda_{ab}$, $\gamma_{ac}$, були побудовані нелокальні анзаци, які не можливо одержати в рамках класичного методу Лі. Ці анзаци застосовано для редукції системи (12) до систем звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язавши редуковану систему та використавши відповідний анзац, можна знайти точні розв'язки системи (12).

## Список використаної літератури

1. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, 1978, 400с.
2. Л. В. Овсянников, *Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности*, ДАН СССР **125** (1959), 492–495.
3. П. Олвер, *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, Москва, 1989, 581с.
4. О. М. Омелян, *Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Мат. Мех. (2004), no. 11–12, 95–100.
5. М. М. Сєрова, О. М. Омелян, *Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса*, Праці Ін-ту математики НАН України **36** (2001), 254–261.
6. М. І. Сєров, О. М. Омелян, Р. М. Черніга, *Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень*, Доп. НАН України. (2004), no. 10, 39–45.
7. М. І. Сєров, О. М. Омелян, *Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису*, Вид-во ПолтНТУ, Полтава, 2011, 236 с.
8. В. И. Фущич, Н. И. Сєров, Т. К. Амеров *О нелокальних анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности*, Наукова думка, Київ, 1989, 339 с.
9. В.И. Фущич, В.М. Штелень, М.И. Сєров, *Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики*, Докл. АН УССР (1990), no. 11, 15–18.
10. В. І. Фущич, В. А. Тичинін, *Точні розв'язки та принцип суперпозиції для нелінійного хвильового рівняння*, Доп. АН УРСР. Сер. А, Фіз.-мат. техн. н. (1990), no. 5, 32–35.
11. G. W. Bluman, G. J. Reid, and S. Kumei, *New classes of symmetries for partial differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1988), no. 4, 806–811.
12. W. I. Fuschich, M. I. Serov, V. A. Tychynin, and T. K. Amerov, *On non-local symmetry of nonlinear heart equation*, Proc. Acad. Sci. Ukraine **27** (1992), no. 11, 26–32.
13. J. R. King, *Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation*, J. Math. Phys. **23** (1990), 5441–5464.
14. G. Rosen, *Nolinear heat conduction in solid*, Phys. Rev. B. **19** (1979), 2398–2399.
15. M. I Serov, T. O. Karpaliuk, O. G. Pliukhin, and I. V. Rassokha, *System of reaction-convection-diffusion equation invariant under Galilean algebras*, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), no, 1, 185–211.
16. V. A. Tychynin and O. V. Petrova, *Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations*, J. Math. Anal. Appl. **382** (2011), no. 1, 20–33.
17. V. Tychynin, O. Petrova, and O. Tertyshnyk, *Nonlocal symmetries and generation of solutions for partial differential equations*, SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **3** (2007), Art. ID 019, pp. 14.

*Стаття: надійшла до редколегії 23.09.2015*
*доопрацьована 21.04.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# APPLICATION OF NON-LOCAL CONVERSIONS OF EQUIVALENCE OF THE SYSTEM OF CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS TO THE FINDING OF EXACT SOLUTIONS

**Mykola SEROV, Mariya SEROVA,**
**Oleksandr OMELYAN, Yuliya PRYSTAVKA**

*Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University*
*24, Pershotravneva Avenue, 36011, Poltava, Ukraine*
*e-mail: yuliaprystavka@rambler.ru*

Non-local transformations of equivalence for a system convection-diffusion equations is constructed. These transformations are used to construct an invariant Ansatz, reduction and finding exact solutions of the system.

*Key words:* system of convection-diffusion equations, non-local transformations of equivalence, symmetry, the method of Lie, invariance, maximal invariance algebra, linearization, local change, the Van der Waals system of equations, invariant anzatz, reduction, exact solutions.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 139–154*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 139–154*

УДК 517.95

# МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

**Микола БОКАЛО, Ніколєтта ГРЯДІЛЬ**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університецька, 1, 79000, Львів*
*e-mails: mm.bokalo@gmail.com, nikolyetta@gmail.com*

Досліджено мішані задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов на нескінченності. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків таких задач у відповідних узагальнених просторах Лебега та Соболєва. Отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

*Ключові слова:* параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, необмежена область, метод монотонності.

**1. Вступ.** Нехай $\Omega$ – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), де $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{1/2}$. Припускаємо, що $\partial\Omega$ (межа області $\Omega$) – кусково-гладка поверхня і $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де $\Gamma_0$ – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, $\Gamma_0$ може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Нехай $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$, де $T > 0$ – довільно задане число.

Розглядаємо задачу: *знайти функцію* $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, *яка задовольняє* (*в певному сенсі*) *рівняння*

$$(1) \qquad u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q\,,$$

*крайові умови*

$$(2) \qquad u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0$$

*та початкову умову*

$$(3) \qquad u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega,$$

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 35D30, 35K20, 35K55.

*де* $a_j\colon Q\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(j=\overline{0,n})$, $f\colon Q\to\mathbb{R}$, $u_0\colon\Omega\to\mathbb{R}$ *– задані дійснозначні функції,* $\partial u(x,t)/\partial\nu_a:=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i(x)$, $(x,t)\in\Sigma_1$, *– похідна по "конормалі".*

Ми вважаємо, що просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною, тобто рівняння (1) — *параболічне.*

Прикладом рівнянь типу (1), які тут вивчаються, є рівняння

$$u_t-\sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i}+\widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u=f(x,t),\tag{4}$$

де $\widehat{a}_i$ $(i=\overline{0,n})$ – деякі вимірні, додатні та відділені від нуля функції, $p_i>1$ $(i=\overline{0,n})$ – вимірні й обмежені функції, які називають *показниками нелінійності.*

Рівняння вигляду (4) зі сталими показниками нелінійності розглядалися у багатьох працях, зокрема, в [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. В останні десятиліття дуже активно вивчають нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, прикладом яких є рівняння (4), [9, 10, 11, 13, 12, 14, 15]. Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають у математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [11].

Як добре відомо, крайові задачі для лінійних параболічних рівнянь у необмежених областях є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані додатково до крайових умов накладено певні обмеження на їх зростання на нескінченності. Така сама ситуація з крайовими задачами в необмежених областях і для нелінійних параболічних рівнянь з певних класів [3, 4]. Проте є рівняння, крайові задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [1, 2, 5, 6, 7, 8, 12, 14]. Вперше такий результат для рівняння (4) при $p_0=\text{ const}>2$ і $p_1=\ldots=p_n=2$ отримано в праці [1].

Зробивши додаткові припущення на вихідні дані, доведено однозначну розв'язність мішаних задач без обмежень на нескінченності для одного класу нелінійних анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показиками нелінійності. Отримані тут результати є узагальненням і доповненням результатів [12] стосовно рівнянь зі сталими показниками нелінійності.

Праця складається з шести розділів. У другому розділі введено основні позначення та допоміжні факти. Формулювання задачі й основного результату містить третій розділ. У четвертому розділі наведено допоміжні твердження. У п'ятому розділі обґрунтовано основний результат. Шостий розділ містить висновки.

**2. Основні позначення та факти.** Спочатку введемо функційні простори, які будуть потрібні для означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Під $L_{r(\cdot)}(\Omega')$, де $\Omega'$ – довільна обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, а $r\colon\Omega'\to\mathbb{R}$ – вимірна та обмежена функція така, що $r(x)\geqslant 1$ для майже всіх (м.в.) $x\in\Omega'$, розуміємо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v:\Omega'\to\mathbb{R}$, для яких функціонал $\rho_{\Omega',r}(v):=\int\limits_{\Omega'}|v(x)|^{r(x)}\,dx$ приймає скінчені значення, з нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega')}:=\inf\{\lambda>0\mid\rho_{\Omega',r}(v/\lambda)\leqslant 1\}$. Цей простір є банаховим і його називають *узагальненим* *простором Лебега* (див., наприклад, [9]). Зауважимо таке: коли $r(x) = r_0 = \text{const} \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega'$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega')} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(\Omega')}$. Відомо таке: якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega'} r(x) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(\Omega')$ можна ототожнити з $L_{r'(\cdot)}(\Omega')$, де $r'(x)$, $x \in \Omega'$, – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega'$. Аналогічно як $L_{r(\cdot)}(\Omega')$ визначаємо простір $L_{r(\cdot)}(Q')$, де $Q' = \Omega' \times (0,T)$, $\Omega'$ – довільна обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, використовуючи функціонал $\rho_{Q',r}(w) := \iint\limits_{Q'} |w(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$ замість функціонала $\rho_{\Omega',r}(v)$.

Далі всюди під $Bd(\Omega)$ розумітимемо множину всеможливих обмежених підобластей області $\Omega$. Нехай $r : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначатимемо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}$, звуження яких $v|_{\Omega'}$ на довільну область $\Omega' \in Bd(\Omega)$ належать до $L_{r(\cdot)}(\Omega')$, із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega')}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega')\}$. Цей простір є повним локально опуклим простором. Зауважимо, що послідовність $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ *сильно* (відповідно, *слабко*) збігається до $v$ в $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, якщо для будь-якої області $\Omega' \in Bd(\Omega)$ послідовність $\{v_l|_{\Omega'}\}_{l=1}^{\infty}$ *сильно* (відповідно, *слабко*) збігається до $v|_{\Omega'}$ в $L_{r(\cdot)}(\Omega')$. Так само як $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводимо повний локально опуклий простір $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Нехай $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{1+n}$ – вектор-функція, яка задовольняє умову:

($\mathcal{P}$) для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна і $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega'} p_i(x) > 1$, $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega'} p_i(x) < \infty$ для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$.

Через $p' = (p'_0, p'_1, \ldots, p'_n)$ позначимо вектор-функцію, компоненти якої визначаються з рівностей $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p'_i(x)} = 1$ для м.в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$. Очевидно, що функція $p'$ задовольняє умову ($\mathcal{P}$) із заміною $p_i$ на $p'_i$ $(i = \overline{0,n})$.

Для довільної області $\Omega' \in Bd(\Omega)$ визначимо простір

$$W^1_{p(\cdot)}(\Omega') := \{v : \Omega' \to \mathbb{R}\ \text{ – вимірна}\,|\, v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega'),\ v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(\Omega')\,(i = \overline{1,n})\}$$

з нормою

$$\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega')} := \|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega')} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega')}.$$

Цей простір є банаховим і його називають узагальненим простором Соболєва. Під $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо повний локально опуклий простір, складений з функцій $v \in L_{p_0(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ таких, що $v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$, із системою півнорм $\big\{\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega'))}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega)\big\}$. Позначимо через $\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору

$$\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \big\{v \in C^1(\overline{\Omega})\big|\, \operatorname{supp} v \text{ – обмежена множина, } v\big|_{\Gamma_0} = 0\big\}$$

в $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Нехай $\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ – підпростір простору $\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, складений з функцій з обмеженими носіями.

Для області $Q' = \Omega' \times (0,T)$, де $\Omega' \in Bd(\Omega)$, розглянемо банахів простір

$$W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q') := \{w : Q' \to \mathbb{R} \ \text{– вимірна} \,|\, w \in L_{p_0(\cdot)}(Q'),\ w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(Q')\,(i = \overline{1,n})\}$$

з нормою

$$\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q')} := \|w\|_{L_{p_0(\cdot)}(Q')} + \sum_{i=1}^{n} \|w_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q')}.$$

Під $W^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розуміємо повний локально опуклий простір, складений з функцій $w \in L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що $w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,n})$ із системою півнорм $\big\{\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\big\}$. Позначимо через $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}))$ підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, складений з функцій $w \in W^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що для майже всіх $t \in (0,T)$ функція $w(\cdot,t)$ належить до $\widetilde{W}^{1}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$.

Також визначимо повний локально опуклий простір

$$C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) := \{w : [0,T] \to L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \,|\, w \in C([0,T]; L_2(\Omega'))\ \ \forall\, \Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

із системою півнорм

$$\{\|w\|_{C([0,T];L_2(\Omega'))} := \max_{t\in[0,T]} \|w(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\,\}.$$

Введемо повний локально опуклий простір

$$\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}} := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C([0,T]; L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$$

з топологією, яка породжена системою півнорм

$$\big\{\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))} + \|w\|_{C([0,T];L_2(\Omega'))} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\,\big\}.$$

Нехай

$$\mathbb{H}_{\mathrm{loc}} := L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad \mathbb{F}_{p',\,\mathrm{loc}} := L_{p_0{}'(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}).$$

Позначимо через $C^1_c(0,T)$ простір неперервно диференційових функцій на $(0,T)$ з компактним носієм.

**3. Формулювання задачі та основного результату.** Розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)–(3). Для їх означення спочатку введемо відповідні класи вихідних даних.

Нехай $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, які визначені на $Q \times \mathbb{R}^{1+n}$ і задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $a_i(x,t,\rho,\xi)$, $(x,t,\rho,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) \colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) \colon Q \to \mathbb{R}$ – вимірна; крім того, $a_i(x,t,0,0) = 0$ $(i = \overline{0,n})$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leqslant h_{1,i}(x,t)\big(|\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big) + h_{2,i}(x,t),$$

де $h_{1,i} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_{2,i} \in L_{p_i'(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Тепер подамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

**Означення 1.** Нехай $p$ задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$, $u_0 \in \mathbb{H}_{\mathrm{loc}}$. ***Узагальненим розв'язком*** задачі (1)–(3) називаємо функцію $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$, яка задовольняє початкову умову

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \tag{5}$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\psi_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)\psi\varphi - u\psi\varphi' \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt \tag{6}$$

для будь-яких $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),\,\mathrm{c}}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Мета нашої праці – за додаткових умов на вихідні дані довести однозначну розв'язність задачі (1)–(3).

Далі всюди, без втрати загальності, вважаємо, що $0 \in \Omega$. Нехай $k \in \{1, \ldots, n\}$ – найменше число таке, що множина $\widetilde{\Omega}_R := \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 < R^2\}$ є обмеженою для будь-якого $R > 0$. Наприклад, коли $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де $\Omega_1$ – необмежена область в $\mathbb{R}^k$, а $\Omega_2$ – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, то $k$ – саме те, про яке говорилося. Для будь-якого $R > 0$ позначимо через $\Omega_R$ зв'язну компоненту множини $\widetilde{\Omega}_R$, що містить 0. Очевидно, що $\Omega = \bigcup\limits_{R>0} \Omega_R$.

Нехай $\alpha \geqslant 0$ – найменше з чисел, для якого виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_n \Omega_R \leqslant c_1 R^\alpha \quad \forall R \geqslant 1, \tag{7}$$

де $c_1 > 0$ – стала. Тут і далі через $\operatorname{mes}_n G$ позначено міру Лебега множини $G$ в $\mathbb{R}^n$.

Приймемо $Q_R := \Omega_R \times (0,T)$ для кожного $R > 0$. Зрозуміло, що $Q = \bigcup\limits_{R>0} Q_R$.

Далі всюди вважаємо, що виконується умова:

$(\mathcal{P}^*)$ вектор-функція $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ задовольняє умову $(\mathcal{P})$ і, крім того, $p_0(x) \geqslant 2$, $\max\limits_{i \in \{1,\ldots,k\}} p_i(x) \leqslant 2$ для майже всіх $x \in \Omega$,

$$\min_{i \in \{1,\ldots,k\}} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \big[p_0(x) - p_i(x)\big] > 0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}^*_p$ підмножину $\mathbb{A}_p$, елементи якої задовольняють ще такі умови:

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $(\rho_1, \xi^1), (\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2))(\xi^1_i - \xi^2_i) +$$
$$+ (a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2))(\rho_1 - \rho_2) \geqslant K_1|\rho_1 - \rho_2|^{q(x)},$$

де $K_1 > 0$ – стала, $q : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $2 \leqslant q(x) \leqslant p_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$ та, крім того, для кожного $i \in \{1, \ldots, k\}$ $r_i^- := \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} r_i(x) > \alpha$, $r_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} r_i(x) < +\infty$, де $\alpha$ – стала з нерівності (7), а $r_i(x) := q(x)p_i(x)/\big(q(x) - p_i(x)\big)$, $x \in \Omega$;

($\mathcal{A}_4$) для майже всіх $(x,t)\in Q$ та будь-яких $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\,\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\,\rho \geqslant K_2\Big[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^{p_i(x)} + |\rho|^{p_0(x)}\Big] - h_3(x,t),$$

де $K_2>0$ – стала, $h_3\in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_3\geqslant 0$;

($\mathcal{A}_5$) для майже всіх $(x,t)\in Q$ та будь-яких $(\rho_1,\xi^1),(\rho_2,\xi^2)\in\mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k}|a_i(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)|^{p_i'(x)}\leqslant$$
$$\leqslant K_3\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_i(x,t,\rho_2,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2)+$$
$$+(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_0(x,t,\rho_2,\xi^2))(\rho_1-\rho_2)\Big],$$

де $K_3>0$ – стала.

*Зауваження* 1. Опираючись на результати [14], неважко переконатися, що підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^1$ тих елементів $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ з $\mathbb{A}_p$, які задовольняють умови:

($\mathcal{A}_3'$) $a_i(x,t,\rho,\xi)\equiv a_i(x,t,\xi_i)$, $(x,t,\rho,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x,t)\in Q$ існує похідна $\partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial\xi_i$, $\xi_i\neq 0$, якщо $i\in\{1,\ldots,n\}$, та, крім того, виконуються нерівності

$$A_i|\xi_i|^{p_i(x)-2}\leqslant\partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial\xi_i\leqslant\widetilde{A}_i|\xi_i|^{p_i(x)-2},\qquad \xi_i\neq 0,$$

якщо $i\in\{1,\ldots,k\}$, а якщо $i\in\{k+1,\ldots,n\}$, то

$$\partial a_i(x,\xi_i)/\partial\xi_i\geqslant A_i|\xi_i|^{p_i(x)-2},\quad \xi_i\neq 0,$$
$$|a_i(x,\xi_i)|\leqslant\widetilde{A}_i|\xi_i|^{p\,_i(x)-1}+h_{4,i}(x,t),\quad \xi_i\in\mathbb{R},$$

де $A_i$, $\widetilde{A}_i$ – додатні сталі, $h_{4,i}\in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

($\mathcal{A}_4'$) $a_0(x,t,\rho,\xi)\equiv a_0(x,t,\rho),(x,t,\rho,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x,t)\in Q$ існує похідна $\partial a_0(x,t,\rho)/\partial\rho$, $\rho\neq 0$, та виконуються нерівності

$$\partial a_0(x,t,\rho)/\partial\rho\geqslant A_0|\rho|^{p_0(x)-2}+A_0',\quad \rho\neq 0,$$
$$|a_0(x,t,\rho)|\leqslant\widetilde{A}_0|\rho|^{p\,_0(x)-1}+h_{4,0}(x,t),\quad \rho\in\mathbb{R},$$

де $h_{4,0}\in L_{p_0'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $A_0$, $\widetilde{A}_0$ – додатні сталі, $A_0'$ – невід'ємна стала, причому $A_0'=0$ тільки в тому випадку, коли

$$\min_{i\in\{1,\ldots,k\}}\ \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_0(x)p\,_i(x)/\big(p_0(x)-p\,_i(x)\big)>\alpha,$$

де $\alpha$ – стала з нерівності (7).

Прикладом елемента з класу $\mathbb{A}_p^1$ є набір функцій

$$\big(\widehat{a}_0(x,t)\,|\rho|^{p\,_0(x)-2}\,\rho,\ \widehat{a}_1(x,t)\,|\xi_1|^{p\,_1(x)-2}\,\xi_1,\ \ldots,\ \widehat{a}_n(x,t)\,|\xi_n|^{p\,_n(x)-2}\,\xi_n\big),$$

де $\widehat{a}_i\in L_\infty(Q)$ – додатні та відділені від нуля функції. При такому виборі коефіцієнтів рівняння (1) набуде вигляду (4).

*Зауваження* 2. Зауважимо таке: коли $p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 2$ для майже всіх $x \in \Omega$, то іншою підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^2$ тих елементів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ з $\mathbb{A}_p$, які задовольняють умову $(\mathcal{A}_4)$ та умови:

$(\mathcal{A}_3'')$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho_1, \xi^1), (\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(x,t,\rho_1,\xi_1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi_2)| \le D_1 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2| \, + \, D_2\, |\rho_1 - \rho_2|,$$

де $D_1, D_2$ – невід'ємні сталі;

$(\mathcal{A}_4'')$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho_1, \xi^1), (\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} (a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$
$$+ \, (a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2))(\rho_1 - \rho_2) \ge$$
$$\ge K_4 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_5\, |\rho_1 - \rho_2|^2 + K_6\, |\rho_1 - \rho_2|^{p_0(x)},$$

де $K_4 > 0, K_5 \geqslant 0, K_6 > 0$ – сталі, причому $K_5 = 0$ тільки в тому випадку, коли $D_2 = 0$, та $\min\limits_{i \in \{1,\ldots,k\}} \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x \in \Omega} p_0(x)/\bigl(p_0(x) - 2\bigr) > \alpha/2$, де $\alpha$ — стала з нерівності (7).

Прикладом рівнянь вигляду (1), для якого коефіцієнти $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ належать до класу $\mathbb{A}_p^2$, є рівняння

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{k} \bigl(\widehat{a}_{ij}(x,t) u_{x_j}\bigr)_{x_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \Bigl(\widehat{a}_i(x,t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i}\Bigr)_{x_i} +$$

$$+\widehat{a}_{0,1}(x,t) u + \widehat{a}_{0,2}(x,t) |u|^{p_0(x)-2} u = f(x,t), \tag{8}$$

де $\widehat{a}_i \, (i = \overline{k+1, n})$, $\widehat{a}_{0,1}, \widehat{a}_{0,2}$ – вимірні, додатні і відділені від нуля функції, а $\widehat{a}_{ij} \, (i,j = \overline{1,k})$ – обмежені функції, які задовольняють умову: існує $\lambda > 0$ таке, що $\sum\limits_{i,j=1}^{k} \widehat{a}_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}$.

Основний результат нашої праці — таке твердження.

**Теорема 1.** *Нехай* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_p^*$, $f \in \mathbb{F}_{p',loc}$, $u_0 \in \mathbb{H}_{loc}$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1)—(3), *причому для будь-яких* $R, R_0$ *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, *правильна оцінка*

$$\max_{t \in [0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2 \, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Bigl[ \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)} \Bigr] \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Bigl\{ R^{\alpha - \omega} + \int\limits_{\Omega_R} |u_0(x)|^2 \, dx + \iint\limits_{Q_R} |f(x,t)|^{{p_0}'(x)} \, dxdt + \iint\limits_{Q_R} h_3(x,t) \, dxdt \Bigr\}, \tag{9}$$

*де* $\omega := \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} r_i^-$, $C_1$ *– стала, яка залежить тільки від* $K_i\,(i = 1, 2, 3)$, $c_1$, $r_i^+$ $(i = \overline{1,k})$.

**4. Допоміжні твердження.** Наведемо кілька технічних тверджень, які будуть потрібні для доведення теореми 1. Для цього використовуємо такі позначення:

$$a_j(v)(x,t) := a_j(x,t,v(x,t),\nabla v(x,t)) \quad (j=\overline{0,n}), \quad (x,t)\in Q;$$
$$\partial_0 v := v, \quad \partial_i v := v_{x_i} \quad (i=\overline{1,n}).$$

**Твердження 1.** *Для довільних* $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\mu > 1$ *правильна нерівність*

$$a\,b \leqslant \varepsilon|a|^{\mu} + \varepsilon^{1-\mu'}\,|b|^{\mu'}, \tag{10}$$

*де* $\mu' = \frac{\mu}{\mu-1}$.

*Доведення.* Це твердження легко випливає з нерівності Юнга (див., наприклад, [16]): $a\,b \leqslant \frac{|a|^{\mu}}{\mu} + \frac{|b|^{\mu'}}{\mu'}$. □

**Твердження 2.** *Для будь-яких* $a$, $b$, $c$, $\varepsilon > 0$, $\mu_1 > 1$, $\mu_2 > 1$, $\mu_3 > 1$, $\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3} = 1$, *правильна нерівність*

$$a\,b\,c \leqslant \varepsilon|a|^{\mu_1} + \varepsilon|b|^{\mu_2} + \varepsilon^{1-\mu_3}\,|c|^{\mu_3}. \tag{11}$$

*Доведення.* Це твердження легко отримати з нерівності Юнга (див., наприклад, [16]): $a\,b\,c \leqslant \frac{|a|^{\mu_1}}{\mu_1} + \frac{|b|^{\mu_2}}{\mu_2} + \frac{|c|^{\mu_3}}{\mu_3}$. □

**Лема 1.** *Нехай* $R > 0$ *– довільне фіксоване число. Припустимо, що функція* $v \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\,loc}(\overline{Q})$ *така, що правильна інтегральна тотожність*

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=0}^n g_i\partial_i\psi\varphi - v\psi\varphi'\Big\}\,dxdt = 0, \quad \varphi\in C^1_c(0,T), \psi\in\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\,c}(\Omega),\ supp\,\psi\subset\overline{\Omega}_R, \tag{12}$$

*для деяких функцій* $g_j \in L_{p'_j(\cdot),\,loc}(\overline{Q})$ $(j=\overline{0,n})$.

*Тоді* $v\in C([0,T];L_2(\Omega_{R'}))$ *для кожного* $R'\in(0,R)$. *Крім того, для довільних функцій* $\theta\in C^1([0,T])$, $w\in C^1(\overline{\Omega})$, $supp\,w\subset\overline{\Omega}_R$, $w\geqslant 0$, *і будь-яких чисел* $t_1, t_2$ *таких, що* $0 \le t_1 < t_2 \le T$, *виконується рівність*

$$\theta(t)\int\limits_{\Omega_R}|v(x,t)|^2 w(x)dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R}|v|^2 w\theta'\,dxdt + 2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=0}^n g_i\partial_i(vw)\Big\}\theta\,dxdt = 0. \tag{13}$$

*Доведення.* Це твердження доводиться аналогічно, як лема 3 [12]. □

**Лема 2.** *Нехай* $(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{A}^*_p$, $f\in\mathbb{F}_{p',loc}$, $u_0\in\mathbb{H}_{loc}$, $u_1,u_2\in\mathbb{U}_{p,loc}$ *і* $R\geqslant 1$ *– яке-небудь фіксоване число. Припустимо, що для кожного* $l\in\{1,2\}$

$$u_l(x,0) = u_0(x) \quad \text{для м.в.} \quad x\in\Omega_R \tag{14}$$

*і виконується рівність*

$$\iint\limits_{Q_R}\Big\{\sum_{i=0}^n a_i(u_l)\partial_i\psi\varphi - u_l\psi\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_{Q_R} f\psi\varphi\,dxdt \tag{15}$$

*для будь-яких* $\varphi \in C_c^1(0,T)$ *і* $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, *supp* $\psi \subset \overline{\Omega}_R$.

*Тоді для довільного числа* $R_0 \in (0, R/2]$ *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \int_{\Omega_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\,dx + \tag{16}$$

$$+\iint_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(u_1) - a_i(u_2)\big)\big(\partial_i u_1 - \partial_i u_2\big) + |u_1 - u_2|^{q(x)}\Big]\,dxdt \leqslant C_2 R^{\alpha-\omega},$$

*де* $\alpha, \omega$ *– такі самі як в теоремі 1, а* $C_2 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* $K_1, K_3, c_1$, $r_i^+$ $(i = \overline{1,k})$, $q^-$.

*Доведення.* Введемо таку зрізаючу функцію:

$$\zeta(x) = \begin{cases} (R^2 - |x'|^2)/R, & |x'| < R, \\ 0, & |x'| \geqslant R, \end{cases}$$

де $x = (x', x''), x' = (x_1, \ldots, x_k), x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n), |x'| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2)^{1/2}$.

Для $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$ такої, що supp $\psi \subset \overline{\Omega}_R$, розглянемо рівність (15) при $u = u_1$ й цю свму рівність при $u = u_2$ і віднімемо ці рівності. У підсумку, прийнявши

$$u_{12}(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$a_{i,12}(x,t) := a_i(u_1)(x,t) - a_i(u_2)(x,t),\ (x,t) \in Q,\ i = \overline{0,n},$$

отримаємо рівність, до якої застосуємо лему 1 з $g_i = a_{i,12}$ $(i = \overline{0,n})$, $w = \zeta^s$, $\theta = 1$, де $s := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} r_i^+$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0,T]$ – довільне число. Внаслідок простих перетворень отримаємо рівність

$$\int_{\Omega_R} |u_{12}(x,\tau)|^2 \zeta^s(x)\,dx + 2\iint_{Q_R^\tau} \Big\{\sum_{i=0}^{n} a_{i,12}\partial_i u_{12}\Big\}\zeta^s\,dxdt =$$

$$= -2s \iint_{Q_R^\tau} \Big(\sum_{i=1}^{k} a_{i,12}\,\partial_i\zeta\Big)\,u_{12}\,\zeta^{s-1}\,dxdt, \tag{17}$$

де $Q_R^\tau := \Omega_R \times (0,\tau]$ при $\tau \in (0,T]$, $R > 0$.

Зробимо відповідні оцінки інтегралів рівності (17). З умови $(\mathcal{A}_3)$ матимемо

$$\iint_{Q_R^\tau} \Big\{\sum_{i=0}^{n} a_{i,12}\partial_i u_{12}\Big\}\zeta^s dxdt \geqslant K_1 \iint_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)}\,\zeta^s dxdt. \tag{18}$$

На підставі нерівності (11), врахувавши оцінку $|\partial_i\zeta(x)| \leqslant 2$ $(i = \overline{1,n})$ при $x \in \mathbb{R}^n$ та вибравши $a = |a_{i,12}|\zeta^{s/\mu_1}$, $b = |u_{12}|\zeta^{s/\mu_2}$, $c = \zeta^{s/\mu_3 - 1}$, $\mu_1 = p_i'(x)$, $\mu_2 = q(x)$, $\mu_3 = r_i(x)$ (для кожного $i = \overline{1,n}$ і майже всіх $x \in \Omega$), отримаємо оцінку

$$\iint_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|\,|\partial_j\zeta|\,|u_{12}|\,\zeta^{s-1}\,dxdt \leqslant 2\varepsilon_1 \iint_{Q_R^\tau} \Big[\sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|^{p'_i(x)}\Big]\zeta^s\,dxdt +$$

$$+2\varepsilon_1 k \iint\limits_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)}\zeta^s\,dxdt + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_1^{1-r_i^+}\zeta^{\,s-r_i(x)}\,dxdt, \tag{19}$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ – довільне число.

Згідно з умовою $(\mathcal{A}_5)$ матимемо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big[\sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|^{p'_i(x)}\Big]\zeta^s\,dxdt \leqslant K_3 \iint\limits_{Q_R^\tau}\Big[\sum_{i=0}^{n} a_{i,12}\,\partial_i u_{12}\Big]\,\zeta^s\,dxdt. \tag{20}$$

З (17) на підставі (18)–(20) за достатньо малого значення $\varepsilon$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |u_{12}(x,\tau)|^2\zeta^s(x)dx + \iint\limits_{Q_R^\tau}\Big\{\sum_{i=0}^{n} a_{i,12}\partial_i u_{12} + |u_{12}|^{q(x)}\Big\}\zeta^s\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{i=1}^{k}\zeta^{\,s-r_i(x)}\,dxdt, \tag{21}$$

де $C_3$ – додатна стала, яка залежить тільки від $K_1, K_3, r_i^+$ $(i=\overline{1,k})$, а $\tau\in(0,T]$ – довільне число.

Зауважимо, що $0\leqslant\zeta(x)\leqslant R$, коли $x\in\mathbb{R}^k$, $\zeta(x')\geqslant R-R_0$ при $|x'|\leqslant R_0$, де $R_0\in(0,R/2]$ – яке-небудь число. Враховуючи це, нерівність $R/(R-R_0)=1+R_0/(R-R_0)\leqslant 2$, а також нерівність (7) і те, що $R\geqslant 1$, з (21) отримаємо потрібне твердження. □

**Лема 3.** *Нехай* $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}_p^*$ *і функції* $\widetilde{u}\in\mathbb{U}_{p,loc}$, $f\in\mathbb{F}_{p',loc}$, $u_0\in\mathbb{H}_{loc}$ *такі, що для деякого числа* $R\geqslant 1$ *виконується рівність* (6) *з* $u=\widetilde{u}$ *для будь-яких* $\varphi\in C_c^1(0,T)$, $\widetilde{\psi}\in W^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, *supp* $\psi\subset\overline{\Omega_R}$. *Тоді для будь-якого числа* $R_0\in(0,R/2]$ *правильна нерівність* (9) *з* $u=\widetilde{u}$.

*Доведення.* Доведення цього твердження повторює доведення леми 2, якщо прийняти $u_1:=\widetilde{u}$, $u_2:=0$. Але в цьому випадку треба використати умову $(\mathcal{A}_4)$ та нерівність

$$\Big|\iint\limits_{Q_R^\tau} f\widetilde{u}\zeta^s dxdt\Big| \leqslant \varepsilon_2\iint\limits_{Q_R^\tau}|\widetilde{u}|^{p_0(x)}\zeta^s dxdt + \varepsilon_2^{-1/(p_0^- -1)}\iint\limits_{Q_R^\tau}|f|^{p_0'(x)}\zeta^s dxdt,$$

де $\varepsilon_2\in(0,1)$ – довільне число. □

### 5. Обґрунтування основного результату.

*Доведення теореми 1. Перший етап* (*доведення єдиності розв'язку*). Доведемо, що задача (1)—(3) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай $u_1$, $u_2$ — (різні) узагальнені розв'язки задачі (1)—(3). З леми 2 одержуємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |u_1(x,t)-u_2(x,t)|^{q(x)}\,dxdt \leqslant C_2R^{\alpha-\omega}, \tag{22}$$

де $R_0>0$, $R\geqslant 1$ – довільні числа такі, що $R_0\leqslant R/2$.

Зафіксуємо $R_0$ і перейдемо в (22) до границі при $R\to+\infty$. У підсумку отримаємо, що $u_1=u_2$ на $Q_{R_0}$. Оскільки $R_0$ – довільне число, то звідси одержуємо, що $u_1=u_2$ майже всюди на $Q$.

*Другий етап* (*побудова наближень розв'язку*). Нехай $R>0$ – довільне число. Позначимо $\Gamma_{0,R}:=\overline{\partial\Omega_R\setminus\Gamma_1}$, $\Gamma_{1,R}:=\partial\Omega_R\setminus\Gamma_{0,R}$. Під $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ розумітимемо замикання $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega_R}):=\{v\in C^1(\overline{\Omega_R})\mid v|_{\Gamma_{0,R}}=0\}$ в просторі $W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$. Нехай а $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R)$ – підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R)$, складений з функцій $w$ таких, що $w(\cdot,t)\in\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ для майже всіх $t\in(0,T)$.

Введемо також простір

$$\mathbb{U}_{p,R}:=\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R)\cap C([0,T];L_2(\Omega_R))$$

з нормою

$$\|w\|_{\mathbb{U}_{p,R}}:=\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R)}+\max_{t\in[0,T]}\|w(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega_R)}.$$

Для кожного $l\in\mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_l\in\mathbb{U}_{p,l}$, яка задовольняє початкову умову

$$u_l(\cdot,0)=u_0(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega_l), \tag{23}$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_l}\Big\{\sum_{i=0}^{n}a_i(u_l)\partial_i\psi\varphi-u_l\psi\varphi'\Big\}\,dxdt=\iint\limits_{Q_l}f\psi\varphi\,dxdt \tag{24}$$

для будь-яких $\psi\in\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega_l)$, $\varphi\in C^1_c(0,T)$.

Існування узагальненого розв'язку $u_l\in\mathbb{U}_{p,l}$ цієї задачі доводимо методом Гальоркіна (див., наприклад, [13, 10, 17]). Єдиність $u_l$ випливає з умови $(\mathcal{A}_3)$.

*Третій етап* (*доведення збіжності послідовності наближень розв'язку*). Для кожного $l\in\mathbb{N}$ функцію $u_l$ продовжимо нулем на $Q$, залишивши за цим продовженням позначення $u_l$. Очевидно, що $u_l\in\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$. Доведемо, що послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до узагальненого розв'язку задачі (1)—(3).

Нехай $l$ і $m$ — довільні натуральні числа, причому $1 < l < m$, $R_0 > 0, R \geqslant 1$ — будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 \leqslant R/2 < R \leqslant l-1$. Тоді з леми 2 отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_l(x,t) - u_m(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} |u_l(x,t) - u_m(x,t)|^{q(x)}\, dxdt \leqslant C_2 R^{\alpha-\omega}. \tag{25}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0 > 0$ і виберемо $R \geqslant \max\{1; 2R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (25) була меншою за $\varepsilon$. Це можна зробити, оскільки показник степеня $R$ у правій частині нерівності (25) від'ємний. Тоді для будь-яких $l \geqslant R+1$ і $m > l$ ліва частина нерівності (25) менша за $\varepsilon$. Це означає, що послідовність $\{u_l\big|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^{\infty}$ є фундаментальною, відповідно, в $L_{q(\cdot)}(Q_{R_0})$ і $C([0,T]; L_2(\Omega_{R_0}))$. Оскільки $R_0$ – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такої, що $u \in C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ і

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \tag{26}$$

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})). \tag{27}$$

Доведемо обмеженість послідовностей $\{\partial_i u_l\}_{l=1}^{\infty}$ $(i = \overline{0,n})$, $\{a_j(u_l)\}_{l=1}^{\infty}$ $(j = \overline{0,n})$, відповідно, в $L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{0,n})$, $L_{p'_j(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(j = \overline{0,n})$. Справді, нехай $R_0$ – будь-яке дійсне число, а $R := 2R_0$. На підставі леми 3 для довільного натурального числа $l \geqslant R+1$ отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_l(x,t)|^{p_i(x)} dxdt \leqslant C_4(R_0), \tag{28}$$

де $C_4(R_0) > 0$ – стала, яка від $l$ не залежить, але може залежати від $R_0$.

Згідно з умовою $(\mathcal{A}_2)$ й оцінкою (28) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \iint\limits_{Q_{R_0}} |a_i(u_l)|^{p'_i(x)}\, dxdt \leqslant C_5 \iint\limits_{Q_{R_0}} \sum_{j=0}^{n} |\partial_j u_l(x,t)|^{p_j(x)}\, dxdt + \\ + C_6 \iint\limits_{Q_{R_0}} |h_{2,i}(x,t)|^{p'_i(x)}\, dxdt < C_7(R_0), \end{aligned} \tag{29}$$

де $C_5, C_6, C_7$ – додатні сталі, які від $l$ не залежать.

З (26), (28), (29), використовуючи рефлексивність просторів $L_{p_i(\cdot)}(Q_{R_0})$ і $L_{p'_i(\cdot)}(Q_{R_0})$ $(i = \overline{0,n})$ для довільного $R_0 > 0$, отримаємо існування підпослідовності послідовності $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ (за якою залишимо те саме позначення, що і послідовності) та функцій $\chi_i \in L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{0,n})$ таких, що

$$\partial_i u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i u \ \text{слабко в} \ L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \ \ i = \overline{0,n}, \tag{30}$$

$$a_i(u_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \ \text{слабко в} \ L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \ \ i = \overline{0,n}. \tag{31}$$

Використовуючи (30) і (31), з (24) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^{n} \chi_i \partial_i \psi \varphi - u\psi\varphi'\Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt \tag{32}$$

для будь-яких $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Зауважимо таке: коли

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^{n} \chi_i(x,t)\partial_i\psi(x)\Big\}\, dx = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^{n} a_j(u)(x,t)\partial_i\psi(x)\Big\}\, dx \tag{33}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ і будь-яких $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, то звідси і (32) отримаємо інтегральну тотожність (6) для функції $u$. Звідси, зокрема, на підставі леми 1 отримаємо, що $u \in C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$. Отже, функція $u$ належить до простору $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$. З (23) і (27) випливає, що $u$ задовольняє початкову умову (3). Отож, ми доведемо, що функція $u$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо встановимо правильність рівності (33).

*Четвертий етап* (*доведення правильності рівностей* (*33*)). Використаємо метод монотонності ([17], розділ 2). Нехай $v \in W^{1,0}_{p(\cdot),loc}(\overline{Q})$ – яка-небудь функція, а $w(x')$, $x' = (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k$, – довільна невід'ємна неперервно диференційовна функція з обмеженим носієм, $\theta \in C^1_c(0,T), \theta \geqslant 0$.

На підставі умови $(\mathcal{A}_3)$ для будь-якого $l \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^{n} (a_i(u_l) - a_i(v))(\partial_i u_l - \partial_i v)\Big] w\theta\, dxdt \geqslant 0. \tag{34}$$

Нерівність (34) можна переписати у такому вигляді:

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^{n} a_i(u_l)\partial_i u_l\Big] w\theta\, dxdt - \iint\limits_Q \Bigg[\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(u_l)\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u_l - \partial_i v)\big)\Bigg] w\theta\, dxdt \geqslant 0 \tag{35}$$

для всіх $l \in \mathbb{N}$.

За означенням функції $u_l$ матимемо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^{n} a_i(u_l)\partial_i\psi\varphi - f\psi\varphi - u_l\psi\varphi'\Big]\, dxdt = 0 \tag{36}$$

для довільних $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega}_l$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$. Нехай $m$ таке, що $\operatorname{supp} w \subset \{x' \mid |x'| \leqslant m\}$. На підставі леми 1 з тотожності (36) при $l > m$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^{n} a_i(u_l)\partial_i u_l\Big] w\theta\, dxdt = \frac{1}{2}\iint\limits_Q |u_l|^2 w\theta'\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{k} a_i(u_l)u_l\partial_i w - fu_l w\Big]\theta\, dxdt. \tag{37}$$

З (35) і (37) одержимо

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{Q} |u_l|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=1}^{k} a_i(u_l)u_l\partial_i w - fu_l w\Big]\theta\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(u_l)\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u_l - \partial_i v)\big)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0. \tag{38}$$

Перейдемо в (38) до границі при $l \to \infty$. На підставі (26), (30), (31) і того, що $L_{q(\cdot)}(G) \subset L_2(G) \subset L_{p_i(\cdot)}(G)$ для будь-яких $i \in \{1,\ldots,k\}$ та довільної обмеженої області $G$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{Q} |u|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=1}^{k} \chi_i u\partial_i w - fuw\Big]\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(\chi_i\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u - \partial_i v)\big)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0. \tag{39}$$

Тепер в (36) перейдемо до границі при $l \to \infty$. На підставі (30), (31) отримаємо

$$\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \chi_i\partial_i\psi\varphi - f\psi\varphi - u\psi\varphi'\Big]\,dxdt = 0 \tag{40}$$

для довільних $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$. Звідси на підставі леми 1 одержуємо

$$\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \chi_i\partial_i u\Big]\, w\theta\,dxdt = \frac{1}{2}\iint\limits_{Q} |u|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=1}^{k} \chi_i u\partial_i w - fuw\Big]\theta\,dxdt. \tag{41}$$

З (39) та (41) отримаємо

$$\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \chi_i\,\partial_i u\Big] w\theta\,dxdt - \iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(\chi_i\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u - \partial_i v)\big)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0,$$

тобто

$$\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(\chi_i - a_i(v)\big)\big(\partial_i u - \partial_i v\big)\Big]\, w\theta\,dxdt \geqslant 0. \tag{42}$$

Візьмемо в (42) $v = u - \lambda\psi\varphi$, де $\lambda > 0$ – довільне число, $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$ – будь-які функції. Після ділення на $\lambda$ і врахування довільності функцій $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$ одержуємо

$$\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(\chi_i - a_i(u - \lambda g)\big)\partial_i\psi\Big]\varphi\,dxdt = 0. \tag{43}$$

В цій рівності спрямуємо $\lambda$ до 0, використовуючи теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла. У підсумку одержимо

$$\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(u) - \chi_i\big)\partial_i\psi\Big]\varphi\, dxdt = 0, \tag{44}$$

звідки випливає рівність (33). □

**6. Висновки.** Ми дослідили мішані задачі без обмежень на нескінченності для одного класу нелінійних анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показиками нелінійності. Ввели поняття узагальненого розв'язку мішаної задачі для розглядуваних рівнянь, використавши узагальнені простори Лебега і Соболєва. Визначили умови існування та єдиності узагальнених розв'язків досліджуваних задач. Під час доведення існування розв'язку використано метод вичерпування необмеженої області та метод монотонності.

## Список використаної літератури

1. H. Brézis, *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), no. 3, 271–282.
2. F. Bernis, *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity*, Arch. Rational Mech. Anal. **106** (1989), no. 3, 217–241.
3. А. Е. Шишков, *Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности*, Укр. мат. журн. **47** (1995), no. 2, 277–289.
4. Н. М. Бокало, *Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений*, Дифференц. уравнения **8** (1994), no. 8, 1325–1334.
5. A. Gladkov and M. Guedda, *Diffusion-absorption equation without growth restridtions on the data at infinity*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), no. 1, 16–37.
6. І. Медвідь, *Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **64** (2005), 149–166.
7. О. М. Бугрій, *Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **67** (2007), 30–52.
8. О. М. Бугрій, *Про єдиність розв'язку деякої нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій області*, Математичний вісник НТШ. **3** (2006), 5–16.
9. O. Kováčik and J. Rákosníc, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$*, Czech. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
10. В. Н. Самохин, *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации,* Дифференц. уравнения **32** (1996), no. 5, 643–651.
11. M. Růžička, *Electroreological fluids: modeling and mathematical theory,* Springer, Berlin, 2000.
12. М. М. Бокало, І. Б. Паучок, *Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності,* Мат. студії **24** (2006), no. 1, 25–48.

13. О. М. Бугрій, С. П. Лавренюк, *Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **56** (2000), 33–43.
14. M. Bokalo, O. Domanska, *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces,* Mat. Stud. **28** (2007), no. 1, 77–91.
15. О. В. Доманська, *Нелінійні еліптичні рівняння в квазіцииндричних областях*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **67** (2007), 104–118.
16. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва, 1964.
17. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач,* Мир, Москва, 1972.

*Стаття: надійшла до редколегії 20.12.2017*
*доопрацьована 26.12.2017*
*прийнята до друку 27.12.2017*

# INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR SECOND ORDER PARABOLIC EQUATIONS WITH THE VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS WITHOUT CONDITIONS AT INFINITY

**Mykola BOKALO, Nikolyetta HRYADIL**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: mm.bokalo@gmail.com, nikolyetta@gmail.com*

This paper is devoted to the results of investigation of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with the variable exponents of nonlinearity in unbounded domains. We consider weak solutions which belong to the generalized Sobolev and Lebesgue spaces. Under certain conditions on data-in the uniqueness and existence of the solutions are proved. Also estimates of the solutions are obtained.

*Key words:* parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, unbounded domain, monotone method.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 155–163*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 155–163*

УДК 517.95

# RESTORATION OF A SOLUTION'S INITIAL DATA AND A SOURCE OF THE FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION IN THE SPACE OF PERIODIC DISTRIBUTIONS

**Halyna LOPUSHANSKA**[1], **Olga MYAUS**[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mail: lhp@ukr.net,*
[2]*National University "Lviv Polytechnic"*
*12, Bandera Str., 79001, Lviv, Ukraine*
*e-mail: myausolya@mail.ru*

We prove the correctness of an inverse problem for a time fractional subdiffusion equation. This problem is to find a solution of direct problem, which is classical in time with values in the space of periodic spatial distributions, its initial data and a source term of the equation. We show that the same kind time integral over-determination conditions may be used.

*Key words:* fractional derivative, inverse problem, periodic distribution, time integral over-determination condition.

Inverse Cauchy and boundary-value problems for a time fractional diffusion equations with different unknown quantities and under different over-determination conditions are actively studied in connection with their applications (see, for instance, [1]–[9]).

We study the inverse problem for a time fractional diffusion equation. This problem is to find a solution for direct problem, classical in time with values in the space of periodic spatial distributions, its initial data and a source term of the equation. We use the time integral over-determination conditions. Such kind of conditions generalise the multi-point conditions. Space integral over-determination conditions have been used, for instance, in [4, 10, 11] for study the inverse problems.

Note that the sufficient conditions of classical solvability of fractional Cauchy and boundary-value problems were obtained, for example, in [12]–[17], the existence and uniqueness theorems to the boundary-value problems for partial differential equations in Sobolev spaces were obtained by Yu. Berezansky, V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, Ya. Roitberg, J.-L. Lions, E. Magenes, V. A. Mikhailets, A. A. Murach and others (see [18] and references therein), and in [19] the existence and uniqueness theorems to the space fractional Cauchy problem in Schwartz spaces were proved. The solvability of

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 35S15

some nonclassical direct problems for partial differential equations with integral initial conditions, in particular, in the space of periodic spatial variable functions, have been established, for example, in [20, 21], the multi-point non-local problem for parabolic pseudo-differential equations with non-smooth symbols has been investigated in [22]. The inverse problem on determination only the initial data of the solution (classical in time with values in the space of periodic spatial distributions) of a time fractional diffusion equation, or only a source term of a such type equation, were studied in [8] and [9], respectively.

**1. Auxiliary definitions.** Assume that $\mathbb{N}$ is a set of natural numbers, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ is the space of infinitely differentiable functions with compact supports, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is the space of rapidly decreasing infinitely differentiable functions [23, p. 90], while $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ and $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ are the spaces of linear continuous functionals (distributions) over $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ and $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, respectively, and the symbol $(f, \varphi)$ stands for the value of the distribution $f$ on the test function $\varphi$. Note that $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ is the space of slowly increasing distributions.

Recall that the Caputo derivative (or the Caputo-Djrbashian derivative) of order $\alpha \in (0,1)$ is defined by

$$^{c}D_t^{\alpha} v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \Big[ \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau - \frac{v(x,0)}{t^{\alpha}} \Big].$$

Let $X_k(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$. Similarly to [23, p. 120], we denote by $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ the space of periodic distributions, i.e., the space of $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ such that

$$v(x+2\pi) = v(x) = -v(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

The formal series

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k X_k(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

is the Fourier series of the distribution $v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, and numbers

$$v_k = \frac{2}{\pi}(v, X_k)_{2\pi} = \frac{2}{\pi}(v, hX_k)$$

are its Fourier coefficients. Here $h(x)$ is an even function from $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ possessing the properties:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi) \end{cases}, \quad 0 \le h(x) \le 1.$$

Note that

$$v_k = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(x) X_k(x) dx \quad \text{for} \quad v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}),$$

and then the series (1) is the classical Fourier series of $v$ by the system $X_k$, $k \in \mathbb{N}$.

As it is known (see [23, p. 123]) $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, the series (1) of $v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ converges in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ to $v$, and for the Fourier coefficients the estimates hold

$$(1+k)^{-m} |v_k| \le C(v,m) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

with some $m \in \mathbb{Z}_+$ where $C(v,m)$ is the positive constant, the same for all $k \in \mathbb{N}$.

We use the following: for $\gamma \in \mathbb{R}$

$$H^{\gamma}(\mathbb{R}) = \Big\{v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) : \|v\|_{H^{\gamma}(\mathbb{R})} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |v_k|(1+k)^{\gamma} < +\infty\Big\}$$

(note that $H^{\gamma+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset H^{\gamma}(\mathbb{R})$ for all $\varepsilon > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$),

$C\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$ is the space of continuous in $t \in [0,T]$ functions $v(x,t)$ with values $v(\cdot,t) \in H^{\gamma}(\mathbb{R})$ endowed with the norm $\|v\|_{C\left([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)} = \max\limits_{t\in[0,T]} \|v(\cdot,t)\|_{H^{\gamma}(\mathbb{R})}$,

$C_b\big((0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$ is the space of continuous in $t \in (0,T]$ functions $v(x,t)$ with values $v(\cdot,t) \in H^{\gamma}(\mathbb{R})$ endowed with the norm $\|v\|_{C_b\left((0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)} = \sup\limits_{t\in(0,T]} \|v(\cdot,t)\|_{H^{\gamma}(\mathbb{R})}$,

$C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big) = \Big\{v \in C\big([0,T]; H^{2+\gamma}(\mathbb{R})\big) :^{c} D^{\alpha} v \in C_b\big((0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)\Big\}$ is its subspace endowed with the norm

$$\|v\|_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)} = \max\Big\{\|v\|_{C\left([0,T];H^{2+\gamma}(\mathbb{R})\right)}, \|^{c}D^{\alpha}v\|_{C_b\left((0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)}\Big\}.$$

**2. The inverse problem.** We study the inverse problem

$$^{c}D_t^{\alpha} u - u_{xx} = F_0(x), \quad (x,t) \in Q_T := \mathbb{R} \times (0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\int_0^{t_0} u(x,t)dt = \Phi_0(x), \quad \int_0^{t_1} u(x,t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t_0, t_1 \in (0,T] \tag{4}$$

where $\alpha \in (0,1)$, $\Phi_0, \Phi_1$ are given functions, $T$ is a given positive number, $u$, $F_0$, $F_1$ are unknown functions.

Let the following assumption holds:

(A) $\gamma \in \mathbb{R}$, $\Phi_0, \Phi_1 \in H^{\gamma+4}(\mathbb{R})$, $t_0, t_1 \in (0,T]$, $t_0 \neq t_1$.

Expand the functions $F_j(x)$, $\Phi_j(x)$, $j \in \{0,1\}$, in the formal Fourier series by the system $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} X_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\Phi_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{jk} X_k(x), \quad x \in \mathbb{R},\ j = 0,1. \tag{6}$$

**Definition 1.** The vector-function

$$(u, F_0, F_1) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma} := C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big) \times H^{\gamma}(\mathbb{R}) \times H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$$

given by the series

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (x,t) \in Q_T \tag{7}$$

and (5), satisfying the equation (2) in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ for every $t \in (0,T]$ and the conditions (3), (4), is called a *solution of the problem* (2)–(4).

Substituting the function (7) in the equation (2) and the conditions (3), (4), we obtain the problems

$$ {}^{c}D_t^{\alpha}u_k + k^2u_k = F_{0k},\ t \in (0,T],\ \ u_k(0) = F_{1k}, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^{t_0} u_k(t)dt = \Phi_{0k},\ \ \int\limits_0^{t_1} u_k(t)dt = \Phi_{1k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

for the unknown $u_k(t)$, $t \in [0,T]$ and $F_{jk}$, $j = 0, 1$, $k \in \mathbb{N}$.

So, the vector-functions $(u_k(t), F_{0k}, F_{1k})$ $(k \in \mathbb{N})$ of the Fourier coefficients of the solution satisfy the inverse problems (8), (9).

We use the Mittag–Leffler function $E_{\alpha,\mu}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{\Gamma(p\alpha+\mu)}$.

The function $E_{\alpha,\mu}(-x)$ $(x > 0)$ is infinitely differentiable for $\alpha \in (0, 1]$, $\mu > 0$ and compactly monotonic. We have $0 < E_{\alpha,\mu}(-k^2t^{\alpha}) < 1$ for all $t > 0$, $\mu \geq \alpha$,

$$E_{\alpha,\mu}(-x) \leq \frac{r_{\alpha,\mu}}{1+x}, \quad x > 0, \quad \text{where } r_{\alpha,\mu} \text{ is a positive constant,}$$

and the asymptotic behavior [12]

$$E_{\alpha,\mu}(-x) = O\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad x \to +\infty.$$

**Theorem 1.** *Assume that* $\gamma \in \mathbb{R}$, $F_0 \in H^{\gamma}(\mathbb{R})$, $F_1 \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$. *Then there exists a unique solution* $u \in C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$ *to the direct problem* (2), (3). *It is given by* (7) *where*

$$u_k(t) = F_{0k}k^{-2}\big[1 - E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha})\big] + F_{1k}E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha}), \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

*The solution depends continuously on the data* ($F_0$, $F_1$), *and the following inequality holds:*

$$||u||_{C_{2,\alpha}\big([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)} \leq a_0||F_0||_{H^{\gamma}(\mathbb{R})} + a_1||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \tag{11}$$

*where* $a_j$, $j \in \{0, 1\}$ *are positive constants independent of data.*

*Proof.* It follows from the theorem 1 in [8] that there exists the unique solution $u \in C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$ to the problem (2), (3) under the theorem's conditions, that it is given by (7) where

$$u_k(t) = F_{0k}\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-k^2\tau^{\alpha})d\tau + F_{1k}E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha}), \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

By the link

$$\lambda\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\tau^{\alpha})d\tau = 1 - E_{\alpha,1}(-\lambda t^{\alpha}),$$

we obtain the formulas (10) and, using [8, th.1], we obtain (11). This inequality implies that a solution of the problem is unique and depends continuously on the data. □

**Theorem 2.** *Assume that (A) holds. Then there exists a unique solution* $(u, F_0, F_1) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma}$ *of the inverse problem* (2)–(4). *It is given by the Fourier series* (7) *and* (6) *where* $u_k(t)$ *are defined by* (10),

$$F_{0k} = \Big[\frac{\Phi_{0k}}{t_0} E_{\alpha,2}(-k^2 t_1^\alpha) - \frac{\Phi_{1k}}{t_1} E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha)\Big] k^2\, G_k^{-1}, \tag{12}$$

$$F_{1k} = \Big[\frac{\Phi_{1k}}{t_1}\big(1 - E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha)\big) - \frac{\Phi_{0k}}{t_0}\big(1 - E_{\alpha,2}(-k^2 t_1^\alpha)\big)\Big]\, G_k^{-1},$$

$$G_k = E_{\alpha,2}(-k^2 t_1^\alpha) - E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha), \quad k \in \mathbb{N}.$$

*The solution depends continuously on the data* $\Phi_0$, $\Phi_1$ *and the following inequality holds:*

$$||u||_{C_{2,\alpha}\big([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\big)} + ||F_0||_{H^\gamma(\mathbb{R})} + ||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}$$

$$\le b_0||\Phi_0||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})} + b_1||\Phi_1||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})}, \tag{13}$$

*where* $b_j$, $j \in \{0,1\}$ *are positive constants independent of data.*

*Proof.* Using (10), we write the conditions (9) as follows

$$F_{0k}k^{-2}\int_0^{t_0}\Big[1 - E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)\Big]dt + F_{1k}\int_0^{t_0} E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt = \Phi_{0k},$$

$$F_{0k}k^{-2}\int_0^{t_1}\Big[1 - E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)\Big]dt + F_{1k}\int_0^{t_1} E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt = \Phi_{1k},$$

$k \in \mathbb{N}$. Note that [8]

$$\int_0^{t_j} E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt = t_j E_{\alpha,2}(-k^2 {t_j}^\alpha), \quad j = 0,1, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

From here, according to the assumption (A), we find the expressions (12) for the unknown Fourier coefficients $F_{jk}$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1$. The numbers $G_k \neq 0$ for all $k \in \mathbb{N}$ by the mentioned monotonic property of the Mittag–Leffler function.

Let us show that the founded solution belongs to $\mathcal{M}_{\alpha,\gamma}$.

Taking the behavior of the Mittag–Leffler function for large $k$ and the formulas (12) into account, one obtains

$$(1+k)^\gamma |F_{0k}| \le c_0\Big[|\Phi_{0k}|(1+k)^{\gamma+2} + |\Phi_{1k}|(1+k)^{\gamma+2}\Big],$$

$$(1+k)^{\gamma+2} |F_{1k}| \le c_0\Big[|\Phi_{0k}|(1+k)^{\gamma+4} + |\Phi_{1k}|(1+k)^{\gamma+4}\Big], \;\; k \in \mathbb{N},$$

where $c_0$ is a positive constant, and therefore,

$$||F_0||_{H^\gamma(\mathbb{R})} \le c_0\Big[||\Phi_0||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})} + ||\Phi_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}\Big],$$

$$||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})} \le c_0\Big[||\Phi_0||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})} + ||\Phi_1||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})}\Big].$$

So, under the theorem's assumptions, $F_0 \in H^{\gamma}(\mathbb{R})$, $F_1 \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$. Then, using (11), we obtain the inequality (13). The inequality (13) implies that a solution of the problem is unique and depends continuously on the problem's data. □

**3. Remarks.** 1. The obtained result can be transferred to the case of the boundary value problem for a time fractional diffusion equation

$$^{c}D_t^{\alpha}u - A(x,D)u = F_0(x),$$

where $A(x,D)$ is an elliptic differential expression of the second order with infinitely differentiable coefficients and when the corresponding Sturm–Liouville problem has positive eigenvalues.

2. In the case $\alpha \in (1,2)$

$$^{c}D_t^{\alpha}v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v_{\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau - \frac{v_t(x,0)}{t^{\alpha-1}}\Big]$$

and we may study the inverse problem

$$^{c}D_t^{\alpha}u - u_{xx} = F_0(x), \quad (x,t) \in Q_T := \mathbb{R}\times(0,T], \tag{14}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

$$\int\limits_0^{t_0} u(x,t)dt = \Phi_0(x), \quad \int\limits_0^{t_1} u(x,t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

where $\Phi_0, \Phi_1, F_2$ are the given functions, $T$ is a given positive number, $u$, $F_0$, $F_1$ are unknown functions, $t_0, t_1 \in (0,T]$, $t_0 \neq t_1$.

By [8, th.1], assuming $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$, $F_0 \in H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})$, $F_j \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$, $j = 1,2$, we obtain the existence of the unique solution $u \in C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$ to the direct problem (14), (15). It is given by (7) where

$$u_k(t) = F_{0k}k^{-2}\big[1-E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha})\big]+F_{1k}E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha})+F_{2k}tE_{\alpha,2}(-k^2t^{\alpha}), \ t \in [0,T], \ k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

The solution depends continuously on the data ($F_0$, $F_1$, $F_2$), and the following inequality holds:

$$||u||_{C_{2,\alpha}\big([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)} \leq a_0||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{2} a_j||F_j||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \tag{18}$$

where $a_j$, $j \in \{0,1,2\}$ are positive constants independent of data.

Using (17), we write the conditions (16) as follows

$$F_{0k}k^{-2}\int\limits_0^{t_0}\Big[1-E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha})\Big]dt + F_{1k}\int\limits_0^{t_0}E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha})dt + F_{2k}\int\limits_0^{t_0}tE_{\alpha,2}(-k^2t^{\alpha})dt = \Phi_{0k},$$

$$F_{0k}k^{-2}\int\limits_0^{t_1}\Big[1-E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha})\Big]dt + F_{1k}\int\limits_0^{t_1}E_{\alpha,1}(-k^2t^{\alpha})dt + F_{2k}\int\limits_0^{t_1}tE_{\alpha,2}(-k^2t^{\alpha})dt = \Phi_{1k},$$

$k \in \mathbb{N}$. Note that $\int\limits_0^{t_j} tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)dt = \dfrac{1}{\alpha k^{4/\alpha}} \int\limits_0^{k^2 {t_j}^\alpha} E_{\alpha,2}(-z)z^{\frac{2}{\alpha}-1}dz = t_j^2 E_{\alpha,3}(-k^2{t_j}^\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$ and we have

$$F_{0k}k^{-2}t_0\Big[1-E_{\alpha,2}(-k^2t_0^\alpha)\Big] + F_{1k}t_0E_{\alpha,2}(-k^2t_0^\alpha)dt = \Phi_{0k} - F_{2k}t_0^2E_{\alpha,3}(-k^2t_0^\alpha),$$

$$F_{0k}k^{-2}t_1\Big[1-E_{\alpha,2}(-k^2t_1^\alpha)\Big] + F_{1k}t_1E_{\alpha,2}(-k^2t_1^\alpha) = \Phi_{1k} - F_{2k}t_1^2E_{\alpha,3}(-k^2t_1^\alpha),$$

$k \in \mathbb{N}$. From here if

$$G_k := E_{\alpha,2}(-k^2t_1^\alpha) - E_{\alpha,2}(-k^2t_0^\alpha) \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

we may find the expressions

$$\begin{aligned} F_{0k} &= \Big[\Big(\frac{\Phi_{0k}}{t_0} - F_{2k}t_0E_{\alpha,3}(-k^2t_0^\alpha)\Big)E_{\alpha,2}(-k^2t_1^\alpha) - \\ &-\Big(\frac{\Phi_{1k}}{t_1} - F_{2k}t_1E_{\alpha,3}(-k^2t_1^\alpha)\Big)E_{\alpha,2}(-k^2t_0^\alpha)\Big]k^2\, G_k^{-1}, \\ F_{1k} &= \Big[\Big(\frac{\Phi_{1k}}{t_1} - F_{2k}t_1E_{\alpha,3}(-k^2t_1^\alpha)\Big)\big(1-E_{\alpha,2}(-k^2t_0^\alpha)\big) - \\ &-\Big(\frac{\Phi_{0k}}{t_0} - F_{2k}t_0E_{\alpha,3}(-k^2t_0^\alpha)\Big)\big(1-E_{\alpha,2}(-k^2t_1^\alpha)\big)\Big]\, G_k^{-1} \end{aligned} \tag{19}$$

which imply the inequalities

$$||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})} \le \sum_{j=0}^{1} c_j||\Phi_j||_{H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})} + c_2||F_2||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})},$$

$$||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})} \le \sum_{j=0}^{1} c_j||\Phi_j||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})} + c_2||F_2||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})},$$

and, by using (18),

$$||u||_{C_{2,\alpha}\big([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\big)} \le \sum_{j=0}^{1} c_j||\Phi_j||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})} + c_2||F_2||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})},$$

where $c_j$, $j \in \{0,1,2\}$ are positive constants independent of problem's data.

In the case $\alpha \in (1,2)$, the function $E_{\alpha,2}(-z)$ does not monotonic. But it has a finite number of real positive zeroes. So, assuming $\Phi_0, \Phi_1 \in H^{\gamma+4}(\mathbb{R})$, $F_2 \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$, under severe constraints of existing $t_0, t_1 \in (0,T]$ such that $t_0 \neq t_1$ and $G_k \neq 0$ for all $k \in \mathbb{N}$ we obtain that there exists the unique solution

$$(u, F_0, F_1) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma,\theta} := C_{2,\alpha}\big([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\big) \times H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R}) \times H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$$

of the inverse problem (14)—(16) for all $\theta \in (0,1)$, that it is given by the Fourier series (7) and (5) with $u_k$ defined by (17), $F_{0k}, F_{1k}$ defined by (19) and depends continuously on the data $\Phi_0, \Phi_1, F_2$.

**4. Conclusion.** For a time fractional sub-diffusion equation we prove the correctness of the inverse problem which is to find a classical in time with values in the space of periodic spatial distributions solution for the direct problem, its initial data and a source term of the equation under the same kind time integral over-determination conditions. More complicated situation is for a time fractional super-diffusion equation. The numbers $t_1, t_2$ can not be arbitrarily taken from $(0, T]$ in such type over-determination conditions.

## References

1. J. Nakagawa, K. Sakamoto, and M. Yamamoto, *Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration*, J. Math-for-Ind. **2** (2010), no. A, 99–108.
2. Y. Zhang and X. Xu, *Inverse source problem for a fractional diffusion equation*, Inverse Probl. **27** (2011), no. 3, Art. ID 035010.
3. W. Rundell, X. Xu, and L. Zuo, *The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation*, Appl. Anal. **92** (2013), no. 7, 1511–1526.
4. T. S. Aleroev, M. Kirane, and S. A. Malik, *Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition*, Electron. J. Differ. Equ. **2013** (2013), no. 270, 1–16.
5. Y. Hatano, J. Nakagawa, Sh. Wang, and M. Yamamoto, *Determination of order in fractional diffusion equation*, J. Math-for-Ind. **5** (2013), no. A, 51–57.
6. B. Jim and W. Rundell, *A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes*, Inverse Probl. **31** (2015), no. 3, Art. ID 035003.
7. Ja. Janno, *Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time fractional diffusion equation*, Electron. J. Differ. Equ. **2016** (2016), no. 199, 1–28.
8. H. Lopushanska, A. Lopushansky, and O. Myaus, *Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation*, Electron. J. Differ. Equ. **2016** (2016), no. 14, 1–14.
9. A. Lopushansky, H. Lopushanska, and O. Myaus, *An inverse fractional source problem in a space of periodic spatial distributions*, Frac. Diff. Calc. **6** (2016), no. 2, 267–274.
10. M. Hussein, D. Lesnic, and M. I. Ismailov, *An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition*, Math. Methods Appl. Sci. **39** (2016), no. 5, 963–980.
11. M. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, Math. Studies, Monograph Ser., VNTL Publ., Lviv, 2003.
12. M. M. Djrbashian and A. B. Nersessyan, *Fractional derivatives and Cauchy problem for differentials of fractional order*, Izv. Akad. Nauk Arm. SSR, Mat. **3** (1968), no. 3, 3–29.
13. A.N. Kochubei, *A Cauchy problem for evolution equations of fractional order*, Dif. Eqs **25** (1989), no. 8, 967–974.
14. Yu. Luchko, *Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order*, Fract. Calc. Appl. Anal. **12** (2009), no. 4, 409–422.
15. M. M. Meerschaert, E. Nane, and P. Vallaisamy, *Fractional Cauchy problems on bounded domains*, Ann. Probab. **37** (2009), no. 3, 979–1007.
16. A. A. Voroshylov and A. A. Kilbas, *Existence conditions for a classical solution of the cauchy problem for the diffusion-wave equation with a partial Caputo derivative*, Dokl. Math. **75** (2007), no. 3, 407–410.
17. Z. Li and M. Yamamoto, *Initial boundary-value problems for linear diffusion equation with multiple time-fractional derivatives*, arXiv: 1306.2778v1.
18. V. A. Mikhailets and A. A. Murach, *Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems*, Birkhauser, Basel, 2014.

19. V. V. Gorodetsky and V. A. Litovchenko, *The Cauchy problem for pseudo-differential equations in spaces of distributions of type S'*, Dop. Acad. Sci. Ukraine **10** (1992), no. 6, 5–9 (in Ukrainian).
20. R. Jebari, *Solvability and positive solutions of a system of higher order fractional boundary value problem with integral conditions*, Frac. Diff. Calc. **6** (2016), no. 2, 179–199.
21. B. Y. Ptashnyk, V. S. Ilkiv, I. Ya. Kmit, and V. M. Polishchuk, *Nonlocal boundary-value problems for equations with partial derivatives*, Naukova dumka, Kyiv, 2002 (in Ukrainian).
22. Ja. M. Drin', *Classical solvability of multi-point non-local problem for parabolic pseudo-differential equation with non-smooth symbol*, J. of Lviv Polytechnic Nat. Univ. "Phys. and Math. Sciences", **804** (2010), no. 21, 5–28 (in Ukrainian).
23. V. S. Vladimirov, *Generelized functions in mathematical physycs*, Nauka, Moskow, 1979 (in Russian).

*Стаття: надійшла до редколегії 02.06.2017*
*доопрацьована 30.10.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# ВІДНОВЛЕННЯ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ РОЗВ'ЯЗКУ ТА ПРАВОЇ ЧАСТИНИ РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ В ПРОСТОРІ ПЕРІОДИЧНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

**Галина ЛОПУШАНСЬКА[1], Ольга М'ЯУС**

[1]*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mail: lhp@ukr.net*
*Національний університет "Львівська політехніка"*
*вул. С. Бандери, 12, 79001, Львів*
*e-mail: myausolya@mail.ru*

Доводимо коректність оберненої задачі для рівняння суб-дифузії з регуляризованою похідною дробового порядку за часом, що полягає у знаходженні розв'язку прямої задачі, класичного за часом зі значеннями в просторі періодичних узагальнених функцій, його невідомих початкових даних і правої частини рівняння. З'ясовуємо, що можна використовувати однакового вигляду інтегральні за часом умови перевизначення.

*Ключові слова:* похідна дробового порядку, обернена задача, періодична узагальнена функція, інтегральна за часом умова перевизначення.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 164–178*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 164–178*

УДК 517.95

# ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

**Наталія ПРОЦАХ**

*Національний лісотехнічний університет України*
*вул. Генерала Чупринки, 103, 79057, Львів*
*e-mail: protsakh@ukr.net*

Розглянуто обернену задачу визначення коефіцієнта, залежного від часової змінної, біля невідомої функції, яка є розв'язком мішаної задачі для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння. Знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язку з просторів Соболєва цієї задачі.

*Ключові слова:* ультрапараболічне рівняння, обернена задача, інтегральна умова перевизначення, розв'язок майже всюди.

**1. Вступ.** Для моделювання багатьох явищ фізики, механіки, біології, економіки (чисельності популяцій, теорії бінарних електролітів, теорії азіатських, американських та європейських опціонів, процесів дифузії з інерцією тощо) використовують задачі для ультрапараболічних рівнянь (див. [12, 14, 15] і наведену там бібліографію). Обернені задачі пов'язані з пошуком причин явищ за їхніми відомими наслідками. З математичної точки зору це означає визначення невідомих коефіцієнтів чи правих частин рівнянь за додаткових умов на розв'язки цих рівнянь.

Обернені задачі визначення правих частин ультрапараболічних рівнянь, які містять одну чи декілька невідомих функцій, досліджено у працях [3, 8, 9, 20]. Умови однозначної розв'язності обернених задач відшукання коефіцієнтів лінійних параболічних і гіперболічних рівнянь знайдені, зокрема, у працях [1, 2, 7, 11, 13], [17]–[19], [21]–[23]. Для їхнього визначення використано: методи теорії оптимального контролю [23], продовження за параметром, нерухомої точки, зрізки та регуляризації [2, 11], напівгруп [19], чисельні методи [21], властивості функції Ґріна [13, 17, 18], теорію операторних рівнянь [1, 7].

У цій праці розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення знаходження коефіцієнта, залежного від часу, біля невідомої функції, яка є розв'язком мішаної задачі для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння. За допомогою методу послідовних наближень визначено достатні умови існування

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 35K70, 35R30 та єдиності розв'язку задачі, який належить до просторів Соболєва. Прямі мішані задачі для нелінійних ультрапараболічних рівнянь було досліджено у працях [4, 5, 10, 16].

**2. Основні позначення та функціональні простори.** Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і $D \subset \mathbb{R}^l$ – обмежені області з межами $\partial\Omega \in C^2$ і $\partial D \in C^1$; $T \in (0,\infty)$, $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0,T)$, $G = \Omega \times D$, $Q_\tau = \Omega \times D \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$, $n, l \in \mathbb{N}$, $G_\xi = \{(x,y,t) : (x,y) \in G,\ t = \xi\}$, $\xi \in [0,T]$.

Використовуватимемо такі простори:

$L^\infty(Q_T) := \{w : w$ — вимірна та існує така стала $C$, що $|w(x,y,t)| \le C$ майже всюди на $Q_T\}$, $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C : |w(x,y,t)| \le C$ майже всюди на $Q_T\}$;

$$L^2(G) := \left\{ w : w \text{ — вимірна, } \int\limits_G (w(x,y))^2\,dx\,dy < \infty \right\},$$

$$\|w; L^2(G)\| = \left( \int\limits_G (w(x,y))^2\,dx\,dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$L^2(Q_T) := \left\{ w : w \text{— вимірна, } \int\limits_{Q_T} (w(x,y,t))^2\,dx\,dy\,dt < \infty \right\},$$

$$\|w; L^2(Q_T)\| = \left( \int\limits_{Q_T} (w(x,y,t))^2\,dx\,dy\,dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$W^{1,2}(\cdot)$ — множина всіх розподілів $w$, які разом зі своїми похідними першого порядку за всіма змінними належать до простору $L^2(\cdot)$,

$$\|w; W^{1,2}(0,T)\| = \left( \int\limits_0^T \left((w(t))^2 + (w'(t))^2\right) dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{1,2}(G)\| = \left( \int\limits_G \left( (w(x,y))^2 + \sum_{i=1}^n (w_{x_i}(x,y))^2 + \sum_{j=1}^l (w_{y_j}(x,y))^2 \right) dx\,dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{1,2}(\Omega)\| = \left( \int\limits_\Omega \left( (w(x))^2 + \sum_{i=1}^n (w_{x_i}(x))^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{1,2}(Q_T)\| = \left( \int\limits_{Q_T} \left( (w(x,y,t))^2 + (w_t(x,y,t))^2 + \sum_{i=1}^n (w_{x_i}(x,y,t))^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^l (w_{y_j}(x,y,t))^2 \right) dx\,dy\,dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$C^k(O)$ — простір $k$–раз неперервно диференційовних функцій на $O$;
$C([0,T]; L^2(G))$ — простір неперервних функцій $([0,T] \to L^2(G))$;
$C^1(D; C^1(\overline{\Omega}))$ — простір неперервно-диференційовних функцій $(D \to C^1(\overline{\Omega}))$.

**3. Формулювання задачі.** В області $Q_T$ розглянемо задачу для рівняння

$$u_t+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j}+(c(t)+b(x,y))u+g(x,y,t,u)=f(x,y,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\quad (x,y)\in G, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T}=0,\qquad u|_{S_T^1}=0 \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$\int_G K(x,y)u(x,y,t)\,dx\,dy=E(t),\qquad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $u(x,y,t)$, $c(t)$ — невідомі функції, $S_T^1:=\left\{(x,y,t)\in S_T:\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)<0\right\}$, $\nu$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $S_T$.

Позначимо $S_T^2:=\left\{(x,y,t)\in S_T:\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)\ge 0\right\}$. Припустимо, що

**(S)** існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1\subset\partial D\subset\mathbb{R}^{l-1}$, що $S_T^1=\Omega\times\Gamma_1\times(0,T)$.

Нехай виконуються такі умови:

**(A)** $a_{ij}\in C([0,T];L^2(G))$, $i,j=1,\dots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j\ge a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, $a_0$ — додатна стала;

**(B)** $b\in L^\infty(G)$, $b(x,y)\ge b_0$ для майже всіх $(x,y)\in G$, $b_0$ – стала;

**(E)** $E\in W^{1,2}(0,T)$, $E(0)=\int\limits_G K(x,y)u_0(x,y)\,dx\,dy$;

**(F)** $f\in C([0,T];L^2(G))$;

**(G)** $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними $(x,y,t)$ в області $Q_T$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^1$ і неперервна за $\xi$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$, причому така, що існує додатна стала $g^0$, що $|g(x,y,t,\xi)-g(x,y,t,\eta)|\le g^0|\xi-\eta|$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх $\xi$, $\eta\in\mathbb{R}^1$;

**(K)** $K\in C^1(D;C^1(\overline{\Omega}))$, $K\big|_{\partial\Omega\times D}=0$, $K|_{\Omega\times\Gamma_2}=0$, де $\Gamma_2=\partial D\setminus\Gamma_1$;

**(L)** $\lambda_i\in C(\overline{Q}_T)$, $\lambda_{iy_i}\in L^\infty(Q_T)$, $i=1,\dots,l$;

**(U)** $u_0,u_{0,y_j},u_{0,x_i}\in L^2(G)$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,l$, $u_0|_{\partial\Omega\times D}=0$, $u_0|_{\Omega\times\Gamma_1}=0$.

**4. Існування та єдиність розв'язку прямої задачі.** Припустимо спочатку, що в рівнянні (1) $c(t)=c^*(t)$, де $c^*\in C([0,T])$, – відома функція; розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з початковою умовою (2) та крайовими умовами (3).

Запровадимо такі простори:

$V_1(Q_T):=\left\{w:\ w,\ w_{x_i}\in L^2(Q_T),\ i=1,\dots,n,\ w\big|_{\Sigma_T}=0\right\}$;

$V_2(G):=\left\{w:\ w\in W^{1,2}(G),\ w\big|_{\partial\Omega\times D}=0, w\big|_{\Omega\times\Gamma_1}=0\right\}$;

$V_3(Q_T):=\{w:\ w\in W^{1,2}(Q_T), w|_{S_T^1}=0, w\big|_{\Sigma_T}=0\}$;

$$V_4(Q_T) := \left\{w :\ w \in V_3(Q_T), w_{x_i x_j} \in L^2(Q_T),\ i,j = 1,\dots,n\right\}.$$

**Теорема 1.** *Нехай справджуються умови* (A), (B), (G), (L), (F), (U), (S) *та:*

1) $a_{ijx_i}, a_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $b_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_k} \in L^2(Q_T)$, $c^* \in C([0,T])$, $i,j = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,l$;
2) *існує така стала* $g^1$, *що для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$ *та всіх* $\xi \in \mathbb{R}^1$ *виконуються нерівності* $|g_{y_i}(x,y,t,\xi)| \le g^1$, $i = 1,\dots,l$; $g(x,y,t,0)|_{S_T^1} = 0$;
3) $f|_{S_T^1} = 0$.

*Тоді існує єдина функція* $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, *яка задовольняє умову* (2) *та рівність*

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_T} \Bigg(u_t^* v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i}^* v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^* v_{x_i} + \\ &+ (c^*(t) + b(x,y)) u^* v + g(x,y,t,u^*) v\Bigg)\, dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_T} f(x,y,t) v\, dx\, dy\, dt\end{aligned} \tag{5}$$

*для всіх функцій* $v \in V_1(Q_T)$. *Крім того,* $u^* \in V_4(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ *та* $u^*$ *є розв'язком майже всюди задачі* (1)—(3).

Доведення теореми проводимо за схемами доведення теорем 1, 2 і леми 1 із [4] та теореми 3 і леми 1 із [8].

*Зауваження* 1. Для похідних функції $u^*$ виконуються оцінки

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} (u_{y_i}^*)^2\, dx\, dy\, dt \le M, \qquad \int\limits_{Q_T} (u_t^*)^2\, dx\, dy\, dt \le M,$$

де стала $M$ залежить від функції $u_0$ та коефіцієнтів і правої частини рівняння (1).

## 5. Існування та єдиність розв'язку оберненої задачі.

**Означення 1.** Пару функцій $(u(x,y,t), c(t))$ назвемо *розв'язком задачі* (1)—(4), якщо $u \in V_4(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $c \in ([0,T])$, причому ці функції для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ задовольняють рівняння (1) і, крім того, функція $u(x,y,t)$ задовольняє умови (2) та (4).

Позначимо

$$A(t) := -E'(t) + \int\limits_{G} K(x,y) f(x,y,t)\, dx\, dy,$$

$$B(x,y,t) := \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t) K(x,y))_{y_i} + \sum_{i,j=1}^{l} (K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t))_{x_i} - K(x,y) b(x,y).$$

Із (1) та (4) випливає, що розв'язок задачі (1) – (4) задовольняє таку рівність:

$$E(t)c(t) = A(t) + \int\limits_{G_t} B(x,y,t) u\, dx\, dy - \int\limits_{G_t} K(x,y) g(x,y,t,u)\, dx\, dy,\ t \in [0,T]. \tag{6}$$

**Лема 1.** *Нехай виконуються умови теореми 1 та умови* (K), (E). *Для того, щоб пара функцій* $(u(x,y,t),c(t))$, *де* $u \in V_4(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, $c \in C([0,T])$, *була розв'язком задачі* (1)–(4) *необхідно і достатньо, щоб ця пара задовольняла рівняння* (1) *для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$, *а також* (2) *і* (6).

*Доведення. Необхідність.* Нехай $(u^*(x,y,t),c^*(t))$ є розв'язком задачі (1)–(4). Продиференціюємо умову (4) один раз по $t$

$$\int\limits_G K(x,y)u_t^*(x,y,t)\,dx\,dy = E'(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{7}$$

На підставі (1) і (7) отримуємо

$$\int\limits_{G_t} K(x,y)\Big(f(x,y,t) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i}^* + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^*)_{x_j} -$$

$$-b(x,y)u^* - c^*(t)u^* - g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Проінтегруємо частинами в (8), врахувавши умову (K)

$$-E(t)c^*(t) + \int\limits_{G_t} \Big(K(x,y)f(x,y,t) +$$

$$+B(x,y,t)u^* - K(x,y)g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

З (9) випливає, що $(u^*(x,y,t),c^*(t))$ задовольняє рівність (6). Крім того, $u^*$ задовольняє умову (2), а також рівняння (1) при $c(t) = c^*(t)$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$.

*Достатність.* Нехай $c^* \in C([0,T])$, $u^* \in V_4(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$ і для них виконуються (2), (6) та (1) для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$. Тоді $u^*$ є розв'язком майже всюди задачі (1)–(3) з функцією $c^*$ замість $c$ в рівнянні (1).

Приймемо $E^*(t) = \int\limits_{G_t} K(x,y)u^*(x,y,t)\,dx\,dy$, $t \in [0,T]$. Так само, як у доведенні необхідності, знаходимо, що

$$E^*(t)c^*(t) = -(E^*(t))' + \int\limits_{G_t} \Big(K(x,y)f(x,y,t) + B(x,y,t)u^* -$$

$$-K(x,y)g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy, \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

З іншого боку, $c^*(t)$ та $u^*(x,y,t)$ задовольняють рівність

$$E(t)c^*(t) = -(E(t))' + \int\limits_{G_t} \Big(K(x,y)f(x,y,t) + B(x,y,t)u^* -$$

$$-K(x,y)g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Із (10), (11) випливає

$$(E^*(t) - E(t))c^*(t) = -(E^*(t) - E(t))', \; t \in [0,T]. \tag{12}$$

Проінтегруємо (12) і врахувавши, що $E^*(0) = E(0) = \int\limits_G K(x,y)u_0(x,y)\,dx\,dy$, отримаємо $E^*(t) = E(t)$, $t \in [0,T]$, а отже, для $u^*(x,y,t)$ виконується умова перевизначення (4). Лему доведено. □

Позначимо $\lambda^1 = \max\limits_i \operatorname*{esssup}\limits_{Q_T} |\lambda_{iy_i}(x,y,t)|$;

$\gamma_0 = \gamma_0(\Omega)$ – коефіцієнт із нерівності Фрідріхса

$$\int\limits_\Omega |v(x)|^2\,dx \le \gamma_0 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |v_{x_i}(x)|^2\,dx, \tag{13}$$

яка виконується для функцій $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$;

$$\begin{aligned} C_1 \; &:= \; \frac{3}{\min\limits_{[0;T]}(E(t))^2} \max_{[0;T]} \Bigg( (A(t))^2 + 2\int\limits_G (g(x,y,t,0))^2\,dx\,dy + \\ &+ \Bigg( \int\limits_G (B(x,y,t))^2\,dx\,dy + 2\int\limits_G (K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy \Bigg) \int\limits_G |u_0(x,y)|^2\,dx\,dy \Bigg); \\ C_2 \; &:= \; \frac{3}{\min\limits_{[0;T]}(E(t))^2} \max_{[0;T]} \Bigg( \int\limits_G (B(x,y,t))^2\,dx\,dy + 2\int\limits_G (K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy \Bigg) \times \\ &\times \int\limits_{Q_T} \big( (f(x,y,t))^2 + (g(x,y,t,0))^2 \big)\,dx\,dy\,dt, \\ C_3 \; &:= \; C_1 - \frac{a_0}{\gamma_0} + \frac{\lambda^1 l}{2} - b_0 + g^0. \end{aligned}$$

Припустимо, що виконується умова

$$\text{існує таке } \delta_1 > 0, \text{ що } \; C_3 + \frac{C_2}{\delta_1} + \delta_1 \le 0. \tag{14}$$

Зауважимо, що умова (14) виконується, зокрема, коли $C_3 < 0$, $\;4C_2 < C_3^2$.

Позначимо:

$\delta > 0$ – найбільше з чисел $\delta_1$, для яких виконується (14);

$$\begin{aligned} M_1 \; &:= \; \frac{1}{\delta} \int\limits_{Q_T} \big( (f(x,y,t))^2 + (g(x,y,t,0))^2 \big)\,dx\,dy\,dt + \int\limits_G (u_0(x,y))^2\,dx\,dy; \\ M_2 \; &:= \; C_1 + \frac{C_2}{\delta} = \frac{3}{\min\limits_{[0;T]}(E(t))^2} \max_{[0;T]} \Bigg( (A(t))^2 + 2\int\limits_G (g(x,y,t,0))^2\,dx\,dy + \\ &+ \Bigg( \int\limits_G (B(x,y,t))^2\,dx\,dy + 2\int\limits_G (K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy \Bigg) M_1 \Bigg); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_3 &:= \frac{2}{\min\limits_{[0,T]}(E(t))^2}\int\limits_{Q_T}(B(x,y,t))^2\,dx\,dy\,dt+(g^0)^2T\int\limits_G(K(x,y))^2\,dx\,dy;\\
M_4 &:= \min\left\{T;\frac{1}{-2C_3-\frac{2C_2}{\delta}-\delta}\right\}\frac{M_1}{\delta};\\
M_5 &:= M_3M_4;\\
M_6 &:= \frac{2}{\min\limits_{[0,T]}(E(t))^2}\sup_{[0,T]}\int\limits_G(B(x,y,t))^2\,dx\,dy+g^0\int\limits_G(K(x,y))^2\,dx\,dy;\\
M_7 &:= \sqrt{\frac{M_6M_1}{\delta}}.
\end{aligned}
$$

**Теорема 2.** *Нехай* $E(t)\neq 0$ *для всіх* $t\in[0,T]$, *виконуються умови* (A), (B), (L), (U), (G), (E), (K), (F), (S), (14) *і* $a_{ijx_i}\in L^\infty(Q_T)$, $b_{y_k}\in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_k}\in L^2(Q_T)$, $i,j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,l$, $f|_{S_T^1}=0$ *та* $M_5<1$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1)–(4).

*Доведення.* Використаємо метод послідовних наближень. Побудуємо наближення $(u^m(x,y,t),c^m(t))$ розв'язку задачі (1)–(4), де функції $c^m(t)$, $m\in\mathbb{N}$, визначаються так, що вони задовольняють рівності

$$c^1(t):=0,$$

$$c^m(t)=\frac{1}{E(t)}\left(A(t)+\int\limits_{G_t}\left(B(x,y,t)u^{m-1}-K(x,y)g(x,y,t,u^{m-1})\right)dx\,dy\right),$$

$$t\in[0;T],\ m\geq 2, \tag{15}$$

а $u^m$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big(u_t^mv+\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}^mv+\sum_{i,j=1}^na_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^mv_{x_j}+(c^m(t)+b(x,y))u^mv+$$

$$+g(x,y,t,u^m)v\Big)\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)v\,dx\,dy\,dt,\quad m\geq 1,\ \tau\in(0;T], \tag{16}$$

$$u^m(x,y,0)=u_0(x,y),\quad (x,y)\in G, \tag{17}$$

причому (16) виконується для всіх $v\in V_1(Q_T)$.

На підставі теореми 1 для кожного $m\in\mathbb{N}$ існує єдина функція $u^m\in V_3(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, для якої виконуються (16), (17).

Доведемо, що $c^m(t)\geq -M_2$ для всіх $m\in\mathbb{N}$, $t\in[0;T]$. Нехай $c^m(t)\geq c_{0m}$ для всіх $t\in[0,T]$, де $c_{0m}\in\mathbb{R}$. Знайдемо оцінку для $\int\limits_G|u^m(x,y,\tau)|^2\,dx\,dy$. Виберемо в (16) $v=u^m$

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big(u_t^mu^m+\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}^mu^m+\sum_{i,j=1}^na_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^mu_{x_j}^m+(c^m(t)+b(x,y))(u^m)^2+$$

$$+g(x,y,t,u^m)u^m\Big)\,dx\,dy\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f(x,y,t)u^m\,dx\,dy\,dt,\ \tau\in(0;T],\quad m\ge 1. \tag{18}$$

Врахувавши умови (A), (B), (L), (U), (G), (F), з (18) отримуємо нерівність

$$\int\limits_G (u^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy+\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)(u^m)^2\cos(\nu,y_i)\,d\sigma+2a_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u^m_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}(-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta)(u^m)^2\,dx\,dy\,dt\le\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_\tau}\Big((f(x,y,t))^2+$$
$$+(g(x,y,t,0))^2\Big)\,dx\,dy\,dt+\int\limits_G(u_0(x,y))^2\,dx\,dy,\ \tau\in(0;T],\quad m\ge 1. \tag{19}$$

Застосувавши до третього доданку з (19) нерівність (13), отримуємо

$$\int\limits_G (u^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy+\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)(u^m)^2\cos(\nu,y_i)\,d\sigma+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(\frac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta\right)(u^m)^2\,dx\,dy\,dt\le\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_\tau}\Big((f(x,y,t))^2+$$
$$+(g(x,y,t,0))^2\Big)\,dx\,dy\,dt+\int\limits_G(u_0(x,y))^2\,dx\,dy,\ \tau\in(0;T],\quad m\ge 1. \tag{20}$$

За умови, що $\dfrac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta\ge 0$, з (20) одержуємо оцінку

$$\int\limits_G (u^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy\le M_1,\ \tau\in(0;T],\qquad m\ge 1. \tag{21}$$

Піднісши обидві частини рівності (15) до квадрата та використавши нерівність Гельдера, отримуємо оцінку

$$(c^m(t))^2\le\frac{3}{(E(t))^2}\Bigg((A(t))^2+\bigg(\int\limits_G(B(x,y,t))^2\,dx\,dy+2\int\limits_G(K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy\bigg)\times$$
$$\times\int\limits_G(u^{m-1})^2\,dx\,dy+2\int\limits_G(g(x,y,t,0))^2\,dx\,dy\Bigg),\qquad t\in[0;T],\ m\ge 2. \tag{22}$$

З (21) і (22) випливає, що $|c^m(t)|\le M_2$, $t\in[0;T]$, $m\in\mathbb{N}$. Зауважимо, що якщо замість $c_{0m}$ вибрати $-M_2$, то врахувавши умову (14), отримуємо

$$\frac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta=\frac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l-2M_2+2b_0-2g^0-2\delta=-2C_3-\frac{2C_2}{\delta}-\delta\ge 0.$$

Отже, для всіх $m\in\mathbb{N}$

$$c^m(t)\ge -M_2,$$

і можна обрати $c_{0m}:=-M_2$ для всіх $m\in\mathbb{N}$.

Доведемо, що послідовність $\{(u^m(x,y,t), c^m(t))\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до розв'язку задачі (1)–(4). Позначимо

$$z^m := z^m(x,y,t) = u^m(x,y,t) - u^{m-1}(x,y,t),$$
$$r^m(t) := c^m(t) - c^{m-1}(t), \qquad m \geq 2.$$

З (15) випливають рівності

$$r^m(t) = \frac{1}{E(t)} \int\limits_G \Bigg( B(x,y,t) z^{m-1} - K(x,y) \big( (g(x,y,t,u^{m-1}) - g(x,y,t,u^{m-2})) \big) \Bigg) dx\,dy,$$

$$t \in [0,T],\ m \geq 2. \tag{23}$$

Піднісши обидві частини цих рівностей до квадрата, проінтегрувавши за змінною $t$ та врахувавши, що на підставі умови (G)

$$\int\limits_{Q_\tau} \big(g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1})\big) z^m\,dx\,dy\,dt \leq g^0 \int\limits_{Q_\tau} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt,\ \ \tau \in (0;T],\ \ m \geq 2,$$

отримаємо

$$\int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt \leq M_3 \int\limits_{Q_T} (z^{m-1})^2\,dx\,dy\,dt, \qquad m \geq 2. \tag{24}$$

Оскільки з (17) випливає, що $z^m(x,y,0) = 0$, $(x,y) \in G$, $m \geq 2$, то з (16), знаходимо, що для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$ справджуються рівності

$$\frac{1}{2} \int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg( \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) z^m_{y_i} z^m + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) z^m_{x_i} z^m_{x_j} +$$
$$+ b(x,y)(z^m)^2 + (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1})) z^m +$$
$$+ (c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1}) z^m \Bigg) dx\,dy\,dt = 0, \qquad \tau \in (0;T],\ m \geq 2. \tag{25}$$

Зауважимо, що

$$(c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1}) z^m = c^m(t)(z^m)^2 + r^m(t) u^{m-1} z^m,$$

а тому

$$\int\limits_{Q_\tau} (c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1}) z^m\,dx\,dy\,dt \geq \left(-M_2 - \frac{\delta}{2}\right) \int\limits_{Q_\tau} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt -$$
$$- \frac{1}{2\delta} \int\limits_0^\tau (r^m(t))^2 \left( \int\limits_{G_t} (u^{m-1})^2\,dx\,dy \right) dt \geq \left(-M_2 - \frac{\delta}{2}\right) \int\limits_{Q_\tau} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt -$$
$$- \frac{M_1}{2\delta} \int\limits_0^\tau (r^m(t))^2\,dt, \qquad \tau \in (0,T],\ m \geq 2. \tag{26}$$

Тоді, враховуючи умови (A), (B), (L), (U), (G), (F) та (26), з (25) отримуємо нерівність

$$\int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy + \int\limits_{S^2_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)(z^m)^2 \cos(\nu,y_i)\,d\sigma +$$

$$+2a_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} (z^m_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{Q_\tau} \big(2b_0 - \lambda^1 l - 2g^0 - 2M_2 - \delta\big)(z^m)^2\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \frac{M_1}{\delta} \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt, \qquad \tau \in (0;T],\ m \ge 2. \tag{27}$$

Застосувавши до третього доданка з (27) нерівність (13), отримаємо оцінку

$$\int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy + \int\limits_{S^2_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)(z^m)^2 \cos(\nu,y_i)\,d\sigma + \int\limits_{Q_\tau} \Big(2b_0 - l\lambda^1 - 2g^0 +$$

$$+\frac{2a_0}{\gamma_0} - 2M_2 - \delta\Big)(z^m)^2\,dx\,dy\,dt \le \frac{M_1}{\delta} \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt,\ \tau \in (0;T],\ m \ge 2. \tag{28}$$

Оскільки виконується умова (14), то з (28) знаходимо оцінки

$$\int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy \le \frac{M_1}{\delta} \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt, \qquad \tau \in (0;T],\ m \ge 2 \tag{29}$$

та

$$\int\limits_{Q_T} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt \le M_4 \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt, \qquad m \ge 2. \tag{30}$$

З (24) та (30) випливає, що

$$\int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt \le M_5 \int\limits_0^T (r^{m-1}(t))^2\,dt \le (M_5)^{m-2} \int\limits_0^T (r^2(t))^2\,dt, \qquad m \ge 2. \tag{31}$$

Із (23) легко отримати оцінку

$$(r^m(t))^2 \le M_6 \int\limits_G (z^{m-1}(x,y,t))^2\,dx\,dy, \qquad t \in [0,T],\, m \ge 2. \tag{32}$$

Врахувавши (29), з (32) знайдемо

$$|r^m(t)| \le M_7 \left( \int\limits_0^T (r^{m-1}(t))^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad t \in [0,T],\, m \ge 2. \tag{33}$$

Використавши (31), (33) та умову $M_5 < 1$, отримаємо, що для всіх $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, справджується оцінка

$$|c^{m+k}(t) - c^m(t)| \leq \sum_{i=m+1}^{m+k} |r^i(t)| \leq M_7 \sum_{i=m+1}^{m+k} \left( \int_0^T (r^{i-1}(t))^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{m+k} M_7 (M_5)^{\frac{i-3}{2}} \left( \int_0^T (r^2(t))^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M_7 \frac{(M_5)^{\frac{m-2}{2}}(1-(M_5)^{\frac{k}{2}})}{1-(M_5)^{\frac{1}{2}}} \left( \int_0^T (r^2(t))^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M_7 \frac{(M_5)^{\frac{m-2}{2}}}{1-(M_5)^{\frac{1}{2}}} \left( \int_0^T (r^2(t))^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m \geq 3. \tag{34}$$

Із (34) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $m_0$, що для всіх $k$, $m \in \mathbb{N}$, $m > m_0$, виконуються нерівності $\|c^{m+k}(t) - c^m(t); C([0,T])\| \leq \varepsilon$. Отже, послідовність $\{c^m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в $C([0,T])$.

Тоді з (30) та (27) випливає, що $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в $L^2(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ і $\{u^m_{x_i}\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в $L^2(Q_T)$, а тому при $m \to \infty$

$$\begin{gathered} u^m \to u \text{ сильно в } L^2(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G)), \\ u^m_{x_i} \to u_{x_i} \text{ сильно в } L^2(Q_T),\ i = 1, \ldots, n, \\ c^m \to c \text{ сильно в } C([0,T]). \end{gathered} \tag{35}$$

Із зауваження 1 випливає, що

$$\int_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} (u^m_{y_i})^2\, dx\, dy\, dt \leq M, \qquad \int_{Q_T} (u^m_t)^2\, dx\, dy\, dt \leq M, \tag{36}$$

а оскільки $|c^m| \leq M_2$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, то стала $M$ не залежить від $m$ і оцінки (36) виконуються для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому з (36) випливають такі збіжності при $m \to \infty$:

$$\begin{gathered} u^m_{y_i} \to u_{y_i} \text{ слабко в } L^2(Q_T),\ i = 1, \ldots, l, \\ u^m_t \to u_t \text{ слабко в } L^2(Q_T). \end{gathered} \tag{37}$$

Врахувавши (35), (37), з (16) та (15) отримаємо, що пара $(u(x,y,t), c(t))$ задовольняє рівність (6) та

$$\begin{gathered} \int_{Q_\tau} \Big( u_t v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} v_{x_j} + (c(t) + b(x,y)) u v + \\ + g(x,y,t,u) v \Big)\, dx\, dy\, dt = \int_{Q_\tau} f(x,y,t) v\, dx\, dy\, dt, \quad \tau \in (0;T], \end{gathered} \tag{38}$$

для всіх $v \in V_1(Q_T)$. Із (38) випливає, що

$$\int_{\Omega} \Big( u_t w + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} w + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} w_{x_j} + (c(t) + b(x,y)) u w +$$

$$+g(x,y,t,u)w\Big)\,dx=\int\limits_{\Omega} f(x,y,t)w\,dx \tag{39}$$

для майже всіх $(y,t)\in D\times(0;T)$ та для всіх $w\in W_0^{1,2}(\Omega)$. З (39) отримуємо, що $u$ для майже всіх $(y,t)\in D\times(0;T)$ є узагальненим розв'язком задачі Діріхле для еліптичного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}\right)_{x_j}=F(x,y,t),\qquad x\in\Omega, \tag{40}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{41}$$

де $F(x,y,t)=f(x,y,t)-u_t-\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-(c(t)+b(x,y))u-g(x,y,t,u)$. Оскільки виконується умова (3) та $F(\cdot,y,t)\in L^2(\Omega)$ для майже всіх $(y,t)\in D\times(0;T)$, то, згідно з теоремою 7.3 [6, с. 130], існує єдиний узагальнений розв'язок $u$ задачі (40) – (41), причому $u_{x_ix_j}(\cdot,y,t)\in L^2(\Omega)$, тому $u(\cdot,y,t)\in W_0^{2,2}(\Omega)$ для майже всіх $(y,t)\in D\times(0;T)$. Отже, $u\in V_4(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, пара $(u(x,y,t),c(t))$ задовольняє рівняння (1) для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$, тому на підставі леми 1 $(u(x,y,t),c(t))$ є розв'язком задачі (1) – (4) в області $Q_T$. Теорему доведено. ☐

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді задача* (1)—(4) *не може мати більше одного розв'язку.*

*Доведення.* Припустимо, що $\big(u^{(1)}(x,y,t),c^{(1)}(t)\big)$, $\big(u^{(2)}(x,y,t),c^{(2)}(t)\big)$ – два розв'язки задачі (1) – (4). Тоді пара функцій $(\tilde u(x,y,t),\tilde c(t))$, де

$$\tilde u(x,y,t)=u^{(1)}(x,y,t)-u^{(2)}(x,y,t),\qquad \tilde c(t)=c^{(1)}(t)-c^{(2)}(t),$$

задовольняє умову $\tilde u(x,y,0)\equiv 0$, рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg(\tilde u_t v+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\tilde u_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}v_{x_j}+b(x,y)\tilde u v+(c^{(1)}(t)u^{(1)}-$$

$$-c^{(2)}(t)u^{(2)})v+(g(x,y,t,u^{(1)})-g(x,y,t,u^{(2)}))v\Bigg)\,dx\,dy\,dt=0,\ \ \tau\in[0,T], \tag{42}$$

для всіх $v\in V_1(Q_T)$ та

$$\tilde c(t)=\frac{1}{E(t)}\int\limits_{G_t}\Big(B(x,y,t)\tilde u+K(x,y)(g(x,y,t,u^{(1)})-g(x,y,t,u^{(1)}))\Big),\ \ t\in[0,T]. \tag{43}$$

Вибравши в (42) $v=\tilde u$, матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg(\tilde u_t\tilde u+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\tilde u_{y_i}\tilde u+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}\tilde u_{x_j}+(c^{(1)}(t)u^{(1)}-c^{(2)}(t)u^{(2)})\tilde u+$$

$$+b(x,y)(\tilde u)^2+(g(x,y,t,u^{(1)})-g(x,y,t,u^{(2)}))\tilde u\Bigg)\,dx\,dy\,dt=0,\ \ \tau\in(0;T].$$

Звідси, аналогічними перетвореннями, як з (25) було отримано (30), знаходимо оцінку

$$\int\limits_{Q_T} (\tilde{u})^2\,dx\,dy\,dt \le M_4 \int\limits_0^T (\tilde{c}(t))^2\,dt. \tag{44}$$

З (43) легко отримати нерівність

$$\int\limits_0^T (\tilde{c}(t))^2\,dt \le M_3 \int\limits_{Q_T} (\tilde{u})^2\,dx\,dy\,dt,$$

а врахувавши оцінку (44), знайдемо

$$(1 - M_5)\int\limits_0^T (\tilde{c}(t))^2\,dt \le 0.$$

Оскільки $M_5 < 1$, то $\tilde{c}(t) \equiv 0$, а тому $c^{(1)}(t) \equiv c^{(2)}(t)$. Тоді з (44) випливає: $\int\limits_{Q_T} (\tilde{u})^2\,dx\,dy\,dt \le 0$, а тому $u^{(1)} = u^{(2)}$ в $Q_T$. Теорему доведено. □

## Список використаної літератури

1. В. Л. Камынин, *Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения*, Матем. заметки **94** (2013), no. 2, 207–217.
2. А. И. Кожанов, *Задача об определении коэффициентов при младших членах в слабо связанной параболической системе*, Мат. заметки ЯГУ **7** (2000), no. 2, 49–61.
3. Ю. А. Кошелева, *Ультрапараболические уравнения с неизвестной правой частью*, Мат. заметки ЯГУ **19** (2012), no. 2, 73–93.
4. С. П. Лавренюк, Н. П. Процах, *Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією*, Укр. мат. журн. **58** (2006), no. 9, 1192–1210.
5. С. П. Лавренюк, Н. П. Процах, *Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області*, Укр. мат. журн. **54** (2002), no. 8, 1053–1066.
6. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва, 1973.
7. А. И. Прилепко, А. Б. Костин, *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении*, Сиб. мат. журн. **34** (1993), no. 5, 147–162.
8. Н. П. Процах, *Обернена задача для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з трьома невідомими функціями різних аргументів у правій частині*, Нелінійні коливання **18** (2015), no. 2, 95–114.
9. Н. П. Процах, *Обернена задача для ультрапараболічного рівняння з невідомою функцією просторової змінної в правій частині*, Мат. методи та фіз.-мех. поля **56** (2013), no. 2, 20–36.
10. Н. П. Процах, Б. И. Пташник, *Смешанная задача для нелинейного ультрапараболического уравнения с интегральным слагаемым*, Математический журнал **12** (2012), no. 4, 95–114.

11. Р. Р. Сафиуллова, *Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени*, Вестник ЮУрГУ, Сер. Мат. моделир. и програм. **6** (2013), no. 4, 73–86.
12. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, Birkhäuser–Springer, Basel, 2004.
13. M. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, Math. Studies, Monograph Ser., VNTL Publ., Lviv, 2003.
14. A. N. Kolmogorov, *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*, Ann. Math. **35** (1934), no. 1, 116–117.
15. E. Lanconelli, A. Pascucci, and S. Polidoro, *Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance*, Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honour of Prof. O. A. Ladyzhenskaya. Kluwer Acad. Publ., New York, Int. Math. Ser., **2**, 2002, pp. 243–265.
16. S. Lavrenyuk and N. Protsakh, *Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain*, Tatra Mt. Math. Publ. **38** (2007), no. 4 131–146.
17. D. Lesnic and M. Ivanchov, *Determination of the time-dependent perfusion coefficient in the bio-heat equation*, Appl. Math. Lett. **39** (2015), 96–100.
18. H. P. Lopushanska, *Determination of a minor coefficient in a time fractional diffusion equation*, Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 57–66.
19. E. Ozbilge and A. Demir, *Identification of the unknown diffusion coefficient in a linear parabolic equation via semigroup approach*, Adv. Difference Equ. **2014** (2014), no. 47, 1–8.
20. N. Protsakh, *Inverse problem for semilinear ultraparabolic equation of higher order*, Math. Bohem. **140** (2015), no. 4, 335–404.
21. P. N. Vabishchevich and V. I. Vasil'ev, *Numerical solving the identification problem for the lower coefficient of parabolic equation*, arXiv: 1304.5923v1.
22. X. Wu and G. Wei, *Uniqueness for coefficient identification in one-dimensional parabolic equations*, Electron. J. Differ. Equ. **2017** (2017), no. 7, 1–7.
23. L. Yang, J.-N. Yu, and Z.-C. Deng, *An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation*, Appl. Math. Modelling **32** (2008), no. 10, 1984–1995.

*Стаття: надійшла до редколегії 06.04.2017*
*доопрацьована 15.05.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# INVERSE PROBLEM OF DETERMINING OF MINOR COEFFICIENT FOR SEMILINEAR ULTRAPARABOLIC EQUATION

**Nataliya PROTSAKH**

*National Forestry Engineering University of Ukraine*
*103, Generala Chuprynky Str., 79057, Lviv, Ukraine*
*e-mail: protsakh@ukr.net*

We consider the inverse problem of determining of the time depended coefficient near the unknown function that is a solution for the initial-boundary value problem for semilinear ultraparabolic equation. Conditions of the existence and the uniqueness of solution from Sobolev spaces for the problem are obtained.

*Key words:* ultraparabolic equation, inverse problem, integral overdetermination condition, solution almost everywhere.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 179–188*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 179–188*

УДК 517.956.4; 517.977.5

# SPECTRAL ANALYSIS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH RETARDED ARGUMENT

**Erdoğan ŞEN[1], Azad BAYRAMOV[2]**

[1]*Department of Mathematics, Namik Kemal University,*
*59030, Tekirdag, Turkey*
*e-mail: erdogan.math@gmail.com*
[2]*Azerbaijan State Pedagogical University,*
*1000, Baku, Azerbaijan*
*e-mail: azadbay@gmail.com*

In this work we find asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville type problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary conditions and with discontinuous weight function and also we obtain bounds for the distance between eigenvalues. We extend and generalize some approaches and results of the [S. B. Norkin, Differential equations of the second order with retarded argument, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 31, AMS, Providence, RI (1972)].

*Key words:* differential equation with retarded argument, eigenparameter, transmission conditions, asymptotics of eigenvalues, bounds for the distance between eigenvalues.

## 1. Introduction.

Some discontinuous boundary value problems with retarded argument and some classic boundary value problems have been investigated in [1-18]. Norkin in [2] considered the equation

$$x''(t) + \lambda x(t) + M(t)x(t - \Delta(t)) = 0$$

with boundary conditions

$$x(0) = x(\pi) = 0,$$

obtained asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions and found bounds for the distance between eigenvalues of this problem. In this paper we investigate the eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument with discontinuous weight function. Namely, we consider the boundary value problem for the differential equation

$$u''(x) + q(x)u(x - \Delta(x)) + \lambda r(x)\, u(x) = 0 \tag{1}$$

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 34L20, 35R10 on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ with spectral and physical parameter dependent boundary conditions

$$\sqrt{\lambda} r_+ u(0) + u'(0) = 0, \tag{2}$$

$$m\lambda u(\pi) + u'(\pi) = 0, \tag{3}$$

and with transmission conditions

$$\gamma^+ u(\tfrac{\pi}{2} - 0) - \delta^+ u(\tfrac{\pi}{2} + 0) = 0, \tag{4}$$

$$\gamma^- u'(\tfrac{\pi}{2} - 0) - \delta^- u'(\tfrac{\pi}{2} + 0) = 0 \tag{5}$$

where the real-valued function $q(x)$ is continuous in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ and has finite limits

$$q(\tfrac{\pi}{2} \pm 0) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} q(x),$$

the real valued function $\Delta(x) \geqslant 0$ is continuous in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ and has finite limits

$$\Delta(\tfrac{\pi}{2} \pm 0) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta(x),$$

$x - \Delta(x) \geqslant 0$ if $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; $x - \Delta(x) \geqslant \frac{\pi}{2}$, if $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $r(x) = r_+^2$ if $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ and $r(x) = r_-^2$ if $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $\lambda$ is a real positive spectral parameter; $m$ is a positive physical parameter; $r_+, r_-, d, \delta^+, \delta^-, \gamma^+, \gamma^- \neq 0$ are arbitrary real numbers.

We want to note that differential equations with retarded argument are of importance in the theory of automatic control and in the theory of self-oscillatory systems. For instance, in automatic control systems retardation is the time interval which the system requires to react to an input impulse ([2]).

Let $w_1(x, \lambda)$ be a solution of Eq. (1) on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ satisfying the initial conditions

$$w_1(0, \lambda) = r_+^{-1} \quad \text{and} \quad w_1'(0, \lambda) = -\sqrt{\lambda}. \tag{6}$$

Conditions (6) determine a unique solution of Eq. (1) on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ([2], p. 12).

After determining the above solution, we shall determine the solution $y_2(x, \lambda)$ of Eq. (1) on $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ by means of the solution $y_1(x, \lambda)$ using the initial conditions

$$w_2\left(\tfrac{\pi}{2}, \lambda\right) = \tfrac{\gamma^+}{\delta^+} w_1(\tfrac{\pi}{2}, \lambda) \qquad \text{and} \qquad w_2'\left(\tfrac{\pi}{2}, \lambda\right) = \tfrac{\gamma^-}{\delta^-} w_1'(\tfrac{\pi}{2}, \lambda). \tag{7}$$

The conditions (7) define a unique solution of Eq. (1) on $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Consequently, the function $w(x, \lambda)$ defined on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ by the equality

$$w(x, \lambda) = \begin{cases} w_1(x, \lambda), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ w_2(x, \lambda), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases}$$

is a solution of the Eq. (1) on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ which satisfies one of the boundary conditions and transmission conditions.

## 2. Eigenvalues and Eigenfunctions of the Problem (1)–(5).

**Lemma 1.** *Let* $w\left(x,\lambda\right)$ *be a solution of Eq.* (1)*. Then the following integral equations hold:*

$$w_1(x,\lambda)=\tfrac{\sqrt{2}}{r_+}\cos(r_+\sqrt{\lambda}x+\tfrac{\pi}{4})-\tfrac{r_+}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x q\left(\tau\right)\sin r_+\sqrt{\lambda}\left(x-\tau\right)w_1\left(\tau-\Delta\left(\tau\right),\lambda\right)d\tau, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} w_2(x,\lambda)&=\tfrac{\gamma^+}{\delta^+}w_1(\tfrac{\pi}{2},\lambda)\cos r_-\sqrt{\lambda}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)+\frac{\gamma^- w_1'(\frac{\pi}{2},\lambda)}{\sqrt{\lambda}r_-\delta^-}\sin r_-\sqrt{\lambda}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)-\\ &-\frac{r_-}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^x q\left(\tau\right)\sin r_-\sqrt{\lambda}\left(x-\tau\right)w_2\left(\tau-\Delta\left(\tau\right),\lambda\right)d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

*Proof.* To prove this lemma, it is enough to substitute $-\lambda^2 w_1(\tau,\lambda)-w_1''(\tau,\lambda)$ and $-\lambda^2 w_2(\tau,\lambda)-w_2''(\tau,\lambda)$ instead of $-q(\tau)w_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)$ and $-q(\tau)w_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)$ in the integrals in (9), (10) respectively and integrate by parts twice. ☐

**Theorem 1.** *Problem* (1)–(5) *can have only simple eigenvalues.*

*Proof.* The proof is similar to the proof of Theorem 1 in [8]. ☐

The function $w(x,\lambda)$ defined in Section 1 is a nontrivial solution of Eq. (1) satisfying conditions (2) and (4)-(5). Putting $w(x,\ \lambda)$ into (3), we get the characteristic equation

$$Z(\lambda)\equiv w'(\pi,\ \lambda)+m\lambda w(\pi,\ \lambda)=0. \tag{10}$$

By Theorem 1 the set of eigenvalues of boundary-value problem (1)-(5) coincides with the set of real roots of Eq. (10). Let

$$Q_1=r_+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|q(\tau)|d\tau,\ Q_2=r_-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|q(\tau)|\,d\tau.$$

**Lemma 2.** *Let* $\lambda\geqslant\max\{2Q_1,2Q_2\}$*. Then for the solutions* $w_1\left(x,\lambda\right)$ *and* $w_2\left(x,\lambda\right)$*of Eq.* (8) *and Eq.* (9) *the following inequalities hold*:

$$\left|w_1\left(x,\lambda\right)\right|\leqslant\text{const}.,\quad x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right], \tag{11}$$

$$\left|w_2\left(x,\lambda\right)\right|\leqslant\text{const}.,\quad x\in\left[\tfrac{\pi}{2},\pi\right]. \tag{12}$$

*Proof.* The proof is similar to the proof of Theorem 1 in [7]. ☐

From (8)-(10)

$$-\tfrac{\gamma^{+}r_{-}\sqrt{\lambda}}{\delta^{+}}\left[\tfrac{\sqrt{2}}{r_{+}}\cos\left(\tfrac{r^{+}\pi\sqrt{\lambda}}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)-\tfrac{r_{+}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{0}^{\pi/2}q(\tau)\sin\left(r_{+}\sqrt{\lambda}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tau\right)\right)w_{1}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right]\sin\tfrac{r_{-}\pi\sqrt{\lambda}}{2}$$

$$+\tfrac{\gamma^{-}}{\delta^{-}}\left[-\sqrt{2\lambda}\sin\left(\tfrac{r^{+}\pi\sqrt{\lambda}}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)-r_{+}^{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}q(\tau)\cos\left(r_{+}\sqrt{\lambda}(\tfrac{\pi}{2}-\tau)\right)w_{1}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right]\cos\tfrac{r_{-}\pi\sqrt{\lambda}}{2}$$

$$-r_{-}^{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}q(\tau)\cos\left(r_{-}\sqrt{\lambda}(\pi-\tau)\right)w_{2}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau-$$

$$+m\lambda\left\{\tfrac{\gamma^{+}}{\delta^{+}}\left[\tfrac{\sqrt{2}}{r_{+}}\cos\left(\tfrac{r^{+}\pi\sqrt{\lambda}}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)-\tfrac{r_{+}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{0}^{\pi/2}q(\tau)\sin\left(r_{+}\sqrt{\lambda}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tau\right)\right)w_{1}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right]\cos\tfrac{r_{-}\pi\sqrt{\lambda}}{2}\right.$$

$$+\tfrac{\gamma^{-}}{\delta^{-}\sqrt{\lambda}r_{-}}\left[-\sqrt{2\lambda}\sin\left(\tfrac{r^{+}\pi\sqrt{\lambda}}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)-r_{+}^{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}q(\tau)\cos\left(r_{+}\sqrt{\lambda}(\tfrac{\pi}{2}-\tau)\right)w_{1}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right]$$

(13)

$$\left.\times\sin\tfrac{r_{-}\pi\sqrt{\lambda}}{2}-\tfrac{r_{-}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}q(\tau)\sin\left(r_{-}\sqrt{\lambda}(\pi-\tau)\right)w_{2}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau\right\}=0.$$

Let $\lambda$ be sufficiently large and $\gamma^{+}\delta^{-}r_{-}=r_{+}\delta^{+}\gamma^{-}$. With the helps of (8), (9), (11) and (12), we have

$$\sqrt{\lambda}\cos\left(\tfrac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\left[r_{+}+r_{-}\right]+\tfrac{\pi}{4}\right)+O(1)=0.$$

So we have the following formula for the eigenvalues:

$$\sqrt{\lambda_{n}}=\frac{4n-3}{2\left[r_{+}+r_{-}\right]}+O\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

Using the same techniques in [2] we find the next asymptotic formulas for the eigenfunctions of problem (1)–(5):

$$u_{1n}=r_{+}^{-1}\left\{\cos\left(\tfrac{[4n-3]r_{-}^{2}r_{+}x}{2[r_{+}+r_{-}]}\right)-\sin\left(\tfrac{[4n-3]r_{-}^{2}r_{+}x}{2[r_{+}+r_{-}]}\right)\right\}+O\left(\tfrac{1}{n}\right),\quad x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right)$$

and

$$u_{2n}=\tfrac{r_{+}^{-1}\gamma^{+}}{\delta^{+}}\left\{\cos\left(\tfrac{[4n-3]r_{-}r_{+}^{2}x}{2[r_{+}+r_{-}]}+\tfrac{[4n-3][r_{+}+r_{-}]\pi}{16[r_{+}+r_{-}]}\right)\right.$$
$$\left.-\sin\left(\tfrac{[4n-3]r_{-}r_{+}^{2}x}{2[r_{+}+r_{-}]}+\tfrac{[4n-3][r_{+}+r_{-}]\pi}{16[r_{+}+r_{-}]}\right)\right\}+O\left(\tfrac{1}{n}\right),\quad x\in\left(\tfrac{\pi}{2},\pi\right].$$

Now let us assume that the following conditions hold: The derivatives $q'(x)$ and $\Delta''(x)$ exist and are bounded in $[0,\frac{\pi}{2})\bigcup(\frac{\pi}{2},\pi]$ and have finite limits $q'(\frac{\pi}{2}\pm 0)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}q'(x)$ and $\Delta''(\frac{\pi}{2}\pm 0)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}\Delta''(x)$, respectively; $\Delta'(x)\leqslant 1$ in $[0,\frac{\pi}{2})\bigcup(\frac{\pi}{2},\pi]$, $\Delta(0)=0$ and $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\Delta(x)=0$.

Under these additional conditions we have

$$w_1\left(\tau-\Delta\left(\tau\right),\lambda\right)=\tfrac{\sqrt{2}}{r_+}\cos\left(\tfrac{\pi+r_+4\sqrt{\lambda}(\tau-\Delta(\tau))}{4}\right)+O\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\tag{14}$$

$$w_2\left(\tau-\Delta\left(\tau\right),\lambda\right)=\tfrac{\sqrt{2}\gamma^+}{r_+\delta^+}\cos\left(\tfrac{\pi+\sqrt{\lambda}2\pi(r_+-r_-)+r_-4\sqrt{\lambda}(\tau-\Delta(\tau))}{4}\right)+O\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).\tag{15}$$

Let

$$R_1\left(x,\lambda,\Delta(\tau)\right)=\int\limits_0^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{r_+4\sqrt{\lambda}\Delta(\tau)-\pi}{4}\right)d\tau,$$

$$R_2(x,\lambda,\Delta(\tau))=\int\limits_0^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{r_+4\sqrt{\lambda}\Delta(\tau)-\pi}{4}\right)d\tau,$$

$$R_3\left(x,\lambda,\Delta(\tau)\right)=\int\limits_{\pi/2}^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{r_-4\sqrt{\lambda}\Delta(\tau)-\pi}{4}\right)d\tau,$$

$$R_4\left(x,\lambda,\Delta(\tau)\right)=\int\limits_{\pi/2}^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{r_-4\sqrt{\lambda}\Delta(\tau)-\pi}{4}\right)d\tau.$$

The following formulas

$$\left\{\begin{array}{l}\int\limits_0^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{r_+4\sqrt{\lambda}(2\tau-\Delta(\tau))+\pi}{4}\right)d\tau\\ \int\limits_0^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{r_+4\sqrt{\lambda}(2\tau-\Delta(\tau))+\pi}{4}\right)d\tau\\ \int\limits_{\pi/2}^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{r_-4\sqrt{\lambda}(2\tau-\Delta(\tau))+\pi}{4}\right)d\tau\\ \int\limits_{\pi/2}^x\tfrac{q(\tau)}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{r_-4\sqrt{\lambda}(2\tau-\Delta(\tau))+\pi}{4}\right)d\tau\end{array}\right.=O\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\tag{16}$$

can be proved by the similar method as in Lemma 3.3.3 in [2]. Putting formulas (14) and (15) in (13) and using (16) we obtain following equality:

$$\cos\left(\tfrac{\sqrt{\lambda}\pi(r_++r_-)}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi(r_++r_-)}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\lambda}}\left(\tfrac{\delta^+\gamma^-+m\delta^-\gamma^+[r_+R_2(x,\lambda,\Delta(\tau))+r_-R_4(x,\lambda,\Delta(\tau))]}{\delta^+\delta^-}\right)+O\left(\tfrac{1}{\lambda}\right).$$

Now replacing $\sqrt{\lambda}$ by $\sqrt{\lambda_n}=\dfrac{4n-3}{2\left[r_++r_-\right]}+\delta_n$ we get

$$\delta_n=\frac{4\left[\delta^+\gamma^-+m\delta^-\gamma^+\right]\left[r_+R_2\left(\frac{\pi}{2},\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta\left(\tau\right)\right)+r_-R_4\left(\pi,\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta\left(\tau\right)\right)\right]}{\left(4n-3\right)\pi\delta^+\delta^-}+O\left(\tfrac{1}{n^2}\right).$$

Thus, we now may obtain a sharper asymptotic formula for the eigenfunctions. Putting (14) in (8) and replacing $\sqrt{\lambda}$ by $\sqrt{\lambda_n}$ for $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ we have

$$u_{1n}(x) = \cos\left(\frac{r_-^2(8n-6)x+\pi(r_++r_-)}{4(r_++r_-)}\right)\left[\frac{(8n-6)+2\sqrt{2}r_+^2(r_++r_-)R_1\left(x,\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)}{r_+\sqrt{2}(4n-3)}\right]$$

$$-4\sqrt{2}\sin\left(\frac{r_-^2(8n-6)x+\pi(r_++r_-)}{4(r_++r_-)}\right)$$

$$\times\left(\frac{\delta^+\gamma^-+r_+\delta^-m\gamma^+R_2\left(\frac{\pi}{2},\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)+mr_-\gamma^+\delta^-R_4\left(\pi,\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)}{(4n-3)\pi r_+\delta^+\delta^-}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Putting (15) in (9) and replacing $\sqrt{\lambda}$ by $\sqrt{\lambda_n}$ for $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ we have

$$u_{2n}(x) = \frac{\gamma^+}{2\delta^+}\Bigg\{\Bigg[(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{r_-(4n-3)x}{2(r_++r_-)}\right)+\cos\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)\Bigg]$$

$$\times\left[\frac{(8n-6)+2\sqrt{2}r_+^2(r_++r_-)R_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)}{r_+\sqrt{2}(4n-3)}\right]+\Bigg[(-1)^n\cos\left(\frac{r_-(4n-3)x}{2(r_++r_-)}\right)$$

$$-\sin\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)\Bigg]\times\left[\frac{2r_+(r_++r_-)R_2\left(\frac{\pi}{2},\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)}{(4n-3)}\right]\Bigg\}$$

$$-\frac{\sqrt{2}\gamma^-}{2r_-\delta^-}\Bigg\{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{(4n-3)r_-^2r_+x}{2(r_++r_-)}\right)+\frac{4}{(4n-3)\pi}\Bigg[(-1)^n\cos\left(\frac{(4n-3)r_-^2r_+x}{2(r_++r_-)}\right)+$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)\Bigg]$$

$$\times\left[\frac{\gamma^-\delta^++\gamma^+\delta^-m\left[r_+R_2\left(\frac{\pi}{2},\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)\right)+r_-R_4\left(\pi,\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)\right)\right]}{\delta^+\delta^-}\right]$$

$$+\cos\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)\Bigg\}$$

$$+\frac{\gamma^-r_+^2(r_++r_-)}{r_-\delta^-(4n-3)}R_2\left(\frac{\pi}{2},\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)\Bigg\{(-1)^n\cos\left(\frac{r_-(4n-3)x}{2(r_++r_-)}\right)$$

$$-\sin\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)\Bigg\}$$

$$+\frac{2\gamma^-r_+^3(r_++r_-)R_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)}{\delta^-(4n-3)}$$

$$\times\Bigg\{(-1)^n\sin\left(\frac{r_-(4n-3)x}{2(r_++r_-)}\right)+\cos\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)\Bigg\}-$$

$$\frac{2\gamma^+r_-(r_++r_-)}{(4n-3)r_+\delta^+}\Bigg\{\sin\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)$$

$$\times R_4\left(x,\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)-R_3\left(x,\frac{4n-3}{2[r_++r_-]},\Delta(\tau)\right)$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi[(r_+-r_-)(4n-3)+(r_++r_-)]+(8n-6)r_-x}{4(r_++r_-)}\right)\Bigg\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

### 3. Bounds for the Distance Between Eigenvalues.

Let us define

$$\chi_0 = \begin{cases} \min\left\{\beta_0^2 Q_\pi^2, \gamma_0^2 Q_0^2 \pi^2\right\}, \\ \gamma_0^2 Q_\pi^2, \text{ if } x\left|q(x)\right| \geqslant \displaystyle\int_0^x q(t)dt, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

where $\beta_0$ is the unique real root of the equation $\beta = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)e^{1/\beta}$; $\gamma_0$ is the unique real root of the equation $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}}+3\right)e^{1/\gamma}$; $Q_\pi = \displaystyle\int_0^\pi |q(x)|\,dx$ and $Q_0 = \max_{[0,\pi]}\left|q(x)\right|$. Assume that $\lambda \geqq \chi_0$ and let $\lambda_N, \lambda_{N+1}, \ldots, \lambda_{N+p}, \ldots$ be the eigenvalues of problem (4)–(5) listed in the increasing order, $N$ is the number of zeros on the set $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ of the eigenfunctions corresponding to the eigenvalue $\lambda_N$. In what follows the eigenvalues with odd index will be called odd, and those with even index will be called even.

Now, we will state the following theorem which can be proven easily using the same method as in [2].

**Theorem 2** (**Asymptotic Oscillation Theorem**). *The eigenvalues of problem* (1)–(5) *form an unbounded increasing sequence* $\lambda_N, \lambda_{N+1}, \ldots, \lambda_{N+p}, \ldots,$ *in the region* $\lambda \geqq \chi_0$*. Moreover, the eigenfunction corresponding to the eigenvalue* $\lambda_{N+p}$ *has exactly* $N+p$ *zeros on the set* $(0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)$, *where* $N$ *is the number of zeros of the eigenfunction corresponding to the first eigenvalue* $\lambda_N$ *of the sequence.*

**Lemma 3.** *Suppose that* $\lambda \geqq \chi_0$ *in (1) and that* $\lambda'$ *is an eigenvalue of problem* (1)–(5)*. Then* $\sqrt{\lambda'} = \mu' = \dfrac{4n'-3}{2\left[r_+ + r_-\right]} + \delta_{n'}$*, where* $n'$ *is an integer, and* $|\delta_{n'}| \leqslant \dfrac{1}{2\left[r_+ + r_-\right]}$*. Moreover, if* $\lambda'$ *is an odd eigenvalue, then* $n'$ *is even; for an even eigenvalue,* $n'$ *is odd.*

*Proof.* Suppose that $\lambda'$ is an odd eigenvalue of the problem (1)–(5) and that

$$\sqrt{\lambda'} = \mu' = \frac{4n'-3}{2\left[r_+ + r_-\right]} + \delta_{n'} \tag{17}$$

where $n'$ is an integer, and

$$|\delta_{n'}| \leqslant \frac{1}{2\left[r_+ + r_-\right]}. \tag{18}$$

Differentiating (9) with respect to $x$ and evaluating its value at $x=\pi$ we obtain

$$\left|\sin\left(\tfrac{\mu'\pi[r_+ + r_-]}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| > \tfrac{\sqrt{2}}{2}. \tag{19}$$

However, if $\lambda' \geqq \chi_0$, from (6) and Lemma 2.3.6 in [2] it follows that

$$\frac{1}{\mu'}\left|\int_{\pi/2}^{\pi} q(\tau)\cos\left(\mu' r_-(\pi-\tau)\right) w_2\left(\tau - \Delta(\tau), \lambda'\right) d\tau\right| < \tfrac{\sqrt{2}}{2} \tag{20}$$

and it follows from the (19) and (20) that the sign of the derivative coincides with the sign of $\sin\left(\frac{\mu'\pi[r_+ + r_-]}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. From Theorem 3.1 and Lemma 2.3.3 in [2] we obtain that

$w'_x(\pi, \lambda') > 0$. Therefore we get

$$\sin\left(\tfrac{\mu'\pi[r_+ + r_-]}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0. \tag{21}$$

From (17) it now follows that

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{\mu'\pi[r_+ + r_-]}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\left(\tfrac{4n'-3}{2[r_+ + r_-]} + \delta_{n'}\right)\tfrac{\pi[r_+ + r_-]}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\tfrac{(4n'-3)\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\delta_{n'}\pi[r_+ + r_-]}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

If the equality holds in (18), then $\cos\left(\tfrac{\delta_{n'}\pi[r_+ + r_-]}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right) = 0$ and therefore $\sin\left(\tfrac{\mu'\pi[r_+ + r_-]}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right) = 0$, which contradicts (21), the integer $n'$ is defined uniquely and $\left|\tfrac{\delta_{n'}\pi[r_+ + r_-]}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right| < \tfrac{\pi}{2}$. Then $\cos\left(\tfrac{\delta_{n'}\pi[r_+ + r_-]}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right) > 0$ and, from (21), $\sin\tfrac{(4n'-3)\pi}{4} > 0$. Thus the proof is completed. □

**Theorem 3.** *Let* $\lambda' = \mu_1^2$, $\lambda'' = \mu_2^2$, $\lambda''' = \mu_3^2$ $(\lambda''' > \lambda'' > \lambda' \geqq \chi_0)$ *be three successive eigenvalues of problem* (1)–(5). *Then*

$$\frac{3}{r_+ + r_-} < \mu_3 - \mu_1 < \frac{6}{r_+ + r_-} \tag{22}$$

$$\mu_3 - \mu_2 < \frac{4}{r_+ + r_-},\ \mu_2 - \mu_1 < \frac{4}{r_+ + r_-}. \tag{23}$$

*Proof.* By Lemma 3.2, $\mu_3 = \dfrac{4n_3 - 3}{2[r_+ + r_-]} + \delta_{n_3}$ and $\mu_1 = \dfrac{4n_1 - 3}{2[r_+ + r_-]} + \delta_{n_1}$, with $n_3 - n_1 \geqq 2$ and $|\delta_{n_1}| < \dfrac{1}{2[r_+ + r_-]}$, $|\delta_{n_3}| < \dfrac{1}{2[r_+ + r_-]}$. Therefore

$$\mu_3 - \mu_1 \geqq \frac{2(n_3 - n_1)}{r_+ + r_-} - (|\delta_{n_3}| + |\delta_{n_1}|) > \frac{3}{r_+ + r_-}.$$

The inequalities in (23) and the second inequality in (22) may be proved using the same method in the proof of Theorem 3.6.1 in [2]. □

**Acknowledgements.** The author acknowledges the referee for useful important comments and suggestions.

## References

1. S. B. Norkin, *On boundary problem of Sturm-Liouville type for second-order differential equation with retarded argument*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. (1958), no. 6(7), 203–214.
2. S. B. Norkin, *Differential equations of the second order with retarded argument*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1972.
3. A. D. Myskis, *Linear differential equations with retarded argument*, GITTL, Moscow, 1951 (in Russian).
4. M. Bayramoglu, K. Koklu, and O. Baykal, *On the spectral properties of the regular Sturm-Liouville Problem with the lag argument for which its boundary conditions depends on the spectral parameter*, Turk. J. Math. **26** (2002), 421–431.

5. E. Sen and A. Bayramov, *Asymptotic formulations of the eigenvalues and eigenfunctions for a boundary value problem*, Math. Method. Appl. Sci. **36** (2013), 1512–1519.
6. E. Sen and A. Bayramov, *Calculation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition*, Math. Comput. Model. **54**(2011), no. 11–12, 3090–3097.
7. A. Bayramov, *On asymptotic of the eigenvalues and eigenfunctions for the problem of Sturm-Liouville with the lag argument and the spectral parameter in the boundary condition*, Trans. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. **18** (1998), no. 3-4, 6–11.
8. A. Bayramov, S. Caliskan, and S. Uslu, *Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument*, Appl. Math. Comput. **191** (2007), 592–600.
9. C. Yang, *Trace and inverse problem of a discontinuous Sturm–Liouville operator with retarded argument*, J. Math. Anal. Appl. **395** (2012), no. 1, 30–41.
10. B. M. Levitan, *Expansion in characteristic functions of differential equations of the second order*, GITTL, Moscow, 1950 (in Russian).
11. E. Bairamov and E. Ugurlu, *On the characteristic values of the real component of a dissipative boundary value transmission problem*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9657–9663.
12. E. Bairamov and E. Ugurlu, *The determinants of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions*, Math. Comput. Model. **53** (2011), no. 5-6, 805–813.
13. K. R. Mamedov, *On Boundary Value Problem with Parameter in Boundary Conditions*, Spect. Theor. Oper. Appl. **11** (1997), 117–121.
14. C. T. Fulton and S. Pruess, *Eigenvalue and eigenfunction asymptotics for regular Sturm-Liouville problems*, J. Math. Anal. Appl. **188** (1994), 297–340.
15. K. Aydemir and O. Mukhtarov, *Variational principles for spectral analysis of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions*, Adv. Differ. Equ. **2016** (2016), 1–14.
16. O. Mukhtarov and K. Aydemir, *Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point*, Acta Math. Sci. **35** (2015), no. 3, 639–649.
17. O. Mukhtarov, M. Kadakal, and F. S. Muhtarov, *On discontinuous Sturm-Liouville problems with transmission conditions*, J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), no. 4, 779–798.
18. V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, *Classes of boundary value problems for the Sturm-Liouville equation with an operator potential*, Ukr. Math. J. **24** (1972), no. 3, 291–305.

*Стаття: надійшла до редколегії 25.09.2016*
*доопрацьована 11.03.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

**Ердоґан СЕН**[1], **Азад БАЙРАМОВ**[2]

[1]*Department of Mathematics, Namik Kemal University,*
*59030, Tekirdag, Turkey*
*e-mail: erdogan.math@gmail.com*
[2]*Azerbaijan State Pedagogical University,*
*1000, Baku, Azerbaijan*
*e-mail: azadbay@gmail.com*

Знайдено асимптотичні формули для власних функцій задачі типу Штурма-Ліувілля з відхиленнями аргументу. У цій задачі спектральний параметр міститься також у крайових умовах, а вагова функція є розривною. Отримано оцінки на відстань між власними значеннями. Ми розширили й узагальнили деякі підходи та результати статті [S. B. Norkin, Differential equations of the second order with retarded argument, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 31, AMS, Providence, RI (1972)]

*Ключові слова:* диференціальне рівняння з відхиленням аргументу, спектральний параметр, умови спряження, асимптотика власних значень, оцінка відстані між власними значеннями.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 189–195*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 189–195*

УДК 519.17

# МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ УНІЦИКЛІЧНИХ ГРАФІВ, ЯКІ МІСТЯТЬ НЕ БІЛЬШЕ ОДНІЄЇ ОСНОВНОЇ ВЕРШИНИ

**Маргарита ДУДЕНКО**

*Національний університет "Києво-Могилянська академія"*
*вул. Григорія Сковороди, 2, 04655, Київ*
*e-mail: rita.dudenko@gmail.com*

Мінімальна підмножина $M \subset V$ така, що для будь-якої пари вершин $x$, $y$ графа $G$ існує така вершина $t$ з підмножини $M$, що виконується умова $d_G(t, x) \neq d_G(t, y)$, називається *метричним базисом.* Потужність цієї підмножини $M$ називається *метричною розмірністю.* Як відомо, повне дослідження метричної розмірності графів є NP-повною проблемою. Ми вводимо конструкцію часткового обплетення уніциклічних графів, за допомогою якої охарактеризовано уніциклічні графи метричної розмірності 2, які мають не більше однієї основної вершини.

*Ключові слова:* метричний базис, метрична розмірність, уніциклічні графи.

**1. Вступ.** Поняття метричної розмірності ввели незалежно в 1975 р. Слатер в праці [1] та 1976 р. Харарі та Мелтером у [2]. Метрична розмірність та метричні генератори набули численних застосувань, серед яких фармацефтична хімія [3], робототехніка [4], пошук у мережах [5]. Властивості метричної розмірності вивчались також для графів з високим степенем симетрії (див. [6, 7]). У 1979 р. в праці [8] Гері та Джонсон довели, що повне дослідження метричної розмірності є NP-повною проблемою.

Протягом останніх десятиліть дослідженню метричної розмірності графів присвячено багато статей (див. [9, 10, 11]).

Один з напрямків досліджень — характеризація графів, які мають фіксовану метричну розмірність. У [3] 2000 р. доведено, що граф $G$ має метричну розмірність 1 тоді і тільки тоді, коли він є ланцюгом, метрична розмірність дорівнює $n-1$ лише для повного графа та $n-2$ тоді і тільки тоді, коли граф — повний дводольний $K_{s,t}$.

У цій праці ми продовжимо дослідження, які розпочали раніше в [12] і [13], а саме, схарактеризуємо певні родини графів, що мають метричну розмірність 2. Зокрема, у праці [13] ми розглядали уніциклічні графи метричної розмірності 2, які мають дві основні вершини. Схарактеризуємо родини уніциклічних графів, які

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 05C12 мають метричну розмірність 2 та не містять вершин степеня строго більшого, ніж 3, без основних вершин або лише з однією основною вершиною. Розглядатимемо прості, неорієнтовні уніциклічні графи.

## 2. Необхідні теоретичні відомості.

Нехай $G = (V, E)$ – простий, скінченний, неорієнтовний граф з множиною вершин $V$, $|V| < \infty$ і множиною ребер $E$. За графом $G$ однозначно визначається метричний простір $(V, d_G)$, визначений на множині вершин $V$; метрика $d_G$ між двома довільними вершинами $v_1$ і $v_2$ дорівнює 0, якщо $v_1 = v_2$ і довжині найкоротшого шляху, що з'єднує вершини $v_1$ і $v_2$, якщо $v_1 \neq v_2$.

**Означення 1.** Для трійки вершин $x, t, y$ з $G$ говоритимемо, що вершина $t$ *розділяє* вершини $x$ і $y$, якщо $x = y$ або виконується така нерівність:

$$d_G(t, x) \neq d_G(t, y).$$

В більшості випадків під час дослідження метричної розмірності припускатимемо, що $x \neq y$.

**Означення 2.** Підмножина $M \subset V$ називається *метричним генератором* графа $G$, якщо для будь-якої пари вершин з $V$ існує принаймні одна вершина $t \in M$, що їх розділяє. Метричний генератор графа $G$ з мінімальною потужністю називається *метричним базисом.* Кількість вершин у метричному базисі називається *метричною розмірністю* графа $G$ і позначається $\dim(G)$.

Нагадаємо, що степенем вершини $deg_G(v)$ називається кількість ребер, що їй інцидентні. *Листок* – вершина графа, яка має степінь 1. *Внутрішніми* називаються вершини, які мають степінь не менший, ніж 3. Внутрішня вершина $v$ *близька до листка* $l$, якщо немає інших внутрішніх вершин, ближчих до цього листка, тобто немає інших внутрішніх вершин у найкоротшому шляху, що з'єднує $v$ і $l$. Внутрішню вершину графа $G$ називатимемо 2-*лістковою*, якщо вона є близькою рівно до 2 листків та 1-*лістковою*, якщо задана вершина є близькою лише до одного листка.

**Означення 3.** Простий граф називається *уніциклічним*, якщо він містить лише один цикл.

Нехай $G = (V, E)$ – уніциклічний граф та $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ його підграф, що є простим циклом.

**Означення 4.** Говоритимемо, що вершина $u \in V \setminus \hat{V}$ графа $G$ *проектується* в вершину $w \in \hat{V}$, якщо для довільної вершини $q \in \hat{V}$ виконується нерівність

$$d_G(u, w) < d_G(u, q).$$

Вершини степеня 3 циклу, в які проектуються вершини степеня 3, що лежать поза циклом, називатимемо *основними.*

**Теорема 1** ([12]). *Нехай* $G = (V, E)$ *– уніциклічний граф і* $\dim(G) = 2$. *Тоді існує не більше двох основних вершин, у кожну з яких може проектуватись лише одна* 2-*листкова вершина.*

**Означення 5** ([13]). Уніциклічний граф $G$ називається *парним*, якщо існує таке натуральне $k$, для якого $|\hat{V}| = 2k$, і *непарним*, якщо $|\hat{V}| = 2k + 1$.

**Означення 6.** Говоритимемо, що вершини $u, v$ з циклу графа $G$ є *майже симетричними*, якщо виконується одна з рівностей:

(1) $d_G(u,v) = k-1$, якщо $G$ — парний;
(2) $d_G(u,v) = k$, якщо $G$ — непарний.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ – два прості графи. Зафіксуємо вершини $v_1$ і $v_2$ графів $G_1$ і $G_2$, відповідно. На множині вершин $V_1 \cup V_2$ введемо відношення еквівалентності: $u \sim w$ тоді і тільки тоді, якщо $u = v_1$ і $w = v_2$ або навпаки, $u = v_2$ і $w = v_1$. Граф $G = V_1 \cup V_2 / \sim\ , E_1 \cup E_2$ називатимемо *склеюванням* графів $G_1$ і $G_2$ по вершинах $v_1$ і $v_2$ (див. рис. 1).

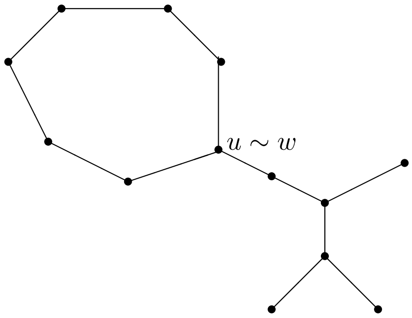


Рис. 1. Склеювання простого циклу та дерева

### 3. Основні результати.

У [13] введено конструкцію обплетення базисного графа, що містить дві основні вершини. Нагадаємо її.

**Означення 7** ([13])**.** Нехай $G_1$ — базисний граф. Позначимо через $u$ і $v$ основні вершини графа $G_1$. Уніциклічний граф $G$ називається *обплетенням* графа $G_1$ ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, якщо $G$ утворений з $G_1$ склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \ldots, L_r$ так, що кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга, а також для будь-якої 1-листкової вершини $w$ та суміжної з нею вершини $a$ виконується умова

$$d_G(u,v) + d_G(v,w) + 1 \neq d_G(u,a).$$

Це означення можна узагальнити для простіших конструкцій, зокрема обплетення циклу та уніциклічного графа, що містить лише одну основну вершину.

**Означення 8.** Уніциклічний граф $G$ називається *частковим обплетенням* графа $G_1$, що є уніциклічним графом (або простим циклом), ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, якщо $G$ утворений з $G_1$ склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \ldots, L_r$, причому кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга.

**Лема 1.** *Нехай $G$ – уніциклічний граф, що є частковим обплетенням простого циклу $C_n$ ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. Тоді* $\dim(G) = 2$.

*Доведення.* Якщо уніциклічний граф $G$ утворений частковим обплетенням простого циклу ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, то в $G$ існуватиме принаймні одна 1-листкова вершина $u$. До базису візьмемо листок $p$, що проектується в $u$. Листок $p$ та 1-листкова вершина $u$ з'єднані ланцюгом, тому всі вершини, які розділяє $p$, будуть розділятись також вершиною $u$. Метрична розмірність простого циклу дорівнює 2 (див. [4]), тому в циклі обов'язково існуватиме хоча б одна пара вершин, яка не розділяється $u$, а відповідно, і $p$. Визначимо метричний базис графа $G$ як множину вершин $\{u, v\}$, де $v$ — вершина, що є майже симетричною в циклі з $u$. Вершини, які не розділятимуться вершиною $u$, будуть розділятись $v$. Оскільки з самого початку базису належав листок $p$, що проектується в $u$, то матимемо базис $\{p, v\}$. Якщо вершина $v$ є 1-листковою, то існуватиме принаймні одна пара вершин $t, w$, яка не буде розділятись $v$ та $p$. Тоді в базисі 1-листкову вершину $v$ замінюємо листком $l$, що в неї проектується (див. рис. 2). Отже, $\dim(G) = 2$. $\square$

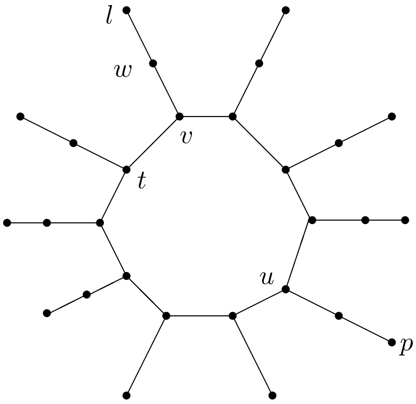


Рис. 2. Часткове обплетення циклу ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$

Нагадаємо, що *шляхом* в графі $G$ називається послідовність вершин і ребер

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$$

така, що кожне ребро $e_i$ інцидентне вершинам $v_i$ та $v_i + 1$, $1 \leq i \leq n - 1$.

Для довільних двох вершин $u, v$ з циклу графа $G$ існує два шляхи в циклі, що з'єднують ці вершини. Позначимо їх $P_1$ і $P_2$, а їхні довжини — $d_G(P_1)(u, v)$ і $d_G(P_2)(u, v)$, відповідно.

**Теорема 2.** *Нехай $G_1$ — уніциклічний граф, який має лише одну основну вершину, а решта вершин циклу мають степінь 2. Припустимо, що уніциклічний граф $G$ є частковим обплетенням уніциклічного графа $G_1$ ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. Тоді* $\dim(G) = 2$.

*Доведення.* З теореми 1 випливає, що метрична розмірність $G_1$ дорівнює 2. Доведемо, що метрична розмірність графа $G$ теж дорівнює 2. Оскільки $G$ містить одну основну вершину $v$, то для того, щоб розділити листки 2-листкової вершини $w$, що проектуються в $v$, до базису візьмемо один листок (для визначеності $l$). Вершини $l$ і $v$ з'єднані простим ланцюгом, тому всі вершини, що розділяє $l$, будуть розділятись $v$. Метрична розмірність $G_1$ дорівнює 2, тому в уніциклічному графі $G$ існуватиме принаймні одна пара вершин $p, q$ така, що $d_G(l,p) = d_G(l,q)$. Візьмемо в циклі вершину $u$, яка є майже симетричною з $v$, і додамо її до базису. За означенням майже симетричних вершин матимемо $d_G(P_1)(u,v) = d_G(P_2)(u,v) - 1$ або $d_G(P_1)(u,v) = d_G(P_2)(u,v) - 2$, причому за означенням метрики використовуємо найкоротшу відстань між вершинами графа. Це означає, що вершини, які не розділяє $v$, а відповідно і $l$, буде розділяти $u$. Оскільки $G$ є частковим обплетенням уніциклічного графа $G_1$ ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, то вершина $u$ може бути 1-листковою (див. рис. 3). У такому випадку існуватиме хоча б одна пара вершин (суміжних з $u$), що не розділяється вибраним базисом, тому замість вершини $u$ в базис візьмемо листок $k$, що в неї проектується. Отже, $\dim(G) = 2$. ☐

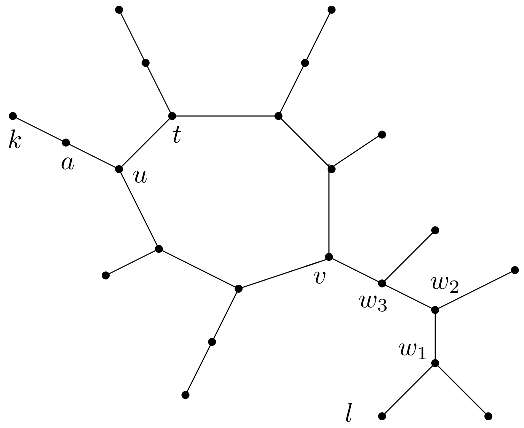


Рис. 3. Часткове обплетення уніциклічного графа $G_1$ ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$

**Означення 9.** Уніциклічний граф $G$, який містить лише одну основну вершину, а решта вершин циклу мають степінь 2, називатимемо *мінорним* графом.

**Теорема 3.** *Нехай $G$ – уніциклічний граф, який містить не більше однієї основної вершини. Граф $G$ має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли він є частковим обплетенням простого циклу $C_n$ або частковим обплетенням мінорного графа $G_1$ ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$.*

*Доведення.* Нехай маємо уніциклічний граф $G$, який є частковим обплетенням мінорного графа $G_1$ або циклу $C_n$ ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. За теоремою 2 та лемою 1 $\dim(G) = 2$.

Доведемо в інший бік. Нехай $G$ – уніциклічний граф, який містить не більше однієї основної вершини і $\dim(G) = 2$. Якщо для всіх вершин $v$ графа $G$, що лежать поза циклом $degv < 3$, то $G$ є або циклом або частковим обплетенням циклу ланцюгами.

Якщо поза циклом існують вершини $w_1, \dots, w_r$, для яких $\deg w_r = 3$, то з умови існування в графі $G$ єдиної основної вершини випливає, що всі вершини $w_1, \dots, w_r$ проектуються в єдину основну вершину $v$ графа $G$ (див. рис. 3). Отже, уніциклічний граф $G$ є частковим обплетенням мінорного графа. □

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. P. J. Slater, *Leaves of trees*, Congr. Numerantium **14** (1975), 549–559.
2. F. Harary and R. A. Melter, *On the metric dimension of a graph*, Ars Comb. **2** (1976), no. 2, 191–195.
3. G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Appl. Math. **105** (2000), no. 1–3, 99–113.
4. S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld, *Landmarks in graphs*, Discrete Appl. Math. **70** (1996), no. 3, 217—229.
5. Z. Beerliova, F. Eberhard, and T. Erlebach, *Network discovery and verification*, IEEE J. Sel. Areas Commun. **24** (2006), no. 12, 2168–2181.
6. R. F. Bailey and P. J. Cameron, *Base cize, metric dimension and other invariants of groups and graphs*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), no. 2, 209–242.
7. M. Fehr, S. Gosselin, and O. R. Oellermann, *The metric dimension of Ceyley disgraphs*, Discrete Math. **306** (2006), no. 1, 31–41.
8. M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, New York, 1979.
9. A. Juan, J. A. Rodriguez-Valazquez, and C. G. Gomez, *Computing the local metric dimension of a graph from the local metric dimension of primary subgraphs*, Int. J. Comput. Math. **92** (2015), no. 4, 686–693.
10. M. I. Ostrovskii and D. Rosenthal, *Metric dimension of minor excluded graphs and minor exclusion in groups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 4, 541–554.
11. M. Jannesari and B. Omoomi, *The metric dimension of lexicographic product of graphs*, Discrete Math. **312** (2012), no. 22, 3349–3356.
12. М. А. Дуденко, *Уніциклічні графи метричної розмірності 2*, Наукові записки НаУКМА **165** (2015), 7–10.
13. M. Dudenko and B. Oliynyk, *On unicyclic graphs of metric dimension 2*, Algebra Discrete Math. **23** (2017), no. 2 , 216–222.

*Стаття: надійшла до редколегії 16.09.2017*
*доопрацьована 07.11.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

# METRIC DIMENSION OF UNICYCLIC GRAPHS WITH AT MOST ONE MAIN VERTEX

**Marharyta DUDENKO**

*National University of Kyiv-Mohyla Academy*
*2, Scovoroda Str., 04655, Kyiv, Ukraine*
*e-mail: rita.dudenko@gmail.com*

A minimum subset $M \subset V$ is called metric basis if and only if for any pair of different vertices $x$, $y$ from $G$ there exists vertex $t \in M$ such that $d_G(t,x) \neq d_G(t,y)$. A cardinality of $M$ is called metric dimension of graph $G$. It is well known that the problem of finding the metric dimension of a graph is NP-Hard. In the paper we present the construction of a partial knitting unicyclic graph. Using this construction all unicyclic graphs with no more than one main vertex and metric dimension 2 are characterized.

*Key words:* metric basis, metric dimension, unicyclic graph.

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 196–201*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 196–201*

УДК 519.21

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З МІГРАЦІЄЮ ТА НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

**Ірина БАЗИЛЕВИЧ, Христина ЯКИМИШИН**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університецька, 1, 79000, Львів*
*e-mails: I_Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_Hrystyna@ukr.net*

Досліджуємо гіллястий процес з міграцією та неперервним часом. Знайдено диференціальне рівняння для математичного сподівання цього процесу.

*Ключові слова:* гіллястий процес, неперервний час, міграція, математичне сподівання.

**1. Опис гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом.** Розглядаємо гіллястий процес $\mu(t)$ з одним типом частинок, з міграцією та неперервним часом; $\mu(t)$ – кількість частинок у момент часу $t$. Вважаємо, що

$$\mu(0) = 1. \tag{1}$$

Процес $\mu(t)$ можна подати як поєднання двох процесів – класичного гіллястого процесу з неперервним часом $\xi(t)$ [1] і процес міграції $\zeta(t)$. Якщо в момент часу $t$ в системі існує випадкова кількість $\mu(t)$ частинок, то вони розмножуються незалежно одна від одної та незалежно від свого походження за тим самим законом. Закон розмноження частинок у середині цієї системи визначається процесом $\xi(t)$. Крім того, в систему ще можуть іммігрувати частинки та відбуватися еміграція. Імміграція й еміграція визначаються процесом $\zeta(t)$, де $\zeta(t)$ – позначає кількість частинок у момент часу $t$, які емігрують із системи або іммігрують в неї.

Випадкові процеси $\xi(t)$ і $\zeta(t)$ вважаємо однорідними марківськими процесами. $\zeta(t)$ - узагальнений Пуассонівський процес

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{N_t} \zeta_j. \tag{2}$$

Нехай у момент часу $t$ в системі існує $\mu(t)$ частинок. Позначимо через $\xi_i(\Delta t)$ $(i = 1, \ldots, \mu(t))$ кількість нащадків $i$-ї частинки за час $\Delta t$, тобто в момент часу $t + \Delta t$ і,

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 60J80 враховуючи однорідність $\xi(t)$, припускаємо, що

$$P\{\xi_i(\Delta t)=k|\xi_i(0)=1\}=\delta_{1k}+p_k\Delta t+o(\Delta t),\qquad k=0,1,\dots, \tag{3}$$

$$p_1<0,\ p_k\geqslant 0\ (k=0,2,3,\dots),\qquad \sum_{k=0}^{\infty}p_k=0.$$

Процес $\xi(t+\Delta t)$ визначається як сукупність нащадків кожної частинки процесу $\mu(t)$, а саме

$$\xi(t+\Delta t)=\sum_{i=1}^{\mu(t)}\xi_i(\Delta t). \tag{4}$$

Визначимо процес $\zeta(t)$. Зазначимо, що $\zeta(0)=0$. Асимптотику процесу при $\Delta t\to 0$ визначимо так:

$$P\{\zeta_0(\Delta t)=k|\zeta(0)=0\}=\delta_{0k}+q_k\Delta t+o(\Delta t),\qquad k=-m,\dots,-1,0,1,\dots, \tag{5}$$

причому

$$q_0\leqslant 0,\quad q_k\geqslant 0\quad (k=-m,\dots,-1,1,2,\dots),\qquad \sum_{k=-m}^{\infty}q_k=0.$$

Кількість частинок у момент часу $t+\Delta t$ дорівнює

$$\mu(t+\Delta t)=\max\left\{\sum_{i=1}^{\mu(t)}\xi_i(\Delta t)+\zeta_t(\Delta t);\ 0\right\}, \tag{6}$$

де $\zeta_t(\Delta t)$ – кількість частинок, які емігрували з системи або іммігрували в систему протягом часу $(t,t+\Delta t]$.

Введемо твірні функції.

Твірну функцію процесу $\mu(t)$ позначимо $F_\mu(t,s)$, процесу $\xi(t)$ – $F_\xi(t,s)$ і

$$F_\mu(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\mu(t)=n\}s^n,\qquad F_\xi(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\xi(t)=n\}s^n, \tag{7}$$

$$|s|\leqslant 1,\ s\in\mathbb{C}.$$

Твірну функцію щільностей перехідних ймовірностей для процесу $\xi(t)$ позначимо через $f_\xi(s)$, яка визначається так:

$$f_\xi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k,\qquad s\in C,|s|\leqslant 1. \tag{8}$$

Замість класичної твірної функції для процесу $\zeta(t)$ будемо розглядати функцію

$$\widehat{F}_\zeta(t,s)=\sum_{n=-m}^{\infty}P\{\zeta(t)=n\}s^n,\qquad 0<|s|\leqslant 1, \tag{9}$$

яку ми назвемо узагальненою твірною функцією. Також введемо узагальнену твірну функцію щільностей перехідних ймовірностей для процесу $\zeta(t)$

$$\widehat{f}_\zeta(s)=\sum_{l=-m}^{\infty}q_ls^l,\qquad 0<|s|\leqslant 1. \tag{10}$$

Далі введемо позначення

$$A(t) = M\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kP\{\mu(t) = k\}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial f_\xi(s)}{\partial s}_{s=1} = a_\xi, \qquad \frac{\partial \widehat{f}_\zeta(s)}{\partial s}_{s=1} = a_\zeta. \tag{12}$$

А також введемо операцію для послідовності $\{b_n\}_{n=-m}^{\infty}$

$$\big\langle B(s)\big\rangle_0 = \sum_{k=-m}^{0} b_k + \sum_{1}^{\infty} b_k s^k, \qquad s \in C, \qquad |s| \leqslant b^* > 0. \tag{13}$$

### 2. Диференціальні рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом.

Твірна функція процесу $\mu(t)$ задовольняє такі рівняння: звичайне диференціальне рівняння та лінійне рівняння частинних похідних.

**Теорема 1** ([2]). *Твірна функція процесу $\mu(t)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big) + \big\langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\big\rangle_0,$$

*з початковою умовою $\mu(0) = 1$.*

**Теорема 2** ([3]). *Твірна функція процесу $\mu(t)$ задовольняє диференціальне рівняння в частинних похідних*

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \big\langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\big\rangle_0,$$

*з початковою умовою $\mu(0) = 1$.*

### 3. Диференціальні рівняння для математичного сподівання гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом.

**Теорема 3.** *Якщо $p_0$ не дорівнює нулю, то в умовах* (1)–(13) *$A(t) = M\mu(t)$ задовольняє диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = A(t)a_\xi + a_\zeta + \varphi\big(F_\mu(t,0)\big), \tag{14}$$

*де $\varphi(x)$ залежить від $p_j$, $q_k$, $k = -m, \ldots, -1$, $A(0) = 1$.*

*А $F_\mu(t,0)$ визначається з диференціального рівняння*

$$\frac{\partial F_\mu(t,0)}{\partial t} = f_\xi\big(F_\mu(t,0)\big) + \psi\big(F_\mu(t,0)\big), \tag{15}$$

*де $\psi(x)$ залежить від $p_j$, $q_k$, $F_\mu(0,0) = 0$.*

*Доведення.* Відомо [2, 3], що для нашої моделі гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом виконуються наступні диференціальні рівняння:

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big) + \big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0, \qquad F_\mu(0,s) = s, \tag{16}$$

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0, \qquad F_\mu(0,s)=s. \tag{17}$$

Рівняння (16) продиференціюємо по $s$, змінимо порядок диференціювання в лівій частині та підставимо $s=1$. У підсумку отримуємо

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = A(t)a_\xi + \left(\frac{\partial}{\partial s}\big\langle \partial \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\right)_{|s=1}.$$

Розглянемо другий доданок правої частини

$$\begin{gathered}\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s) = \big(q_{-m}s^{-m}+\ldots+q_0+\ldots\big)\big(P\{\mu(t)=0\}+P\{\mu(t)=1\}s+\ldots\big) = \\ = s^{-m}q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + s^{-m+1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big)+ \\ +s^{-m+2}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+ \\ +s^{-1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-2\}+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big)+ \\ +s^{0}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-1\}+\ldots+q_{0}P\{\mu(t)=0\}\big)+ \\ +s^{1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+q_{1}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots\end{gathered}$$

Очевидно, що

$$\begin{gathered}\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0 = q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + \big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big)+ \\ +\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+ \\ +(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-2\}+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\})+ \\ +s^{0}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-1\}+\ldots+q_{0}P\{\mu(t)=0\}\big)+ \\ +s^{1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+q_{1}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots\end{gathered}$$

Далі беремо похідну по $s$ від $\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)$ та $\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0$.

$$\begin{gathered}\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)' = -ms^{-m-1}q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + (-m)s^{-m}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+ \\ +q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big) + (-m+2)s^{-m+1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+ \\ +q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+(-1)s^{0}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+ \\ +q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-2\}+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big)+ \\ +0\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+q_{1}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\big(\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\big)' = q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\} + \big(q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+ \\ +q_{1}P\{\mu(t)=0\}\big) + s^{1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m+1\}+ \\ +\ldots+q_{2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots\end{gathered}$$

Виразимо $\big(\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\big)'$ через $\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)'$. У підсумку отримаємо

$$\begin{gathered}\big(\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\big)'_{s=1} = \big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)'_{s=1} - P\{\mu(t)=0\}\sum_{k=-m}^{-1}kq_k- \\ -P\{\mu(t)=1\}\big((-m+1)q_{-m}+\ldots+(-1)q_{-2}\big)-\ldots-(-P\{\mu(t)=m-1\}q_{-m}).\end{gathered}$$

Легко бачити, що

$$\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)'_{s=1} = \big(\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)' + \big(\widehat{f}_\zeta(s)\big)'F_\mu(t,s)\big)_{s=1} = a_\zeta.$$

Повертаємось до рівнянь (16), (17). Позаяк ліві частини рівні й однакові початкові умови, то можемо прирівняти праві частини

$$f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big)+\big\langle\widehat{f_\zeta}(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0=f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}+\big\langle\widehat{f_\zeta}(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0.$$

Звідси випливає, що

$$f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big)=f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}. \tag{18}$$

Підставимо $s=0$. У підсумку отримуємо, що

$$P\{\mu(t)=1\}=\frac{1}{h_0}f_\xi\big(P\{\mu(t)=0\}\big).$$

Ще раз диференціюємо по $s$ рівність (18)

$$\frac{\partial f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big)}{\partial s}\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}=\frac{\partial f_\xi(s)}{\partial s}\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}+f_\xi(s)\frac{\partial^2F_\mu(t,s)}{\partial s^2} \tag{19}$$

і підставляємо $s=0$. Отримуємо

$$P\{\mu(t)=2\}=\frac{1}{2p_0}P\{\mu(t)=1\}\big(p_1-f'_\mu(P\{\mu(t)=0\})\big).$$

Отож, ми можемо виразити $P\{\mu(t)=2\}$ через $P\{\mu(t)=0\}$.

Аналогічно, можемо виразити $P\{\mu(t)=2\}$ через $P\{\mu(t)=0\}$. Перше рівняння твердження теореми виведено.

Переходимо до виведення другого диференціального рівняння. Очевидно, що (16) можна подати у вигляді.

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t}=f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big)+\widehat{f_\zeta}(s)F_\mu(t,s)-X(t,s),$$

де

$$X(t,s)=q_{-m}P\{\mu(t)=0\}+\big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big)+$$
$$+\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+$$
$$+\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big)-\big(s^{-m}q_{-m}P\{\mu(t)=0\}+$$
$$+s^{-m+1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big)+s^{-m+2}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+$$
$$+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+s^{-1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+$$
$$+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big)\big).$$

Як ми уже показали, що $P\{\mu(t)=2\}$ можна виразити через $P\{\mu(t)=0\}$. Тому можемо вважати, що

$$X(t,s)=\psi\big(P\{\mu(t)=0\}\big).$$

Підставляючи у (16) $s=0$, отримуємо рівняння для $F(t,0)$.

Теорема доведена. □

## Список використаної літератури

1. Б. А. *Севастьянов Ветвящиеся процессы*, Наука, Москва, 1971.
2. І. Базилевич, Х. Якимишин, *Диференціальні рівняння для гіллястих процесів з неперервним часом та міграцією*, Вісник Львів. ун-ту. Серія Мех-мат. **82** (2016), 20–26.
3. І. Б. Базилевич, С. А. Алієв, Х. М. Якимишин, *Диференціальне рівняння для гіллястих процесів з міграцією та неперервним часом*, XXV Int. Conf. "Problem of decision making under uncertainties", May 11-15, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts, Kyiv, 2015. P. 62–63.

# A DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE MATHEMATICAL EXPECTATION OF THE BRANCHING PROCESSES WITH MIGRATION AND CONTINUOUS TIME

**Iryna BAZYLEVYCH, Khrystyna YAKYMYSHYN**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: I_ Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_ Hrystyna@ukr.net*

In the paper the author study the branching processes with migration and continuous time. A differential equation of the mathematical expectation of a given process is constructed.

*Key words:* branching processes, continuous time, migration, mathematical expectation.

*Стаття: надійшла до редколегії 15.06.2017*
*прийнята до друку 13.11.2017*

*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 202–207*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 202–207*

УДК 519.217

# НЕЛІНІЙНЕ НОРМУВАННЯ ГЕНЕРАТОРІВ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТОРІ $R^d$

**Оксана ЯРОВА**

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mail: oksanayarova93@gmail.com*

Досліджено генератори марковських процесів в апроксимації Пуассона та Леві. Процеси нормуються нелінійними множниками. Знайдено асимптотичне зображення генераторів марковських процесів у просторі $R^d$.

*Ключові слова:* марковський процес, апроксимація Пуассона, апроксимація Леві, процес з незалежними приростами, генератор.

**1. Вступ.** Дослідженням марковських випадкових еволюцій та їхніх апроксимацій присвячено багато наукових праць, серед яких можна виділити [1]–[7]. Зокрема, в [3] досліджено процеси з незалежними приростами в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. В таких процесах відсутня дифузійна складова, а між стрибками протікає марковський процес. В апроксимаціях Пуассона та Леві генератор процесу нормується лінійним множником $\frac{t}{\varepsilon}$ [1]. Проте в деяких випадках таке нормування не доцільне. Тому виникає потреба розглядати нормуючий множник, як нелінійну функцію $\dfrac{t}{g(\varepsilon)}$. Мета нашої праці — знайти такі параметри в зображенні генератора випадкового процесу з незалежними приростами у випадку $d$-вимірного евклідового простору $R^d$.

**2. Апроксимація Пуассона.** Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ та траєкторіями в області визначення простору $R^d[0;\infty)$, які нормуються множником $g_1(\varepsilon) \to 0$, $g_1(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta\big(\tfrac{t}{g_1(\varepsilon)}\big), \quad t \geqslant 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, які визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}(\varphi(u+v)-\varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv),$$

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 60J25 де $\varphi(u)$ — дійснозначна, дорівнює 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u)$ належить класу $C^5(R^d)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^\varepsilon$ належить класу $C^3(R^d)$. Таке ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0) = 0$.

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації:

**(P1)** Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int\limits_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)\Big(\sum_{k=1}^{d} b_k + \theta_b^\varepsilon\Big)$$

і

$$c_\varepsilon = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)\Big(\sum_{k,r=1}^{d} c_k c_r + \theta_c^\varepsilon\Big),$$

де $v = (v_1, v_2, \dots, v_r)$, $b < \infty, c < \infty$, $|\theta_b^\varepsilon| \to 0$, $|\theta_c^\varepsilon| \to 0$, $g_1(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

**(P2)** Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне зображення:

$$\Gamma_g^\varepsilon = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon).$$

для всіх $g$, які належать класу $C^3(R^d)$, $|\theta_g^\varepsilon| \to 0$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$, задано на класі функцій, що визначає $\Gamma_g$ таким співвідношенням:

$$\Gamma_g = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^0(dv).$$

**(P3)** У граничному генераторі відсутня дифузійна складова, тобто виконується така умова:

$$c = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^0(dv) = 0.$$

**(P4)** Справджується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int\limits_{|v|>c} vv^T\Gamma^0(dv) = 0,$$

яке визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

**Теорема 1.** *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int\limits_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv)$$

*у схемі пуассонової апроксимації має таке асимптотичне зображення*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \sum_{k=1}^{d} b_k \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \int\limits_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - \sum_{k=1}^{d} v_k \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}]\Gamma^0(dv) + \theta^\varepsilon\varphi,$$

*де* $|\theta^\varepsilon|{\to}0$, $g_1(\varepsilon){\to}0$ *при* $\varepsilon{\to}0$.

*Доведення.* Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v)-\varphi(u)-$$

$$-\sum_{k=1}^{d} v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} - \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d} v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Big]\Gamma^\varepsilon(dv) + (g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k=1}^{d} v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Gamma^\varepsilon(dv) +$$

$$+\frac{1}{2}(g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k,r=1}^{d} v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Функція

$$\psi_u(v) = \varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d} v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} - \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d} v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}$$

належить класу $C^3(R^d)$.

З умов **(P1)**, **(P2)** матимемо

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d} v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} - \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d} v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Big]\Gamma^0(dv) +$$

$$+\sum_{k=1}^{d} b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d} c_k c_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r} + \theta_b^\varepsilon + \theta_c^\varepsilon + \theta_\psi^\varepsilon.$$

Застосовуючи умову **(P3)**, отримаємо таке асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \sum_{k=1}^{d} b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d} v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Big]\Gamma^0(dv) + \theta^\varepsilon\varphi.$$

Теорему доведено. □

**3. Апроксимація Леві.** Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами, які нормуються множником $g_2(\varepsilon)$, де $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$

$$\eta_2^\varepsilon(t) = \eta\big(\tfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\big), \quad t \geqslant 0,$$

де $\eta(t)$ — процес з незалежними приростами, які визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}(\varphi(u+v)-\varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv),$$

де $\varphi(u)$ — дійснозначна, дорівнює 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u)$ належить класу $C^5(R^d)$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^\varepsilon$ належить класу $C^3(R^d)$. Таке ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0) = 0$.

Нехай виконуються умови апроксимації Леві.

**(L1)** Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int\limits_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)\sum_{k=1}^{d} b_k^1 + g_2(\varepsilon)\Big(\sum_{k=1}^{d} b_k + \theta_b^\varepsilon\Big)$$

та

$$c_\varepsilon = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)\Big(\sum_{k,r=1}^{d} c_k c_r + \theta_c^\varepsilon\Big),$$

де $v = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$, $b_k < \infty, c_k < \infty$, $|\theta_b^\varepsilon| \to 0$, $|\theta_c^\varepsilon| \to 0$, $g_2(\varepsilon) \to 0, g_1(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

**(L2)** Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне зображення:

$$\Gamma_g^\varepsilon = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon)$$

для всіх $g$, які належать класу $C^3(R^d)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$, задано на класі функцій, що визначає $\Gamma_g$ таким співвідношенням:

$$\Gamma_g = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^0(dv).$$

**(L3)** Виконується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int\limits_{|v|>c} vv^T\Gamma^0(dv) = 0,$$

яке визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

**Теорема 2.** *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv)$$

*у схемі апроксимації Леві має таке асимптотичне зображення:*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^{d} b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{d}(b_k - b_k^0)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}(c_k - c_k^0)\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r} +$$

$$+\int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v) - \varphi(u) - \sum_{k=1}^{d} v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Big]\Gamma^{(0)}(dv) + \theta^\varepsilon\varphi,$$

*де* $b_0 = \int\limits_{R^d} v\Gamma^{(0)}(dv)$, $c_0 = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^{(0)}(dv)$, $|\theta^\varepsilon|\to 0$, $g_1(\varepsilon)\to 0$, $g_2(\varepsilon)\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

*Доведення.* Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv) =$$

$$(g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\left[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\right]\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$(g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Gamma^{\varepsilon}(dv)+\frac{1}{2}(g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функція

$$\psi_u(v) = \varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}$$

належить класу $C^3(R^d)$.

З умов **(L1)**, **(L2)** матимемо

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \int\limits_{R^d}\left[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\right]\Gamma^{0}(dv)+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^{d}b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^{d}b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}c_kc_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}+\theta_b^{\varepsilon}+\theta_c^{\varepsilon}+\theta_{\psi}^{\varepsilon}.$$

Застосовуючи умову **(L3)** та звівши відповідні доданки, отримаємо асимптотичне зображення

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^{d}b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^{d}(b_k-b_k^0)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}(c_k-c_k^0)\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}+$$

$$+\int\limits_{R^d}\left[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\right]\Gamma^{(0)}(dv)+\theta^{\varepsilon}\varphi.$$

Теорему доведено. □

Отже, таке нормування дає змогу оцінити стрибки в апроксимації процесів з незалежними приростами в просторі $R^d$ та знайти їхні асимптотичне зображення.

## Список використаної літератури

1. В.С. Королюк, *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Доп. НАН України (2010), no. 6, 22–26.
2. H. Chernoff, *Measure of asymptotical efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, Ann. Math. Statist. **23** (1952), no, 4, 493–655.
3. J. Feng and T. G. Kurtz, *Large deviation for stochastic processes*, AMS, Math. Surveys and Monographs, Vol. **131**, 2006.
4. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic systems in merging phase space*, World Sc. Publ., 2005.

5. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, Київ, Наукова думка, 1976.
6. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії.* Укр. мат. журн. **62** (2010), no. 5, 643–650.
7. А.В. Свищук, *Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций*, Ин-т мат. АН УССР. 1990, С. 102–111.

*Стаття: надійшла до редколегії 14.11.2017*
*доопрацьована 10.12.2017*
*прийнята до друку 11.12.2017*

# NONLINEAR NORMALIZATION FOR GENERATORS OF MARKOV PROCESSES IN $R^d$

**Oksana YAROVA**

*Ivan Franko National University of Lviv*
*1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mail: oksanayarova93@gmail.com*

The generators of Markov processes in the Poisson and Levy approximation are considered. These processes are normalized by nonlinear factors. An asymptotic representation for generators of Markov processes is found in $R^d$.

*Key words:* Markov process, Poisson approximation, Levi approximation, process with independent increments, generator.

# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме має передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською та англійською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме подається на веб-сторінці

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)" (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2010**.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

## Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).
2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.
3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.

4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.

6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248

8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.

9. V. Bovdi, *Free subgroups in group rings*, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.

10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.

11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.