ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 85

2018

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 85

Випуск 85

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2018

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол №64/03 від 27.03.2019 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №528 від 12.05.2015р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-46-07

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 11,4
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 5–23
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 5–23
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.005-023

УДК 51(092)

ЮЗЕФ ПУЗИНА – ПРОВІСНИК ЛЬВІВСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

Олена ГРИНІВ, Ярослав ПРИТУЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: ohryniv@gmail.com, ya.g.prytula@gmail.com

Досліджуємо біографію Юзефа Пузини (1856 — 1919) — одного з засновників львівської математичної школи. Подано відомості про його родину, навчання, педагогічну та наукову діяльність. Також подано інформацію про його учнів і слухачів семінару.

Ключові слова: Юзеф Пузина, Львівська математична школа, Львівський університет.

Професори математики, які викладали у Львові до середини XIX століття, були головно вихідцями з поза Галичини. Освіту вони здобували в Празі та Відні. Першими галичанами керівниками кафедр математики в університеті та політехніці були Вавжинец (Лаврентій) Жмурко (Wawrzyniec Żmurko) та Юзеф Пузина (Józef Puzyna). Особливо важливу роль у формуванні польської і української школи математики у Львові відіграла наукова, педагогічна й організаційна діяльність Юзефа Пузини.

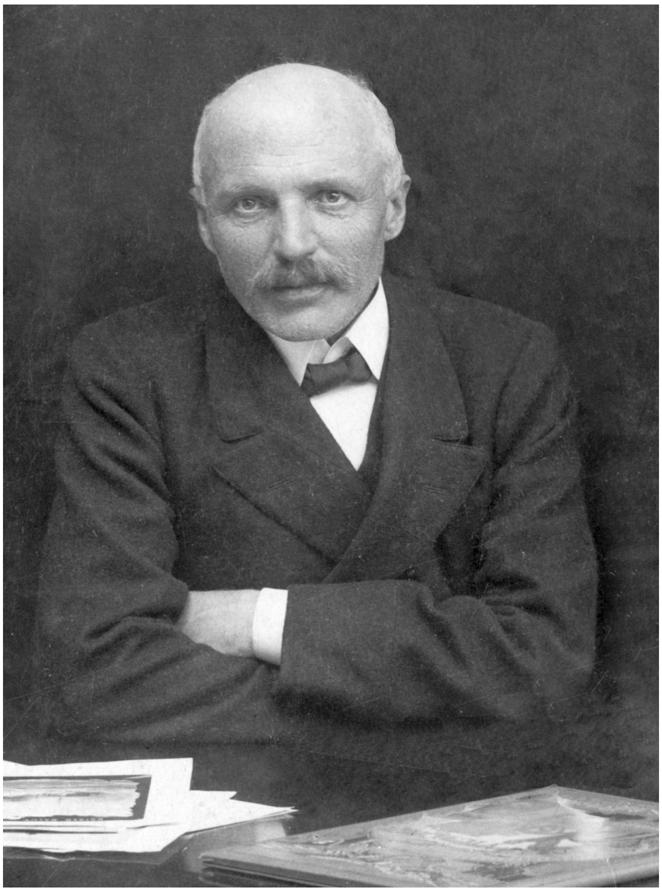
Пишучи про математиків, які вплинули на розвиток польської математики в кінці XIX – на початку XX століття, Казимир Куратовський (Kazimierz Kuratowski) зазначив: "Безсумнівно, одним і найбільш заслуженим і прогресивним представником генерації, про яку йдеться, був Юзеф Пузина, професор Львівського університету.

Отже, був до певної міри провісником ідей, які мали розквітнули у працях наступної генерації польських математиків" [1, с. 12].

Про вплив Юзефа Пузини на формування його як математика пише у своїх спогадах український математик Володимир Левицький: "Йому завдячую те знання

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70

математики, яке маю дотепер, завдяки йому пізнав я усі модерні теорії і методи, завдяки йому набрав я замилування до праці та набрав охоти до самостійних дослідів.” [2, с. 77].



Юзеф князь Пузина

Історія роду. Життєвий шлях

Юзеф князь з Козельська Пузина народився 19 березня 1856 року у Новому Мартинові Рогатинського повіту (нині село Новий Мартинів Галицького р-ну Івано-Франківської обл.) у родині Володимира Пузини та Феліції з Рудзьких. Батько був власником земель Нового Мартинова. Історичні документи засвідчують походження роду Пузини аж від княжої династії Рюриковичів, підтверджують їхній князівський титул, що його предки отримали, володіючи Козельським удільним князівством [3, 4].

В роду Пузин було багато визначних особистостей. Так Павло, який у молодості воював проти татар, потім став монахом, в 1649 році був у Луцьку єпископом грецького віросповідання. Його брат Ян перший з Пузин після шлюбу став римо-католиком. Від нього пішов дальший рід Пузин до Юзефа Пузини [3].

Ю. Пузина закінчив у 1875 році гімназію імені Франца Йосифа у Львові. У цьому ж році почав навчання на філософському факультеті Львівського університету. В університеті він відвідував лекції з фізики, хімії, філософії, а головно лекції з математики професора математики Лаврентія Жмурка та професора математичної фізики Оскара Фабіана (Oskar Fabian).

Лаврентій Жмурко народився 9 липня 1824 року в Яворові. Навчався у гімназії у Перемишлі, після філософських студій у Львові поїхав до Відня, де вивчав математику та природничі науки в університеті та політехніці. У Відні Жмурко став першим габілітованим доцентом у політехнічних навчальних закладах Австро-Угорщини. З 1850/1851 він викладав у Львові, з наступного року уже звичайний професор Технічної академії. З 1872 до 1884 року Л. Жмурко був професором одночасно в університеті та у Політехнічній школі у Львові, згодом він читав лекції тільки в університеті. Л. Жмурко відзначався оригінальною побудовою навчальних курсів математики. Його курс опирався на впроваджену ним систему просторових чисел. Під його керівництвом в університеті шість осіб отримали ступінь доктора філософії, в тім числі і Ю. Пузина.

У 1877–1878 навчальному році Ю. Пузина проходив військову службу, після якої отримав звання поручика резерву. Продовжив навчання в університеті до 1879/1880 навчального року. Цього ж року зголосився до складання вчительського іспиту на право викладання фізики та математики в гімназіях і реальних школах. Написавши праці з педагогіки, математики та фізики складання вчительських іспитів закінчив 1 червня 1882 року.

Для отримання ступеня доктора філософії Ю. Пузина подав працю "O pozornie dwuwartościowych określonych całkach podwójnych" ("Про ніби двозначні подвійні означені інтеграли"). Рецензентами були Л. Жмурко та О. Фабіан. Після складання на "відмінно" наукових іспитів з математики та фізики 2.12.1882 року та філософії 2.07.1883 року, Ю. Пузина 5 липня 1883 року отримав ступінь доктора філософії [5]. В цьому ж році Ю. Пузина отримав стипендію у розмірі 1000 złr для продовження навчання за кордоном. За порадою Л. Жмурка він поїхав до Берліна. Там в університеті протягом 1883/1884 навчального року слухав лекції професорів К. Вейєрштрасса, Л. Кронеккера, І. Фукса, Е. Куммера, Е. Нетто, Р. Гоппе та доцентів Й. Кноблауха, К. Рунге.

У зимовому півріччі основну увагу звернув на ознайомлення з теорією Вейєрштрасса побудови теорії функцій, а у літньому семестрі – вивчав нові напрями в геометрії. Одночасно протягом цілого року брав участь у математичному семінарі, керівником якого у першому півріччі був професор Л. Кронеккер, а у другому – професори К. Вейєрштрасс і Л. Кронеккер. Після повернення з Берліна Ю. Пузина пройшов габілітацію для отримання права читати лекції у Львівському університеті. Як габілітаційні праці подав уже надруковану докторську працю [A1], а також рукопис "Przyczynek do teorii obliczenia symbołów nieoznaczonych" ("Додаток до теорії обчислень невизначених символів"). Традиційно в поданні претендент повідомляв, які курси він має намір прочитати у найближчі семестри. Ю. Пузина підготував такі курси: Нові методи в аналітичній геометрії, Синтетична геометрія, Застосування інфінітезимального числення в геометрії. В першому курсі він мав намір подати загальні методи теорії алгебричних кривих і поверхонь (теорія Ю. Плюккера). Це дало б змогу застосувати їх до вивчення деяких алгебричних функцій, які містяться у другій габілітаційній праці. У другому – викласти теорію Я. Штейнера. У третьому – доповнити властивості геометричних тіл з погляду кривизни на основі диференціального числення. Габілітаційний колоквіум відбувся 11 грудня 1884 року, де питання (вісім) задавав Л, Жмурко, а 15 грудня Пузина прочитав габілітаційну лекцію "O całkach Eulera" ("Про інтеграли Ейлера") [6].

У 1885 році Ю. Пузина читав лекції як приват-доцент. Посаду надзвичайного професора він отримав у 1889 році, а з 1892 року Ю. Пузина звичайний професор, керівник кафедри математики. Він також займав посади декана філософського факультету (1894–1895) та ректора (1904–1905) Львівського університету. Як ректор був послом VIII каденції Сейму Галичини.

У 1900 році Ю. Пузину обрали членом-кореспондентом Академії наук і мистецтв у Кракові. У Львові 1917 року було засноване Математичне товариство, його першим головою став Ю. Пузина. Активну участь у роботі товариства брали З. Янішевський, В. Серпінський, Г. Штайнгауз та ін. У 1918 році Ю. Пузина на товаристві мав доповідь "O śladach zerowych szeregu potęngowego" ("Про нульові місця степеневого ряду") [7, с. 22–23].

Ю. Пузина був однокурсником Івана Франка, а в рік його габілітації на філософському факультеті був деканом.

Педагогічна праця

Очолюючи протягом багатьох років кафедру математики, головні зусилля Ю. Пузина спрямовував на добір і підготовку лекційних курсів. Учений прочитав понад тридцять різних основних і спеціальних курсів, які належали до різних розділів математики. Він не тільки розширив тематику з класичної на той час математики, а й почав читати курси, які охоплювали елементи теорії множин, топології та інших нових розділів математики. Тексти всіх лекційних курсів зберігались у бібліотеці математичного семінару.

Викладаючи як приват-доцент у 1885 році, а згодом як надзвичайний і звичайний професор з 1889 і 1892 року, відповідно, Ю. Пузина прочитав такі курси:

- синтетична геометрія (геометрія положення) (1885/1886, 1888/1889);
- теорія аналітичних функцій (1886, 1887/1888);
- деякі твердження з теорії функцій (1887);
- теорія абелевих функцій (1888/1889, 1891/1892, 1912/1913);
- інтегрування диференціальних рівнянь (1889, 1896, 1900, 1904, 1906, 1906/1907, 1910/1911, 1913/1914, 1915/1916);
- аналітична геометрія (1880/1890, 1892, 1906/1907, 1910/1911, 1913/1914, 1915/1916);
- про означений інтеграл (1890);
- теорія еліптичних функцій (1891, 1897, 1898, 1908);
- теорія чисел (1891, 1895/1896);
- теорія підстановок (1892);

- вищий аналіз (1892/1893, 1905/1906, 1915/1916);
- варіаційне числення (1893);
- диференціальне числення та застосування (1893/1894);
- вибрані розділи теорії функцій (1893);
- автоморфні функції (1894, 1898, 1912/1913);
- вища алгебра (1894/1895, 1897, 1916);
- застосування еліптичних функцій (1895, 1905);
- диференціальне та інтегральне числення (1895/1896, 1899/1900, 1901/1902);
- диференціальні рівняння в частинних похідних (1897, 1901, 1907, 1917/1918);
- теорія двійкових форм (1896);
- визначники та їхнє застосування (1898);
- топологічні студії (1899);
- інтеграли Абеля (1899);
- про гіпергеометричні ряди (1899);
- нова геометрія (1900, 1904/1905);
- лінійні диференціальні рівняння (1900, 1907/1908, 1917);
- диференціальна геометрія (1902, 1917/1918);
- теорія алгебричних функцій (1906);
- функції многогранників, модулярні та еліптичні функції (1908/1909);
- теорія інваріантів (1909);
- конформні відображення (1909/1910);
- звичайні диференціальні рівняння (1909/1910, 1916);
- інтегральні рівняння (1911/1912);
- нескінченні послідовності та розвинення (1917);
- неевклідова геометрія (1918);

з історії математики, диференціальні рівняння Лі (див. [8]).

Вражає не тільки велика кількість і тематика прочитаних ним лекцій, а й акуратність підготовки цих курсів. Це видно з конспектів курсів, які писав Володимир Левицький (Wolodymyr Lewycki), і збережені в рукописному відділі бібліотеки імені В. Стефаника.

Про свою методику навчання математики Ю. Пузина написав у проханні про допуск до габілітації: “Буду старатися у всіх своїх лекціях триматися методу, який відкриває і вказує слухачам дорогу, по якій вони могли би йти в дослідженнях в кожній окремій галузі”.

“Я є тої думки, що в математиці ... не досить давати доведення a priori сформульованих тверджень, а разом з тим старатися бути ніби в положенні винахідника, що доходить до тверджень як висновків. Слухач буде при цьому способі свідком цілого процесу досліджень і зможе уже в короткім часі і сам спробувати своїх сил ...” [6].

Уже в 1889 році Ю. Пузина вперше в університеті ввів у розкладі занять вправи з математики. З часом ці заняття організаційно були оформлені в математичні семінари. Наукові семінари у Львівському університеті були запроваджені після 1850 року. Першим був філологічно-історичний семінар, який організували на підставі статуту від 23 вересня 1852 року. Математичний семінар був створений розпорядженням Міністерства віросповідань і освіти з 1 грудня 1893 року. В першому параграфі статуту математичного семінару було записано: "Математичний семінар має завдання заохотити і залучити учнів до самостійних пошуків у математиці, як через ґрунтовне опрацювання лекційного матеріалу в застосуваннях і прикладах, а також через введення членів семінару в ті частини математики, які у звичайних академічних лекціях тільки подані коротко або взагалі відсутні, далі має ціль вивчення членів на ділових вчителів гімназій, реальних шкіл і вищих навчальних закладів".

Науковий семінар мав два відділення: вищий і нижчий. Кожен член вищого семінару був зобов'язаний у кожному півріччі зробити один виступ згідно з програмою семінару. Навчання на семінарі було безкоштовним. Кожного півріччя активних учасників вищого семінару відзначали стипендіями. Керівник семінару Ю. Пузина на кожне півріччя чи цілий рік призначав одного з активних учасників хронікером семінару. З 1894 до 1910 року хронікерами були: Володимир Левицький, Ян Залуський (Jan Zalucki), Михайло Рибачек (Michał Rybachek), Францішек Слушкевич (Franciszek Słuszkiewicz), Мечислав Ямруґевич (Mieczisław Jamrógewicz), Ґустав Клодніцький (Gustaw Kłodnicki), Дмитро Вайцович (Dymitr Wajcowicz), Казімір Струтинський (Kazimerz Strutyński), Антоні Ломніцький (Antoni Łomnicki), Владислав Жлобіцькі (Władysław Żłobicki), Никифор Садовський (Nicefor Sadowski), Юзеф Насільські (Józef Nasielski), Юзеф Орловський (Józef Orłowski), Еразм Ішковський (Erazm Iszkowski), Адам Патрин (Adam Patryn), Ізидор Обергардт (Izydor Oberhardt), Отто Нікодим (Otto Nikodym), Казіміра Кауцка (Kazimira Kaucka), Владислав Ліхтенберг (Władyslaw Lichtenberg), Станіслав Рузевич (Stanisław Ruziewicz).

У перший рік роботи математичних семінарів в зимовому семестрі у вищому семінарі брало участь 10 студентів, у нижчому – 18, у літньому семестрі, відповідно, 9 і 13 [9, t. 2, C. 389]. Тематика праць, виконаних учасниками вищого семінару, торкалася різних розділів математики: М. Рибачек "Teorya Galois'a" ("Теорія Галуа"), С. Руксер (S. Ruxer) "Zasady rachunku prawdopobieństwa" ("Основи теорії ймовірностей"), Ю. Розкош (J. Roskosz) "Rozwiania ułamkowych funcyi wymiernych" ("Розвинення дробових раціональних функцій"), А. Ломніцький "O kollineacyi systemów płaskich" ("Про колінеації плоских систем"), Д. Вайцович "Zastosowanie funkcyi elliptycznych krzywych 3$^{\text{ego}}$ i 4$^{\text{tego}}$ stopnia" ("Застосування еліптичних функцій до кривих 3-го і 4-го степеня"), Й. Янів (Josyp Janiw) "O funkcyi ciągłej nie mającej pochodnej" ("Про функції, які неперервні і не мають похідних"), В. Жлобіцкі "Szeregi Fourier'a" ("Ряди Фур'є"), Я. Лукасевич (Jan Łukasiewicz) "O Grassman "Nauce rozciągłosci" ("Про теорію розтягу Ґрассмана"), Ю. Мадей (Madej) "O wyznacznikach funkcyinych" ("Про функціональні визначники"), К. Глібовицький (Klym Glibowycki) "Teorya liczb algebraicznych" ("Теорія алгебричних чисел") та ін. Тексти цих праць збереглися до сьогодні [10].

Окремі праці, виконані на семінарі, публікувались в наукових журналах і повідомленнях (Sprawozdaniach ...) гімназій. Першими з них були: Е. Снопек (E. Snopek) "O kongruencyi $x^n + A_1x_{n-1} + \cdots + A_n = 0(\mod p)$", В. Левицький "O wyrażeniach symetrycznych z wartosci funkcyi $\mod m$", опубліковані у журналі "Prace matematyczno-fizyczne" (T. 4, 1893 та T. 6, 1895). Ця ж праця "Про симетричні вираження вартостей функції $\mod m$" була опублікована у "Записках Наукового товариства імені Шевченка" (Львів, 1894. Т. IV). Вона стала першою науковою статтею з математики опублікованою українською мовою.

Частина праць, які виконали на семінарах, стали докторськими працями учасників семінару. Ю. Пузина був промотором 10 докторатів. Першим його учнем доктором філософії став В. Левицький. Як докторську працю він подав вищезгадану працю і другу працю "Kilka uwag o wzorze interpolacyjnym Lagrange'a." Наступні його учні, які подали відповідні наукові праці, ([5]):

- Антоні Ломніцький "O odwzorowaniach cząteczkowych funkcji hipergeometrycznych" (Про конформні відображення);
- Роман Мечислав Ямруґевич "O powierzchniach najmniejszych" (Про мінімальні поверхні);
- Людвік Гординський (Ludwik Hordyński) "O wyznacznikach częściowo przetworzonych" (Про частково перетворені визначники);
- Адам Максимович (Adam Maksymowicz) "Funkcje harmoniczne o dowolnej iłości zmiennych niezależnych" (Гармонічні функції з довільною кількістю незалежних змінних);
- Антоні Вільк (Antoni Wilk) "Zarys teoryi całek Cauchy'ego" (Нарис теорії інтегралів Коші);
- Абрагам Ґоттфрід (Abraham Gottfried) "Działania na liczbach nadurojonych. Dwie próby badania szeregów potęgowych argumentu nadurojonego" (Дії на надуявними числами. Дві спроби дослідження степеневих рядів з надуявним аргументом);
- Стефан Мазуркевич (Stefan Mazurkiewicz) "Przyczynki do teorji mnogości" (Додатки до теорії множин);
- Станіслав Рузевич "Przyczynek do rachunku różniczkowego" (Додаток до диференціального числення);
- Адам Патрин "Badania nad funkcjami rozwiązującymi związek identyczny postaci $(1-x)^m\Phi(x) + x^m\varphi(x) = 1$" (Дослідження функцій, які задовольняють тотожність $(1-x)^m\Phi(x) + x^m\varphi(x) = 1$).

Зауважимо, що праці С. Мазуркевича та С. Рузевича були виконані під керівництвом В. Серпінського, який вже в 1912 році керував вищим семінаром. Однак В. Серпінський не був звичайним, а тільки надзвичайним професором, тому офіційно промотором міг бути тільки Ю. Пузина.

Учні Юзефа Пузини

До учнів Ю. Пузини слід перш за все віднести докторантів, які підготували докторські праці на семінарі під його керівництвом, а далі всіх учасників вищого семінару, хронікерів семінару та всіх, хто слухав його лекції. Зупинимось на особах, які отримали докторські ступені, а також на окремих учасниках вищого семінару Ю. Пузини.

Володимир Левицький (31.12.1872 – 14.07.1956) народився в Тернополі. Навчався в гімназіях у Тернополі, Золочеві та Львові. Вивчав математику, фізику, хімію та філософію на філософському факультеті Львівського університету у 1890-1894 роках. З третього курсу вів наукові дослідження під керівництвом професора

Юзефа Пузини, був першим хронікером вищого семінару і першим доктором наук підготованим (промованим) Ю. Пузиною.

У 1895 році склав вчительські іспити й отримав право викладати математику, фізику, хімію в гімназіях. Працював вчителем у Академічній гімназії у Львові, Тернопільській гімназії та в V гімназії у Львові.

У 1914 році В. Левицького призвали до війська, потрапив у російський полон. Після повернення до Львова у 1918 році продовжував працювати в закладах освіти – інспектором, шкільним інструктором.

Головне поле його діяльності — Наукове товариство імені Шевченка. З 1894 року Володимир Левицький член НТШ, згодом очолював математично-природописно-лікарську секцію та редагував "Збірник математично-природничописно-лікарської секції НТШ" від першого (1897) до останнього 32-го тому (1939). Багато зусиль доклав до створення української математичної термінології, видання підручників і популяризації науки українською мовою.

Працював у Львівскому університеті імені Івана Франка на посаді професора з 1940 до 1955 року. Після смерті С. Банаха був керівником його кафедри (1945 – 1948).

Клим Глібовицький (04.01.1875 – 24.04.1907) народився в с. Махнівці Бережанського повіту в родині греко-католицького священика. Після закінчення гімназії в Бережанах у 1892 – 1896 роках навчався на філософському факультеті Львівського університету.

У 1896 – 1898 роках працював у гімназії у Тернополі. Склавши вчительські іспити в 1898 році з червня цього року викладав математику та фізику в українській гімназії у Перемишлі. З дитинства К. Глібовицький мав слабке здоров'я, часто хворів і виїжджав на лікування на море. Подав до ради філософського факультету працю "Prawa ruchu wahadłowego" ("Закони руху маятника"), його допустили до докторських іспитів, але до них не приступив.

К. Глібовицький опублікував п'ять статей українською та польською мовами. Його наукові праці торкаються розв'язків алгебричних рівнянь у радикалах і теорії диференціальних рівнянь. В його праці викладено теорію Галуа. До сторіччя з дня народження Н. Г. Абеля надрукував ґрунтовну працю [11], де міститься огляд основних праць Абеля.

Помер К. Глібовицький у Куликові.

Антоні Ломніцький (17.01.1881 – 03.07.1941) народився у Львові в сім'ї відомого зоолога, палеонтолога та геолога Мар'яна Ломніцького, який був організатором розкопок в Старуні біля Коломиї, де в 1907 році викопали мамонта та носорога.

А. Ломніцький атестат зрілості отримав у 1899 році у IV гімназії Львова. Навчався у 1899-1903 роках на філософському факультеті Львівського університету. У листопаді 1903 року отримав ступінь доктора філософії, а також склав вчительські іспити.

У 1904–1906 роках був вчителем гімназії в Тарнові, а в 1906–1907 роках продовжував навчання в університеті у Геттінгені. З 1907 до 1920 року А. Ломніцький викладав математику в VII гімназії у Львові. У серпні 1919 року отримав право викладання (габілітацію) у Львівській Політехнічній школі.

З серпня 1920 року А. Ломніцький став надзвичайним, а з 1921 року – звичайним професором, керівником II кафедри математики у Львівській політехніці. Цю посаду він займав до липня 1941 року. В 1920–1922 роках асистентом на його кафедрі був Стефан Банах.

А. Ломніцький написав 23 книги, з них 12 підручників для гімназій і чотири академічні підручники. Його 33 наукові праці торкаються питань аналізу, теорії ймовірностей, статистики, математичної картографії та дидактики математики.

Роман Мечислав Ямругевич (19.07.1877 – ?) народився у Самборі. Після закінчення навчання на філософському факультеті Львівського університету в 1899 році склав вчительські іспити. У 1899 – 1900 роках викладав математику та фізику у Саноку, пізніше в Бохні. Тут у 1903 році в "Sprawozdanie dyrekcyi C.K. gimnazyum w Bochni" опублікував статтю "O najmniejszych powierzchniach", яка стала його докторською роботою. Викладав у гімназіях Кракова та Львова. Автор публікацій в "Sprawozdaniach", гімназійних та шкільних підручників. Учасник Першого польського математичного з'їзду у Львові 1927 року.

Людвік Гординський (08.04.1882 – 07.02.1920) народився в Ряшеві. Початкову та середню школу закінчив у Львові. У 1900 – 1904 роках навчався на філософському факультеті Львівського університету. Після річної практики у гімназії у травні 1905 року склав вчительські іспити. У 1907 на підставі вже опублікованої праці та складених докторських іспитів отримав ступінь доктора філософії. Навчальний рік 1908/1909 провів на студіях у Парижі. Після повернення працював в реальній школі у Львові, в 1911 – 1912 викладав математику у Політехнічній школі.

В 1913/1914 навчальному році продовжив студії в Колеж де Франс та в університеті в Парижі. З Парижу повернувся до Кракова, де читав популярні лекції, видавав підручники.

Він переклав п'ятитомний підручник геометрії R. Suppantschitsche, видав літографічний курс "Wykłady elementów matematyki" (Lwów, 1912) та статті в гімназійних "Sprawozdaniach". У 1914 році повернувся до Львова, захворів грипом (іспанкою) і помер.

Адам Максимович (19.11.1880 – 07.01.1970) народився в Ланьцуті. Гімназію закінчив у 1898 році у Тарнові. Навчався вісім семестрів у Ягеллонському університеті та два семестри у Львівському університеті. З 1902 року виконував обов'язки асистента кафедри фізики у Політехнічній школі. Брав участь у семінарах, написав сім семінарських праць. Закінчив навчання в університеті у 1904 році, в 1905 році у Кракові склав вчительські іспити з математики та фізики. Викладав математику та фізику в III гімназії у Львові. Уже в 1908/1909 навчальному році мав доручення читати курс елементів вищої математики у Політехнічній школі, до 1922 року був там платним доцентом. Після габілітації у 1923 році продовжував читати курс математики для хіміків і спеціальні курси на загальному факультеті. Викладав математику і у Львівському політехнічному інституті. Єдиний польський математик, який не виїхав зі Львова. Помер у Львові, похований на Личаківському цвинтарі.

Антоні Вільк (19.12.1876 – 17.02.1940) народився в Плавовіцах (нині село в Малопольському воєводстві). Навчався в III гімназії в Кракові. У 1899 – 1904 роках вивчав математику, астрономію та фізику в Ягеллонському університеті. Працював викладачем у гімназіях. У 1927–1939 роках — заступник ад'юнкта в астрономічній обсерваторії, викладав астрономію в Ягеллонському університеті.

Абрахам Ґоттфрід (07.03.1883 – ??) народився в Бучачі. Навчався на філософському факультеті Львівського університету. Вчительські іспити склав у 1908 році. Викладав у II державній гімназії у Станіславові.

Стефан Мазуркевич (25.09.1888 – 19.06.1945). Стефан Мазуркевич не був безпосереднім учнем Ю. Пузини. Спільно з В. Серпінським Ю. Пузина був рецензентом докторської праці, екзаменатором з математики та фізики, представляв С. Мазуркевича на його офіційній докторській промоції.

С. Мазуркевич народився у Варшаві, де закінчив середню школу. Іспит на атестат зрілості склав у Кракові 1906 року та записався на студії до Ягеллонського університету. Далі продовжував навчання у Мюнхені, Геттінгені та у Львові. Докторську працю виконав під керівництвом В. Серпінського. З 1915 року викладав у Варшавському університеті. Головні наукові зацікавлення: топологія, теорія функцій, теорія ймовірностей.

Станіслав Рузевич (29.08.1889 – 12.07.1941) народився в Підстаях біля Коломиї. В гімназії навчався у Львові та Коломиї. Навчання на філософському факультеті Львівського університету почав у 1908 році. Відвідував лекції з математики та наукові семінари Ю. Пузини та В. Серпінського. Тематика його наукових праць сформувалась на семінарах В. Серпінського. Його промотором був Ю. Пузина. У 1918 році габілітувався у Львівському університеті та почав викладати з 1918/1919 навчального року. З 1921 року керував кафедрою математики III. У 1933 році його кафедру ліквідували і в університеті читав лекції як приват доцент. З 1934/1935 навчального року працював у Вищій Школі закордонної торгівлі у Львові.

Адам Патрин (27.07.1887 – ??.??.1939) народився в Горліцах (місто в південній Польщі). Атестат зрілості отримав в IV гімназії у Львові. У 1905–1909 роках навчався на філософському факультеті Львівського університету. Відвідував семінари Ю. Пузини, був хронікером вищого семінару. В 1910 році отримав посаду асистента на кафедрі сферичної астрономії і геодезії в Політехнічній школі у Львові. В 1911 році склав іспити на право викладання математики та фізики в середніх школах. З цього часу працював вчителем у гімназіях і директором приватної жіночої гімназії в Стрию (Prywatne Gimnazjum Żeńskie Zgromadzenia Najświętszej Rodziny z Nazaretu).

Никифор Садовський (1884 – 05(за іншими даними 11, 16).03.1935) народився в Тернополі. Закінчив гімназію імені Франца Йосипа у Львові 1902 року. Навчався у 1902–1906 роках на філософському факультеті Львівського університету. Був учасником семінару Ю. Пузини, один рік вів хроніку семінару. Склав іспити на право викладання математики та фізики українською і польською мовами. Викладав в українській гімназії в Перемишлі (1907–1908) з 1910 – у польській гімназії у Тернополі. З 1922 року дійсний член НТШ.

Наукові праці, що стосувалися теорії аналітичних функцій та геометрії, друкував у повідомленнях гімназій у Перемишлі та Тернополі, у виданнях НТШ [11]. Перебуваючи в російському полоні в Омську, написав і передав українській громаді "Курс алгебри з задачником".

Помер Н. Садовський у Тернополі.

Михайло Рибачек (11.11.1874 – 22.04.1926) народився в селі Оріховець (нині Підволочиського району Тернопільської області) в родині вчителя. У 1892 році закінчив Тернопільську гімназію. Навчаючись на філософському факультеті Львівського університету, був хронікером на вищому семінарі Ю. Пузини, зробив декілька доповідей. Працював у гімназії у Коломиї в 1898–1907 роках, згодом у філії Львівської академічної гімназії, у 1917–1919 роках був директором. Опублікував, зокрема, статтю "Льогічна будова математичних доказів" у звіті II гімназії у Коломиї. Залишився невиданим його підручник з вищої математики. Член НТШ з 1909 р.

Похований М. Рибачек на Личаківському цвинтарі у Львові.

Слухали лекції та були учасниками семінарів Ю. Пузини ряд відомих польських та українських математиків, логіків та фізиків, зокрема, крім уже згаданих Отто Нікодим, Владислав Жлобіцький, Ян Лукасевич, Мирон Зарицький, Микола Чайковський та інші.

Наукова діяльність

Науковий доробок Ю. Пузини становить 22 праці, огляд яких зроблено в [12]. Наукові зацікавлення вченого сформувались під впливом К. Вейєрштрасса та Л. Кронекера. Особливо плідним на нові звершення на ниві математики був період до 1900 року. Зокрема, у своєму першому досліджені, докторській праці, автор з'ясував залежність значень подвійного інтеграла від порядку інтегрування. Згодом це саме питання він досліджував і для n-кратних інтегралів [A1, A10]. Низку праць Ю. Пузина присвятив теорії алгебричних кривих і функцій, а також застосуванню узагальненого інтерполяційного виразу Лагранжа до проективної теорії алгебричних кривих [A2, A7, A18].

Улюблена тема наукових студій Ю. Пузини — теорія аналітичних функцій. Він досліджував середні арифметичні значення, які приймає степеневий ряд у вершинах многокутника й отримує зв'язок цих середніх з лишками Коші; розглядав питання поведінки степеневих рядів на колі збіжності; цікавився твердженнями Вейєрштрасса і Міттаг-Лефлера про розклад аналітичних функцій на прості елементи [A9, A14, A15].

Наприкінці життя професора Ю. Пузину цікавила теорія інтегральних рівнянь. Зокрема, в 1907 році на X з'їзді лікарів і природознавців у Львові вчений виголосив доповідь "O związku między grupami ciągłemi Lie'go a równaniami całkowimi (Fredholm, Hilbert)" ("Про зв'язок між неперервними групами Лі та інтегральними рівняннями (Фредгольм, Гільберт)"). Цієї ж тематики стосується стаття [A22], в основу якої покладено лекції, які виголосив Ю. Пузина на курсах підвищення кваліфікації вчителів середніх шкіл Львова.

Найбільшим досягненням вченого була двотомна праця "Teorija funkcyj analitycznych", в якій автор зібрав найважливіші дослідження Вейєрштрасса, Коші, Рімана та інших відомих математиків, які стосуються теорії аналітичних функцій. Масштабні вступні розділи містять теорію множин з елементами топології, комплексні числа, ряди, теорію підстановок, теорію груп й інваріантів. Цінність цієї монографії відображена в багатьох наукових публікаціях [13, 14, 16, 15].

У зазначеній монографії теорія множин уперше була викладена польською мовою. У цій праці Ю. Пузина вперше у польській науці вжив деякі математичні терміни та поняття польською мовою.

“Пропагувала вона сучасний науковий підхід до теорії аналітичних функцій на основі теорії множин, а її обширний розділ III, під заголовком “З теорії множин”, містив подання основних топологічних понять, таких як “okrężenia” (окіл), “mnogość zamknięta” (замкнена множина), “mnogość wszędzi gęsta” (скрізь щільна множина), континуум і т.п. – в теперішньому їх розумінні. Був то один з перших в світі (принаймні перший після “Курсу” К. Жордана) книжний виклад загальної топології” [18, с. 19].

Частину матеріалу, яка стосується теорії множин, можна назвати, в якомусь сенсі, революційною, якщо врахувати, що монографія була опублікована ще перед відкриттям відомих парадоксів теорії множин. З викладеного матеріалу видно, що Пузина приймав найбільш фундаментальні ідеї теорії множин. Важко переоцінити важливість монографії для подальшого розвитку теорії множин у Польщі [14].

Частина II тому присвячена рімановим поверхням, топологічні властивості ріманових поверхонь відіграють важливу роль у теорії аналітичних функцій однієї змінної. Рівень строгості доведень тверджень на поверхнях трохи нижчий, ніж у поданому теоретико-множинному чи алгебричному матеріалі [16].

У монографії використовується підхід до представлення топологічних понять, який не базується на теоретико-множинній термінології. Описуючи топологічні властивості (ріманових) поверхонь, Пузина надає перевагу інтуїтивним і візуальним аргументам, в дусі Пуанкаре. Це поєднання стилів дещо еклектичне, але може бути виправданим з дидактичної точки зору [14, 15].

Вихід у світ першого тому монографії не залишився непоміченим, у квітні 1899 року у 8 номері берлінський бібліографічний журнал опублікував відгук на перший том. У цьому відгуку висловлено обурення, що ґрунтовна та гарно оформлена праця, виконана “з великою старанністю і особливою грамотністю,” написана “мовою, незрозумілою для всього світу, за винятком малого округу”. На цей закид відповів Плацид Дзівінський у рецензії, яку опублікував у журналі “Kosmos” (Космос) (№24, 1899 р.), висловивші надію, що “з виходом другого тому, обурення згасне, а можливо і німці захочуть вивчити польську мову, щоб прочитати працю польського професора, який, можливо, зрозумів теорію Вейєрштраса детальніше, ніж вчені, земляки великого майстра”. І П. Дзівінський і К. Журавський у відгуку у “Prace matematyczno-fizyczne” наголошували на старанності, з якою опрацьований і викладений матеріал — зрозумілі пояснення найменших деталей, посилання на літературу, добре обдумані приклади, які заохочують початківця до науки і самостійних студій.

Відгук на другий том опублікував В. Кемпінський в журналі “Kosmos” (Космос) (№24, 1899 р.), характеризуючи монографію Пузини як найвичерпнішу працю з цього предмета.

Відомі математики Станіслав Сакс і Антоній Зігмунд так зазначили про наукову цінність монографії Ю. Пузини: “Ця праця є справжньою енциклопедією аналізу, крім власне теорії аналітичних функцій, яка викладена частково у прекрасному стилі Вейєрштрасса; вона містить відомості з галузі теорії множин і топології, теорії груп, алгебри, диференціальних рівнянь, гармонічних функцій. Якби вона була надрукованою більш розповсюдженою мовою, то дочекалась би подальших, більш досконалих видань, оскільки має всі дані, щоб стати класичним підручником" [17]. На що написав Ж. Кахане: "Пузина був автором знаменитої книги про аналітичні функції – джерело натхнення Сакса і Зігмунда" [19].

Багато зусиль доклав Ю. Пузина для відкриття у Львівському університеті другої кафедри математики. У 1900–1906 роках її обіймав надзвичайний професор Ян Раєвський (Jan Rajewski). У 1907 році за дорученням філософського факультету брав участь у роботі комісії професорів всіх австрійських університетів, яка подала в міністерство пропозиції про збільшення кафедр математики в університетах Австро-Угорщини. У 1908 році на запрошення Ю. Пузини до Львова приїхав математик Вацлав Серпінський, який спершу працював приват-доцентом (1908–1910), а відтак – надзвичайним професором (1910–1918).

Перебуваючи в 1917 році в Кракові, Ю. Пузина запропонував Гюго Штайнгаузу, якого знав ще студентом з 1906 року, зробити габілітацію для отримання посади доцента у Львівському університеті [20, с. 98]. На габілітаційну лекцію Г. Штайнгауза прибув тоді Стефан Банах. Вважаємо, що це запрошення визначило долю не лише самого Г. Штайнгауза як майбутнього вченого, а й, можливо, всієї львівської математики 20–30-х років XX ст.

Родина Ю. Пузини

Юзеф Пузина одружився 20 липня 1888 року у Кракові з Яніною Хоєцькою (1870 – 1940). У подружжя було п'ятеро дітей: син Стефан, дочки Яніна, Анна, Марія і Софія.

Син Стефан Пузина (1890–1948) був одружений з Марією Скаржинською (Skarzyńska) (1897 – 1919), а в 1930 році одружився з Мартиною Ґриґлачевською (Grygłaszewska) (1905–1986).

Яніна (1890–1956) була замужем за Станіславом Косткевичем (Kostkewicz) (1880–1951).

Анна (1891–1986) в 1910 році вийшла заміж за Єжи Бальдвіна-Рамульта (Baldwin-Ramułt) (1893–1927), а в 1914 році вийшла заміж за Яна Слюбіч-Залеського (Ślubicz-Załęski) (1893–1940).

Марія (1892–1976) в 1919 вийла заміж за Єжи Бальдвіном-Рамультом (1893–1927), а пізніше за Францішка Сцібор-Рильського (Ścibor-Rylski) (1900–??).

Софія (1895–1980) була замужем за Ярославом Станіславом Мичковським (Myczkowski) (1890–1967) та Юзефом Моравським (Morawski) (1893–1969).

Сімейне життя Ю. Пузини не було легким. Разом з професорськими обов'язками змушений був опікуватися господарством у маєтку у селі Станкові біля Стрия. Допомоги у цій справі від дружини він не мав. Про це свідчать перші речення його заповіту: "Через те, що моя дружина Яніна з Хоєцьких розтратила для свого власного задоволення і потреб з мого маєтку біля $\frac{1}{4}$ мільйона крон, тому вона не має права навіть на утримання, а може мати єдине претензії до пенсії вдови по мені як по професорові університету" [6].

Яніна і після смерті чоловіка створювала фінансові проблеми дітям, беручи в борг товари в різних торгових закладах [21].

Цікавою є історія другої дружини Стефана Пузини.

Мартина Ґриґлачевська народилася 21.07.1903 у м. Борщові (нині Тернопільська область). Навчалася на гуманітарному факультеті Львівського університету, спеціалізувалася з етнології. Почавши з третього року навчання (з 1 травня 1926 року до 30 вересня 1929 року), працювала демонстратором на кафедрі етнології. У 1929 році захистила докторську працю про антропологічні типи швейцарців. Промотором був професор Ян Чекановський, який, до речі, у 1929/1930 навчальному році читав для математиків курс "Застосування статистики".

Працюючи асистенткою у Центральному інституті фізичного виховання у Варшаві, досліджувала залежність фізичних умінь студенток від їхніх антропологічних особливостей. У 1930 році вийшла заміж за Стефана Пузину. Після приходу до Львова у вересні 1939 року радянської влади Стефан Пузина виїхав до Великобританії, а Мартина залишилась у Львові. В часи німецької окупації вона виконувала завдання Армії Крайової і була арештована гестапо, опинилася в Освенцімі. Там Мартина була змушена брати участь у злочинних дослідженнях, якими керував доктор Менгеле, над в'язнями табору. Копії, які зробила Мартина, з рукописів досліджень Менгеля були передані після війни головній комісії досліджень гітлерівських злочинів. У 1946 році Мартина виїхала до Англії до Стефана Пузини, а згодом вони переїхали до Південно Африканської Республіки, де в 1948 році помер її чоловік. Мартина повернулася до Лондона, де працювала як супроводжуюча особа однієї британської дами. Померла Мартина 29 квітня 1986 року [21, с. 125], [22, 23, 24].

Восени 2018 року Львів відвідала правнучка Юзефа Пузини (онука Марії Пузини та Єжи Бальдвіна-Рамульта) – Моніка Млодзіановска і залишила запис в Новій Шотландській книзі "... Żadnego zadania z Księgi Szkockiej nie rozwiązałam, a jednak dostałam gęś! na talerzu!..." [28].

Спогади про Ю. Пузину

Професор Пузина був прекрасним лектором. Його лекції захоплювали студентів любов'ю лектора до математики, досконалою, майже поетичною, формою викладу. Про це згадували його студенти – Антоні Ломніцький і Станіслав Рузевич. "Хто слухав ці лекції, чудово знає, що були вони приготовані надзвичайно старанно, що Пузина вмів вибрати з багатого матеріалу істотні і цікаві речі, і що виголошував свої лекції у вишуканій, майже поетичній формі, захоплюючи слухачів своїм замилуванням предметом" [12].

Володимир Левицький згадував: "Професор не лише приготовляв кождий виклад дуже совісно, але поза викладами дуже щиро інтересувався кождим з нас, подавав літературу предмету, усякі теми і дуже радо гостив кождого з нас у себе дома, так що між ним і нами – бодай за моїх часів – вироблялося дружне, добре відношення" [2, С. 77].

"В відношенню до українців був проф. Пузина дуже справедливий, а що добре знав українську мову, тож часто залюбки розмовляв по українськи; пізніше під впливом обставин, а може й деяких своїх товаришів відсунувся він від українців, однак його пам'ять остане мене на все дорога як того, що сердечно інтересувався мною весь час університетських студій, а навіть і пізніше, хоча мої пляни і надії на майбутнє, звязані з його особою, не здійснилися. Та се може і не його вина" [2, с. 78].

“Пригадую собі момент, що коли по моїм риґорозі [іспиті] з математики і фізики вертали ми з проф. Пузиною з університету, і сей послідний, незвичайно гарна людина, вихвалював мене перед проф. Грушевським в українські мові, присутній тоді проф. Твардовський ... почав робити закиди проф. Пузині, що говорить з нами по українськи” [2, с. 103].

Про атмосферу, яка панувала в університеті в кінці життя Ю. Пузини, згадує в своїх спогадах Казимир Твардовський: “В жовтні 1918 року влада навчального закладу постановила позбавити кафедри дуже заслуженого професора Пузину і вислати його на пенсію, тільки за то, що продав частину землі свого маєтку “в єврейські руки” ” [26, с. 59].

Можливо, частково у зв'язку з тими подіями 63-річний професор захворів і скоро помер. Протоколи засідань ради професорів університету свідчать, що з листопада 1918 року Ю. Пузина не був присутнім на засіданнях.

Професор Ю. Пузина зразково вів господарство у своєму маєтку в с. Станкові. Добра пам'ять про нього зберігається тут і досі, позаяк на честь скасування панщини зусиллями вченого у центрі села була встановлена фігура Божої Матері з немовлям (нині вона стоїть на місцевому цвинтарі). У 1915 році Ю. Пузина пожертвував громаді Станкова велику суму грошей на відбудову сільської церкви, яка була пошкоджена під час Першої світової війни, а також подарував цій церкві ікону Пречистої Діви Марії. У радянський період ікону забрали до музею “Олеський замок”, а церкву закрили. Наприкінці 80-х років XX ст. церкву в с. Станкові знову відкрили, ікону Пречистої Діви Марії на вимогу селян повернули церковній громаді [27, с. 34, 35, 265].

Працюючи в університеті, Ю. Пузина проживав у Львові за різними адресами. Зокрема,

1897–1903 роки: вул. Длуґоша 11А, (сучасна вул. Кирила і Мефодія);
1904–1907 роки: вул. Панська 18, (сучасна вул. І. Франка);
1909–1911 роки: вул. Кампіана 15, (сучасна вул. Палія);
1911–1912 роки: вул. Обертинська 4, (сучасна вул. Зарицьких);
1915–1916 роки: вул. Сенаторська 7, (сучасна вул. Стецька);
1917–1918 роки: вул. Романовича 18, (сучасна вул. Саксаганського).

Після смерті Ю. Пузини спадкоємицею маєтку стала дочка Марія. Після смерті чоловіка у 1927 році вона вийшла заміж за Ф. Сцібор-Рильського, який почав розпродавати землі маєтку. На місці польського маєтку залишилось до сьогодні кілька дубів.

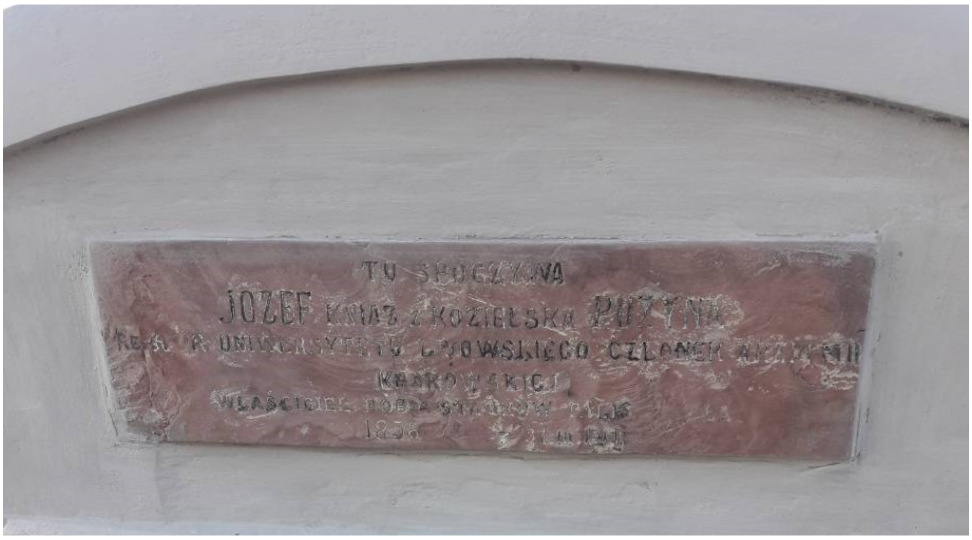
Помер професор Юзеф князь Пузина 30 березня 1919 р. і спершу був похований у с. Станкові біля церкви. Відтак родина побудувала на міському цвинтарі Стрия (нині районний центр Львівської обл.) могильний склеп, де його перепоховали.

Заповітом Ю. Пузина передав свою цінну бібліотеку (три шафи книжок) математичному семінару філософського факультету. Частина цих книжок і досі зберігається у бібліотеці сучасного механіко-математичного факультету Львівського університету [29].

Ю. Пузина цікавився історією та філософією. Проте найбільше його захоплювала музика, зокрема Вагнера, багато творів якого виконував на фортепіано напам'ять. Крім того, інколи вчений шкодував, що занадто пізно відкрив для себе музику "джерело розумової розкоші".

У студентські роки Ю. Пузина опублікував в "Альбомі з нагоди 50-ліття літературної творчості Юзефа Ігнація Крашевського" баладу "Мстиве джерело", в якій йдеться про злого короля, який гнобив людей. Одного разу король поїхав подивитись, як живе його народ, в горах побачив джерело, яке не дало води, щоб король міг напитись. Мудрий старець-ворожбит пояснює королю:

"Ty w grodzie swym dość jadła masz,
I złota dość i napojów:
Ale czy wiesz? ale czy znasz?
Choć cząstkę nędzy i znojów?"



Гробівець Юзефа князя Пузини на цвинтарі в м. Стрий

Список праць Юзефа Пузини

A1. *O pozornie dwuwartościowych określonych całkach podwójnych*, Pamiętnik Wydz. matem.-przyr. Akad. Umiej. **IX** (1884), 1–15.

A2. *O zastosowaniu uogólnionych form interpolacyjnych Lagrange'a*, Pamiętnik Wydz. matem.-przyr. Akad. Umiej. **XIV** (1888), 1–55.

A3. *O tak zwanych miejscach skupienia i ich zastosowania w Analizie*, Muzeum. **IV** (1888).

A4. *Z Analizy*, Muzeum. **IV** (1888).

A5. *O pewnem twierdzeniu Foliego*, Pamiętnik Wydz. matem.-przyr. Akad Umiej. **XVII** (1889), 1–22.

A6. *Prof. Wawrzyniec Żmurko; jego życie i dzieła*, Kosmos. **XIV** (1889).

A7. *Kilka uwag z ogólnej teorji krzywych algebraicznych*, Rozpr. Akad. Umiej. **XXII** (1891), 1–29.

A8. *Über den Laguerre'schen Rang einer eindeutigen analytischen Function mit unendlich vielen Nullstellen*, Monatsh. Math. Phys. **III** (1892), 1–16.

A9. *O wartościach funkcyj analitycznej na spółśrodkowych kręgach z kołem zbieżności jej elementu*, Rozp Akad. Umiej. **XXVI** (1893), 200–204.

A10. *Z teoryi n-krotnych całek określonych*, Prace matem.-fizyczne. **IV** (1892), 1–30.

A11. *O rozwinięciach zbieżnych wewnątrz krzywych Cassini'ego*, Prace matem.-fizyczne. **V** (1894), 21–46.

A12. *Über eine methodische Bildung der analytischen Ausdrcke $\Sigma f_v(x)\Sigma f_v(x,y)$ von constanten Werten*, Monatsh. Math. Phys. **V** (1894), 67–84.

A13. *O nierówności $g \geqslant |a_0|$*, Prace matem.-fiz. **VI** (1895), 1–4.

A14. *Do teorji szeregów potęgowych*, Rozpr. Akad. Umiejętn. **XXXI** (1896), 1–20.

A15. *O twierdzeniu, upraszczającem obliczanie czynników wykładniczych w Weierstrasowej teorji funkcyj eliptycznych*, Prace matem.-fizyczne. **X** (1898), 8–15.

A16. *Teorja funkcyj analitycznych*, Tom I. 1898. str. I—XVIII i 1 — 549. Tom II. str. I—XVI i 1—693. (Wydano z zasiłkiem Akad. Umiejętności w Krakowie).

A17. *O sumach nieskończenie wielu szeregów potęgowych i o twierdzeniu Mittag-Lefflera z teorji funkcyj*, Rozpr. Akad. Umiejętności. **XLIII** (1903), 1–33.

A18. *Geometrisches in der Weierstrassschen Theorie der algebraischen Funktionen*, Monatsh. Math. Phys. **XX** (1909), 1–103.

A19. *Metoda wyprowadzania całek logarytmicznych równania różniczkowego* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(ax+by+\ldots)}{(a'x+by+\ldots)}$, Księga pamiątkowa ku uczczeniu 260-tej rocznicy założenia Uniw. lwowskiego. (1911), 3–8.

A20. *O systemach krzywych z grupą preudoliniowych podstawień*, Rozpr. Akad. Umiej. **LI** (1911), 1–124.

A21. *Zastosowanie równań całkowych do tworzenia równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 1-go i 2-go i równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1-go*, Bolletin de l'Acad. des sciences de Cracovie. (1913), 1–45.

A22. *Zarys teorji równań całkowych*, Wektor. T. **II**. zesz 8 i 9. str. 356–370 i 406–417.

Список використаної літератури

1. K. Kuratowski, *Półwieku matematyki polskiej 1920–1970*. Warszawa, 1973.
2. ЦДІА України у Львові, ф. 771, оп. 1, спр. 2.
3. T. Żychliński, *Złota księga szlachty polskiej*, Warszawa, 1891.
4. Л. В. Войтович, *Удільні князівства Рюриковичів і Гединіковичів у XII–XVI ст. Історико-генеологічні дослідження*, Львів, 1996.
5. Ja. Prytuła, *Doktoraty z matematyki na Uniwersytecie Lwowskim w latach 1877–1917*, Dzieje Matematyki Polskiej II, pod red. W. Więsława, Wrocław 2013, s. 133–150.
6. ДАЛО, ф. 26, оп. 5, спр. 1568.

7. W. Hahn, Z. Czerny (red.), *Sprawozdanie związku polskich towarzystw naukowych we Lwowie*, N. 1, Lwów, 1920.
8. Program wykładów c. k. Uniwersytetu im. Franciszka I we Lwowie (1885-1919).
9. L. Finkel, S. Starzyński, *Historia Uniwersytetu Lwowskiego*, T. I, II. Lwów, 1894.
10. ДАЛО, ф. 26, оп.
11. Т. Банах, Я. Притула, *Математичні публікації НТШ до 1939 року*, Математичний вісник НТШ, **12** (2015), 130–146.
12. A. Lomnicki, S. Ruziewicz, *Józef Puzyna (1856–1919)*, Wiadomości matematyczne, **25** (1921), 11–19.
13. A. Płoski, *O dziele Józefa Puzyny "Teorya Funkcyj Analitycznych"*, Materialy z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Szczecin, 1988.
14. S. Domoradzki and M. Zarichnyi, *On some aspects of the set theory and topology in J. Puzyna's monumental work*, Technical Transactions, Fundamental Sciences **1** (2014), no. 7, 85–97.
15. S. Domoradzki *Riemann surfaces in Puzyna's monograph: Teorya funkcyj analitycznych*, Technical Transactions, Fundamentale Sciences **2** (2015), no. 20, 93–99.
16. S. Domoradzki and M. Zarichnyi, *On the beginning of topology in Lwów*, Technical Transactions, Fundamental Sciences, **2** (2015), no. 20, 143–153.
17. S. Saks, A. Zygmund, *Funkcje analityczne.* Warszawa–Lwów–Wilno, 1938.
18. R. Duda, *Lwowska Szkoła Matematyczna*, Wrocław, 2007.
19. J. P. Kahane, *Próba oceny wpływu polskiej szkoły matematycznej lat 1918 – 1936*, Wiadomości matematyczne, **31** (1955), 163–175.
20. H. Steihaus, *Wspomńieńia i zapiski*, Wrocław, 2002.
21. *Gdy księżna kocha ... Dzieje 65-lietniej Janiny Puzyny i jej amanta. Weksle, których nie płaciła*, Chwila, N 3800 środa 23 pazdernika 1929, str. 11.
22. ДАЛО, ф. 26, оп. 5, спр. 513.
23. Р. Тарнавський *Кафедра етнології Львівського університету. Класичний період (1910–1947)*, ЛНУ імені Івана Франка, Львів: 2016.
24. K. Heska-Kwaśniewicz, *Księżna i Mengele*, Tygodnik Powszechny. Katolicke pismo spoleczno-kulturalne (Kraków). N. 4 – 26 stycznia 2003. http://www.gryglaszewski.pl/home/genealogia/biogramy/drewo-gry/tp.html
25. P. Zawadski, *Martyna Gryglaszewska – księżna Puzynina. Antropolog ze Lwowa*, History – periodyk Koła naukowego historyków Uniwersytetu Opolskiego **15** (2016), 15–17.
26. M. Przenioslo, *Matematyce polscy w dwudziestoleciu międzywojennym*, Studium historyczne. Kielce, 2011.
27. Г. Дашко *Історія одного села: село Станків*, Львів, 2005.
28. http://www.math.lviv.ua/szkocka/viewpage.php?vol=2&page=72
29. J. Prytula, *Jósef Puzyna – prekursor lwowskiej szkoły matematycznej*, Studia Matematyczne Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego Jana Kochanowskiego **11** (2009), 113–119.

Стаття: надійшла до редколегії 01.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

JÓZEF PUZYNA, PRECURSOR OF THE LVIV MATHEMATICAL SCHOOL

Olena HRYNIV, Yaroslav PRYTULA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: ohryniv@gmail.com, ya.g.prytula@gmail.com

In the paper, we study the biography of Józef Puzyna (1856–19190, one of the founders of the Lviv Mathematical School. We provide information on his family, studying, teaching and scientific activity. Also, we speak on his descendants and participants of his seminar.

Key words: Józef Puzyna, Lviv Mathematical School, Lviv University.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 24–31
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 24–31
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.024-031

УДК 512.53

ON AUTOMORPHISMS OF THE SEMIGROUP OF ENDOMORPHISMS OF A FREE ABELIAN DIMONOID

Yurii ZHUCHOK

Luhansk Taras Shevchenko National University,
Gogol Square 1, 92703, Starobilsk, Ukraine
e-mail: zhuchok.yu@gmail.com

We describe all isomorphisms between the endomorphism semigroups of free abelian dimonoids and prove that that all automorphisms of the endomorphism semigroup of a free abelian dimonoid are inner.

Key words: dimonoid, free abelian dimonoid, endomorphism semigroup, automorphism.

1. **Introduction**

The notion of a dimonoid was introduced by J.-L. Loday in [1]. Recall that a nonempty set D with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ is called a *dimonoid* if for all $x, y, z \in D$ the following conditions hold:

$$
\begin{array}{ll}
(D_1) & (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \\
(D_2) & (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \\
(D_3) & (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z).
\end{array}
$$

It is not hard to see that a dimonoid becomes a semigroup if the operations of a dimonoid coincide. Dimonoids play a prominent role in the theory of Leibniz algebras, these structures and related systems have been studied by many authors (see, e.g., [2]–[5]).

The problem of studying automorphisms of the endomorphism semigroup for free algebras in a certain variety was raised by B. I. Plotkin in his papers on universal algebraic geometry (see, e.g., [6], [7]). Now there are quite a lot papers devoted to studying automorphisms of endomorphism semigroups of free finitely generated algebras of different varieties (see, e.g., [8]–[13]). In this paper, we investigate automorphisms of endomorphism semigroups for free algebras in the variety of abelian dimonoids [14].

2010 Mathematics Subject Classification: 08B20, 17A30, 08A30

The paper is organized as follows. In Section 2, we give necessary definitions and auxiliary statements. In Section 3, we describe automorphisms of the endomorphism semigroup of a free abelian dimonoid of rank 1. In Section 4, we establish that all automorphisms of the endomorphism semigroup of a free abelian dimonoid are inner.

2. **Auxiliary statements**

A dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ is called *abelian* [14] if for all $x, y \in D$,

$$x \dashv y = y \vdash x.$$

Let X be an arbitrary nonempty set and $\mathbb{N}$ be the set of all positive integers. Denote by $\mathrm{FCm}(X)$ the free commutative monoid on X with the identity ε. Words of $\mathrm{FCm}(X)$ are written as $w = w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_n^{\alpha_n}$, where $w_1, w_2, \dots, w_n \in X$ are pairwise distinct, and $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Here $w^0 = \varepsilon$ and $w^1 = w$ for all $w \in X$.

We put

$$\mathrm{FAd}(X) = X \times \mathrm{FCm}(X)$$

and define two binary operations $\dashv$ and $\vdash$ on $FAd(X)$ as follows:

$$(x, u) \dashv (y, v) = (x, uyv),$$

$$(x, u) \vdash (y, v) = (y, xuv).$$

Theorem 1 ([14])**.** *The algebra $(FAd(X), \dashv, \vdash)$ is the free abelian dimonoid of rank $|X|$.*

Further, for the sake of convenientce, the free abelian dimonoid $(\mathrm{FAd}(X), \dashv, \vdash)$ will be denoted also by $\mathfrak{F}_X$.

Let $(S, \circ)$ be an arbitrary semigroup and $a \in S$. Define on S a new binary operation $\circ_a$ as follows:

$$x \circ_a y = x \circ a \circ y$$

for all $x, y \in S$.

Clearly, $(S, \circ_a)$ is a semigroup, it is called a *variant* of $(S, \circ)$.

Proposition 1 ([14])**.** *The operations of the free abelian dimonoid $\mathfrak{F}_X$ of rank 1 coincide, and the semigroup $(FAd(X), \dashv), |X| = 1$, is isomorphic to the variant $(\mathbb{N}^0, +_1)$ of the additive semigroup of all nonnegative integers.*

Let $\mathfrak{D}_1 = (D_1, \dashv_1, \vdash_1)$ and $\mathfrak{D}_2 = (D_2, \dashv_2, \vdash_2)$ be arbitrary dimonoids. A mapping $\varphi : D_1 \to D_2$ is called a *homomorphism* of $\mathfrak{D}_1$ into $\mathfrak{D}_2$ if for all $x, y \in D_1$,

$$(x \dashv_1 y)\varphi = x\varphi \dashv_2 y\varphi, \;\; (x \vdash_1 y)\varphi = x\varphi \vdash_2 y\varphi.$$

A bijective homomorphism $\varphi : D_1 \to D_2$ is called an *isomorphism* of $\mathfrak{D}_1$ into $\mathfrak{D}_2$.

The following lemma is obvious.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{F}_X$ and $\mathfrak{F}_Y$ be free abelian dimonoids on X and Y, respectively. Every bijection $\varphi : X \to Y$ induces an isomorphism π_φ of $\mathfrak{F}_X$ into $\mathfrak{F}_Y$ such that*

$$(x, \varepsilon)\pi_\varphi = (x\varphi, \varepsilon), \;\; (y, \omega)\pi_\varphi = (y\varphi, (w_1\varphi)^{\alpha_1}(w_2\varphi)^{\alpha_2} \dots (w_n\varphi)^{\alpha_n})$$

for all $(x, \varepsilon), (y, \omega) \in FAd(X)$, where $w = w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_n^{\alpha_n} \neq \varepsilon$.

For an arbitrary dimonoid $\mathfrak{D} = (D, \dashv, \vdash)$, we denote the endomorphism semigroup of $\mathfrak{D}$ and the automorphism group of $\mathfrak{D}$ by $\mathrm{End}(\mathfrak{D})$ and $\mathrm{Aut}(\mathfrak{D})$, respectively.

Let $(t, u) \in \mathrm{FAd}(X)$, $u = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_n^{\alpha_n}$. An arbitrary endomorphism $\Xi \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ has the form:

$$(t, u)\Xi = (t, \varepsilon)\xi \dashv ((u_1, \varepsilon)\xi)^{\alpha_1} \dashv \ldots \dashv ((u_n, \varepsilon)\xi)^{\alpha_n},$$

where $\xi : X \times \varepsilon \to \mathrm{FAd}(X)$ is any mapping.

In particular, an endomorphism Φ of $\mathfrak{F}_X$ is an automorphism iff a restriction Φ on $X \times \varepsilon$ belong to the symmetric group $S(X \times \varepsilon)$. So, the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)$ is isomorphic to the group $S(X)$.

Let $F(X)$ be a free algebra in a variety V with a generating set X and $u \in F(X)$. An endomorphism $\theta_u \in \mathrm{End}(F(X))$ is called *constant* if $x\theta_u = u$ for all $x \in X$.

Let $\Psi : \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X) \to \mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$ be an arbitrary isomorphism. From Theorem 3 of [14] it follows that for every $x \in X$ there exists $y \in Y$ such that $\theta_{(x,\varepsilon)}\Psi = \theta_{(y,\varepsilon)}$. Define a bijection $\psi : X \to Y$ putting $x\psi = y$ if $\theta_{(x,\varepsilon)}\Psi = \theta_{(y,\varepsilon)}$. In this case, we say that ψ is induced by the isomorphism Ψ.

3. The automorphism group of End$(\mathfrak{F}_X), |X| = 1$

We denote by $\mathfrak{F}_n$ the free abelian dimonoid $\mathfrak{F}_X = (\mathrm{FAd}(X), \dashv, \vdash)$ on an arbitrary finite n-element set X.

From Proposition 1 it follows that the dimonoid $\mathfrak{F}_1$ is isomorphic to the variant $(\mathbb{N}^0, +_1, +_1)$. Therefore, we identify the elements of $\mathrm{FAd}(X), |X| = 1$, with the corresponding elements of $\mathbb{N}^0$.

Lemma 2. *The endomorphism monoid End*$(\mathfrak{F}_1)$ *of the free abelian dimonoid* $\mathfrak{F}_1$ *is isomorphic to the semigroup* $(\mathbb{N}^0, *)$*, where* $x * y = x + y + xy$ *for all* $x, y \in \mathbb{N}^0$.

Proof. It is obvious that $\mathrm{End}(\mathbb{N}^0, +_1, +_1) = \mathrm{End}(\mathbb{N}^0, +_1)$. Let φ be an arbitrary endomorphism of $(\mathbb{N}^0, +_1)$ and $\varphi(0) = k$ for some $k \in \mathbb{N}^0$. Then for any $a \in \mathbb{N}^0$ we have

$$\begin{aligned} a\varphi &= (\underbrace{0 +_1 0 +_1 \ldots +_1 0}_{a+1})\varphi = \\ &= \underbrace{0\varphi +_1 0\varphi +_1 \ldots +_1 0\varphi}_{a+1} = \\ &= \underbrace{k +_1 k +_1 \ldots +_1 k}_{a+1} = \\ &= (a+1)k + a. \end{aligned}$$

On the other hand, any transformation $\varphi_k, k \in \mathbb{N}^0$, of $\mathbb{N}^0$ defined by

$$a\varphi_k = (a+1)k + a$$

for all $a \in \mathbb{N}^0$, is an endomorphism of $(\mathbb{N}^0, +_1)$. Thus,

$$\mathrm{End}(\mathbb{N}^0, +_1) = \left\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}^0\right\}.$$

Define a mapping Θ of $\mathrm{End}(\mathbb{N}^0, +_1)$ into $(\mathbb{N}^0, *)$ by $\varphi_k\Theta = k$ for all $\varphi_k \in \mathrm{End}(\mathbb{N}^0, +_1)$. It is clear that Θ is a bijection, moreover,

$$a(\varphi_k \circ \varphi_l) = (a\varphi_k)\varphi_l = ((a+1)k + a)\varphi_l = (ak + k + a + 1)l + ak + k + a = a\varphi_{kl+k+l}$$

for all $a \in \mathbb{N}^0$, where $\circ$ is the usual composition of transformations. Thus,

$$(\varphi_k \circ \varphi_l)\Theta = \varphi_{kl+k+l}\Theta = \varphi_{k*l}\Theta = k * l = \varphi_k\Theta * \varphi_l\Theta$$

for all $\varphi_k, \varphi_l \in \mathrm{End}(\mathbb{N}^0, +_1)$. □

Lemma 3. *The semigroup* $(\mathbb{N}^0, *)$ *is isomorphic to the multiplicative semigroup* $(\mathbb{N}, \cdot)$ *of all positive integers.*

Proof. Define a mapping θ of $(\mathbb{N}^0, *)$ into $(\mathbb{N}, \cdot)$ by $n\theta = n + 1$ for all $n \in \mathbb{N}^0$. Clearly, θ is a bijection. In addition,

$$(n * m)\theta = (n + m + nm)\theta = n + m + nm + 1 = (n + 1) \cdot (m + 1) = n\theta \cdot m\theta$$

for all $n, m \in \mathbb{N}^0$. □

By $\mathbb{P}$ we denote the set of all prime numbers.

Proposition 2. *Let X be a singleton set, Y be an arbitrary nonempty set and End*$(\mathfrak{F}_X) \cong$ *End*$(\mathfrak{F}_Y)$. *Then $|Y| = 1$ and the isomorphisms of End*$(\mathfrak{F}_X)$ *onto End*$(\mathfrak{F}_Y)$ *are in a natural one-to-one correspondence with permutations of* $\mathbb{P}$.

Proof. The fact that $|Y| = 1$ follows from Theorem 3 of [14], where it was proved that free abelian dimonoids are determined by their endomorphism semigroups. By Lemmas 2 and 3, $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X), |X| = 1$, is isomorphic to $(\mathbb{N}, \cdot)$. The monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ is the free commutative monoid with the countably infinite set of free generators that are prime numbers. Thus, every isomorphism $\varphi : \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X) \to \mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$ is uniquely determined by a bijection between the free generators of $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ and $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$. These bijections, and hence isomorphisms, are in a natural one-to-one correspondence with permutations of the set $\mathbb{P}$ of all prime numbers. In addition, the automorphisms of the monoid $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ correspond to the permutations of free generators of $\mathbb{P}$. □

Recall that the symmetric group on a set X is denoted by $S(X)$. From Proposition 2 immediately follows

Corollary 1. *The automorphism group Aut(End*$(\mathfrak{F}_1)$) *of the endomorphism monoid End*$(\mathfrak{F}_1)$ *is isomorphic to the symmetric group* $S(\mathbb{P})$ *on a countably infinite set* $\mathbb{P}$.

4. The automorphism group of End$(\mathfrak{F}_X), |X| \geqslant 2$

Let $F(X)$ be a free algebra in a variety V over a set X. An automorphism Ψ of the endomorphism monoid $\mathrm{End}(F(X))$ is called *stable* if Ψ induces the identity permutation of X, that is, $\theta_x\Psi = \theta_x$ for all $x \in X$.

An endomorphism θ of the free algebra $F(X)$ is called *linear* if $x\theta \in X$ for all $x \in X$.

For every $\omega \in \mathrm{FCm}(X)$ by $l(\omega)$ and $c(\omega)$ we denote the *length* and the *content* of ω, respectively. Recall that the content of a non-identity word $\omega = x_1x_2 \ldots x_n \in \mathrm{FCm}(X)$ is the set $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, and $c(\varepsilon) = \varnothing$ and $l(\varepsilon) = 0$. For all $(x, u) \in \mathfrak{F}_X$ we put $|(x, u)| = l(u) + 1$ and $c(x, u) = c(u) \cup \{x\}$.

Lemma 4. *Let Ψ be a stable automorphism of End*$(\mathfrak{F}_X)$, $g \in$ *End*$(\mathfrak{F}_X)$ *and $x \in X$. The following equalities hold:*

(*i*) $c(t, u) = c(s, v)$ *if* $\theta_{(t,u)}\Psi = \theta_{(s,v)}$,
(*ii*) $|(x, \varepsilon)g| = |(x, \varepsilon)(g\Psi)|$.

Proof. (i) Let $z \in c(t,u) \setminus c(s,v)$, $x \in X, x \neq z$ and $\varphi, g \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ such that $(x,\varepsilon)\varphi = (t,u), (z,\varepsilon)g = (x,\varepsilon)$ and $(y,\varepsilon)g = (y,\varepsilon)$ for all $y \in X, y \neq z$. Then g is linear, $(s,v)g = (s,v)$ and, in addition,

$$\theta_{(x,\varepsilon)(g\Psi)} = \theta_{(x,\varepsilon)}\ (g\Psi) = \theta_{(x,\varepsilon)}\Psi\ g\Psi = (\theta_{(x,\varepsilon)}g)\Psi = \theta_{(x,\varepsilon)g}\Psi = \theta_{(x,\varepsilon)g}.$$

From here, $g\Psi = g$ and then

$$\theta_{(t,u)}\Psi = \theta_{(s,v)} = \theta_{(s,v)g} = \theta_{(s,v)}g = \theta_{(t,u)}\Psi g\Psi = (\theta_{(t,u)}g)\Psi = (\theta_{(t,u)g})\Psi.$$

By injectivity of Ψ, we have $\theta_{(t,u)} = \theta_{(t,u)g}$. From here $(t,u) = (t,u)g$, which contradicts to the definition of g, so $c(t,u) \setminus c(s,v) = \varnothing$. Similarly we can prove that $c(s,v) \setminus c(t,u) = \varnothing$. It means that $c(t,u) = c(s,v)$.

(ii) Let $g_1, g_2 \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ such that $|(x,\varepsilon)g_1| = |(x,\varepsilon)g_2| = m$ and

$$|(x,\varepsilon)(g_1\Psi)| = k,\ \ |(x,\varepsilon)(g_2\Psi)| = l.$$

For all $(y,v) \in \mathrm{FAd}(X)$ with $|v| = r-1$ we obtain

$$(y,v)(\theta_{(x,\varepsilon)}g_1\theta_{(x,\varepsilon)}) = ((x,\varepsilon)^r g_1)\theta_{(x,\varepsilon)} = (x,\varepsilon)^{rm}\theta_{(x,\varepsilon)} = (x,\varepsilon)^{rm} = (y,v)\theta_{(x,\varepsilon)^m}.$$

Thus, $\theta_{(x,\varepsilon)}g_1\theta_{(x,\varepsilon)} = \theta_{(x,\varepsilon)^m}$. Analogously it is proved that

$$\theta_{(x,\varepsilon)}g_2\theta_{(x,\varepsilon)} = \theta_{(x,\varepsilon)^m},$$
$$\theta_{(x,\varepsilon)}(g_1\Psi)\theta_{(x,\varepsilon)} = \theta_{(x,\varepsilon)^k},$$
$$\theta_{(x,\varepsilon)}(g_2\Psi)\theta_{(x,\varepsilon)} = \theta_{(x,\varepsilon)^l}.$$

Using that Ψ is stable, we have

$$\theta_{(x,\varepsilon)^m}\Psi = (\theta_{(x,\varepsilon)}g_1\theta_{(x,\varepsilon)})\Psi = \theta_{(x,\varepsilon)}(g_1\Psi)\theta_{(x,\varepsilon)} = \theta_{(x,\varepsilon)^k},$$
$$\theta_{(x,\varepsilon)^m}\Psi = (\theta_{(x,\varepsilon)}g_2\theta_{(x,\varepsilon)})\Psi = \theta_{(x,\varepsilon)}(g_2\Psi)\theta_{(x,\varepsilon)} = \theta_{(x,\varepsilon)^l},$$

from here $k = l$.

Assume that A is a nonempty finite subset of X, $m \in \mathbb{N}$ and

$$\mathrm{End}_A^m(x,\varepsilon) = \{g \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X) : |(x,\varepsilon)g| = m,\ c((x,\varepsilon)g) = A\}.$$

Let $g \in \mathrm{End}_A^m(x,\varepsilon)$, then $\theta_{(x,\varepsilon)g} \in \mathrm{End}_A^m(x,\varepsilon)$. It is not hard to check that $\theta_{(x,\varepsilon)g}\Psi = \theta_{(x,\varepsilon)(g\Psi)}$. By (i), $c((x,\varepsilon)g) = c((x,\varepsilon)(g\Psi))$, that is, $g\Psi \in \mathrm{End}_A^k(x,\varepsilon)$ for some natural k. So, $\mathrm{End}_A^m(x,\varepsilon)\Psi \subseteq \mathrm{End}_A^k(x,\varepsilon)$. Since Ψ is bijective, $k = m$. Hence $|(x,\varepsilon)g| = |(x,\varepsilon)(g\Psi)|$ for all $g \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ and $x \in X$. □

Corollary 2. *Let Ψ be a stable automorphism of End$(\mathfrak{F}_X)$ and $a, b \in X$, $a \neq b$. Then*

$$\theta_{(a,b)}\Psi \in \{\theta_{(a,b)}, \theta_{(b,a)}\}.$$

Proof. Since $\theta_{(x,\varepsilon)g}\Psi = \theta_{(x,\varepsilon)(g\Psi)}$, then $\theta_{(a,b)}\Psi = \theta_{(t,u)}$ for some $(t,u) \in \mathrm{FAd}(X)$. By Lemma 4$(i)$, $c(t,u) = \{a,b\}$. In according to (ii) of Lemma 4, we have $|(t,u)| = 2$, whence $l(u) = 1$. It is means that $(t,u) = (a,b)$ or $(t,u) = (b,a)$. □

By Φ_0 we denote the identity automorphism of $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$.

Lemma 5. *Let Ψ be a stable automorphism of End$(\mathfrak{F}_X)$ and $a, b \in X$ are distinct. If $\theta_{(a,b)}\Psi = \theta_{(a,b)}$, then $\Psi = \Phi_0$.*

The proof of this lemma is similar to Lemma 5 of [13].

Lemma 6. *Let $a, b \in X$ be distinct. There is no stable automorphism Ψ of $End(\mathfrak{F}_X)$ such that $\theta_{(a,b)}\Psi = \theta_{(b,a)}$.*

Proof. Assume that there exists a stable automorphism Ψ of the monoid $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ such that $\theta_{(a,b)}\Psi = \theta_{(b,a)}$. According to condition (i) of Lemma 4, $\theta_{(b,a)}\Psi = \theta_{(a,b)}$.

Let $g \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ be such that $(a,\varepsilon)g = (a,\varepsilon)$, $(b,\varepsilon)g = (a,b)$ and $(x,\varepsilon)g = (x,\varepsilon)$ for all $x \in X \setminus \{a,b\}$. It is easy to check that $\theta_{(b,\varepsilon)}g = \theta_{(a,b)}$ and then

$$\theta_{(a,b)}\Psi = (\theta_{(b,\varepsilon)}g)\Psi = \theta_{(b,\varepsilon)}\Psi g\Psi = \theta_{(b,\varepsilon)}g\Psi = \theta_{(b,\varepsilon)g\Psi}.$$

Since $\theta_{(a,b)}\Psi = \theta_{(b,a)}$, then $\theta_{(b,a)} = \theta_{(b,\varepsilon)g\Psi}$ and therefore we have

$$(b,a) = (b,\varepsilon)g\Psi. \tag{1}$$

Using equality $\theta_{(a,\varepsilon)}g = \theta_{(a,\varepsilon)}$, we obtain

$$\theta_{(a,\varepsilon)}\Psi = (\theta_{(a,\varepsilon)}g)\Psi = \theta_{(a,\varepsilon)}g\Psi = \theta_{(a,\varepsilon)g\Psi} = \theta_{(a,\varepsilon)},$$

and therefore

$$(a,\varepsilon)g\Psi = (a,\varepsilon). \tag{2}$$

Further, for all $x \in X$,

$$(x,\varepsilon)\theta_{(a,b)}g = (a,b)g = ((a,\varepsilon) \dashv (b,\varepsilon))g = (a,\varepsilon) \dashv (a,b) = (a,ab) = (x,\varepsilon)\theta_{(a,ab)}.$$

Then

$$\theta_{(a,ab)}\Psi = (\theta_{(a,b)}g)\Psi = \theta_{(a,b)}\Psi g\Psi = \theta_{(b,a)}g\Psi = \theta_{(b,a)g\Psi}.$$

Using equalities (1) and (2) we obtain

$$(b,a)g\Psi = ((b,\varepsilon) \dashv (a,\varepsilon))g\Psi = (b,\varepsilon)g\Psi \dashv (a,\varepsilon)g\Psi = (b,a) \dashv (a,\varepsilon) = (b,aa).$$

Thus,

$$\theta_{(a,ab)}\Psi = \theta_{(b,aa)}. \tag{3}$$

It is clear that $\theta_{(b,a)}g = \theta_{(a,ba)}$. Then

$$\theta_{(a,ba)}\Psi = (\theta_{(b,a)}g)\Psi = \theta_{(a,b)}g\Psi = \theta_{(a,b)g\Psi},$$

where $(a,b)g\Psi = (a,\varepsilon)g\Psi \dashv (b,\varepsilon)g\Psi = (a,\varepsilon) \dashv (b,a) = (a,ba)$, that is,

$$\theta_{(a,ba)}\Psi = \theta_{(a,ba)}. \tag{4}$$

Since $ab = ba$ in $\mathrm{FCm}(X)$, then $\theta_{(a,ba)} = \theta_{(a,ab)}$ and according to (3), (4), we have $(b,aa) = (a,ba)$ that contradicts the condition $a \neq b$. □

Theorem 2. *Every isomorphism $\Phi : End(\mathfrak{F}_X) \to End(\mathfrak{F}_Y)$ is induced by the isomorphism π_f of $\mathfrak{F}_X$ to $\mathfrak{F}_Y$ for a uniquely determined bijection $f : X \to Y$.*

Proof. Let $|X| > 1$ and $\Phi : \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X) \to \mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$ be an arbitrary isomorphism. Then Φ induces a uniquely determined bijection $f : X \to Y$ such that $\theta_{(x,\varepsilon)}\Phi = \theta_{(xf,\varepsilon)}$ for every $x \in X$ (see Section 2). By Lemma 1, f induces the isomorphism $\pi_f : \mathfrak{F}_X \to \mathfrak{F}_Y$. It is not hard to check that the mapping $E_f : \eta \mapsto \pi_f^{-1}\eta\pi_f$ is an isomorphism of $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ onto $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$. From here, $\Omega = \Phi E_f^{-1}$ is an automorphism of $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$. Moreover, for all $x \in X$,

$$\theta_{(x,\varepsilon)}\Omega = (\theta_{(x,\varepsilon)}\Phi)E_f^{-1} = \theta_{(xf,\varepsilon)}E_f^{-1} = \theta_{(xff^{-1},\varepsilon)} = \theta_{(x,\varepsilon)},$$

therefore Ω is stable.

By Corollary 2, Lemma 5 and Lemma 6, Ω is an identity automorphism Φ_0. From $\Phi E_f^{-1} = \Phi_0$ we obtain $\Phi = E_f$, i.e., Φ is an isomorphism induced by π_f. $\square$

Let $F(X)$ be a free algebra in a variety V over a set X. An automorphism Φ of $\mathrm{End}(F(X))$ is called *inner* if there exists an automorphism α of $F(X)$ such that $\beta\Phi = \alpha^{-1}\beta\alpha$ for all $\beta \in \mathrm{End}(F(X))$.

Now we characterize the automorphism group of the endomorphism monoid of a free abelian dimonoid.

Theorem 3. *All automorphisms of End($\mathfrak{F}_X$) are inner. In addition, the automorphism group Aut(End($\mathfrak{F}_X$)) is isomorphic to the symmetric group $S(X)$.*

Proof. For the case $X = Y$, Theorem 2 will be the first part of the given theorem. By Theorem 2, every automorphism Φ of $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ has the form $\Phi = E_f$, where $\eta\Phi = \pi_f^{-1}\eta\pi_f$ for all $\eta \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ and some bijection $f : X \to X$. According to Lemma 1 (see Section 2), $\pi_f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)$ for all $f \in S(X)$. Consequently, all automorphisms of $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ are inner.

It is clear that the groups $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X))$ and $S(X)$ are isomorphic. $\square$

References

1. J.-L. Loday, *Dialgebras*, In: Dialgebras and related operads, Lect. Notes Math. **1763** (2001), 7–66. DOI: 10.1007/3-540-45328-8_2
2. M. K. Kinyon, *Leibniz algebras, Lie racks, and digroups*, J. Lie Theory **17** (2007), no. 1, 99–114.
3. E. Burgunder, P.-L. Curien, and M. Ronco, *Free algebraic structures on the permutohedra*, J. Algebra **487** (2017), 20–59. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.05.016
4. Yu. V. Zhuchok, *Representations of ordered dimonoids by binary relations*, Asian-Eur. J. Math. **7** (2014), no. 1, Art. ID 1450006, pp. 13. DOI: 10.1142/S1793557114500065
5. Yu. V. Zhuchok, *The endomorphism monoid of a free troid of rank 1*, Algebra Univers. **76** (2016), no. 3, 355–366. DOI: 10.1007/s00012-016-0392-1.
6. B. I. Plotkin, *Seven lectures on the universal algebraic geometry*, Institute of Mathematics, Hebrew University, 2000, Preprint.
7. B. I. Plotkin, *Algebras with the same (algebraic) geometry*, Математическая логика и алгебра, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Петра Сергеевича Новикова, Тр. МИАН, **242** (2003), 176–207; **Reprinted version**: B. I. Plotkin. *Algebras with the same (algebraic) geometry*, Proc. Steklov Inst. Math. **242** (2003), 176–207.
8. G. Mashevitzky and B. M. Schein, *Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 6, 1655–1660. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06923-5
9. Y. Katsov, R. Lipyanski, and B. I. Plotkin, *Automorphisms of categories of free modules, free semimodules, and free Lie modules*, Commun. Algebra **35** (2007), no. 3, 931–952. DOI: 10.1080/00927870601115856
10. G. Mashevitzky, B. Plotkin, and E. Plotkin, *Automorphisms of the category of free Lie algebras*, J. Algebra **282** (2004), no. 2, 490–512. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2003.09.038
11. Yu. V. Zhuchok, *Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free commutative dimonoid*, Commun. Algebra **45** (2017), no. 9, 3861–3871.
DOI: 10.1080/00927872.2016.1248241

12. Yu. V. Zhuchok, *Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free commutative g-dimonoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 295–310.
13. Yu. V. Zhuchok, *Automorphisms of the endomorphism semigroupof a free abelian diband*, Algebra Discrete Math. **25** (2018), no. 2, 322–332.
14. Yu. V. Zhuchok, *Free abelian dimonoids*, Algebra Discrete Math. **20** (2015), no. 2, 330–342.

Стаття: надійшла до редколегії 12.11.2018
доопрацьована 12.01.2019
прийнята до друку 18.02.2019

ПРО АВТОМОРФІЗМИ НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ ВІЛЬНОГО АБЕЛЕВОГО ДІМОНОЇДА

Юрій ЖУЧОК

Луганський національний університет імені Тараса Шевченка,
площа Гоголя, 1, 92703, Старобільськ
e-mail: zhuchok.yu@gmail.com

Описано всі ізоморфізми між напівгрупами ендоморфізмів вільних абелевих дімоноїдів і доведено, що всі автоморфізми напівгрупи ендоморфізмів вільного абелевого дімоноїда є внутрішніми.

Ключові слова: дімоноїд, вільний абелевий дімоноїд, напівгрупа ендоморфізмів, автоморфізм.

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 32–40
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 32–40
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.032-040

УДК 512.643.4

МАТРИЧНI ЛIНIЙНI ОДНО- ТА ДВОБIЧНI РIВНЯННЯ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КIЛЬЦЯМИ

Наталiя ЛАДЗОРИШИН, Василь ПЕТРИЧКОВИЧ

Iнститут прикладних проблем механiки i математики
iм. Я. С. Пiдстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, 79060, Львiв
e-mail: natalja.ladzoryshyn@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

Визначено необхiднi та достатнi умови розв'язностi матричних лiнiйних рiвнянь $AX + YB = C$ i $AX + BY = C$ над квадратичним кiльцем $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$. Наведено спосiб розв'язування цих рiвнянь, зведенням їх до матричних лiнiйних рiвнянь над кiльцем цiлих чисел $\mathbb{Z}$.

Ключовi слова: квадратичне кiльце, матричне рiвняння Сильвестра, матричне дiофантове рiвняння, еквiвалентнiсть матриць.

1. Вступ

Матричнi лiнiйнi рiвняння

$$AX + YB = C, \tag{1}$$

(матричне рiвняння типу Сильвестра) та

$$AX + BY = C \tag{2}$$

(матричне дiофантове рiвняння), виникають i застосуться в прикладних напрямах [1, с. 313], [2].

Розв'язування матричних рiвнянь (1) i (2) з матрицями коефiцiєнтами над полем зводиться до розв'язування систем лiнiйних алгебричних рiвнянь над полем, при цьому використовується прямий (кронекерiв) добуток матриць [3, с. 413].

Рот [4] довiв, що розв'язнiсть матричного рiвняння (1) над полем $\mathbb{F}$, а також над кiльцем полiномiв $\mathbb{F}[\lambda]$ (матричного полiномiального рiвняння) рiвносильна еквiвалентностi блочних матриць

$$M = \begin{Vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad N = \begin{Vmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 15A24, 11R04

Нагадаємо, що матриці A і B над кільцем R називаються еквівалентними, якщо існують такі оборотні над R матриці U і V, що $UBV = A$.

Цей результат поширений для матричного рівняння (1) над комутативними кільцями [5] та іншими кільцями [6].

Один із методів розв'язування матричного поліноміального рівняння (1) ґрунтується на зведенні цього рівняння до рівносильного матричного рівняння такого типу з матрицями-коефіцієнтами над полем, при цьому застосовуються супровідні матриці матричних поліномів [7], [8, с. 240], [9].

Для окремих класів матричних поліноміальних рівнянь (1) і (2) описані їх розв'язки, зокрема встановлені умови єдиності розв'язків з певними властивостями [10], [11]. В [12] запропоновано метод розв'язування рівнянь (1) і (2) над комутативною областю Безу, тобто над кільцем, в якому кожен скінченнопороджений ідеал є головним. Встановлено критерій однозначності часткових розв'язків таких рівнянь.

Ми розглядаємо матричні рівняння (1) і (2) над квадратичними кільцями $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$.

Теорема Рота [4] та її узагальнення про розв'язність матричного рівняння (1) є критерієм для цього рівняння над кільцями з умовою еквівалентності матриць над ними. Такими є кільця головних ідеалів, адекватні кільця, і загалом кільця елементарних дільників [13], [14], [15, с. 136], [16, с. 54]. Матриці над такими кільцями еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні канонічні діагональні форми (форми Сміта) збігаються. Аналогічно для рівняння (2).

Серед квадратичних кілець є кільця, які не є кільцями елементарних дільників, наприклад, кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, в якому не існує поняття найбільшого спільного дільника елементів.

У цій статті запропоновано критерій розв'язності матричних рівняння (1) і (2) над будь-яким квадратичним кільцем. В [17] описані цілочислові розв'язки цих матричних рівнянь над квадратичними кільцями.

2. Квадратичні кільця

Нехай $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел; $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ і k не ділиться на квадрат жодного простого числа. Квадратичне кільце $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ визначається наступним чином [18, с. 311].

Якщо

$$k \equiv 2 \pmod 4 \text{ або } k \equiv 3 \pmod 4, \qquad \text{то} \qquad \mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \left\{x + y\sqrt{k} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\},$$

якщо

$$k \equiv 1 \pmod 4, \qquad \text{то} \qquad \mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \left\{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k} \mid x, y \in \mathbb{Z},\ x - y \text{ ділиться на } 2\right\}.$$

При $k > 0$ — квадратичне кільце називається дійсним, а при $k < 0$ — уявним.

Відомо, що існує скінченна кількість квадратичних евклідових кілець, а саме 17 дійсних і 5 уявних квадратичних кілець. Кожне евклідове кільце є кільцем головних ідеалів. Однак, обернене твердження не виконується. Так, зокрема квадратичні кільця з детермінантами $k = -19, -43, -67, -167$ є кільцями головних ідеалів, але не є евклідовими. Існують квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

3. Матричне лінійне рівняння $AX + YB = C$

Через $M(m,n,\mathbb{K})$ і $M(n,\mathbb{K})$ позначимо множини $(m\times n)$ - і $(n\times n)$ - матриць над кільцем $\mathbb{K}$, відповідно.

Нехай $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $B \in M(n,l,\mathbb{K})$, $C \in M(m,l,\mathbb{K})$. Ці матриці можна записати у вигляді

$$A = A_1 + A_2\sqrt{k}, \quad B = B_1 + B_2\sqrt{k}, \quad C = C_1 + C_2\sqrt{k}, \tag{4}$$

якщо $k \equiv 2,3 \pmod 4$ і

$$A = \frac{1}{2}\big(A_1 + A_2\sqrt{k}\big), \quad B = \frac{1}{2}\big(B_1 + B_2\sqrt{k}\big), \quad C = \frac{1}{2}\big(C_1 + C_2\sqrt{k}\big), \tag{5}$$

де елементи матриць $A_1 - A_2,\ B_1 - B_2,\ C_1 - C_2$ діляться на 2, якщо $k \equiv 1 \pmod 4$ і $A_i,\ B_i,\ C_i,\ i = 1,2$ – матриці над $\mathbb{Z}$ відповідних розмірів.

Надалі через $Row_i(A)$ будемо позначати i-й рядок матриці A, а A^T – транспонована матриця.

Теорема 1. *Матричне рівняння (1) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ з матрицями вигляду (4) або (5) має розв'язок $X \in M(n,l,\mathbb{K})$, $Y \in M(m,n,\mathbb{K})$ тоді і тільки тоді, коли є еквівалентними над $\mathbb{Z}$ такі матриці:*

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2k)\otimes I_l & A_1 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T k) & I_m \otimes B_1^T & \boldsymbol{c}_1 \\ (A_1 + A_2)\otimes I_l & A_2 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T) & I_m \otimes B_2^T & \boldsymbol{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2k)\otimes I_l & A_1 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T k) & I_m \otimes B_1^T & \mathbf{0} \\ (A_1 + A_2)\otimes I_l & A_2 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T) & I_m \otimes B_2^T & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

якщо $k \equiv 2,3 \pmod 4$ і

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2k)\otimes I_l & 2A_1 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T k) & I_m \otimes 2B_1^T & 2\boldsymbol{c}_1 \\ (A_1 + A_2)\otimes I_l & 2A_2 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T) & I_m \otimes 2B_2^T & 2\boldsymbol{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2k)\otimes I_l & 2A_1 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T k) & I_m \otimes 2B_1^T & \mathbf{0} \\ (A_1 + A_2)\otimes I_l & 2A_2 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T) & I_m \otimes 2B_2^T & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

якщо $k \equiv 1 \pmod 4$, де I_l – одинична матриця l-го порядку, а
$\boldsymbol{c}_i = \begin{Vmatrix} Row_1(C_i) \dots Row_m(C_i) \end{Vmatrix}^T,\ i = 1,2.$

Доведення. Нехай $k \equiv 2,3 \pmod 4$. Тоді матриці X, Y можна записати у вигляді

$$X = X_1 + X_2\sqrt{k}, \quad Y = Y_1 + Y_2\sqrt{k}, \tag{6}$$

де $X_i \in M(n,l,\mathbb{Z})$, $Y_i \in M(m,n,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$. У рівняння (1) підставимо вирази (4) і (6) замість відповідних матриць, отримуємо таке рівняння:

$$\big(A_1 + A_2\sqrt{k}\big)\big(X_1 + X_2\sqrt{k}\big) + \big(Y_1 + Y_2\sqrt{k}\big)\big(B_1 + B_2\sqrt{k}\big) = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

Звідси запишемо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2X_2k + Y_1B_1 + Y_2B_2k = C_1 \\ A_2X_1 + A_1X_2 + Y_1B_2 + Y_2B_1 = C_2. \end{cases}$$

Розписавши поелементно добутки A_iX_j і Y_iB_j, $i,j=1,2$ і врахувавши означення кронекерового добутку матриць, цю систему подаємо у вигляді

$$\begin{Vmatrix} A_1\otimes I_l & A_2k\otimes I_l \\ A_2\otimes I_l & A_1\otimes I_l \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} I_m\otimes B_1^T & I_m\otimes B_2^T k \\ I_m\otimes B_2^T & I_m\otimes B_1^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix},$$

де $\mathbf{x}_i = \begin{Vmatrix} Row_1(X_i)\dots Row_n(X_i)\end{Vmatrix}^T$; $\mathbf{y}_i = \begin{Vmatrix} Row_1(Y_i)\dots Row_m(Y_i)\end{Vmatrix}^T$; $\mathbf{c}_i = \begin{Vmatrix} Row_1(C_i)\dots Row_m(C_i)\end{Vmatrix}^T$, $i=1,2$.

Отже, маємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$

$$\begin{Vmatrix} A_1\otimes I_l & A_2k\otimes I_l & I_m\otimes B_1^T & I_m\otimes B_2^T k \\ A_2\otimes I_l & A_1\otimes I_l & I_m\otimes B_2^T & I_m\otimes B_1^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Матричні рівняння (1) і (7) рівносильні, тобто рівняння (1) над $\mathbb{K}$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли має розв'язок рівняння (7) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і кожному розв'язку рівняння (7) відповідає розв'язок рівняння (1), і навпаки.

Відповідно до [19, с. 272] матричне рівняння (7) має розв'язок над $\mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix} A_1\otimes I_l & A_2k\otimes I_l & I_m\otimes B_1^T & I_m\otimes B_2^T k & \mathbf{c}_1 \\ A_2\otimes I_l & A_1\otimes I_l & I_m\otimes B_2^T & I_m\otimes B_1^T & \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} A_1\otimes I_l & A_2k\otimes I_l & I_m\otimes B_1^T & I_m\otimes B_2^T k & \mathbf{0} \\ A_2\otimes I_l & A_1\otimes I_l & I_m\otimes B_2^T & I_m\otimes B_1^T & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$.

З цих матриць отримуємо еквівалентні до них такі матриці:

$$\begin{Vmatrix} (A_1+A_2k)\otimes I_l & A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T k) & I_m\otimes B_1^T & \mathbf{c}_1 \\ (A_1+A_2)\otimes I_l & A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes B_2^T & \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} (A_1+A_2k)\otimes I_l & A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T k) & I_m\otimes B_1^T & \mathbf{0} \\ (A_1+A_2)\otimes I_l & A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes B_2^T & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Отже, у випадку, коли $k\equiv 2,3 \pmod 4$ теорему доведено.

Нехай $k\equiv 1 \pmod 4$. Тоді матриці X,Y можна записати у вигляді

$$X=\frac{1}{2}\big(X_1+X_2\sqrt{k}\big),\quad Y=\frac{1}{2}\big(Y_1+Y_2\sqrt{k}\big), \tag{8}$$

де $X_i\in M(n,l,\mathbb{Z})$, $Y_i\in M(m,n,\mathbb{Z})$, $i=1,2$. Зауважимо, що за визначенням елементів квадратичного кільця $\mathbb{K}$, всі елементи матриць X_1-X_2 і Y_1-Y_2 діляться на 2. Отже, нехай матриці X_1 і Y_1 мають вигляд $X_1=X_2+2\tilde{X}$, $Y_1=Y_2+2\tilde{Y}$, де $\tilde{X}\in M(n,l,\mathbb{Z})$, $\tilde{Y}\in M(m,n,\mathbb{Z})$.

Підставивши в (1) вирази з (8) і записавши невідомі матриці у вигляді

$$X=\frac{1}{2}\big(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k}\big),\quad Y=\frac{1}{2}\big(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k}\big), \tag{9}$$

матимемо

$$\frac{1}{2}(A_1+A_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k})+\frac{1}{2}(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(B_1+B_2\sqrt{k})=\frac{1}{2}(C_1+C_2\sqrt{k}).$$

Домноживши обидві частини цього рівняння на 4, отримуємо

$$(A_1+A_2\sqrt{k})(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k})+(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k})(B_1+B_2\sqrt{k})=2(C_1+C_2\sqrt{k}).$$

Звідси одержуємо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$ вигляду

$$\begin{cases}(A_1+A_2k)X_2+Y_2(B_1+B_2k)+2A_1\tilde{X}+2\tilde{Y}B_1=2C_1\\ (A_1+A_2)X_2+Y_2(B_1+B_2)+2A_2\tilde{X}+2\tilde{Y}B_2=2C_2.\end{cases}$$

Аналогічно, як у випадку $k\equiv 2,3 \pmod 4$, врахувавши означення кронекерового добутку матриць до цієї системи, отримуємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\mathbf{x}_1\\ \tilde{\mathbf{x}}\\ \mathbf{y}_1\\ \tilde{\mathbf{y}}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}2\mathbf{c}_1\\ 2\mathbf{c}_2\end{matrix}\right\|, \tag{10}$$

де $\tilde{\mathbf{x}}=\left\|Row_1(\tilde{X})\dots Row_n(\tilde{X})\right\|^T$; $\tilde{\mathbf{y}}=\left\|Row_1(\tilde{Y})\dots Row_m(\tilde{Y})\right\|^T$.

Матричне рівняння (10) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ еквівалентне до матричного рівняння (1) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$.

Відомо, що рівняння (10) має розв'язок $X=\frac{1}{2}\left(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k}\right)$, $Y=\frac{1}{2}\left(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k}\right)$ тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T & 2\mathbf{c}_1\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T & 2\mathbf{c}_2\end{matrix}\right\|$$

і

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T & \mathbf{0}\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$. Теорему доведено. □

4. Матричне лінійне рівняння $AX+BY=C$

Теорема 2. *Матричне рівняння (2) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ з матрицями $A,B\in M(m,n,\mathbb{K})$, $C\in M(m,l,\mathbb{K})$ вигляду (4) або (5) має розв'язок $X,Y\in M(n,l,\mathbb{K})$ тоді і тільки тоді, коли є еквівалентними над $\mathbb{Z}$ такі матриці:*

$$\left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & A_1 & B_1 & C_1\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & A_2 & B_2 & C_2\end{matrix}\right\| \quad i \quad \left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & A_1 & B_1 & \mathbf{0}\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & A_2 & B_2 & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|,$$

якщо $k\equiv 2,3 \pmod 4$ *і*

$$\left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & 2A_1 & 2B_1 & 2C_1\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & 2A_2 & 2B_2 & 2C_2\end{matrix}\right\| \; i \; \left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & 2A_1 & 2B_1 & \mathbf{0}\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & 2A_2 & 2B_2 & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|,$$

якщо $k\equiv 1 \pmod 4$.

Доведення. Нехай $k \equiv 2, 3 \pmod 4$, тоді матриці X, Y можна записати у вигляді (6). Підставивши вирази (4) і (6) у рівняння (2), матимемо таке рівняння:

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})(X_1 + X_2\sqrt{k}) + (B_1 + B_2\sqrt{k})(Y_1 + Y_2\sqrt{k}) = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цього рівняння легко отримати таку систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2X_2k + B_1Y_1 + B_2Y_2k = C_1 \\ A_2X_1 + A_1X_2 + B_2Y_1 + B_1Y_2 = C_2 \end{cases}.$$

З цієї системи одержуємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\|. \tag{11}$$

Матричне рівняння (11) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли еквівалентні над $\mathbb{Z}$ такі матриці:

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & C_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & C_2 \end{matrix} \right\| \quad \text{і} \quad \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Із цих матриць одержуємо еквівалентні до них такі матриці:

$$\left\| \begin{matrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right\| \quad \text{і} \quad \left\| \begin{matrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Теорема для випадку $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ доведена.

Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Як і в теоремі 1 невідомі матриці можна записати у вигляді (9), де $\tilde{X}, X_2, \tilde{Y}, Y_2 \in M(n, l, \mathbb{Z})$. Підставивши в (2) вирази з (5) і (9), одержуємо

$$\frac{1}{2}(A_1 + A_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}) + \frac{1}{2}(B_1 + B_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(Y_2 + 2\tilde{Y} + Y_2\sqrt{k}) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2\sqrt{k}).$$

Домноживши обидві частини цього рівняння на 4, отримуємо

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}) + (B_1 + B_2\sqrt{k})(Y_2 + 2\tilde{Y} + Y_2\sqrt{k}) = 2(C_1 + C_2\sqrt{k}).$$

Звідси маємо таку систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} (A_1 + A_2k)X_2 + (B_1 + B_2k)Y_2 + 2A_1\tilde{X} + 2B_1\tilde{Y} = 2C_1 \\ (A_1 + A_2)X_2 + (B_1 + B_2)Y_2 + 2A_2\tilde{X} + 2B_2\tilde{Y} = 2C_2. \end{cases}$$

З цієї системи одержимо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$ вигляду

$$\left\| \begin{matrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & 2A_1 & 2B_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{matrix} \right\|.$$

Доведення завершено. □

Наслідок 1. *Нехай $\mathbb{Z}[i]$ – кільце цілих гаусових чисел і рівняння (2) з коефіцієнтами вигляду*

$$A = A_1 + A_2i, \quad B = B_1 + B_2i, \quad C = C_1 + C_2i,$$

де $A_i, B_i \in M(m,n,\mathbb{Z})$, $C_i \in M(m,l,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$ *має розв'язок* $X, Y \in M(n,l,\mathbb{Z}[i])$ *в тому і тільки в тому випадку, коли матриці*

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & C_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & C_2 \end{matrix}\right\| \quad i \quad \left\|\begin{matrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$.

Наслідок 2. *Матричне рівняння* $AX = B$ *з матрицями* $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $B \in M(m,l,\mathbb{K})$ *вигляду* (4) *або* (5) *має розв'язок* $X \in M(n,l,\mathbb{K})$ *тоді і тільки тоді, коли еквівалентні над* $\mathbb{Z}$ *такі матриці:*

$$\left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & A_1 & B_1 \\ A_1 + A_2 & A_2 & B_2 \end{matrix}\right\| \quad i \quad \left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & A_2 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|,$$

якщо $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ *і*

$$\left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & 2A_1 & 2B_1 \\ A_1 + A_2 & 2A_2 & 2B_2 \end{matrix}\right\| \quad i \quad \left\|\begin{matrix} A_1 + A_2k & 2A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & 2A_2 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|,$$

якщо $k \equiv 1 \pmod 4$.

За доведеннями теореми 1 і теореми 2 одержуємо спосіб розв'язування матричних рівнянь (1) і (2). Розв'язування матричних лінійних рівнянь над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ зводиться до розв'язування матричних лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

5. Матричні лінійні рівняння (1) і (2), визначники матриць-коефіцієнтів яких взаємно прості

Нехай у рівнянні (1) $(n \times n)$ - матриці A, B, C над кільцем головних ідеалів і визначники A і B взаємно прості. Під кільцем головних ідеалів розуміємо комутативне кільце з одиницею без дільників нуля, в якому кожен ідеал є головним [20, с. 1]. Тоді з [21] випливає, що матриці M і N вигляду (3) еквівалентні. Отже, рівняння (1) розв'язне. Для матричного рівняння (1) над квадратичними кільцями таке твердження неправильне. Серед квадратичних кілець є кільця, матричне рівняння (1) над якими за умови, що визначники матриць A і B взаємно прості, може бути нерозв'язне.

Приклад 1. Нехай

$$\left\|\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| X + Y \left\|\begin{matrix} 0 & 2+\sqrt{-5} \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5+2\sqrt{-5} & 4-\sqrt{-5} \end{matrix}\right\|$$

– матричне рівняння над кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Визначники матриць $\left\|\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$ і $\left\|\begin{matrix} 0 & 2+\sqrt{-5} \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\|$ взаємно прості, але це рівняння нерозв'язне.

Відомо, що матричне рівняння (2), де A, B, C – $(n \times n)$ - матриці над кільцем головних ідеалів розв'язне тоді і тільки тоді, коли лівий найбільший спільний дільник матриць (A, B) є лівим дільником матриці C. Якщо $(detA, detB) = 1$, то очевидно, рівняння (2) розв'язне.

Приклад 2. Рівняння

$$\begin{Vmatrix} 6+3\sqrt{-5} & 1 \\ 3+3\sqrt{-5} & 1 \end{Vmatrix} X + \begin{Vmatrix} -1 & -1+4\sqrt{-5} \\ -1 & -3+3\sqrt{-5} \end{Vmatrix} Y = \begin{Vmatrix} 7+3\sqrt{-5} & 10+2\sqrt{-5} \\ 6+3\sqrt{-5} & 7+2\sqrt{-5} \end{Vmatrix}$$

над $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ не має розв'язків. Визначники матриць $\begin{Vmatrix} 6+3\sqrt{-5} & 1 \\ 3+3\sqrt{-5} & 1 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} -1 & -1+4\sqrt{-5} \\ -1 & -3+3\sqrt{-5} \end{Vmatrix}$ взаємно прості.

Список використаної літератури

1. T. Kaczorek, *Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory*, Commun. and Control Eng. Ser., Springer, London, UK, 2007.
2. V. Kucera, *Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems. I. Preliminaries*, Kybernetika **9** (1973), no. Suppl(2), 94–107.
3. P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The theory of matrices*, New York: Academic Press, 1985.
4. W. E. Roth, *The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), no. 3, 392–396. DOI: 10.2307/2031890
5. W. H. Gustafson, *Roth's theorems over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **23** (1979), 245–251. DOI: 10.1016/0024-3795(79)90106-X
6. R. Hartwig, *Roth's equivalence problem in unit regular rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), no. 1, 39–44. DOI: 10.2307/2042033
7. В. М. Петричкович, *Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц*, Мат. заметки **37** (1985), no. 6, 789–796; **English version**: V. M. Petrichkovich, *Cell-triangular and cell-diagonal factorizations of cell-triangular and cell-diagonal polynomial matrices*, Math. Notes **37** (1985), no. 6, 431–435. DOI: 10.1007/BF01157677.
8. В. Петричкович, *Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями*, Львів, Ін-т приклад. пробл. мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015.
9. S. Chen, Y. Tian, *On solutions of generalized Sylvester equation in polynomial matrices*, J. Frankl. Inst. **351** (2014), 5376–5385. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2014.09.024.
10. J. Feinstein, J. Bar-ness, *On the uniqueness of the minimal solution the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$*, J. Franklin Inst. **310** (1980), no. 2, 131–134. DOI: 10.1016/0016-0032(78)90012-1
11. N. S. Dzhaliuk, V. M. Petrychkovych, *The structure of solutions of the matrix linear unilateral polynomial equation with two variables*, Carpathian Math. Publ. **9** (2017), no. 1, 48–56. DOI: 10.15330/cmp.9.1.48-56.
12. N. S. Dzhaliuk, V. M. Petrychkovych, *The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings*, ISRN Algebra (2012), Article ID 205478, 14 pages. DOI: 10.5402/2012/205478.
13. O. Helmer, *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 225–236. DOI: 10.1090/S0002-9904-1943-07886-X
14. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), no. 2, 464–491. DOI: 10.1090/S0002-9947-1949-0031470-3
15. B. V. Zabavsky, *Diagonal reduction of matrices over rings*, Math. Studies, Monograph Series, **XVI**, VNTL Publishers, Lviv, 2012.

16. В. П. Щедрик, *Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників,* Львів, Ін-т приклад. пробл. мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017.
17. Н. Б. Ладзоришин, *Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх та різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями*, Мат. методи та фіз.-мех. поля **58** (2015), no. 2, 47–54; **English version**: N. B. Ladzoryshyn, *Integer solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings,* J. Math. Sci. **223** (2017), no. 1, 50–59. DOI: 10.1007/s10958-017-3337-0
18. Г. Хассе, *Лекції по теории чисел*, Москва, Наука, 1953.
19. П. С. Казімірський, *Розклад матричних многочленів на множники (видання друге, виправлене)*, Львів, Ін-т приклад. пробл. мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015.
20. M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972.
21. M. Newman, *The Smith normal form of a partitioned matrix*, J. Res. Natl. Bur. Stand., Sect. B **78** (1974), no. 1, 3–6. DOI: 10.6028/jres.078B.002

Стаття: надійшла до редколегії 15.10.2018
доопрацьована 21.11.2018
прийнята до друку 26.12.2018

MATRIX LINEAR UNILATERAL AND BILATERAL EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS

Natalia LADZORYSHYN, Vasyl PETRYCHKOVYCH

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine, 3b Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine
e-mail: natalja.ladzoryshyn@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

We give necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of matrix linear equations $AX + YB = C$ and $AX + BY = C$ over the quadratic ring $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$. The method of solving which reduces these equations to matrix linear equations over the ring of integers $\mathbb{Z}$, is given.

Key words: quadratic ring, Sylvester matrix equation, matrix Diophantine equation, equivalence of matrices.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 41–47
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 41–47
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.041-047

УДК 515.12

FUNCTORS AND MANIFOLDS MODELED ON SOME k_ω-SPACE

Oryslava SHABAT[1], **Mykhailo ZARICHNYI**[2]

[1] *Ukrainian Academy of Printing,*
Pidgolosko Str., 19, 79020, Lviv, Ukraine
[2] *Ivan Franko Lviv National University,*
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: shabor@ukr.net, zarichnyi@yahoo.com

There is a universal space K^∞ for the class of compact metric spaces of finite f.-d. derivative. We consider the question of preservation of K^∞-manifolds by some functorial constructions. We also consider a universal map $\varphi_K \colon \mathbb{R}^\infty \to K^\infty$ and discuss some of its properties, in particular, its preservation by some functors.

Key words: universal space, infinite-dimensional manifold, functor.

Introduction

Recall that the k_ω-spaces are the countable direct limits of compact Hausdorff spaces. By $\mathbb{R}^\infty$ we denote the direct limit of the sequence

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \dots$$

and by Q^∞ the direct limit of the sequence

$$Q \to Q^2 \to Q^3 \to \dots,$$

where $Q = [0,1]^\omega$ is the Hilbert cube.

Let A be a topological space. The f.d.-derivative of A is the set

$$A^{(1)} = A \setminus \{x \in A \mid \text{ there is a neighborhood } U \text{ of } x \text{ such that } \dim U < \infty\}.$$

Clearly, $A^{(1)}$ is a closed subset in A. By induction, we define $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^{(1)}$, for $n > 1$.

Let $\mathcal{K}$ denote the class of compact metrizable spaces A such that $A^{(n)} = \emptyset$, for some natural n. Let $\mathcal{M}(\omega)$ denote the class of finite-dimensional compact metrizable spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 57N20, 54B30

T. Banakh [1] considered the following construction. Given $n \in \mathbb{N}$, let

$$K_n = \left[-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right]^n \times \{(0, 0, \dots)\} \subset \ell^2.$$

Let $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_n \subset \ell^2$. Clearly, K is a compact metric space and $K^{(1)} = * = (0, 0, \dots)$.

Let $\mathcal{C}$ be a class of topological spaces. A topological space X is said to be *strongly* $\mathcal{C}$*-universal* if, for every pair (A, B) of topological spaces, where $A \in \mathcal{C}$ and B is a closed subset of A, every embedding $f\colon B \to X$, there is an embedding $\bar{f}\colon A \to X$ that extends f.

It is proved in [1] that the space $K^\infty = \varinjlim K^n$ is strongly $\mathcal{K}$-universal.

Recall that a space X is called a K^∞-*manifold* if X is locally homeomorphic to K^∞. We assume that all K^∞-manifolds under consideration are k_ω-spaces.

The theory of K^∞-manifolds is developed by T. Banakh [1]. It turned out that this theory is parallel to the theories of $\mathbb{R}^\infty$- and Q^∞-manifolds.

We will consider the question of preservation of K^∞-manifolds by some functorial constructions. Similar questions for another classes of infinite-dimensional manifolds were considered in publications of different authors (see, e.g., [10] and the bibliography therein).

The functors are assumed to be close to being normal. The notion of normal functor acting in the category of compact Hausdorff spaces is introduced by Shchepin [9]. In the sequel, we will use the terminology of [9]. In particular, the notions of monomorphic functor and functor that preserves intersections as well as of degree and support can be found in [9] (see, e.g., [10]).

By $F_k(X)$ we denote the set of points of degree $\le k$ in $F(X)$. Note that F_k is a subfunctor of F.

If F is a normal functor, X is a k_ω-space, $X = \varinjlim X_i$, then we define $F(X) = \varinjlim F(X_i)$.

1. Results

Lemma 1. *Let F be a monomorphic functor that preserves intersections and the degree of F equals $n \in \mathbb{N}$. If $F(n)$ is a finite-dimensional space, then $F(X) \in \mathcal{K}$, for every $X \in \mathcal{K}$.*

Proof. We will prove by induction on the degree of the functor. If $n = 1$, then $F(X) = X$ and there is nothing to prove. Consider $a \in F(X)$ with $\deg(a) = n$. Then there is a neighborhood U of a in $F(X)$ homeomorphic to $V_1 \times \dots \times V_n \times W$, where V_i, $i = 1, \dots, n$, are open subsets of X and W is an open subset of $F(n)$ (see [5]). Therefore, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $F(X)^{(m)} \subset F_{n-1}(X)$. Then we can apply induction. $\square$

The following lemma is proved in [1].

Lemma 2. *Let X be a K^∞-manifold. If $A \subset X$ be a compact subset, then there is an embedding $i\colon A \times K \to X$ such that $i(a, *) = a$ for every $a \in A$.*

We will need the following its corollary.

Corollary 1. *Let X be a K^∞-manifold. If $A \subset X$ be a compact subset, then for every $n \in \mathbb{N}$ there is an embedding $i\colon A \times K^n \to X$ such that $i(a, *, \dots, *) = a$ for every $a \in A$.*

Theorem 1. *Let X be a K^∞-manifold and let F be a functor of finite degree that preserves ANR-spaces and finite-dimensional spaces. Then $F(X)$ is a K^∞-manifold.*

Proof. Represent X as $\varinjlim X_i$, where X_i are compact ANR-spaces. Clearly, $X_i \in \mathcal{K}$. Then $F(X) = \varinjlim F(X_i)$. By Lemma 1, $F(X_i) \in \mathcal{K}$.

We are going to demonstrate the strong local $\mathcal{K}$-universality of $F(X)$. Let (A, B) be a pair of compact metrizable spaces with $A \in \mathcal{K}$ and let $\beta\colon B \to F(X)$ be an embedding. Then there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\beta(B) \subset F(X_n)$. Since $F(X_n)$ is an ANR-space, there is an extension $\alpha'\colon U \to F(X_n)$ of β onto a closed neighborhood U of B in A.

Let U/B denote the quotient space of U obtained when we identify all the points of U to a single equivalence class leaving all the other points of B equivalent only to themselves. Note that $U/B \in \mathcal{K}$. Let $q\colon U \to U/B$ denote the quotient map. There exists an embedding $\gamma\colon U/B \to K^m$, for some $m \in \mathbb{N}$, such that $\gamma(A) = (*, \ldots, *)$ (see [1]). Let $q\colon U \to U/B$ denote the quotient map.

Using Corollary 1, one may assume that $X_n \times K^m \subset X$ and $x = (x, *, \cdots *) \in X_n \times K^m$ for every $x \in X_n$. For any $y \in K^m$, denote by $i_y\colon X_n \to X_n \times K^m$ the map defined by the formula $i_y(x) = (x, y)$, $x \in X_n$.

Given $x \in U$, define $\alpha(x) = F(i_{\gamma(q(x))})(\alpha'(x))$.

Let us verify that α is an embedding that extends β. Indeed, the continuity of α is a consequence of Propositions 2.2 and 2.4 from [7]. Next, if $x \in B$, $y \in U \setminus B$, then $\operatorname{supp}(\alpha(x)) \subset X_n$ and

$$\operatorname{supp}(\alpha(y)) \subset X_n \times (K^m \setminus \{(*, \ldots, *)\})$$

and we conclude that $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. If $x, y \in U \setminus B$, $x \neq y$, then

$$\operatorname{supp}(\alpha(x)) \subset X_n \times \{\gamma q(x)\}, \qquad \operatorname{supp}(\alpha(y)) \subset X_n \times \{\gamma q(y)\},$$

and therefore $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. □

Recall that a *free topological group* of a Tychonov space X is a topological group $F(X)$ satisfying the following conditions:

(1) X is a subspace of $F(X)$;
(2) for any continuous map $f\colon X \to G$, where G is a topological group, there exists a unique continuous homomorphism $\bar{f}\colon F(X) \to G$ that extends f.

It is well-known (see, e.g., [6]) that a topological group exists and is unique up to isomorphism.

One can similarly prove the following theorems. Note that its proof relies on the fact that, for any compact Hausdorff space X, the free topological group $F(X)$ is homeomorphic to the countable direct limit $\varinjlim F_n(X)$, where $F_n(X)$ stands for the words of length $\leq n$ in $F(X)$. Actually, F_n is a functor for which the assumptions of Lemma 1 are satisfied (see [11]).

Theorem 2. *Let $X \in \mathcal{K}$ be a compact metric space such that X contains a topological copy of K. The free topological group of the space X is a K^∞-manifold.*

Theorem 3. *The free topological group of the space K is a K^∞-manifold.*

The previous results are counterparts of the results of the second number author on free topological groups of ANR-spaces (see [11]).

By $(\mathcal{M}(\omega), \mathcal{K})$ we denote the class of continuous maps $f\colon X \to Y$, where $X \in \mathcal{M}(\omega)$, $Y \in \mathcal{K}$.

Given two maps, $f\colon X' \to X''$ and $g\colon Y' \to Y''$, we say that a pair $i = (i', i'')$, where $i'\colon X' \to Y'$, $i''\colon X'' \to Y''$ are maps, is a morphism in the category of maps if the diagram

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X'' \arrow[r, "i''"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

is commutative. In this case we say that i is an embedding if both i', i'' are embeddings. Also, if $X'' \subset X'$, $Y'' \subset Y'$, $g = f|X''\colon X'' \to Y''$, then we say that a pair of maps (f, g) is given.

A map $f\colon \mathbb{R}^\infty \to K^\infty$ is said to be $(\mathcal{M}(\omega), \mathcal{K})$-*universal* if, for every pair (g, h) of maps with $g, h \in (\mathcal{M}(\omega), \mathcal{K})$ and every embedding $i\colon h \to f$, there exists an embedding $j\colon g \to f$ that extends i.

Proposition 1. *There is a $(\mathcal{M}(\omega), \mathcal{K})$-universal map $\mathbb{R}^\infty \to K^\infty$.*

Proof. Let $\varphi\colon \mathbb{R}^\infty \to Q^\infty$ be a universal map described in [12]. We suppose that $K^\infty \subset Q^\infty$ and let

$$\psi = \varphi|\varphi^{-1}(K^\infty)\colon \varphi^{-1}(K^\infty) \to K^\infty.$$

Consider the composition

$$\mathbb{R}^\infty \xrightarrow{\quad\simeq\quad} \varphi^{-1}(K^\infty) \to K^\infty$$

(that $\varphi^{-1}(K^\infty)$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^\infty$ easily follows from the fact that K^∞ is a k_ω-space which is an absolute retract as well as from the universality of the map φ.)

Let us denote the obtained map by φ_K. We are going to prove that φ_K is $(\mathcal{M}(\omega), \mathcal{K})$-universal. Suppose that we have a pair (g, h) of maps $g\colon X' \to X''$, $h\colon Y' \to Y''$ with $g, h \in (\mathcal{M}(\omega), \mathcal{K})$ and an embedding $i = (i', i'')\colon h \to \varphi_K$.

By the characterization theorem for K^∞ (see [1]), there exists an embedding $j''\colon X'' \to K^\infty \subset Q^\infty$ which is an extension of the embedding $i''\colon Y'' \to K^\infty \subset Q^\infty$. By the universality property of φ, there exists an embedding $i'\colon X' \to \mathbb{R}^\infty$ such that $j'|Y' = j''$ and $\varphi j' = j''$. Then $i'(X') \subset \varphi^{-1}(K^\infty)$ and this finishes the proof. $\square$

The following is a characterization theorem for the map φ_K.

Theorem 4. *Let $f\colon X \to Y$ be a map of k_ω-spaces. Then the following are equivalent:*

(1) *X is a countable union of finite-dimensional compact metrizable spaces, Y is a countable union of spaces from the class $\mathcal{K}$, and f is $(\mathcal{M}(\omega), \mathcal{K})$-universal.*
(2) *f is homeomorphic to φ_K.*

Proof. Follows the proof of the main result in [12] concerning characterization of the map $\varphi\colon \mathbb{R}^\infty \to Q^\infty$ by its universality condition. $\square$

Let P_n denote the functor of probability measures supported on the sets of cardinality $\leq n$. This functor acts in the category of compact Hausdorff spaces. Any $\mu \in P_n(X)$

admits a representation of the form $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$, where $\alpha_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, and δ_{x_i} is the Dirac measure concentrated at $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$.

By P_∞ we denote the functor of probability measures of finite support. Recall that for any k_ω-space $X = \varinjlim X_i$, we put $P_\infty(X) = \varinjlim P_i(X_i)$.

Proposition 2. *The map $P_\infty(\varphi_K)$ is homeomorphic to φ_K.*

Proof. We modify the proof of Theorem 2 from [13], namely, we replace every copy Q_n of the Hilbert cube Q by K^n, $n \in \mathbb{N}$, and thus Q^∞ by K^∞. The rest of the proof remains unchanged. □

One can also prove a similar result for the functor of idempotent measures of finite support (see [14]) for the definition of idempotent measures).

2. Remarks and open questions

Is there a map from K^∞ into Q^∞ which is a counterpart of the universal map $\mathbb{R}^\infty \to Q^\infty$?

T. Banakh and O. Hryniv [2] characterized the spaces whose free topological semigroups in some classes are $\mathbb{R}^\infty$-manifolds. Whether a counterpart of their result is valid for the K^∞-manifolds remains an open question. See also [3] for some related results concerning free topological universal algebras.

The notion of f.d.-derivative can be extended over transfinite numbers. This allows us to consider the theories of infinite-dimensional manifolds modeled over countable direct limits of universal spaces for compacta whose f.d.-derivative of order $< \alpha$ is empty, for given countable ordinal α. The case of finite α corresponds to the theory of manifolds modeled on the countable direct limits of $(n-1)$-dimensional Menger compacta (injectively-Menger manifolds; see [8]).

The following questions arise in connection with the results of [4].

Question 1. Is there a linear realization of the map φ_K, i.e., a linear map of linear topological spaces which is homeomorphic to φ_K?

Question 2. Is the map φ_K locally self-similar? Recall that a map $f\colon X \to Y$ is called *locally self-similar* if, for any $x \in X$ and any neighborhoods U, V of x and $f(x)$ respectively, there exists a neighborhood W of x such that $W \subset U$, $f(V) \subset U$, and the restriction $f|W\colon W \to f(W)$ is homeomorphic to the map f.

Acknowledgement

The authors are indebted to the referee for valuable remarks and some corrections.

References

1. T. O. Banakh, *On one class of infinite-dimensional manifolds*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **36** (1991), 50–53 (Ukrainian).

2. T. Banakh and O. Hryniv, *Free topological inverse semigroups as infinite-dimensional manifolds*, Algebraical Structures and their Applications, Kyiv, Inst. Mat. NANU, 2002, p. 132–139.
3. T. Banakh and O. Hryniv, *Free topological universal algebras and absolute neighborhood retracts*, Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat. (2011), no. 1 (65), 50–59.
4. T. Banakh and D. Repovš, *On linear realizations and local self-similarity of the universal Zarichnyi map*, Houston J. Math. **31** (2005), no. 4, 1103–1114.
5. В. Н. Басманов, *Ковариантные функторы, ретракты и размерность*, Докл. АН СССР, **271** (1983), no. 5, 1033–1036; **English version:** V. N. Basmanov, *Covariant functors, retracts and dimension*, Sov. Math., Dokl. **28** (1983), 182–185.
6. М. И. Граев, *Свободные топологические группы*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **12** (1948), no. 3, 279–324.
7. В. В. Федорчук, *Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы*, УМН **41** (1986), no. 6(252), 121–159; **English version:** V. V. Fedorchuk, *Soft maps, multivalued retractions, and functors*, Russian Math. Surveys **41** (1986), no. 6, 149–197. DOI: 10.1070/RM1986v041n06ABEH004227
8. D. Repovš and M. Zarichnyi, *Topology of manifolds modeled on countable direct limits of Menger compacta*, Topology Appl. **153** (2006), no. 17, 3230–3240. DOI: 10.1016/j.topol.2006.01.014
9. Е. В. Щепин, *Функторы и несчетные степени компактов*, УМН **36** (1981), no. 3(219), 3–62; **English version:** E. V. Shchepin, *Functors and uncountable powers of compacta*, Russian Math. Surveys **36** (1981), no. 3, 1–71. DOI: 10.1070/RM1981v036n03ABEH004247
10. A. Teleiko and M. Zarichnyi, *Categorical topology of compact Hausdorff spaces*, Math. Stud. Monogr. Series, **5**, VNTL Publishers, Lviv, 1999.
11. М. М. Заричный, *Свободные топологический группы абсолютных окрестносных ретрактов и бесконечномерные многообразия*, Докл. АН СССР, **266** (1982), 541–544; **English version:** M. M. Zarichnyj, *Free topological groups of absolute neighborhood retracts and infinite-dimensional manifolds*, Sov. Math., Dokl. **26** (1982), 367–371.
12. M. Zarichnyi, *Functors generated by universal maps of injective limits of sequences of Menger compacta*, Matematika. Nauchnyje trudy. **562** (1991), Riga, 95–102 (Russian).
13. M. M. Zarichnyĭ, *On universal maps and spaces of probability measures with finite supports*, Math. Stud. **2** (1993), 78–82.
14. М. М. Заричный, *Пространства и отображения идемпотентных мер*, Изв. РАН. Сер. матем. **74** (2010), no. 3, 45–64; **English version:** M. M. Zarichnyi, *Spaces and maps of idempotent measures*, Izv. Math. **74** (2010), no. 3, 481–499. DOI: 10.1070/IM2010v074n03ABEH002495

Стаття: надійшла до редколегії 07.11.2018
доопрацьована 10.12.2018
прийнята до друку 26.12.2018

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85 **47**

ФУНКТОРИ ТА МНОГОВИДИ, МОДЕЛЬОВАНІ НА ДЕЯКИХ k_ω-ПРОСТОРАХ

Орислава ШАБАТ[1], **Михайло ЗАРІЧНИЙ**[2]

[1] *Українська академія друкарства, вул. Підголоско 19, 79020, Львів*
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, 79000, Львів*
e-mail: shabor@ukr.net, zarichnyi@yahoo.com

Існує універсальний простір K^∞ для класу компактних метричних просторів скінченної скінченновимірної (f.-d.) похідної. Ми розглядаємо питання збереження K^∞-многовидів деякими функторіальними конструкціями. Ми розглядаємо також універсальне відображення $\varphi_K : \mathbb{R}^\infty \to K^\infty$ і обговорюємо деякі його властивості, зокрема, його збереження деякими функторами.

Ключові слова: універсальний простір, нескінченновимірний многовид, функтор.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 48–59
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 48–59
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.048-059

УДК 515.122.5

ON OLD AND NEW CLASSES OF FEEBLY COMPACT SPACES

Dedicated to the 75th birthday of Yaroslav Prytula

Oleg GUTIK[1], Oleksandr RAVSKY[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
[2]*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics*
and Mathematics of NASU, Naukova Str., 3b, 79060, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
alexander.ravsky@uni-wuerzburg.de

We introduce three new classes of countably pracompact spaces, consider their basic properties and relations with another compact-like spaces.

Key words: compact, feebly compact, sequentially compact, ω-bounded, totally countably compact, countably compact, countably pracompact, pseudocompact, sequentially pseudocompact, sequentially pracompact, totally countably pracompact, ω-bounded-pracompact.

1. Definitions and relations

In general topology one often investigates different classes of compact-like spaces and relations between them, see, for instance, basic [11, Chap. 3] and general works [9], [19], [23], [22], [17]. We consider the present paper as a next small step in this quest.

We shall follow the terminology of [11]. By $\mathbb{N}$ we shall denote the set of all positive integers.

A subset of a topological space X is called *regular open* if it equals the interior of its closure. A space X is *quasiregular* if each nonempty open subset of X contains closure of some nonempty open subset of X.

2010 Mathematics Subject Classification: 54B10, 54D30, 54D50, 54D55

1.1. **Old classes.** We recall that a topological space X is said to be

- *semiregular* if X has a base consisting of regular open subsets;
- *compact* if each open cover of X has a finite subcover;
- *sequentially compact* if each sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of X has a convergent subsequence in X;
- ω*-bounded* if each countable subset of X has compact closure;
- *totally countably compact* if each sequence of X contains a subsequence with compact closure;
- *countably compact* if each open countable cover of X has a finite subcover;
- *countably compact at a subset* $A \subseteq X$ if every infinite subset $B \subseteq A$ has an accumulation point x in X;
- *countably pracompact* if there exists a dense subset D in X such that X is countably compact at D;
- *feebly* ω*-bounded* if for each sequence $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of non-empty open subsets of X there is a compact subset K of X such that $K \cap U_n \neq \varnothing$ for each n;
- *selectively sequentially feebly compact* if for each sequence $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of non-empty open subsets of X we can choose a point $x_n \in U_n$ for each $n \in \mathbb{N}$ such that the sequence $\{x_n\}$ has a convergent subsequence;
- *selectively feebly compact*[1], if for each sequence $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of non-empty open subsets of X we can choose a point $x \in X$ and a point $x_n \in U_n$ for each $n \in \mathbb{N}$ such that the set $\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in W\}$ is infinite for every open neighborhood W of x.
- *sequentially feebly compact*[2] [10, Def. 1.4] if for each sequence $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ of non-empty open subsets of the space X there exist a point $x \in X$ and an infinite set $I \subset \mathbb{N}$ such that for each neighborhood U of the point x the set $\{n \in I \colon U_n \cap U = \varnothing\}$ is finite;
- *feebly compact* if each locally finite family of nonempty open subsets of the space X is finite.
- k*-space* if X is Hausdorff and a subset $F \subset X$ is closed in X if and only if $F \cap K$ is closed in K for every compact subspace $K \subset X$.

[1] Selectively sequentially feebly compact Tychonoff spaces were recently introduced and studied by Dorantes-Aldama and Shakhmatov in [8]. Also they considered selectively feebly compact Tychonoff spaces under the name *selectively pseudocompact* spaces. An equivalent property appeared a few years earlier in papers by Garcıa-Ferreira with Ortiz-Castillo [12] and with Tomita [13] under the title "*strong pseudocompactness*", but since the term "strongly pseudocompact" is used in [3, 7] to denote two different properties, we stick to a name for this property which reflects its "selective" nature and also matches the name of the previous "selective" property.

[2] One of the authors introduced this notion a few years ago as a natural property intermediate between feeble and sequential compactness, which may be useful in some applications in topological algebra. Indeed, for instance, Proposition 1.10. by Artico et al. [4] combined with Theorem 1.1 by Lipparini [17] states that that each T_0 feebly compact topological group is sequentially feebly compact. But later we found that it is a known property, even with the same name. The oldest reference which we know (see [19, p. 15]) is Reznichenko's paper [21]. A similar notion had been given by Artico et al. in [4, Def. 1.8], where are used pairwise disjoint open sets instead. Lipparini proved in [17] that these notions are equivalent.

According to Theorem 3.10.22 of [11], a Tychonoff topological space X is feebly compact if and only if it is pseudocompact, that is, each continuous real-valued function on X is bounded. Also, a Hausdorff topological space X is feebly compact if and only if every locally finite family of non-empty open subsets of X is finite.

Relations between different classes of compact-like spaces are well-studied. Some of them are presented on Diagram 3 in [19, p.17], on Diagram 1 in [8, p. 58] (for Tychonoff spaces), and on Diagram 3.6 in [22, p. 611].

1.2. **New classes.** The notion of countable pracompactness has been studied by several authors under several names. According to Matveev [19] it "appeared in the literature under many different names". Matveev mentions that Baboolal, Backhouse and Ori [5] introduced an equivalent notion under the name e-countable compactness. In the recent paper [18] the authors study the notion using the expression "densely countably compact". A few references and a further name are recalled there [2] According to Arkhangel'skii [1] countable compactness at some subset and countable pracompactness "find important applications in C_p-theory".

In order to refine the stratification of countable pracompact spaces even more, we introduce the following definitions. In each of them we require that a space X contains a dense subset D with a special property. Namely,

- if each sequence of points of the set D has a convergent subsequence (in X) then X is *sequentially pracompact*;
- if each sequence of points of the set D has a subsequence with compact closure (in X) then X is *totally countably pracompact*;
- if each countable subset of the set D has compact closure (in X) then X is ω*-bounded-pracompact*.

Our main motivation to introduce the above spaces is their possible applications in topological algebra. In particular, we are going to use them in the paper [15].

Diagram 1 shows relations between different classes of compact-like spaces. All implications on the diagram are true and we *suggest* that they are either well-known or easy to prove and all non-marked arrows are not reversible without imposing additional conditions on spaces. In particular, in Section 4 of the present paper we construct a sequentially feebly compact space which is not selectively feebly compact (Example 2), a sequentially pracompact space which is not countably compact (Example 3), and a totally countably pracompact space which is nether ω-bounded-pracompact nor totally countably compact (Example 4).

2. Basic properties

2.1. **Extensions.** We recall that an *extension* of a space X is a space Y containing X as a dense subspace. It is easy to check that countable pracompactness, sequential pracompactness, feeble compactness, sequential feeble compactness, selective feeble compactness, selective sequential feeble compactness, and feeble ω-boundedness is preserved by extensions.

2.2. **Continuous images.** It is easy to check that sequential compactness, feeble compactness, sequential feeble compactness, countably pracompactness, and sequential pracompactness is preserved by continuous images and total countable compactness, total countable pracompactness, ω-boundedness, and ω-bounded-pracompactness is preserved by continuous Hausdorff images.

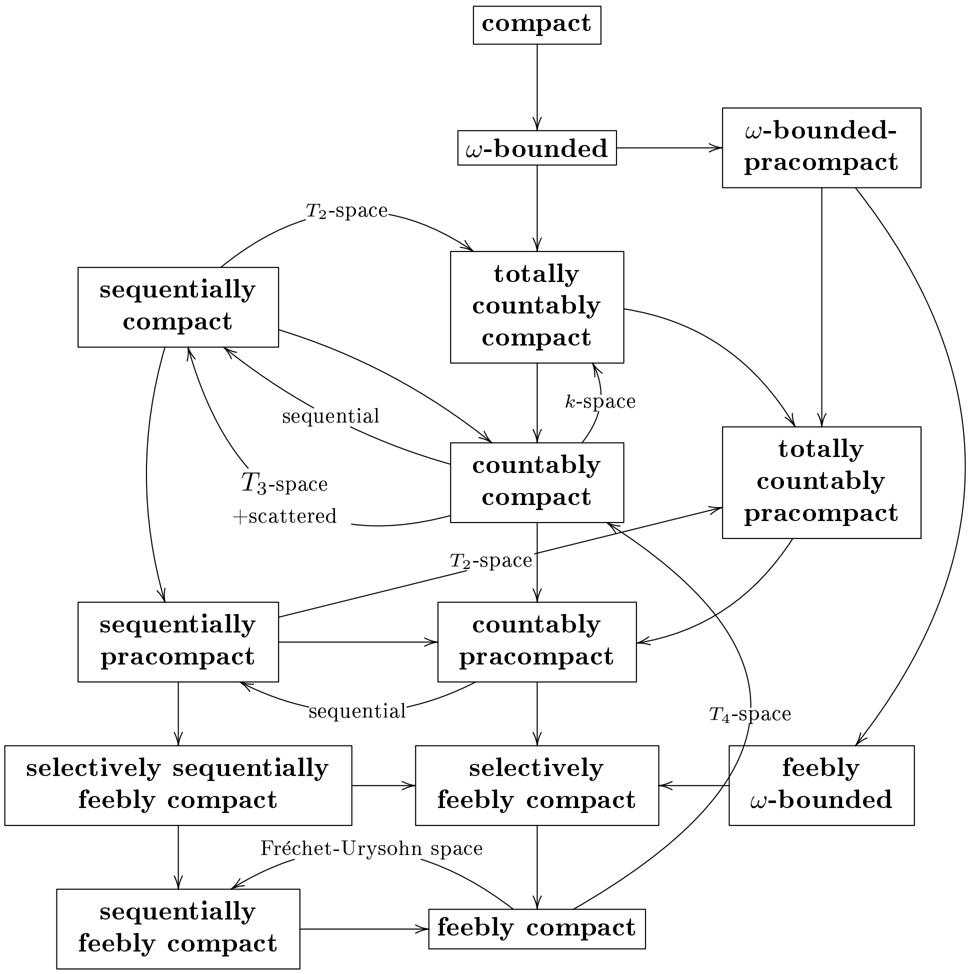


Diagram 1

2.3. **Products.** The investigation of productivity of compact-like spaces is motivated by the fundamental Tychonoff theorem, stating that a product of a family of compact spaces is compact, On the other hand, there are two countably compact spaces whose product is not feebly compact (see [11], the paragraph before Theorem 3.10.16). The product of a countable family of sequentially compact spaces is sequentially compact [11, Theorem 3.10.35]. But already the Cantor cube $D^{\mathfrak{c}}$ is not sequentially compact (see [11], the paragraph after Example 3.10.38). On the other hand, some compact-like spaces are also preserved by products, see [23, §3-4] (especially Theorem 3.3, Proposition 3,4, Example 3.15, Theorem 4.7, and Example 4.15) and §7 for the history, and [22, §5]. Among more recent results we note that Dow et al. in Theorem 4.1 of [10] proved that a product of a family of sequentially feebly compact spaces is again sequentially feebly compact, and in Theorem 4.3 that every product of feebly compact spaces, all but one of which are sequentially feebly compact, is feebly compact.

In the next propositions we show that sequentially pracompact, T_1 totally countably compact, and ω-bounded-pracompact spaces are preserved by products. The proofs are easy and straightforward but we provide them because a theorem should have a proof.

Let X be a product of a family $\{X_\alpha\colon \alpha\in A\}$ of spaces. For each subset B of the set A by π_B we denote the projection from $X=\prod\{X_\alpha\colon \alpha\in A\}$ to $\prod\{X_\alpha\colon \alpha\in B\}$. If $B=\{\alpha\}$ then π_B we shall denote also by π_α. A space $Y\subset X$ is called a Σ-product of the family $\{X_\alpha\}$ provided there exists a point $y\in X$ such that

$$Y=\{x\in X\colon x_\alpha=y_\alpha \text{ for all but countably many } \alpha\in A\}.$$

In this case Y is also called the *Corson Σ-subspace of X based at y.*

Proposition 1. *The* (Σ-) *product of a family of sequentially pracompact spaces is sequentially pracompact.*

Proof. Let X be the non-empty product of a family $\{X_\alpha\colon \alpha\in A\}$ of sequentially pracompact spaces and $Y\subset X$ be the Corson Σ-subspace of X based at a point $y=(y_\alpha)\in X$. For each index $\alpha\in A$ fix a dense subset $D_\alpha\ni y_\alpha$ of the space X_α such that each sequence of points of the set D_α has a convergent subsequence and fix a point $a_\alpha\in D_\alpha$. Put $D=Y\cap\prod_{\alpha\in A}D_\alpha$. Then the set D is a dense subset of the space X. Let $C=\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ be a sequence of points of the set D and $B=\{\alpha_m\colon m\in\mathbb{N}\}$ be an enumeration of the countable set $\{\alpha\in A\colon \exists\, x\in C(x_\alpha\neq y_\alpha)\}$. By induction we can build a sequence $\{x_{\alpha_m}\in X_{\alpha_m}\}$ of points and a sequence $\{S_m\}$ of *infinite* subsets of $\mathbb{N}$ such that $S_m\supset S_{m'}$ for each $m\le m'$ and for each neighborhood $U_{\alpha_m}\subset X_{\alpha_m}$ of the point x_{α_m} the set $\{n\in S_m\colon x_{n\alpha_m}\notin U_{\alpha_m}\}$ is finite. We can easily construct an infinite set $S\subset\mathbb{N}$ such that the set $S\setminus S_m$ is finite for each $m\in\mathbb{N}$. Choose a point $x=(x_\alpha)\in Y$ such that x_α is already defined for $\alpha\in B$ and $x_\alpha=y_\alpha$ for $\alpha\in A\setminus B$. Let U be an arbitrary neighborhood of the point x. There exist a finite subset F of the set A and a family

$$\{U_\alpha\colon \alpha\in F, U_\alpha\subset X_\alpha \text{ is an open neighborhood of } x_\alpha\}$$

such that $x\in U'=\pi_F^{-1}\left(\prod\{U_\alpha\colon \alpha\in F\}\right)\subset U$. The inductive construction implies that the set $T_\alpha=\{n\in S\colon x_{n\alpha}\notin U_\alpha\}$ is finite for each $\alpha\in F$. Then $x_n\in U'\subset U$ for each $n\in S\setminus\bigcup\{T_\alpha\colon \alpha\in F\}$. □

Proposition 2. *The* (Σ-) *product of a family of totally countably pracompact T_1 spaces is totally countably pracompact.*

Proof. Let X be the non-empty product of a family $\{X_\alpha\colon \alpha\in A\}$ of totally countably pracompact spaces and $Y\subset X$ be the Corson Σ-subspace of X based at a point $y=(y_\alpha)\in X$. For each index $\alpha\in A$ fix a dense subset $D_\alpha\ni y_\alpha$ of the space X_α such that each sequence of points of the set D_α has a subsequence with compact closure in X_α. Put $D=Y\cap\prod_{\alpha\in A}D_\alpha$. Then the set D is a dense subset of the space X. Let $C=\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}$

be a sequence of points of the set D and $\{\alpha_m : m \in \mathbb{N}\}$ be an enumeration of the countable set $\{\alpha \in A : \exists x \in C(x_\alpha \neq y_\alpha)\}$. By induction we can build a sequence $\{S_m\}$ of *infinite* subsets of $\mathbb{N}$ such that $S_m \supset S_{m'}$ for each $m \leq m'$ and the set $\{x_{n\alpha_m} : n \in S_m\}$ has compact closure in X_{α_m}. We can easily construct an infinite set $S \subset \mathbb{N}$ such that the set $S \setminus S_m$ is finite for each $m \in \mathbb{N}$. Then the set $\{x_n : n \in S\}$ has compact closure in X, which is contained in Y. $\square$

Remark 1. The referee remarked that in the case of Cartesian product in Proposition 2 T_1 condition can be weakened to that for each $\alpha \in A$ a set $\{y_\alpha\}$ has compact closure in X_α. The proof remains almost the same, only the final words "which is contained in Y" should be dropped.

It motivates to define a class of spaces in which every singleton (that is, one-point set) has compact closure. The referee suggested to investigate which classes of compact-like spaces belong to the class. By definition, each T_1 space belong to the class. Each totally countably compact space X also belongs to the class because for any point $x \in X$ the set $\overline{\{x\}}$ is the closure of any subsequence of the constant sequence $\{x_n\}$, where $x_n = x$ for each n.

On the other hand, the referee proposed to endow ω with the topology of left intervals, whose open sets are the intervals $[0, n)$, plus the whole of ω. Here the closure of 0 is the noncompact space ω. We extend this construction as follows. Let $X = \omega_1 + \omega$ endowed with a topology with a subbase consisting of halfintervals $[0, \alpha)$, where $\alpha < \omega_1 + \omega$ and $(\alpha, \omega_1 + \omega)$, where $\alpha < \omega_1$. Then the closure of ω_1 is a noncompact set $[\omega_1, \omega_1 + \omega)$. Now put $D = \omega_1$. Then D is dense in X and each countable subset C of D is contained in a closed compact set $[0, \sup C]$ of D. Thus X is both sequentially and ω-bounded-pracompact.

A sequentially compact example of a space not belonging to the class is more complicated, but, luckily, already known. Namely, in [20, Example 5] the second author constructed a group $G = \bigoplus_{\alpha \in \omega_1} \mathbb{Z}$, which is the direct sum of the groups $\mathbb{Z}$ and its subgroup

$$S = \{0\} \cup \{(x_\alpha) \in G : (\exists \beta \in \omega_1)((\forall \alpha > \beta)(x_\alpha = 0)\&(x_\beta > 0))\}.$$

Let G_S be the group G endowed with a topology with a base $\{x + S : x \in G\}$. Then G_S is a paratopological group, that is the group operation $+ : G \times G \to G$ is continuous. In [20, Example 5] it is shown that the group G_S is sequentially compact. On the other hand, by [20, Lemma 17] the set $S \subset G_S$ is compact. Since $\overline{\{0\}} = \{x \in G : x + S \ni 0\} = -S$, if the set $-S$ is compact then $G = S \cup (-S)$ is compact too, which contradicts [20, Proposition 12].

Proposition 3. *The product of a family of ω-bounded-pracompact spaces is ω-bounded-pracompact. Moreover, if all spaces of the family are T_1 then a Σ-product of the family is ω-bounded-pracompact too.*

Proof. Let X be the non-empty product of a family $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ of ω-bounded-pracompact spaces and $Y \subset X$ be the Corson Σ-subspace of X based at a point $y = (y_\alpha) \in X$. For each index $\alpha \in A$ fix a dense subset $D_\alpha \ni y_\alpha$ of the space X_α such that each countable subset of the set D_α has compact closure in X_α. Put $D = Y \cap \prod_{\alpha \in A} D_\alpha$. Then the set D is a dense subset of the space X. Let C be a countable subset of the set

D. Then C is a subset of a closed compact subset $C' = \prod_{\alpha\in A}\overline{\pi_\alpha(C)}$ of the space X. Now assume that all spaces X_α are T_1. Put $B = \{\alpha \in A \colon \exists x \in C (x_\alpha \neq y_\alpha)\}$. The set B is countable and so $C' = \prod_{\alpha\in B}\overline{\pi_\alpha(C)} \times \prod_{\alpha\in A\setminus B}\{y_\alpha\} \subset Y$. □

Example 1. This example shows that T_1 condition is essential in the Σ-product case of Propositions 2 and 3. Let X' be a space consisting of two distinct points a and b endowed with the topology $\{\varnothing, \{a\}, X'\}$. Let A be an uncountable subset, X be the product of a family $\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}$, $Y \subset X$ be the Corson Σ-subspace of X based at a point $y = (a_\alpha) \in X$, where $X_\alpha = X'$ and $a_\alpha = a$ for each $\alpha \in A$. Since the space X' is compact, it is easy to check that the space Y is countably compact. On the other hand, the space Y is not totally countably pracompact. For this purpose it suffices to show that for any point $x = (x_\alpha) \in Y$ a set $\overline{\{x\}}$ (everywhere in this example we by $\overline{S}$ we mean the closure in Y of its subset S) is not compact, because $\overline{\{x\}}$ is the closure (in Y) of any subsequence of a constant sequence $\{x_n\}$, where $x_n = x$ for each n. By [11, Proposition 2.3.3], $\overline{\{x\}} = \overline{\{(x_\alpha)\}} = Y \cap \prod_{\alpha\in A}\overline{\{x_\alpha\}}$. Remark that $b \in \overline{\{x_\alpha\}}$ for each $\alpha \in A$. Now for each $\alpha \in A$ put $Y_\alpha = \{y = (y_\beta) \in Y \colon y_\alpha = a\}$. Since for each point $z = (z_\alpha) \in Y$, there exists an index α such that $z_\alpha = a$, the family $\{Y_\alpha \colon \alpha \in A\}$ is an open cover of the set Y, and hence of $\overline{\{x\}}$. Let C be any finite subset of A. Let $t = (t_\alpha) \in Y$ be such that $t_\alpha = b$ if $x_\alpha = b$ or $\alpha \in C$ and $t_\alpha = a$, otherwise. Then $t \in \overline{\{x\}} \setminus \bigcup\{Y_\alpha \colon \alpha \in C\}$. Thus the set $\overline{\{x\}}$ is not compact.

Since the sequential feebly compactness is preserved by extensions, the following proposition strengthens Theorem 4.1 of [10] a bit.

Proposition 4. *The Σ-product of a family of sequentially feebly compact spaces is sequentially feebly compact.*

Proof. Let X be a non-empty product of a family $\{X_\alpha \colon \alpha \in A\}$ of sequentially feebly compact spaces, $Y \subset X$ be the Corson Σ-subspace of X based at a point $y = (y_\alpha) \in X$, and $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of non-empty open subsets of the space Y. For each index n choose a finite subset B_n of the set A and a family

$$\{U_{n\alpha} \colon \alpha \in B_n, U_{n\alpha} \text{ is a non-empty open subset of } X_\alpha\}$$

such that $U_n \cap Y \subset V_n$, where $U_n = \pi^{-1}_{B_n}\left(\prod\{U_{n\alpha} \colon \alpha \in B_n\}\right)$. Put $B = \bigcup B_n$. By Theorem 4.1 of [10], the space $X' = \{X_\alpha \colon \alpha \in B\}$ is sequentially feebly compact. Since $\{\pi_B(U_n)\}$ is a sequence of its non-empty open subsets, there exist a point $x' \in X'$ and an infinite set $I \subset \mathbb{N}$ such that for each neighborhood U' of the point $x' = (x'_\alpha)_{\alpha\in B}$ the set $\{n \in I \colon \pi_B(U_n) \cap U' = \varnothing\}$ is finite. Define a point $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in Y$ by putting $x_\alpha = x'_\alpha$ for each $\alpha \in B$ and $x_\alpha = y_\alpha$ for each $\alpha \in A \setminus B$. Let V be an arbitrary neighborhood of the point x in the space Y. Pick a canonical neighborhood U of the point x in the space X such that $U \cap Y \subset V$. Then there exists a subset I' of the set I such that a set $I \setminus I'$ is finite and $\pi_B(U_n) \cap \pi_B(U) \neq \varnothing$ for each $n \in I'$. Fix any such n and pick a point $z' = (z'_\alpha)_{\alpha\in B} \in \pi_B(U_n) \cap \pi_B(U)$. Define a point $z = (z_\alpha)_{\alpha\in A} \in Y$ by putting $z_\alpha = z'_\alpha$ for each $\alpha \in B$ and $z_\alpha = y_\alpha$ for each $\alpha \in A \setminus B$. It is easy to check that $z \in U_n \cap U \cap Y \subset V_n \cap V$. □

3. Backward implications

In [6], Banakh and Zdomskyy defined a topological space X to be an α_7*-space* if for any family $\{S_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ of countable infinite subsets of the space X such that a set $S_n\setminus U$ is finite for any n and any neighborhood U of x there exist a countable infinite subset S of the space X and a point $y\in X$ such that a set $S\setminus V$ is finite for any neighborhood V of y and $S_n\cap S\neq\varnothing$ for infinitely many n.

Proposition 5. *Let X be a Fréchet-Urysohn feebly compact space. Then X is sequentially feebly compact. Moreover, if X is either quasiregular or α_7 then X is selectively sequentially feebly compact.*

Proof. Let X be a Fréchet-Urysohn feebly compact space and $\{V_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ be a sequence of non-empty open subsets of the space X. For each n choose a non-empty open set $U_n\subset V_n$ such that $\overline{U}_n\subset V_n$ provided the space X is quasiregular. Since the space X is feebly compact, there exists a point $x\in X$ such that each neighborhood of the point x intersects infinitely many sets of the sequence $\{U_n\}$. Put $I_0=\{n\in\mathbb{N}\colon x\in\overline{U}_n\}$.

Suppose that the set I_0 is infinite. Then $U\cap U_n\neq\varnothing$ for each $n\in I_0$ and each neighborhood U of the point x. If the space X is quasiregular then $x\in V_n$ for each $n\in I_0$, thus the constant sequence $\{x_n=x\colon n\in I_0\}$ converges to x. Assume that X is an α_7-space. Since the space X is Fréchet-Urysohn, for each $n\in I_0$ there exists a sequence $S'_n=\{x^n_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ of points of U_n convergent to a point x. Considering its subsequence, if necessarily, we can assume that the sequence S'_n either consists of distinct points or it is constant. In the latter case we have $x^n_k=x^n\in U_n$ for each k for some point $x^n\in U_n$ such that $x\in\overline{\{x^n\}}$. Put $I'_0=\{n\in I_0\colon S'_n \text{ is constant}\}$. If the set I'_0 is infinite then a sequence $\{x^n\colon n\in I'_0\}$ converges to the point x. So we suppose that the set I'_0 is finite. Since X is an α_7-space, there exist a countable infinite subset S of the space X and a point $y\in X$ such that a set $S\setminus V$ is finite for any neighborhood V of y and a set

$$I''_0=\left\{n\in I_0\setminus I'_0\colon \text{ there exists a natural } k(n) \text{ such that } x^n_{k(n)}\in S\right\}$$

is infinite. For each $n\in I''_0$ put $x_n=x^n_{k(n)}\in U_n$. If there exists a point $z\in X$ such that the set $I_1=\{n\in I''_0\colon x_n=z\}$ is infinite then the sequence $\{x_n\colon n\in I_1\}$ converges to the point z. Otherwise the sequence $\{x_n\colon n\in I''_0\}$ converges to the point y. Indeed, let V be an arbitrary neighborhood of the point y. Then the set $S\setminus V$ is finite and $x_n\in V$ for each $n\in I''_0\setminus\{n\colon x_n\in S\setminus V\}$.

Suppose that the set I_0 is finite. Since $x\in\overline{\bigcup\{U_n\colon n\in\mathbb{N}\setminus I_0\}}$ and X is a Fréchet-Urysohn space, there exists a sequence $\{x'_m\colon m\in\mathbb{N}\}$ of points of the set $\bigcup\{U_n\colon n\in\mathbb{N}\setminus I_0\}$ converging to the point x. For each index $m\in\mathbb{N}$ choose an index $n(m)\in\mathbb{N}\setminus I_0$ such that $x'_m\in U_{n(m)}$. Put $I_1=\{n(m)\colon m\in\mathbb{N}\}$. Since $x\notin\overline{U_n}$ for each $n\in\mathbb{N}\setminus I_0$, the set I_1 is infinite. For each $r\in I_1$ pick a point $x_r=x'_{m(r)}$, where $n(m(r))=r$. Then $x_r\in U_r$ and the sequence $\{x_r\colon r\in I_1\}$ converges to the point x. Indeed, let U be an arbitrary neighbourhood of the point x. Since the sequence $\{x'_m\}$ converges to the point x, there exists $N\in\mathbb{N}$ such that $x'_m\in U$ for each $m>N$. Then $x_r\in U$ for each $r\in I_1\setminus\{n(m)\colon 0\le m\le N\}$. □

Proposition 6. *Each sequential countably pracompact space is sequentially pracompact.*

Proof. Let X be a sequential countably pracompact space. There exists a dense subset D of the space X such that each infinite subset of the set D has an accumulation point in X. Let $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of points of the set D. If there exists a point $x \in X$ such that $x \in \overline{\{x_n\}}$ for infinitely many indices $n \in \mathbb{N}$ then the $\{x_n : x_n = x\}$ is a convergent subsequence of the sequence $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. So we suppose that there is no such point x. Then the set $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is infinite. The set B has an accumulation point y in X. Then $y \in \overline{B \setminus \{y\}}$. Therefore the set $B \setminus \{y\}$ is not sequentially closed and there exists a sequence $\{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ of points of the set $B\setminus\{y\}$ converging to a point $z \notin B\setminus\{y\}$. Then the sequence $\{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ contains infinitely many distinct points of the set $B\setminus\{y\}$. $\square$

Proposition 7. *Each countably pracompact k-space X is totally countably pracompact.*

Proof. There exists a dense subset D of the space X such that each infinite subset of the set D has an accumulation point in X. Let $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of points of the set D. Put $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. If the set B is finite then there exists a point $x \in X$ such that $x_n = x$ for infinitely many indices $n \in \mathbb{N}$. Then a subsequence $\{x_n : x_n = x\}$ of the sequence $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ has compact closure $\{x\}$ in X. Thus we suppose that the set B is infinite. The set B has an accumulation point y in X. Then $y \in \overline{B \setminus \{y\}}$. Therefore the set $B \setminus \{y\}$ is not closed and there exists a compact subset K of the space X such that a set $B \cap K$ is not closed in K. Then the set $B \cap K$ is infinite, the sequence $\{x_n : x_n \in B \cap K\}$ is infinite too and $\overline{\{x_n : x_n \in B \cap K\}} \subset K$. $\square$

Proposition 8. *Each sequentially feebly compact space containing a dense set D of isolated points is sequentially pracompact.*

Proof. It is easy to check that each sequence of points of the set D has a convergent subsequence. $\square$

4. Examples

Example 2. Let X_0 be a non-empty T_1 space. Determine a topology on the set $X = (X_0 \times \omega) \cup \{y_0\}$, where $y_0 \notin X_0 \times \omega$ by the following base

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B} = &\{U \times \{n\} : U \text{ is an open subset of the space } X_0, n \in \omega\} \cup \\
&\cup \bigcup \Big\{ \{y_0\} \cup \bigcup_{m \geq n} X_0 \times \{m\} \setminus F_m : n \in \omega, F_m \text{ is a finite subset of } X_0 \\
&\qquad\qquad \text{for each } m \in \omega \text{ such that } m \geq n \Big\}.
\end{aligned}
$$

It is easy to check the following:

- the space X is Hausdorff provided the space X_0 is Hausdorff;
- the space X is feebly compact provided the space X_0 is a feebly compact space without isolated points;
- the space X is sequentially feebly compact provided the space X_0 is a sequentially feebly compact space without isolated points.

Now we take the standard unit segment $[0, 1]$ as X_0. Then X is a sequentially feebly compact space containing a closed discrete infinite subspace $\{1\} \times \omega$. Now for each $n \in \omega$ put $U_n = X_0 \times \{n\}$. Let $\{x_n\}$ be a sequence of points of the space X such that $x_n \in U_n$.

Then the set $\{x_n\}$ has no accumulation points, thus the space X is not selectively feebly compact.

We recall that the Stone-Čech compactification of a Tychonoff space X is a compact Hausdorff space βX containing X as a dense subspace so that each continuous map $f\colon X \to Y$ to a compact Hausdorff space Y extends to a continuous map $\overline{f}\colon \beta X \to Y$ (see [11]).

Example 3 ([11, Exer. 3.6.I], [8, Ex. 2.6]). Let $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$, where $A\cap\mathbb{N} = \varnothing$, be an infinite family of infinite subsets of $\mathbb{N}$ such that the intersection $N_\alpha \cap N_\beta$ is finite for every pair α, β of distinct elements of A and that $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ is maximal with respect to the last property. Generate a topology on the set $X = \mathbb{N}\cup S$ by the neighborhood system $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$, where $\mathcal{B}(x) = \{\{n\}\}$, if $x = n \in \mathbb{N}$ and $\mathcal{B}(x) = \{\{\alpha\} \cup (N_\alpha \setminus \{1, 2, \ldots, n\})\}_{n=1}^{\infty}$ if $x = \alpha \in A$.

Since A is a closed discrete infinite subset of X, X is not countably compact. On the other hand, the set $D = \mathbb{N}$ is dense in X. Let $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ be an arbitrary sequence of points of the set D. If the *set* $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is finite then the sequence $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ has a constant subsequence. If the set S is infinite then by maximality of A there exists $\alpha \in A$ such that $N_\alpha \cap S$ is infinite. Note that the enumeration $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ of $N_\alpha \cap S$ in the increasing order is a subsequence of the sequence $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converging to the point α. Thus the space X is sequentially pracompact.

Example 4. Endow the set $\mathbb{N}$ with the discrete topology. Let $\mathscr{A}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ be a one-point Alexandroff compactification of $\mathbb{N}$ with the remainder ∞. We define on $\mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ the product topology τ_p and extend the topology τ_p onto $X = \mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \cup \{a\}$, where $a \notin \mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$, to a topology τ^* in the following way: bases of the topologies τ_p and τ^* coincide at x for any $x \in \mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ and the family

$$\mathscr{B}^*(a) = \{U_a(i_1, \ldots, i_n) \colon i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}\},$$

where

$$U_a(i_1, \ldots, i_n) = X \setminus ((\{\infty\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \{i_1, \ldots, i_n\})),$$

determines a set of neighbourhood systems for τ^* at the point a.

The definition of the topology τ^* on X implies that $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is the maximum discrete subspace of (X, τ^*) and $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is dense in (X, τ^*). Hence every dense subset D of (X, τ^*) contains $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. However, $\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = X$ is not compact, and hence (X, τ^*) is not an ω-bounded-pracompact space.

Now we shall show that (X, τ^*) is totally countably pracompact. Especially we shall prove that $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is the requested dense subset of the space (X, τ^*). Fix an arbitrary sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. If there exists a positive integer i such that the set $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap (\mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \{i\})$ is infinite then the subsequence $\left\{x_{i_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap (\mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \{i\})$ with the corresponding renumbering has compact closure in (X, τ^*). In the other case the set $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap (\mathscr{A}(\mathbb{N}) \times \{i\})$ is finite for any positive integer i. Then the definition of (X, τ^*) implies that $\overline{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = \{a\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a compact subset of (X, τ^*).

We observe that by Proposition 19 of [14], (X, τ^*) is Hausdorff non-semiregular countably pracompact non-countably compact space, and hence (X, τ^*) is not totally countably compact.

Acknowledgements

The authors thank Paolo Lipparini for references, the referee for more references and valuable remarks and suggestions.

References

1. A. V. Arkhangel'skii, *Topological function spaces*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Vol. 78. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992 (Original Russian Edition, Moskow. Gos. Univ., Moscow, 1989).
2. A. V. Arkhangel'skij, *Compactness*, General topology II. Encycl. Math. Sci. **50** (1996), 1–117; translation from Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya **50** (1989), 5–128.
3. A. V. Arkhangel'skii and H. M. M. Genedi, *Properties of placement type: relative strong pseudocompactness*, Topology and its applications, Proc. Int. Topology Conf. (Baku, October 3–8, 1987), Tr. Mat. Inst. Steklova 193 (1992), 28–30 (Russian); English version: Proc. Steklov Inst. Math. **193** (1993), 25–27.
4. G. Artico, U. Marconi, J. Pelant, L. Rotter, and M. Tkachenko, *Selections and suborderability*, Fund. Math. **175** (2002), 1–33. DOI: 10.4064/fm175-1-1
5. D. Baboolal, J. Backhouse and R. G. Ori, *On weaker forms of compactness, Lindelöfness and countable compactness*, Int. J. Math. Math. Sci. **13**:1 (1990), 55–60. DOI: 10.1155/S0161171290000084
6. T. Banakh and L. Zdomskyy, *The topological structure of (homogeneous) spaces and groups with countable cs*-network*, Appl. Gen. Top. **5** (2004), no. 1, 25–48. DOI: 10.4995/agt.2004.1993
7. D. N. Dikranjan, *Zero-dimensionality of some pseudocompact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), no. 4, 1299–1308. DOI: 10.1090/S0002-9939-1994-1185278-9
8. A. Dorantes-Aldama and D. Shakhmatov, *Selective sequential pseudocompactness*, Topology Appl. **222** (2017), 53–69. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.016
9. E. K. van Douwen, G. M. Reed, A. W. Roscoe, and I. J. Tree, *Star covering properties*, Top. Appl. **39** (1991), no. 1, 71–103. DOI: 10.1016/0166-8641(91)90077-Y
10. A. Dow, J. R. Porter, R. M. Stephenson, Jr., and R. G. Woods, *Spaces whose pseudocompact subspaces are closed subsets*, Appl. Gen. Topol. **5** (2004), no. 2, 243–264. DOI: 10.4995/agt.2004.1973
11. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
12. S. García-Ferreira and Y. F. Ortiz-Castillo, *Strong pseudocompact properties*, Comment. Math. Univ. Carol. **55** (2014), no. 1, 101–109.
13. S. García-Ferreira and A. H. Tomita, *A pseudocompact group which is not strongly pseudocompact*, Topology Appl. **192** (2015), 138–144. DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.076
14. O. Gutik and K. Pavlyk, *On pseudocompact topological Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids*, Top. Algebra Appl. **1** (2013), 60–79. DOI: 10.2478/taa-2013-0007
15. O. Gutik and O. Sobol, *On feebly compact semitopological semilattice* $\exp_n \lambda$, arXiv: 1804.08239, 2018, preprint.
16. P. Lipparini, *A very general covering property*, Commentat. Math. Univ. Carol. **53** (2012), no. 2, 281–306.
17. P. Lipparini, *The equivalence of two definitions of sequential pseudocompactness*, Appl. Gen. Topol. **17** (2016), no. 1, 1–5. DOI: 10.4995/agt.2016.4616 (long version arXiv:1201.4832)
18. J. A. Martínez-Cadena and R. G. Wilson, *Maximal densely countably compact topologies*, Acta Math. Hungar. **151** (2017), no. 2, 259–270. DOI: 10.1007/s10474-016-0684-0

19. M. Matveev, *A survey on star covering properties*, 1998, preprint (available at http://at.yorku.ca/v/a/a/a/19.htm).
20. A. Ravsky, *Pseudocompact paratopological groups*, arXiv:1003.5343v5, 2003, preprint.
21. E. A. Reznichenko, *Embedding into first-countable pseudocompact spaces*, unpublished manuscript.
22. R. M. Stephenson, Jr, *Initially κ-compact and related compact spaces*, in K. Kunen, J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier, 1984, P. 603–632. DOI: 10.1016/B978-0-444-86580-9.50016-1
23. J. E. Vaughan, *Countably compact and sequentially compact spaces*, in K. Kunen, J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier, 1984, P. 569–602. DOI: 10.1016/B978-0-444-86580-9.50015-X

Стаття: надійшла до редколегії 28.08.2018
доопрацьована 12.09.2018
прийнята до друку 26.12.2018

ПРО СТАРІ ТА НОВІ КЛАСИ СЛАБКО КОМПАКТНИХ ПРОСТОРІВ

Олег ГУТІК[1], Олександр РАВСЬКИЙ[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, 79000, Львів*
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, вул. Наукова, 3б, 79060, Львів*
e-mail: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com, alexander.ravsky@uni-wuerzburg.de

Введено три нових класи зліченно пракомпактних просторів, вивчаються їхні загальні властивості та відношення з іншими компактно-близькими просторами.

Ключові слова: компактний, слабко компактний, секвенціально компактний, ω-обмежений, цілком зліченно компактний, зліченно компактний, зліченно пракомпактний, псевдокомпактний, секвенціально псевдокомпактний, секвенціально пракомпактний, цілком зліченно пракомпактний, ω-обмежений пракомпактний.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 60–65
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 60–65
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.060-065

УДК 517.5

A REMOVABILITY RESULT FOR SEPARATELY SUBHARMONIC FUNCTIONS

Juhani RIIHENTAUS

University of Eastern Finland,
P.O. Box 111, FI-80101, Joensuu, Finland,
and University of Oulu,
P.O. Box 3000, FI-90014, Oulun yliopisto, Finland,
e-mails: juhani.riihentaus@gmail.com, juhani.riihentaus@uef.fi

Blanchet has shown that a $\mathcal{C}^2$ subharmonic function can be extended throught a $\mathcal{C}^1$ hypersurface provided the function satisfies certain $\mathcal{C}^1$ type continuity condtions on the exceptional hypersurface. Recently we improved Blanchet's result by measuring the exceptional set with the aid of Hausdorff measure. Now we give a related extension result for separately subharmonic functions.

Key words: subharmonic function, separately subharmonic function, Hausdorff measure, exceptional sets.

1. Introduction

1.1. We give an extension result for separately subharmonic $\mathcal{C}^2$ functions, see Theorem 2 below. Our proof is based on our previous extension result for $\mathcal{C}^2$ subharmonic functions, see [8, Theorem 1, p. 154], and on a general result, see [3, Proposition 1, p. 33]. Moreover, we need Federer's important results from the geometric measure theory, see e.g. [2, 9].

1.2. For the used notation, see [6, 7, 8]. However, for convenience of the reader we recall here the following: If $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, and $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, then we write $x = (x_j, X_j) = (X_j, x_j)$, where $X_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Moreover, if $A \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, and $x_j^0 \in \mathbb{R}$, $X_j^0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, we write

$$A(x_j^0) = \left\{X_j \in \mathbb{R}^{n-1} \colon x = (x_j^0, X_j) \in A\right\}, \quad A(X_j^0) = \left\{x_j \in \mathbb{R} \colon x = (x_j, X_j^0) \in A\right\}.$$

2010 Mathematics Subject Classification: 31B05, 31B25, 32A10, 32D20

2. Auxiliary results

2.1. **A result of Federer.** The following important result of Federer from the geometric measure theory will be used repeatedly.

Lemma 1 ([2, Theorem 2.10.25, p. 188], [9, Corollary 4, Lemma 2, p. 114])**.** *Suppose that $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Let $\alpha \geqslant 0$ and let $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ denote the projection onto the first k coordinates.*

(i) If $\mathcal{H}^{k+\alpha}(E) = 0$, then $\mathcal{H}^{\alpha}(E \cap \pi_k^{-1}(x)) = 0$ for $\mathcal{H}^k$-almost all $x \in \mathbb{R}^k$.
(ii) If $\mathcal{H}^{k+\alpha}(E) < +\infty$, then $\mathcal{H}^{\alpha}(E \cap \pi_k^{-1}(x)) < +\infty$ for $\mathcal{H}^k$-almost all $x \in \mathbb{R}^k$.

2.2. **Our previous extension result for subharmonic functions.** As pointed out above, we use our previous extension result [8, Theorem 1, p. 154], however, now in the following, only seemingly more general form. For our previous related results, see [4, Theorem 4, pp. 181-182], [6, Theorem, p. 568], and [7, Lemma 2, p. 51]. Let it be pointed out also here that Blanchet's results [1, Theorems 3.1, 3.2 and 3.3, pp. 312-313], have been the starting point of our cited results.

Theorem 1. *Suppose that Ω is a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Let $E \subset \Omega$ be closed in Ω and let $\mathcal{H}^{n-1}(E) < +\infty$. Let $u\colon \Omega \setminus E \to \mathbb{R}$ be subharmonic and such that the following conditions are satisfied:*

(i) $u \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
(ii) $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus E)$.
(iii) For each j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
(iv) For each j, $1 \leqslant j \leqslant n$, and for $\mathcal{H}^{n-1}$-almost all $X_j \in \mathbb{R}^{n-1}$ such that $E(X_j)$ is finite, the following condition holds:
For each $x_j^0 \in E(X_j)$ there exist sequences $x_{j,l}^{0,1}, x_{j,l}^{0,2} \in (\Omega \setminus E)(X_j)$, $l = 1, 2, \dots$, such that $x_{j,l}^{0,1} \nearrow x_j^0$, $x_{j,l}^{0,2} \searrow x_j^0$ as $l \to +\infty$, and
(iv(a)) $\lim_{l\to+\infty} u(x_{j,l}^{0,1}, X_j) = \lim_{l\to+\infty} u(x_{j,l}^{0,2}, X_j) \in \mathbb{R}$,
(iv(b)) $-\infty < \liminf_{l\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_{j,l}^{0,1}, X_j) \leqslant \limsup_{l\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_{j,l}^{0,2}, X_j) < +\infty$.

Then u has a subharmonic extension to Ω.

2.3. In this connection and related to the above Theorem 1, we take the opportunity to state the following concise corollary. As a matter of fact, we have previously not stated it explicitly, and we feel that it might be of interest in itself.

Corollary 1. *Suppose that Ω is a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Let $E \subset \Omega$ be closed in Ω and let $\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0$. Let $u\colon \Omega \setminus E \to \mathbb{R}$ be subharmonic and such that the following conditions hold:*

(i) $u \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,
(ii) $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus E)$,
(iii) for each j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Then u has a subharmonic extension to Ω.

2.4. In addition to Federer's above lemma and our above Theorem 1, we need also the following nice result. Observe here that the below used *hypoharmonic functions* are in our terminology just *subharmonic functions.*

Proposition 1 ([3, Proposition 1, p. 33]). *Suppose that Ω is a domain in $\mathbb{R}^{p+q}$, $p, q \geqslant 2$. Let $w\colon \Omega \to [-\infty, +\infty)$ be nearly subharmonic. Let $w^*\colon \Omega \to [-\infty, +\infty)$ be the regularized function of w, which is then subharmonic. Then the following properties are equivalent.*

(1) *The distribution $\Delta_x w = \Delta_x w^* =$ (sum of the square second order derivatives of w or w^* with respect to the p coordinates of x) is positive.*
(2) *For all $y \in \mathbb{R}^q$ the function $\Omega(y) \ni x \mapsto w^*(x, y) \in [-\infty, +\infty)$ is hypoharmonic.*
(3) *For almost every $y \in \mathbb{R}^q$ the function $\Omega(y) \ni x \mapsto w^*(x, y) \in [-\infty, +\infty)$ is subharmonic.*
(4) *For almost every $y \in \mathbb{R}^q$ the function $\Omega(y) \ni x \mapsto w^*(x, y) \in [-\infty, +\infty)$ is nearly subharmonic.*

3. An extension result for separately subharmonic functions

Our result is the following

Theorem 2. *Suppose that Ω is a domain in $\mathbb{R}^{p+q}$, $p, q \geqslant 2$. Let $E \subset \Omega$ be closed in Ω and let $\mathcal{H}^{p+q-1}(E) < +\infty$. Let $w\colon \Omega \setminus E \to \mathbb{R}$ be separately subharmonic, that is,*

for all $y \in \mathbb{R}^q$ the function $(\Omega \setminus E)(y) \ni x \mapsto w(x, y) \in \mathbb{R}$ is subharmonic,

and

for all $x \in \mathbb{R}^p$ the function $(\Omega \setminus E)(x) \ni y \mapsto w(x, y) \in \mathbb{R}$ is subharmonic,

and such that the following conditions are satisfied:

(*i*) $w \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
(*ii*) $w \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus E)$.
(*iii*) *For each j, $1 \leqslant j \leqslant p$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, and for each k, $1 \leqslant k \leqslant q$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y_k^2} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*
(*iv*) *For each j, $1 \leqslant j \leqslant p$, and for $\mathcal{H}^{p-1+q}$-almost all $(X_j, y) \in \mathbb{R}^{p-1+q}$ such that $E(X_j, y)$ is finite, the following condition holds:*
For each $x_j^0 \in E(X_j, y)$ there exist sequences $x_{j,l}^{0,1}, x_{j,l}^{0,2} \in (\Omega \setminus E)(X_j, y)$, $l = 1, 2, \ldots$, such that $x_{j,l}^{0,1} \nearrow x_j^0$, $x_{j,l}^{0,2} \searrow x_j^0$ as $l \to +\infty$, and
(*iv*(a)) $\lim_{l\to+\infty} w(x_{j,l}^{0,1}, X_j, y) = \lim_{l\to+\infty} w(x_{j,l}^{0,2}, X_j, y) \in \mathbb{R}$,
(*iv*(b)) $-\infty < \liminf_{l\to+\infty} \frac{\partial w}{\partial x_j}(x_{j,l}^{0,1}, X_j, y) \leqslant \limsup_{l\to+\infty} \frac{\partial w}{\partial x_j}(x_{j,l}^{0,2}, X_j, y) < +\infty$.
(*v*) *For each k, $1 \leqslant k \leqslant q$, and for $\mathcal{H}^{p+q-1}$-almost all $(x, Y_k) \in \mathbb{R}^{p+q-1}$ such that $E(x, Y_k)$ is finite, the following condition holds:*
For each $y_k^0 \in E(x, Y_k)$ there exist sequences $y_{k,l}^{0,1}, y_{k,l}^{0,2} \in (\Omega \setminus E)(x, Y_k)$, $l = 1, 2, \ldots$, such that $y_{k,l}^{0,1} \nearrow y_k^0$, $y_{k,l}^{0,2} \searrow y_k^0$ as $l \to +\infty$, and
(*v*(a)) $\lim_{l\to+\infty} w(x, y_{k,l}^{0,1}, Y_k) = \lim_{l\to+\infty} w(x, y_{k,l}^{0,2}, Y_k) \in \mathbb{R}$,
(*v*(b)) $-\infty < \liminf_{l\to+\infty} \frac{\partial w}{\partial y_k}(x, y_{k,l}^{0,1}, Y_k) \leqslant \limsup_{l\to+\infty} \frac{\partial w}{\partial y_k}(x, y_{k,l}^{0,2}, Y_k) < +\infty$.

Then w has a separately subharmonic extension to Ω.

Proof. By [5, Corollary 4.6, p. 412], w is subharmonic in $\Omega \setminus E$. Thus by Theorem 1 $w\colon \Omega \setminus E \to \mathbb{R}$ has a subharmonic extension $w^*\colon \Omega \to [-\infty, +\infty)$. By Proposition 1 it is therefore sufficient to show that

- for $\mathcal{H}^q$-almost all $y \in \mathbb{R}^q$ the subharmonic function $(\Omega \setminus E)(y) \ni x \mapsto w(x, y) \in \mathbb{R}$ has a subharmonic extension $\Omega(y) \ni x \mapsto w^*(x, y) \in [-\infty, +\infty)$, and

- for $\mathcal{H}^p$-almost all $x \in \mathbb{R}^p$ the subharmonic function $(\Omega \setminus E)(x) \ni y \mapsto w(x, y) \in \mathbb{R}$ has a subharmonic extension $\Omega(x) \ni y \mapsto w^*(x, y) \in [-\infty, +\infty)$.

We show that the first condition holds. The proof of the second is similar.

Fix j, $1 \leqslant j \leqslant p$, arbitrarily for a while.

By our assumption $\mathcal{H}^{p-1+q}(E) < +\infty$. From the above Lemma of Federer, it follows that for $\mathcal{H}^{p-1+q}$-almost all $(X_j, y) \in \mathbb{R}^{p-1+q}$ the set $E(y)(X_j)$ is finite. Write

$$A := \left\{(X_j, y) \in \mathbb{R}^{p-1+q} \colon E(y)(X_j) \text{ is finite}\right\}.$$

Thus

$$\mathcal{H}^{p-1+q}(A^c) = 0 \iff m_{p-1+q}(A^c) = 0 \iff \int\limits_{\mathbb{R}^{p-1+q}} \chi_{A^c}(X_j, y) dm_{p-1+q}(X_j, y) = 0,$$

where $\chi_{A^c}(\cdot, \cdot)$ is the characteristic function of the set A^c, the complement taken in $\mathbb{R}^{p-1+q}$.

Next use Fubini's theorem:

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^{p-1+q}} \chi_{A^c}(X_j, y) dm_{p-1+q}(X_j, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{p-1}} \chi_{A^c}(X_j, y) dm_{p-1}(X_j) \right] dm_q(y).$$

Since

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{p-1}} \chi_{A^c}(X_j, y) dm_{p-1}(X_j) \geqslant 0,$$

we see that in fact

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{p-1}} \chi_{A^c}(X_j, y) dm_{p-1}(X_j) = 0$$

for $\mathcal{H}^q$-almost all $y \in \mathbb{R}^q$.

Write

$$\begin{aligned} B_1^j : &= \left\{ y \in \mathbb{R}^q \colon \int\limits_{\mathbb{R}^{p-1}} \chi_{A^c}(X_j, y) dm_{p-1}(X_j) = 0 \right\}, \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^q \colon \chi_{A^c}(X_j, y) = 0 \text{ for } \mathcal{H}^{p-1} \text{ almost all } X_j \in \mathbb{R}^{p-1} \right\}, \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^q \colon \chi_{A}(X_j, y) = 1 \text{ for } \mathcal{H}^{p-1} \text{ almost all } X_j \in \mathbb{R}^{p-1} \right\}. \end{aligned}$$

Write $B_1 := B_1^1 \cap B_1^2 \cap \dots \cap B_1^p$. Then for all $y \in B_1$ we have $(X_j, y) \in A$ for $\mathcal{H}^{p-1}$ almost all $X_j \in \mathbb{R}^{p-1}$, and this holds for all $j = 1, 2, \dots, p$.

Next write

$$\begin{aligned} B_2 &:= \left\{ y \in \mathbb{R}^q \colon w(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega(y)) \right\}, \\ B_3 &:= \left\{ y \in \mathbb{R}^q \colon w(\cdot, y) \in \mathcal{C}^2((\Omega \setminus E)(y)) \right\}, \\ B_4^j &:= \left\{ y \in \mathbb{R}^q \colon \tfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} w(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega(y)) \right\}, \\ B_4 &:= B_4^1 \cap B_4^2 \cap \dots \cap B_4^p, \end{aligned}$$

and $B := B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$.

Then for all $y \in B$ the function $(\Omega \setminus E)(y) \ni x \mapsto w(x, y) \in \mathbb{R}$ satisfies the assumptions of Theorem 1. Therefore these functions have subharmonic extensions

$$\Omega(y) \ni x \mapsto w^*(x, y) \in [-\infty, +\infty).$$

But then our claim follows from Proposition 1. $\square$

Example 1. The function $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$u(z_1, z_2) = u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = u(x_1, y_1, x_2, y_2) := \begin{cases} 1 + x_1, & \text{when } x_1 < 0, \\ 1 - x_1, & \text{when } x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

is continuous in $\mathbb{R}^4$ and separately subharmonic, even separately harmonic in $\mathbb{R}^4 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^3)$, but not separately subharmonic in $\mathbb{R}^4$. Observe that u satisfies the above conditions (i), (ii), (iii), $(iv(\text{a}))$ and $(v(\text{a}))$ in $\mathbb{R}^4 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^3)$. However, $u|\mathbb{R}^4 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^3)$ does not satisfy the conditions $(iv(\text{b}))$ and $(v(\text{b}))$. Thus these conditions cannot be dropped in Theorem 2.

Corollary 2. *Suppose that Ω is a domain in $\mathbb{R}^{p+q}$, $p, q \geqslant 2$. Let $E \subset \Omega$ be closed in Ω and let $\mathcal{H}^{p+q-1}(E) = 0$. Let $w\colon \Omega \setminus E \to \mathbb{R}$ be separately subharmonic, that is,*

for all $y \in \mathbb{R}^q$ the function $(\Omega \setminus E)(y) \ni x \mapsto w(x, y) \in \mathbb{R}$ is subharmonic,

and

for all $x \in \mathbb{R}^p$ the function $(\Omega \setminus E)(x) \ni y \mapsto w(x, y) \in \mathbb{R}$ is subharmonic.

Suppose that the following conditions are satisfied:

(i) *$w \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$,*
(ii) *$w \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus E)$,*
(iii) *for each j, $1 \leqslant j \leqslant p$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ and for each k, $1 \leqslant k \leqslant q$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y_k^2} \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Then w has a separately subharmonic extension to Ω.

Proof. Follows directly from Theorem 2 and from the above Lemma of Federer. $\square$

References

1. P. Blanchet, *On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions*, Complex Variables, Theory Appl. **26** (1995), no. 4, 311-322. DOI: 10.1080/17476939508814792
2. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
3. M. Hervé, *Analytic and plurisubharmonic functions in finite and infinite dimensional spaces*, Lect. Notes Math. **198**. Springer, Berlin, 1971.
4. J. Riihentaus, *Subharmonic functions, mean value inequality, boundary behavior, nonintegrability and exceptional sets*, Workshop on Potential Theory and Free Boundary Flows; August 19-27, 2003, Kiev, Ukraine. In: Transactions of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev **1**(2004), no. 3, 169–191.
5. J. Riihentaus, *An inequality type condition for quasinearly subharmonic functions and applications*, Positivity VII, Leiden, July 22-26, 2013, Zaanen Centennial Conference. In: Ordered Structures and Applications: Positivity VII, Trends in Mathematics, Springer Int. Publ., Berlin, 2016, pp. 395–414,
6. J. Riihentaus, *Exceptional sets for subharmonic functions*, Journal of Basic & Applied Sciences **11** (2015), 567–571. DOI: 10.6000/1927-5129.2015.11.75

7. J. Riihentaus, *A removability result for holomorphic functions of several complex variables*, Journal of Basic & Applied Sciences **12** (2016), 50–52. DOI: 10.6000/1927-5129.2016.12.07
8. J. Riihentaus, *Removability results for subharmonic functions, for harmonic functions and for holomorphic functions*, Mat. Stud. **46** (2016), no. 2, 152–158. DOI: 10.15330/ms.46.2.152-158
9. B. Shiffman, *On the removal of singularities of analytic sets*, Michigan Math. J. **15** (1968) no. 1, 111–120. DOI: 10.1307/mmj/1028999912

Стаття: надійшла до редколегії 04.07.2018
доопрацьована 27.09.2018
прийнята до друку 26.12.2018

ОДИН РЕЗУЛЬТАТ ПРО УСУНЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ДЛЯ НАРІЗНО СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Юхані РІІГЕНТАУЗ

University of Eastern Finland,
P.O. Box 111, FI-80101, Joensuu, Finland,
and University of Oulu,
P.O. Box 3000, FI-90014, Oulun yliopisto, Finland,
e-mail: juhani.riihentaus@gmail.com, juhani.riihentaus@uef.fi

Бланше довів, що субгармонічну функцію гладкості $\mathcal{C}^2$ можна продовжити через $\mathcal{C}^1$-гіперплощину, якщо функція задовольняє певну умову гладкості типу $\mathcal{C}^1$ на винятковій гіперплощині. Нещодавно ми покращили результат Бланше, розглянувши міру Гаусдорфа виняткової множини. Тепер ми наводимо подібне узагальнення для нарізно субгармонічних функцій.

Ключові слова: субгармонічна функція, нарізно субгармонічна функція, міра Гаусдорфа, виняткові множини.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 66–81
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 66–81
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.066-081

УДК 517.53

ПРО ЗРОСТАННЯ ВИПАДКОВИХ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Олег СКАСКІВ, Надія СТАСІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, Львів
e-mails: olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Нехай $\Lambda = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ — послідовності невід'ємних чисел і комплекснозначних випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, відповідно. Досліджуємо величини R-порядків $\rho_F(\omega)$ і R-типів $T_F(\omega)$ зростання випадкових рядів Діріхле вигляду $F(z) = F(z,\omega) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$ $(z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega)$. Зокрема, у випадку, коли $\beta(\Lambda) = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0$ доведено таке твердження: якщо $\big(|f_k(\omega)|\big)$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то для того, щоб $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ м.н., необхідно і достатньо, щоб $(\forall \varepsilon \in (0,\rho))$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) < +\infty \ \wedge\ \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

Ключові слова: цілі функції, випадкові ряди Діріхле, R-порядок зростання.

1. Вступ

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ймовірнісний простір. Крім цього, нехай $\Lambda(\omega) = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f}(\omega) = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ – послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, відповідно, через $\Lambda = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ позначатимемо послідовність попарно різних невід'ємних чисел, а через $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ – числову послідовність таку, що $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$. Крім цього вважатимемо, що $\lambda_k(\omega) \neq \lambda_m(\omega)$ для всіх $n \neq k$ м.н. (майже напевно).

2010 Mathematics Subject Classification: 30B50, 11F66

Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас цілих випадкових (м.н. абсолютно збіжних у всій комплексній площині) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F_\omega(z) = F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega), \tag{1}$$

що для фіксованого $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{z\lambda_k}, \tag{2}$$

де $a_k = f_k(\omega_0),\ \lambda_k = \lambda_k(\omega_0)$. А основним об'єктом розгляду у цьому повідомленні є випадкові цілі ряди Діріхле вигляду

$$F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega). \tag{3}$$

Нехай $\mathcal{D} = \bigcup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$, а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+. Через $\widetilde{\mathcal{D}}$ позначимо клас формальних рядів Діріхле вигляду (1) таких, що $\sigma_\mu(F,\omega) := \sup\{x \in \mathbb{R}\colon f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0\ (k \to +\infty)\} > -\infty$ м.н. Зрозуміло, що $\mathcal{D} \subset \widetilde{\mathcal{D}}$.

Зазначимо, що як у випадку рядів вигляду (2), так і випадкових рядів Діріхле вигляду (3) (або й загального вигляду (1)) питання збіжності таких рядів досліджене у багатьох працях з практично вичерпною повнотою (див., наприклад, [1]–[11]). У [12]–[18] розглядали питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ у випадку $\tau(\Lambda) := \overline{\lim}_{k\to+\infty} \ln k/\lambda_k < +\infty$; з коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ в [13, 14, 15]. У випадку, коли $\tau(\Lambda_+) = 0$, а коефіцієнти ряду Діріхле $(f_k(\omega))$ попарно незалежні в [16, 17] твердження про абсцису абсолютної збіжності отримані в термінах умов на функції розподілу $F_k(x) := P\{\,\omega : |f_k(\omega)| < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geqslant 0$. У [19, 20, 21], зокрема, отримано оцінки абсцис збіжності у випадку, коли коефіцієнти ряду Діріхле мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, а послідовність $(\lambda_k(\omega))$ є послідовністю попарно незалежних випадкових величин, при цьому теореми формулюються в термінах обмежень на функції розподілу $F_k(x) := P\{\,\omega : \lambda_k(\omega) < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geqslant 0$ (подібно, для випадкових кратних рядів Діріхле в [22]). У [16, 17] і в [20, 21, 22] умова попарної незалежності забезпечує можливість застосування уточненої другої частини леми Бореля-Кантелі (див. [29], [32, с. 84]). У зв'язку з дослідження областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле вкажемо також на праці [24, 25].

Дослідження зростання випадкових рядів Діріхле мають у цілому доволі фрагментарний вигляд (див., наприклад, [13, 14, 18, 26, 27]). У цьому повідомленні ми заповнюємо деякі прогалини для випадкових цілих рядів Діріхле, як вигляду (3), так і загального вигляду (1), які стосуються формул для обчислення R-порядків і R-типів таких рядів. Деякі з отриманих тверджень є новими навіть в інтерпретації для цілих рядів Діріхле з показниками Λ_+ і коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$.

2. Основні поняття, допоміжні твердження про R-порядки та R-типи

Отже, якщо $F \in \mathcal{D}$, то за умовою абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (1) $\sigma_a(F,\omega) = +\infty$ м.н. Тоді, за твердженням 1 з [19] $\sigma_a(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$ м.н., де $\sigma(F,\omega)$ – абсциса збіжності ряду (1). А якщо додатково припустити, що $\underline{\lim}_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ м.н., то за твердженням 2 з [19]

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

З іншого боку, якщо $\tau(\Lambda,\omega) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$ або $h(\omega) := \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|} = 0$, і $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ має вигляд (1), то за твердженням 10 з [19]

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega).$$

Наступне твердження добре відоме у випадку рядів Діріхле вигляду (2) зі зростаючими показниками $\Lambda_+ = (\lambda_k)$.

Твердження 1. *Якщо при фіксованих $x\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$, ряд Діріхле $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{(x+iy)\lambda_k(\omega)}$ рівномірно збіжний по $y \in \mathbb{R}$ до $F_\omega(x+iy)$, то для кожного $m \geqslant 0$*

$$f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} F_\omega(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy. \tag{4}$$

Доведення. Для фіксованних $n \geqslant m \geqslant 0$ розглянемо експоненційний поліном $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}$. Тоді скінченну послідовність $(\lambda_k(\omega))_{k=0}^n$ при фіксованому ω можна впорядкувати за зростанням і, тому (див., наприклад, [9, с.13])

$$f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} Q_n(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy. \tag{5}$$

Зауважимо спочатку, що при фіксованому $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2T}\Big|\int\limits_{-T}^{T} \big(F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy\Big| \leqslant \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big|dy \leqslant$$
$$\leqslant \sup\Big\{\big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| \colon y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Але $F_\omega(x+iy) = Q_n(x+iy) + \big(F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big)$, тому послідовно за допомогою рівності (5), скориставшись рівномірною збіжністю, отримуємо

$$\varlimsup_{T\to+\infty} \Big| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} F_\omega(x+iy) e^{-iy\lambda_m(\omega)} dy - f_m(\omega) e^{x\lambda_m(\omega)} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{T\to+\infty} \Big| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} Q_n(x+iy) e^{-i\lambda_m(\omega)y} dy - f_m(\omega) e^{x\lambda_m(\omega)} \Big| +$$

$$+ \sup\Big\{ \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| \colon y \in \mathbb{R} \Big\} =$$

$$= \sup\Big\{ \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| \colon y \in \mathbb{R} \Big\} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

□

Зауваження 1. Нескладно помітити, що у попередньому твердженні умову рівномірної збіжності при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ можна замінити на істотно слабшу в загальному умову, зокрема, наприклад, можна вважати, що при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ виконується

$$\lim_{n\to+\infty} \varlimsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| dy = 0.$$

Нехай L – клас неперервних функцій $\alpha\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ і таких, що $\alpha(x) \uparrow +\infty$ $(0 < x \uparrow +\infty)$. Для функції $\alpha \in L$ її R-***порядком*** і R-***типом*** називаємо, відповідно, величини

$$\rho[\alpha] := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \alpha(x)}{x}, \qquad T[\alpha] := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\exp\{\rho[\alpha]x\}}.$$

Для $x \in \mathbb{R}$ і цілого ряду Діріхле F вигляду (2) через

$$M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{і} \qquad \mu(x,F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

позначимо, відповідно, максимум модуля і максимальний член ряду; $\nu(x,F) = \max\{n : |a_n| e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}$ – центральний індекс ряду (2).

Величинами R-порядку і R-типу цілого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду (2) називають, відповідно, числа

$$\rho_F := \rho[\ln M(\cdot,F)], \qquad T_F := T[\ln M(\cdot,F)].$$

Нехай $\rho_\mu = \rho[\ln \mu]$, $T_\mu = T[\ln \mu]$, відповідно, R-порядок і R-тип максимального члена $\mu(x,F)$ ряду Діріхле. Для $x \in \mathbb{R}$ і цілого ряду Діріхле F_ω вигляду (1) при фіксованому $\omega \in \Omega$ у відповідних позначеннях пишемо

$$M(x,F_\omega) = M(x,F,\omega), \quad \mu(x,F_\omega) = \mu(x,F,\omega), \quad \rho_F(\omega), \quad T_F(\omega), \quad \rho_\mu(\omega), \quad T_\mu(\omega).$$

З рівності (4) негайно отримуємо такий стандартний аналог нерівності Коші (у випадку монотонної системи показників див., наприклад, теорема 1.5 [9])

$$\mu(x,F_\omega) \leqslant M(x,F_\omega)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому для R-порядків і R-типів матимемо

$$\rho_\mu(\omega) \leqslant \rho_F(\omega), \quad T_\mu(\omega) \leqslant T_F(\omega).$$

Зауважимо, якщо

$$\sup\{\lambda_k \colon k \geqslant 0\} := \gamma < +\infty,$$

то $\ln M(x, F_\omega) = O(x)$, $\ln \mu(x, F_\omega) = O(x)$ $(x \to +\infty)$. Тому скрізь надалі вважатимемо, що $\gamma = +\infty$.

Нескладно переконатись. що правильне таке твердження. У випадку цілих рядів Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду (2) це теорема 1 з [28, с.265].

Твердження 2. *Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду* (1)

$$\rho_\mu(\omega) = k_F(\omega) := \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\lambda_k(\omega) \ln \lambda_k(\omega)}{-\ln |f_k(\omega)|}.$$

Твердження 3 ([28, Theorem 3, p. 265]). *Якщо $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ має вигляд* (2) *і виконується умова $\beta(\Lambda_+) := \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0$, то $\rho_F = \rho_\mu$, і отже, $\rho_F = k_F = \rho_\mu$.*

Зауваження 2. Твердження 3 за умови $\beta(\Lambda) = 0$ є застосовним при фіксованому $\omega \in \Omega$ до кожного ряду Діріхле $F_\omega \in \mathcal{D}$ вигляду (3), при цьому $\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|}$ м.н.

Твердження 4. *Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду* (1) *м.н.*

$$T_\mu(\omega) = K_F(\omega) := \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\lambda_k(\omega)}{e\rho} |f_k(\omega)|^{\rho/\lambda_k(\omega)}, \quad \rho = \rho_\mu(\omega).$$

Якщо ж виконується умова $\tau(\Lambda, \omega) := \varlimsup\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$, то $\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = k_F(\omega)$, $T_F(\omega) = T_\mu(\omega) = K_F(\omega)$ м.н.

Справді, перша частина, як і твердження 2, доводиться за допомогою стандартних міркувань. Далі, при фіксованому ω такому, що $\tau(\Lambda, \omega) = 0$, для всіх досить великих $k \geqslant k_0 = k_0(\omega)$ маємо $\lambda_k(\omega) > \ln k/\varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-2\varepsilon \lambda_k(\omega)\} \leqslant \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-2 \ln k\} < +\infty,$$

звідки $C(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{+\infty} \exp\{-2\varepsilon \lambda_k(\omega)\} < +\infty$, і отже,

$$M(x, F_\omega) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)| e^{(x+2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} e^{-2\varepsilon \lambda_k(\omega)} \leqslant C(\varepsilon) \mu(x + 2\varepsilon, F_\omega).$$

Звідси отримуємо, що $T_F(\omega) \leqslant T_\mu(\omega) \cdot e^{2\varepsilon \rho_F(\omega)}$. Спрямовуючи $\varepsilon \to +0$, остаточно одержуємо, що $T_F(\omega) = T_\mu(\omega)$.

Твердження 5. *Нехай $F_\omega \in \mathcal{D}$ має вигляд (1) і $h = h(\omega) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|} < 1$. Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, 1-h)$ і всіх $x \geqslant 0$*

$$M(x, F_\omega) \leqslant C(\varepsilon)\Big(\mu\big(\frac{x}{1-h-\varepsilon}, F_\omega\big)\Big)^{1-h-\varepsilon}, \quad C(\varepsilon) = C(\varepsilon, \omega) < +\infty.$$

Зокрема, $\rho_F(\omega) \leqslant \rho_\mu(\omega)/(1-h(\omega))$ м.н., а також $\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega)$ м.н. за умови $h(\omega) = 0$ м.н.

Справді, якщо $F_\omega \in \mathcal{D}$ має вигляд (1), то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ м.н. З умови $h = h(\omega) < 1$ випливає, що для кожного $2\varepsilon \in (0, 1-h)$ виконується нерівність $-\ln|f_k(\omega)| > \ln k/(h+\varepsilon)$ для всіх досить великих $k \geqslant k_0$. Тоді

$$\begin{aligned}
C(\varepsilon) = C(\varepsilon, \omega) := \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} =\\
= \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leqslant\\
\leqslant \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{h+2\varepsilon}{h+\varepsilon}\ln k\Big\} <\\
< +\infty.
\end{aligned}$$

Тому для всіх $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
M(x, F_\omega) &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-h-2\varepsilon} e^{x\lambda_k(\omega)} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leqslant\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(|f_k(\omega)| e^{x\lambda_k(\omega)/(1-h-2\varepsilon)}\Big)^{1-h-2\varepsilon} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leqslant\\
&\leqslant \Big(\mu\big(\frac{x}{1-h-2\varepsilon}, F_\omega\big)\Big)^{1-h-2\varepsilon} C(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Звідси, $\rho_F(\omega) \leqslant \rho_\mu(\omega)/(1-h-2\varepsilon)$. Залишається спрямувати $\varepsilon \to +0$.

3. Зростання випадкових рядів з детермінованими показниками

Наслідуючи Ф. Тян (F. Tian) ([13]), спершу розглянемо питання про формули для визначення величин R-порядів і R-типів випадкових рядів Діріхле $F_\omega \in \mathcal{D}$ вигляду (3) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k \cdot Z_k(\omega)$. Доведемо таке твердження.

Твердження 6. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (2), а $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ має вигляд (3), де $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо $\rho_\mu = \rho[\ln\mu(\cdot, F)] < +\infty$,*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{6}$$

і виконується одна з двох умов $\beta(\Lambda) = 0$ або $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, то $F_\omega \in \mathcal{D}$ і $\rho_F(\omega) = \rho_\mu = k_F := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|a_k|}$ м.н.

Доведення. Зауважимо спочатку, що за твердженням 5 $\rho_\mu = k_F$, тому

$$(\forall \varepsilon)(\exists k_0)(\forall k \geqslant k_0)\colon \quad \big|\ln |a_k|\big| > \frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k,$$

звідки, за умовою $\beta(\Lambda) = 0$ отримуємо, що $\ln k = o(\ln |a_k|)$ $(k \to +\infty)$.

Ми вже згадували, що за твердженням 10 з [19], застосованим до ряду F_ω

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln |a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k}.$$

Але,

$$\delta := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln |Z_k(\omega)|\big|}{\big|\ln |a_k|\big|} \leqslant (\rho+\varepsilon) \lim_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln |Z_k(\omega)|\big|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0.$$

Тому отримуємо, що м.н.

$$\sigma_a(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k} \cdot \left(1 + \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|}\right) = \sigma_\mu(F) = +\infty,$$

тобто, $F_\omega \in \mathcal{D}$. Оскільки, як вище відзначалося

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} = 0, \tag{7}$$

то $\ln k = o(\ln |a_k Z_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$. Тому для обчислення величини порядку $\rho_F(\omega)$ за твердженням 5 матимемо

$$\rho_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |a_k| - \ln |Z_k(\omega)|} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |a_k|} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|}\right)^{-1} = k_F.$$

При цьому ми знову скористалися співвідношенням (7). □

Зазначимо також таку нескладну модифікацію попереднього твердження.

Твердження 7. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (2), а $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}(\Lambda)$ і має вигляд (3), де $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо $\rho_\mu = \rho[\ln \mu(\cdot, F)] \in (0, +\infty)$,*

$$B_1 = \left\{\omega\colon \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = \delta(\omega) \geqslant 0\right\},$$

$$B_2 = \left\{\omega\colon \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = \Delta(\omega) < 0\right\},$$

$$B_3 = \left\{\omega\colon \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0\right\},$$

$$B_4 = \left\{\omega\colon \theta(\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \left|\frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|}\right| < 1\right\}$$

і виконується одна з двох умов $\beta(\Lambda) = 0$ або $\ln k = o(\ln |a_k|)$ $(k \to +\infty)$, то $(\exists B \in \mathcal{A},\ P(B) = 0)$:

i) $\omega \in B_1 \setminus B,\ \delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F} > 0 \implies \sigma_a(F,\omega) = +\infty;$

ii) $\omega \in B_1 \setminus B \implies \frac{1}{\rho_\mu(\omega)} \geqslant \delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F};$

iii) $\omega \in B_2 \setminus B\ \wedge\ \sigma_a(F,\omega) = +\infty \implies \frac{1}{\rho_F(\omega)} \leqslant \Delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F};$

$$iv)\ \omega \in B_3 \setminus B \implies \rho_F(\omega) = \rho_\mu = k_F := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|a_k|};$$

$$v)\ \omega \in B_4 \setminus B \implies \sigma_a(F,\omega) = +\infty\ \wedge\ \left|\frac{\rho_F}{\rho_F(\omega)} - 1\right| \leqslant \theta.$$

Доведення. Оскільки $F(0) \neq \infty$, то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ м.н. Спочатку зазначимо, що п. $iv)$ доводиться аналогічно, як твердження 6.

У випадку $\omega \in B_1$, оскільки $-\ln|a_k| > \lambda_k \ln\lambda_k/(\rho_F + \varepsilon)$ і

$$-\ln|Z_k(\omega)| > (\delta(\omega) - \varepsilon)\lambda_k \ln \lambda_k$$

для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$, то

$$-\ln|f_k(\omega)| \geqslant \left(\delta(\omega) - \varepsilon + \frac{1}{\rho_F + \varepsilon}\right)\lambda_k \ln\lambda_k.$$

Звідси, вибираючи $\varepsilon > 0$ так, щоб виконувалось $\delta(\omega) - \varepsilon + \dfrac{1}{\rho_F + \varepsilon} > 0$, з умови $\beta(\Lambda) = 0$ нескладно отримуємо, що $\sigma_\mu(\omega) = +\infty$.

Стосовно доведення п.п. $ii)$, $iii)$, зауважимо таке: оскільки $\varliminf(a - b) \geqslant \varliminf a - \varlimsup b$, то

$$\frac{1}{\rho_F} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = \varliminf_{k\to+\infty}\left(\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k\ln\lambda_k} - \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k\ln\lambda_k} - \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k\ln\lambda_k} = \frac{1}{k_F(\omega)} - \Delta(\omega).$$

Подібно, оскільки $\varliminf(a-b) \leqslant \varliminf a - \varliminf b$, то $\frac{1}{\rho_F} \leqslant \frac{1}{k_F(\omega)} - \delta(\omega)$. Але $k_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) \leqslant \rho_F(\omega)$.

Якщо $\omega \in B_4$, то

$$\varliminf_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|a_k||Z_k(\omega)|\big|}{\ln k} \geqslant \varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|a_k|}{\ln k}\cdot\left(1 - \varlimsup_{k\to+\infty}\left|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right|\right) =$$
$$= (1 - \theta(\omega))\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|a_k|}{\ln k} = +\infty.$$

Тому, за твердженням 10 з [19], застосованим до ряду F_ω

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty}\frac{\big|\ln|a_k||Z_k(\omega)|\big|}{\lambda_k} \geqslant$$
$$\geqslant \varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k}\cdot\left(1 - \varlimsup_{k\to+\infty}\left|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right|\right) = \sigma_\mu(F)(1-\theta(\omega)) = +\infty.$$

Далі, за твердженням 5

$$\frac{1}{\rho_F(\omega)} = \varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|a_k| - \ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k\ln\lambda_k} \geqslant \varlimsup_{k\to\infty}\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k\ln\lambda_k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1 - \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) =$$
$$= k_F(1-\theta(\omega)).$$

Подібно отримуємо

$$\frac{1}{\rho_F(\omega)} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln \lambda_k} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 - \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = k_F(1+\theta(\omega)).$$

Але $k_F = \rho_F$. □

Отримаємо тепер у вигляді простого наслідку такий аналог теореми 2 з [13].

Твердження 8. *Нехай $(Z_k(\omega))$ — послідовність випадкових величин така, що*

$$(\exists\alpha > 0)\colon\ \sup\{\mathbf{M}|Z_k|^{\alpha}, \mathbf{M}|Z_k|^{-\alpha}\colon k \geqslant 0\} < +\infty, \tag{8}$$

а ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (2), а $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ має вигляд (3), де $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконується умова $\beta(\Lambda) = 0$ або $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, то $F_\omega \in \mathcal{D}$ і

$$\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = \rho_F = k_F \quad \text{м.н.}$$

Доведення. З умови (8) випливає, що

$$\ln|Z_k(\omega)| = O(\ln k) \quad (r \to +\infty) \quad \text{м.н.}$$

Справді, за нерівністю Маркова $P\{\omega\colon |\xi(\omega)| \geqslant a\} \leqslant \frac{\mathbf{M}\xi}{a}$, $a > 0$, тому для $\eta > 0$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\{\omega\colon |Z_k(\omega)|^{\alpha} \geqslant k^{1+\eta}\} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{M}(|Z_k(\omega)|^{\alpha})/k^{1+\eta} < +\infty.$$

Звідси, за першою частиною леми Бореля-Кантелі серед подій $\big(\{\omega\colon |Z_k(\omega)|^{\alpha} \geqslant k^{1+\eta}\}\big)$ з ймовірністю, що дорівнює одиниці, виконується скінченна їхня кількість, отже, м.н. для всіх достатньо великих k виконується нерівність $|Z_k(\omega)| < k^{(1+\eta)/\alpha}$. Подібно з оцінкою знизу. Отже, за умовою $\beta(\Lambda) = 0$ отримуємо, що $\ln|Z_k(\omega)| = o(\lambda_k \ln \lambda_k)$ $(k \to +\infty)$ м.н., тобто виконуються умови твердження 6. □

Зауваження 3. У статті [13] замість умови $\beta(\Lambda) = 0$ вимагається виконання умови $\tau(\Lambda) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} < +\infty$. Зрозуміло, що умова $\beta(\Lambda) = 0$ випливає з останньої умови і в загальному, умова $\beta(\Lambda) = 0$ є слабшою за умову $\tau(\Lambda) < +\infty$.

Відзначимо також такий наслідок з тверджень 2 і 3.

Твердження 9. *Нехай $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (3). Якщо $\beta(\Lambda_+) = 0$, а $(f_k(\omega))$ – послідовність незалежних випадкових величин, то $\rho_F(\omega) \equiv \rho \in [0, +\infty]$ м.н., при цьому*

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = \rho.$$

Справді, за законом нуля й одиниці Колмогорова, випадкова величина $k_F(\omega)$ є майже напевне сталою, тобто існує $\rho \in [0, +\infty]$ таке, що $k_F(\omega) \equiv \rho$ м.н. Залишається застосувати твердження 2 і 3.

Наступна теорема містить умови, які мають задовольняти випадкові величини $f_k(\omega)$ для того, щоб для довільного наперед заданого $\rho \in [0, +\infty]$ виконувалась рівність $\rho_F(\omega) = \rho$ м.н. Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *має вигляд* $F_\omega(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k}$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_+$. *Якщо* $\beta(\Lambda) = 0$, *то:*

a) *для того, щоб* $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon \in (0,\rho))\colon \ \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) < +\infty \ \wedge \ \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

b) *для того, щоб* $\rho_F(\omega) = 0$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k} + 0\big)\Big) < +\infty.$$

c) *для того, щоб* $\rho_F(\omega) = +\infty$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

Доведення. **a)** *Необхідність.* За умовою $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|} = \rho.$$

Оскільки ряд Діріхле при $\omega \in B$ в точці $z = 0$ збіжний, то $-\ln |f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ і за означенням $\varlimsup$ матимемо

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k^*(\omega))\colon \ |f_k(\omega)| < \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho + \varepsilon}\right\}.$$

Розглянемо подію

$$A_k(\varepsilon) := \left\{\omega\colon |f_k(\omega)| \geqslant \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho + \varepsilon}\right\}\right\}.$$

Зауважимо, що, $B \subset C(\varepsilon) := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k(\varepsilon)$, і тому $P(C(\varepsilon)) = 1$. Оскільки $C(\varepsilon)$ – подія“ серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon))$ відбувається лише скінченна кількість подій”, а попарна незалежність подій $A_k(\varepsilon)$ випливає з попарної незалежності випадкових величин $|f_k(\omega)|$, то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі (див. [29], [32, p. 84]) отримуємо, що

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} P(A_k(\varepsilon)) < +\infty. \tag{9}$$

Залишається скористатись рівністю

$$P(A_k(\varepsilon)) = 1 - P(\overline{A}_k(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho + \varepsilon}\right\}\right).$$

Далі, за означенням $\varlimsup$ маємо, що для кожного $\omega \in B$ існує послідовність $m_j \to +\infty$ така, що при $k = m_j$, $j \geqslant 1$

$$|f_k(\omega)| > \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho - \varepsilon}\right\}.$$

Звідси $B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N} A_k^1(\varepsilon) := C^1(\varepsilon)$, де

$$A_k^1(\varepsilon) = \{\omega\colon |f_k(\omega)| > \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho - \varepsilon}\right\}.$$

Тоді $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Зауважимо, що $C^1(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій". Оскільки

$$P(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho - \varepsilon}\right\}\right),$$

то залишається довести, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty. \tag{10}$$

Міркуючи від супротивного, припустимо, що $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) < +\infty$. Але тоді за першою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C}^1(\varepsilon)) = 1$, звідки $P(\overline{C}^1(\varepsilon)) = 0$. Суперечність. Тому, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty$.

Достатність. Зберігаємо позначення з доведення необхідності. З умови випливає, що виконується умова (9). Тому за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що ймовірність події $C(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon))$ відбувається лише скінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C(\varepsilon)) = 1$. Зауважимо, що для кожного $\omega \in C(\varepsilon)$ і для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$ виконується нерівність $|f_k(\omega)| < \exp\left\{-\dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho + \varepsilon}\right\}$. Звідси для кожного $\omega \in C(\varepsilon)$ і для всіх $k \geqslant k_1(\omega)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|} \leqslant \rho + \varepsilon.$$

Далі, подібно одержуємо таке: оскільки $P(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho - \varepsilon}\right\}\right)$, то виконується (10). Звідси за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що ймовірність події $C^1(\varepsilon)$ – "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Отже, для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що $\omega \in A_{m_k}^1$, звідки $|f_{m_k}(\omega)| > \exp\left\{-\dfrac{\lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k}}{\rho - \varepsilon}\right\}$. Тому для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|} \geqslant \rho - \varepsilon.$$

Позначимо тепер $C^2(\varepsilon) = C(\varepsilon) \bigcap C^{(1)}(\varepsilon)$. Тоді $P\left(\bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} C^{(2)}(1/m)\right) = 1$, і отже, остаточно отримуємо

$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|} = \rho$ для кожного $\omega \in \bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} C^{(2)}(1/m)$, тобто, м.н.

b) *Необхідність.* За умовою $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = 0.$$

Оскільки, за означенням верхньої границі для кожного $\omega \in B$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$

$$|f_k(\omega)| < \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon_1}\lambda_k \ln \lambda_k\right\} \quad \text{для всіх} \quad k \geqslant k_0(\omega),$$

то, міркуючи подібно, як в доведенні необхідності в п. **a)**, введемо спочатку до розгляду події

$$A_k(\varepsilon_1) := \left\{\omega\colon |f_k(\omega)| \geqslant \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon_1}\right\}\right\}, \qquad C(\varepsilon_1) := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k(\varepsilon_1),$$

а потім знову зауважимо, що $B \subset C(\varepsilon_1)$, тому $P(C(\varepsilon_1)) = 1$. Оскільки $C(\varepsilon_1)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon_1))$ відбувається лише скінченна кількість подій", а попарна незалежність подій $A_k(\varepsilon_1)$ випливає з попарної незалежності випадкових величин $|f_k(\omega)|$, то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі знову $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k(\varepsilon_1)) < +\infty$.

Залишається знову скористатись рівністю

$$P(A_k(\varepsilon_1)) = 1 - P\left(\overline{A}_k(\varepsilon_1)\right) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon_1}\right\}\right)$$

і вибрати $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$.

Достатність. Оскільки за умовою $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k(\varepsilon_1)) < +\infty$, то для $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$ за першою частиною леми Бореля-Кантелі матимемо, що ймовірність події $C(\varepsilon_1)$ – "серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon_1))$ відбувається лише скінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C(\varepsilon_1)) = 1$. Звідси для кожного $\omega \in C(\varepsilon_1)$ і для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$ виконується нерівність $|f_k(\omega)| < \exp\left\{-\dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon}\right\}$. Тому для кожного $\omega \in C(\varepsilon_1)$ і для всіх $k \geqslant k_1(\omega)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \leqslant \varepsilon.$$

Для завершення доведення розглянемо $C^{(2)} := \bigcap_{m=1}^{+\infty} C(m)$. Маємо $P(C^{(2)}) = 1$, тому для всіх $\omega \in C^{(2)}$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \leqslant 1/m,$$

звідки $\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = 0$.

c) *Необхідність.* За умовою, $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B)=1)(\forall \omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = +\infty.$$

Звідси за означенням верхньої границі $(\forall \varepsilon > 0)(\forall \omega \in B)(\exists (m_k), m_k \to +\infty)$:

$$\frac{\lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k}}{-\ln|f_{m_k}(\omega)|} > 1/\varepsilon \implies |f_{m_k}(\omega)| > -\varepsilon \lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k},$$

звідки $B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N} A_k^1(\varepsilon) := C^1(\varepsilon)$, де $A_k^1(\varepsilon) = \{\omega\colon |f_k(\omega)| > \exp\{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k\}\}$. Тоді $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Оскільки знову $C^1(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій", а

$$P(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\{-\varepsilon\lambda_k \ln\lambda_k\} + 0\right),$$

то подібно до того, як це робили раніш, міркуючи від супротивного, за першою частиною леми Бореля-Кантелі доводимо, що $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty$.

Достатність. За умовою для кожного $\varepsilon > 0$ матимемо $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty$. За уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі звідси отримуємо, що ймовірність події $C^1(\varepsilon)$ – "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Отже, знову для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що $\omega \in A_{m_k}^1$, звідки $|f_{m_k}(\omega)| > \exp\big\{-\varepsilon\lambda_{m_k} \ln\lambda_{m_k}\big\}$. Тому для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \geqslant \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k}}{-\ln|f_{m_k}(\omega)|} \geqslant 1/\varepsilon.$$

Зауважимо, що $P\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} C^1(1/m)\right) = 1$, і отже, остаточно отримуємо

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = +\infty$$

для кожного $\omega \in \bigcap_{m=1}^{+\infty} C^1(1/m)$, тобто м.н. $\square$

Сформулюємо тепер таку теорему. Схема її доведення цілком подібна до схеми доведення попередньої теореми з тією відмінністю, що замість твердження 6 треба використати твердження 4. З огляду на цю подібність наводимо теорему без доведення.

Теорема 2. *Нехай $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$, має вигляд $F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, а $\big(|f_k(\omega)|\big)$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $\tau(\Lambda) = 0$, то:*

a) *для того, щоб* $T_F(\omega) = T \in (0, +\infty)$ *м.н., необхідно і досить, щоб* $(\forall\varepsilon \in (0, T)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) < +\infty \ \wedge\ \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{(T-\varepsilon)e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) = +\infty.$$

b) *для того, щоб* $T_F(\omega) = 0$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{\varepsilon e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) < +\infty.$$

c) *для того, щоб* $T_F(\omega) = +\infty$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{e\rho}{\varepsilon\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) = +\infty.$$

Список використаної літератури

1. H. Bohr, *Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 203–211. DOI: 10.1515/crll.1913.143.203
2. H. Bohr, *Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletchen Reihen* $\sum \frac{a_n}{n^s}$, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1913** (1913), no. 4, 441–488.
3. G. H. Hardy and M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge University Press, London, 1915, 78 p.
4. G. Valiron, *Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet*, Bull. Soc. Math. Fr. **52** (1924), 166–174. DOI: 10.24033/bsmf.1051
5. H. F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet Series*, Ann. Math. (2) **32** (1931), no. 3, 600–622. DOI: 10.2307/1968255
6. С. Мандельбройт, *Ряды Дирихле, принципы и методы*, Мир, Москва, 1973.
7. А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, Москва, 1976, 536 с.
8. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса*, Буковинський матем. журн. **1** (2013), no. 3–4, 43–48.
9. М. М. Шеремета, *Цілі ряди Діріхле*, ІСДО, Київ, 1993.
10. О. М. Мулява, *Про абсцису збіжності ряду Діріхле*, Мат. Студ. **9** (1998), no. 2, 171–176.
11. О. Б. Скасків, А. І. Бандура, *Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції*, пп. Голіней, Львів–Івано-Франківськ, 2015, 108 с.
12. J.–P. Kahane, *Some random series of functions*, 2nd. ed. Cambridge Stud. Adv. Math. **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, 308 p.
13. F. Tian, *Growth of random Dirichlet series*, Acta Math. Sci. (Engl. Ed.) **20** (2000), no. 3, 390–396. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30646-X
14. F. Tian, Sun Dao-chun, and Yu jia-rong, *Sur les séries aléatoires de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. **326** (1998), no. 4, 427–431. DOI: 10.1016/S0764-4442(97)89786-8
15. P. V. Filevych, *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series*, Mat. Stud. **20** (2003), no. 1, 33–39.

16. L. O. Shapovalovska and O. B. Skaskiv, *On the radius of convergence of random gap power series*, Int. J. Math. Anal., Ruse **9** (2015), no. 38, 1889–1893. DOI: 10.12988/ijma.2015.53115
17. О. Б. Скасків, Л. О. Шаповаловська, *Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле*, Буковинський матем. журн. **3** (2015), no. 1, 110–114.
18. X. Ding and Y. Xiao, *Natural boundary of random Dirichlet series*, Укр. матем. журн. **58** (2006), no. 7, 997–1005; **reprinted version in:** Ukr. Math. J. **58** (2006), no. 7, 1129–1138. DOI: 10.1007/s11253-006-0124-3
19. О. Скасків, Н. Стасів, *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками*, Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. **84** (2017), 96–112.
20. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *Convergence of Dirichlet series with random exponents*, Int. J. Appl. Math. **30** (2017), no. 3, 229–238. DOI: 10.12732/ijam.v30i3.2
21. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents*, arXiv:1703.03280, 2017, preprint.
22. А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Н. Ю. Стасів, *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками та коефіцієнтами*, Буковинський матем. журн. **5** (2017), no. 3–4, 90–97.
23. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *On the convergence of random multiple Dirichlet series*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 2, 122–137. DOI:10.15330/ms.49.2.122-137
24. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, *Про області збіжності випадкових подвійних рядів Діріхле*, Mat. Stud. **32** (2009), no. 1, 81–85.
25. O. Yu. Zadorozhna and O. B. Skaskiv, *On domains of convergence of multiple random Dirichlet series*, Mat. Stud. **36** (2011), no. 1, 51–57.
26. Y. Y. Huo, D. Ch. Sun, *The growth of random Dirichlet series*, J. Math. Res. Expo. **28** (2008), no. 4, 1027–1030.
27. Jia-rong Yu, *Julia lines of random Dirichlet series*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), no. 5, 341–353. DOI: 10.1016/j.bulsci.2004.02.005
28. K. Sugimura, *Übertragung einiger satze aus der theorie der ganzen funktionen auf Dirichletsche reihen*, Math. Z. **29** (1929), no. 1, 264–277. DOI: 10.1007/BF01180529
29. P. Erdős and A. Rényi, *On Cantor's series with convergent* $\sum 1/q_n$, Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. **2** (1959), 93–109.
30. V. V. Petrov, *Sums of idependent random variables*, Springer, New York, 1975.
31. А. И. Мартикайнен, В. В. Петров, *О лемме Бореля–Кантелли*, Исследования по математической статистике. **9**, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **184** (1990), 200–207; **English version:** A. I. Martikainen and V. V. Petrov, *On the Borel-Cantelli lemma*, J. Math. Sci. **68** (1994), no. 4, 540–544. DOI: 10.1007/BF01254279
32. P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley, New York, 1986.

Стаття: надійшла до редколегії 18.11.2018.
доопрацьована 02.12.2018.
прийнята до друку 26.12.2018.

ON THE GROWTH OF RANDOM ENTIRE DIRICHLET SERIES

Oleh SKASKIV, Nadia STASIV

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Let $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ and $\mathbf{f} = (f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ be, respectively, a sequence of non-negative numbers and a sequence of complex-valued random variables on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. In the paper we study the values of the R-orders $\rho_F(\omega)$ and the R-types $T_F(\omega)$ of the growth of random Dirichlet series of the form $F(z) = F(z,\omega) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$ $(z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega)$. In particular, in the case, when $\beta(\Lambda) = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0$, the following assertions are proved: If $(|f_k(\omega)|)$ is a sequence of pairwise independent random variables with the distribution functions $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, then in order that $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ a.s., it is necessary and sufficient that $(\forall \varepsilon \in (0,\rho))$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\Big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\Big)\Big) < +\infty \ \wedge\ \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\Big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\Big)\Big) = +\infty.$$

Key words: entire functions, random Dirichlet series, R-order of the growth.

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2018. Випуск 85. C. 82–90
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 82–90
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.082-090

УДК 517.53 + 519.213.2

ON THE BELONGING OF ANALYTIC IN UNIT DISK CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS TO GENERALIZED CONVERGENCE CLASS

Oksana Mulyava[1], **Myroslav Sheremeta**[2]

[1]*Kyiv National University of Food Technologies,*
Volodymyrska Str., 68, 01004, Kyiv, Ukraine
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2]*Ivan Franko Lviv National University,*
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

For continuous on $[x_0,+\infty)$ functions α and β increasing to $+\infty$ we say that an analytic in $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ characteristic function φ of a probability law F belongs to the generalized convergence $\alpha\beta$-class if $\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr<+\infty$, where $M(r,\varphi)=\max\{|\varphi(z)|:|z|=r\}$. Conditions on α, β and F are found under which the function φ belongs to the generalized convergence $\alpha\beta$-class if and only if $\int\limits_{x_0}^{\infty}\alpha'(x)\beta_1\left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^x)}\right)dx<+\infty$, where $\beta_1(x)=\int\limits_{x}^{\infty}\frac{dt}{\beta(t)}$ and $W_F(x)=1-F(x)+F(-x)$.

Key words: analytic function, probability law, characteristic function, generalized convergence class.

1. Introduction

A continuous on the left on $(-\infty,+\infty)$ non-decreasing function F is said [1, p. 10] to be a *probability law* if $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$ and $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, and the function $\varphi(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dF(x)$ defined for real z is called [1, p. 12] a characteristic function of this law. If φ has an analytic continuation on the disk $\mathbb{D}=\{z:\ |z|<1\}$ then we call φ an analytic in

---

2010 Mathematics Subject Classification: 30B50, 60E10

$\mathbb{D}$ characteristic function of the law F. Further we always assume that $\mathbb{D}$ is the maximal disk of the analicity of φ. It is known [1, p. 37–38] that φ is an analytic in $\mathbb{D}$ characteristic function of the law F if and only if for every $r \in [0,\,1)$

(1) $$W_F(x) =: 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), \quad x \to +\infty.$$

Hence it follows that

(2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)} = 1.$$

For $0 \le r < 1$ we put $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)|: |z| = r\}$, and if φ has the order

$$\varrho = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M(r,\varphi)}{-\ln(1-r)} > 0$$

a convergence class is defined [2] by the condition

(3) $$\int\limits_{r_0}^{1} (1-r)^{\varrho-1} \ln M(r,\varphi)dr < +\infty.$$

For $\varrho = 2$ this condition is sufficient [3, p. 50] in order that φ belong to the class of Mac-Lane.

For an analytic in $\mathbb{D}$ characteristic function φ of the order $\varrho > 0$ in [4] it is proved that in order that φ belong to convergence class it is necessary and in the case when the function $v(x) = \ln \dfrac{1}{W_F(x)}$ is continuously differentiable and v' increases it is sufficient that

(4) $$\int\limits_{x_0}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x} \ln W_F(x)\right)^{+} \right\}^{\varrho+1} dx < +\infty.$$

Generalizing this result in [5] the concept of the convergence Φ-class is introduced as follows.

Let $\Omega(1)$ be the class of positive unbounded on $(0,1)$ functions Φ such that the derivative Φ' is positive continuously differentiable and increasing to $+\infty$ on $(0,1)$.

As in [5], we say that φ belongs to a convergence Φ-class if

(5) $$\int\limits_{r_0}^{1} \frac{\Phi'(r)\ln M(r,\varphi)}{\Phi^2(r)} dr < +\infty,$$

and by $V(1)$ we denote the class of positive continuously differentiable on $(0,+\infty)$ functions v such that $v'(x) \uparrow 1$ as $x \to +\infty$.

The following theorem was proved in [5].

Theorem 1. *Let $\Phi \in \Omega(1)$, $\dfrac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}$ be a function, nondecreasing on $[r_0,\,1)$, $\Phi'(r) > \dfrac{1}{1-r}$ $\Phi'\left(r + \dfrac{1}{\Phi'(r)}\right) \le H_1\Phi'(r)$ and $\dfrac{\Phi''(r)\Phi(r)}{(\Phi'(r))^2} \le H_2$ for all $r \in [r_0,\,1)$, where $H_j = \mathrm{const} >$*

0, and $\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\Phi'(r)\ln\Phi'(r)}{\Phi^2(r)}dr<+\infty$*. Suppose that* φ *is an analytic in* $\mathbb{D}$ *characteristic function on a probability law* F *such that* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}W_F(x)e^x=+\infty$*.*

Then in order that φ *belong to a convergence* Φ*-class it is necessary and, in the case when* $\ln\dfrac{1}{W_F(x)}=v(x)\in V(1)$*, it is sufficient that*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{\Phi'\left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{W_F(x)}\right)}<+\infty. \tag{6}$$

Corollary 1. *Let* $0<\varrho<+\infty$ *and* φ *be an analytic in* $\mathbb{D}$ *characteristic function of a probability law* F *such that* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}W_F(x)e^x=+\infty$*. Then in order that (3) holds it is necessary and, in the case when* $\ln\dfrac{1}{W_F(x)}=v(x)\in V(1)$*, it is sufficient that*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty}\left(\frac{\ln\left(W_F(x)e^x\right)}{x}\right)^{\varrho+1}dx<+\infty.$$

Let L be a class of continuous increasing functions α such that $\alpha(x)\ge0$ for $x\ge x_0$, $\alpha(x)=\alpha(x_0)$ for $x\le x_0$ and on $[x_0,+\infty)$ the function α increases to $+\infty$. We say that $\alpha\in L^0$ if $\alpha\in L$ and $\alpha(x(1+o(1)))=(1+o(1))\alpha(x)$ as $x\to+\infty$.

Let $\alpha\in L$ and $\beta\in L$. We say that an analytic in $\mathbb{D}$ function φ belongs to the generalized convergence $\alpha\beta$-class, if

$$\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr<+\infty. \tag{7}$$

If $\alpha(x)\equiv x$ and $\beta\equiv x^{\varrho+1}$ for $x_0\le x<+\infty$ then (7) implies (3). Here we examine a problem of the belonging of the analytic characteristic function of probability law to the generalized convergence $\alpha\beta$-class.

2. Auxiliary results

Let $I(r,\varphi)=\int\limits_{0}^{\infty}W_F(x)e^{xr}dx$ and $\mu(r,\varphi)=\sup\{W_F(x)e^{xr}:\,x\ge0\}$ be the maximum of integrand. Suppose that $M(r,\varphi)\uparrow+\infty$ as $r\uparrow1$. Then [5]

$$\ln\mu(r,\varphi)\le(1+o(1))\ln M(r,\varphi)\le(1+o(1))\ln I(r,\varphi),\quad r\uparrow1.$$

Hence it follows that if $\alpha\in L^0$ then

$$\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln\mu(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr\le\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr\le\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln I(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr. \tag{8}$$

On the other hand

$$I(r,\varphi)=\int\limits_0^\infty W_F(x)e^{xr}dx=\int\limits_0^\infty W_F(x)\exp\left\{\frac{r+1}{2}x\right\}\exp\left\{-\frac{1-r}{2}x\right\}dx\leq$$

$$\leq\mu\left(\frac{r+1}{2},\varphi\right)\frac{2}{1-r}. \tag{9}$$

In [6] it is proved that if $\alpha\in L^0$ then α is RO-varying and, thus [7, p. 86], $1\leq\alpha(lx)/\alpha(x)\leq M(l)<+\infty$ for each $l\in[1,+\infty)$ and all $x\geq x_0(l)$. Therefore, from (9) we obtain

$$\alpha(\ln I(r,\varphi))\leq\alpha\left(2\max\left\{\ln\mu\left(\frac{r+1}{2},\varphi\right),\ln\frac{2}{1-r}\right\}\right)\leq$$

$$\leq M(2)\alpha\left(\max\left\{\ln\mu\left(\frac{r+1}{2},\varphi\right),\ln\frac{2}{1-r}\right\}\right)=$$

$$=M(2)\left(\max\left\{\alpha\left(\ln\mu\left(\frac{r+1}{2},\varphi\right)\right),\alpha\left(\ln\frac{2}{1-r}\right)\right\}\right)\leq$$

$$\leq M(2)\left(\alpha\left(\ln\mu\left(\frac{r+1}{2},\varphi\right)\right)+\alpha\left(\ln\frac{2}{1-r}\right)\right),$$

whence for $\beta\in L^0$ using the cite of result from [6] we obtain

$$\int\limits_{r_0}^1\frac{\alpha(\ln I(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr\leq M(2)\left(\int\limits_{r_0}^1\frac{\alpha\left(\ln\mu\left(\frac{r+1}{2}\varphi\right)\right)}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr+\int\limits_{r_0}^1\frac{\alpha\left(\ln\frac{2}{1-r}\right)}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr\right)=$$

$$=2M(2)\int\limits_{r_0}^1\frac{\alpha\left(\ln\mu\left(\frac{r+1}{2},\varphi\right)\right)}{4(1-(r+1)/2)^2\beta(\frac{1}{2(1-(r+1)/2)})}d\frac{r+1}{2}+M(2)\int\limits_{r_0}^1\frac{\alpha\left(\ln\frac{2}{1-r}\right)}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr\leq$$

$$\leq K_1\int\limits_{t_0}^1\frac{\alpha(\ln\mu(t,\varphi))}{(1-t)^2\beta(\frac{1}{1-t})}dt+K_2\int\limits_{x_0}^\infty\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)}dx. \tag{10}$$

From (9) and (10) the following statement follows.

Proposition 1. *Let* $\alpha\in L^0$, $\beta\in L^0$ *and* $\int\limits_{x_0}^\infty\frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)}dx<+\infty$. *Then* (7) *holds if and only if*

$$\int\limits_{r_0}^1\frac{\alpha(\ln\mu(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr<+\infty. \tag{11}$$

The function $\ln\,\mu(r,\varphi)$ may be bounded. It is easy to show that $\mu(r,\varphi)\le K<+\infty$ for all $r\in[0,\,1)$ if and only if $W_F(x)e^x\le K<+\infty$ for all $x\ge 0$. Thus, $\mu(r,\varphi)\uparrow+\infty$ as $r\uparrow 1$ if and only if $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} W_F(x)e^x=+\infty$. In [5] was proved that the function $\ln\,\mu(r,\varphi)$ is convex on $[0,\,1)$ and there exists a nondecreasing on $[0,\,R)$ function $\nu(r,\varphi)$ such that $(\ln\,\mu(r,\varphi))'=\nu(r,\varphi)$ for all $r\in(0,\,R)$ with the exception of an at most countable set, i.e.

$$\ln\,\mu(r,\varphi)=\ln\,\mu(r_0,\varphi)+\int\limits_{r_0}^{r}\nu(x,\varphi)dx,\quad 0\le r_0\le r<1. \tag{12}$$

Hence it follows that if $\mu(r,\varphi)\uparrow+\infty$ as $r\uparrow 1$ then $\nu(r,\varphi)\nearrow+\infty$ as $r\uparrow 1$.

If $\ln\,\dfrac{1}{W_F(x)}=v(x)\in V(1)$ then for every $r\in(0,\,1)$ the function $\ln\,W_F(x)+rx=$ $=-v(x)+rx$ has a unique point of the maximum $x=\nu(r,\varphi)$, which is a continuous on $(0,\,1)$ function increasing to $+\infty$, and

$$\ln\,\mu(r,\varphi)=\max\{\ln\,W_F(x)+rx:\,x\ge 0\}=\ln\,W_F(\nu(r,\varphi))+r\nu(r,\varphi),$$

whence

$$\frac{1}{\nu(r,,\varphi)}\ln\,\frac{1}{W_F(\nu(r,\varphi))}=r-\frac{\ln\,\mu(r,\varphi)}{\nu(r,\varphi)}\le r. \tag{13}$$

From (12) it follows that

$$\ln\,\mu(r,\varphi)=\ln\,\mu(r_0,\varphi)+\nu(r,\varphi)(r-r_0)\le\ln\,\mu(r_0,\varphi)+(1-r_0)\nu(r,\varphi),$$

and if $\alpha\in L^0$ then $\alpha(\ln\,\mu(r,\varphi))\le K_1\alpha(\nu(r,\varphi)$ for all $r\in[r_0,\,1)$.

On the other hand for $r\ge r_0$

$$\ln\,\mu\left(\frac{1+r}{2},\varphi\right)\ge\ln\,\mu(r_0\varphi)+\int\limits_{r}^{(1+r)/2}\nu(x,\varphi)dx\ge\ln\,\mu(r_0,\varphi)+\nu(r,\varphi)\frac{1-r}{2},$$

and if $\alpha(e^x)\in L^0$ then as above we obtain

$$\alpha(\nu(r,\varphi))\le\alpha\left(\exp\left\{\ln\,\frac{2}{1-r}+\ln\,\ln\,\mu\left(\frac{1+r}{2},\varphi\right)\right\}\right)\le$$
$$\le\alpha\left(\exp\left\{2\max\left\{\ln\,\frac{2}{1-r},\,\ln\,\ln\,\mu\left(\frac{1+r}{2},\varphi\right)\right\}\right\}\right)\le$$
$$\le K_2\left(\alpha\left(\ln\,\mu\left(\frac{1+r}{2},\varphi\right)\right)+\alpha\left(\ln\,\frac{2}{1-r}\right)\right).$$

Thus,

$$\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln\,\mu(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr\le K_1\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln\,\nu(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr\le$$
$$\le K_1K_2\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln\,\mu((r+1)/2,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr+K_1K_2\int\limits_{r_0}^{1}\frac{\alpha(\ln\,(2/(1-r)))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr,$$

whence as above we obtain the following statement.

Proposition 2. *Let* $\alpha(e^x) \in L^0$, $\beta \in L^0$, $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} dx < +\infty$ *and* $\ln \frac{1}{W_F(x)} = v(x) \in V(R)$. *Then* (11) *holds if and only if*

$$\int\limits_{r_0}^{1} \frac{\alpha(\nu(r,\varphi))}{(1-r)^2 \beta(\frac{1}{1-r})} dr < +\infty. \tag{14}$$

Thus, the problem of belonging of φ to the generalized convergence $\alpha\beta$-class is reduced to the problem of the fulfilment of (14).

3. Main result

Using Propositions 1 and 2 we may prove the following main theorem.

Theorem 2. *Let* $\alpha(e^x) \in L^0$, $\beta \in L^0$, $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln x)}{\beta(x)} dx < +\infty$ *and* $\frac{x\beta'(x)}{\beta(x)} \geq 2 + h$ *for all* $x \geq x_0$. *Suppose that* φ *is an analytic in* $\mathbb{D}$ *characteristic function on probability law* F *such that* $W_F(0) = 1$, $\ln \frac{1}{W_F(x)} = v(x) \in V(1)$ *and* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} W_F(x) e^x = +\infty$.

Then in order that φ *belongs to a generalized convergence* $\alpha\beta$*-class it is necessary and sufficient that*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \alpha(x) \beta_1 \left(\frac{x}{\ln (W_F(x) e^x)} \right) dx < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int\limits_{x}^{\infty} \frac{dt}{\beta(t)}. \tag{15}$$

Proof. Clearly,

$$\int\limits_{r_0}^{1} \frac{\alpha(\nu(r,\varphi))}{(1-r)^2 \beta(\frac{1}{1-r})} dr = -\int\limits_{r_0}^{1} \alpha(\nu(r,\varphi)) d\beta_1 \left(\frac{1}{1-r} \right) =$$

$$= -\alpha(\nu(r,\varphi)) \beta_1 \left(\frac{1}{1-r} \right) \Big|_{r_0}^{1} + \int\limits_{r_0}^{1} \alpha'(\nu(r,\varphi)) \beta_1 \left(\frac{1}{1-r} \right) d\nu(r,\varphi). \tag{16}$$

At first we suppose that (15) holds. Then, from (16) and (13), in view of the nonincreasing of β_1, we have

$$\int\limits_{r_0}^{1} \frac{\alpha(\nu(r,\varphi))}{(1-r)^2 \beta(\frac{1}{1-r})} dr \leq K + \int\limits_{r_0}^{1} \alpha'(\nu(r,\varphi)) \beta_1 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\nu(r,\varphi)} \ln \frac{1}{W_F(\nu(r,\varphi))}} \right) d\nu(r,\varphi) =$$

$$= K + \int\limits_{x_0}^{\infty} \alpha'(\nu(r,\varphi)) \beta_1 \left(\frac{\nu(r,\varphi)}{\ln (W_F(\nu(r,\varphi) x) e^{\nu(r,\varphi)})} \right) d\nu(r,\varphi) < +\infty,$$

because the function $\nu(r,\varphi)$ is continuous. The sufficiency of (15) is proved.

Now we prove its necessity. From (14) for each $\varepsilon > 0$ and all $r \in [r_0(\varepsilon), 1)$ we have

$$\varepsilon > \int\limits_r^1 \frac{\alpha(\nu(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr \geq \alpha(\nu(r,\varphi)) \int\limits_r^1 \frac{dr}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})} = \alpha(\nu(r,\varphi))\beta_1\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

that is from (14) and (16) we obtain

$$\int\limits_{r_0}^1 \alpha'(\nu(r,\varphi))\beta_1\left(\frac{1}{1-r}\right)d\nu(r,\varphi) < +\infty.$$

Since $\ln \dfrac{1}{W_F(x)} = v(x) \in V(1)$ and $x = \nu(r,\varphi)$ is a solution of the equation $-v'(x) + r = 0$, we have $r = v'(\nu(r,\varphi))$ and hence it follows that

$$\int\limits_{r_0}^\infty \alpha'(\nu(r,\varphi))\beta_1\left(\frac{1}{1-v'(\nu(r,\varphi))}\right)d\nu(r,\varphi) < +\infty,$$

i.e.

$$\int\limits_{x_0}^\infty \alpha'(x)\beta_1\left(\frac{1}{1-v'(x)}\right)dx < +\infty. \tag{17}$$

From a theorem proved in [8] it follows that if $a(x)$ and $\mu(x)$ are continuous functions on $(0, +\infty)$, $-\infty \leq A < a(x) < B \leq +\infty$, $\mu(x) \searrow \mu \geq 0$ as $x \to +\infty$, and for a positive function f on (A, B) the function $f^{1/p}$ with $p > 1$ is convex on (A, B), then

$$\int\limits_0^y \mu(x) f\left(\frac{1}{x}\int\limits_0^x a(t)dt\right)dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^y \mu(x) f(a(x))dx, \quad y \leq +\infty. \tag{18}$$

We choose $\mu(x) = \alpha'(x)$, $a(x) = v'(x)$, $f(x) = \beta_1\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ and show that the function $f^{1/p}$ is convex for some $p > 1$.

It is easy to see that $f^{1/p}$ is convex for $p > 1$ if $f(x)f''(x) - \dfrac{p-1}{p}(f'(x))^2 \geq 0$ that is if

$$\beta_1\left(\frac{1}{1-x}\right)\beta_1''\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2(1-x)\beta_1\left(\frac{1}{1-x}\right)\beta_1'\left(\frac{1}{1-x}\right) \geq \frac{p-1}{p}\left(\beta_1'\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^2,$$

and thus, if

$$\beta_1(t)\beta_1''(t) + \frac{2}{t}\beta_1(t)\beta_1'(t) \geq \frac{p-1}{p}(\beta_1'(t))^2.$$

Since $\beta_1(t) = \displaystyle\int\limits_t^\infty \frac{dx}{\beta(x)}$, the last inequality holds if

$$\left(\beta'(t) - \frac{2\beta(t)}{t}\right)\int\limits_t^\infty \frac{dx}{\beta(x)} \geq \frac{p-1}{p}. \tag{19}$$

Since $\beta'(t) - \dfrac{2\beta(t)}{t} \geq \dfrac{h\beta(t)}{t} > 0$, we have

$$\left(\beta'(t) - \frac{2\beta(t)}{t}\right) \int\limits_t^\infty \frac{dx}{\beta(x)} \geq \left(\beta'(t) - \frac{2\beta(t)}{t}\right) \int\limits_t^{2t} \frac{dx}{\beta(x)} \geq \left(\beta'(t) - \frac{2\beta(t)}{t}\right) \frac{t}{\beta(t)} \geq h.$$

Therefore, choosing $p > 1$ such that $h - \dfrac{p-1}{p} \geq 0$, we get inequality (19), i. e. the function $\beta_1^{1/p}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ is convex and in view of (18)

$$\int\limits_0^\infty \alpha'(x)\beta_1\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}\int\limits_0^x v'(t)dt}\right) dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^\infty \alpha'(x)\beta_1\left(\frac{1}{1-v'(x)}\right) dx. \tag{20}$$

Since $\displaystyle\int\limits_{x_0}^x v'(t)dt = \ln \frac{1}{W_F(x))}$, from (17) and (20) we obtain (15). Theorem 2 is proved.

□

References

1. Yu. V. Linnik and I. V. Ostrovskii, *Decompositon of random variables and vectors*, Nauka, Moscov, 1972 (Russian).
2. Yu. M. Gal' and M. M. Sheremeta, *Belonging of analytic functions to a covergence class*, Dop. AN URSR, Ser. A (1985), no. 7, 11–14 (Ukrainian).
3. G. R. MacLane, *Asymptotic values of holomorphic functions*, Rice Univ. Studies **49** (1963), no. 1, 1–83.
4. V. M. Sorokivskii, *On the growth of characteristic functions of probability laws*, Drogobych (1980), 20 p. Dep. in VINITI 17.12.80, N 5330-80 DEP (Russian).
5. L. V. Kulyavets', O. M. Mulyava, and M. M. Sheremeta, *On belonging of characteristic functions of probability laws to a convergence class*, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz., Ser Rech. Deform. **63** (2013), no. 2, 9–22.
6. M. M. Sheremeta, *On two classes of positive functions and the belonging to them of main characteristics of entire functions*, Mat. Stud. **19** (2003), no. 1, 75–82.
7. E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lect. Notes Math. **508**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
8. O. M. Мулява, *Інтегральний аналог одного узагальнення нерівності Гарді та його застосування*, Укр. мат. журн. **58** (2006), no. 9, 1271–1275; **English version**: O. M. Mulyava, *Integral analog of one generalization of the Hardy inequality and its applications*, **58** (2006), no. 9, 1441–1447. DOI: 10.1007/s11253-006-0143-0

Стаття: надійшла до редколегії 23.10.2018
доопрацьована 03.12.2018
прийнята до друку 26.12.2018

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Київський національний університет харчових технологій*
Володимирівська 68, Київ, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2]*Львівський національний університет ім. І. Франка,*
Університетська 1, 79000, Львів
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

Для неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій α і β будемо говорити, що аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ характеристична функція φ ймовірнісного закону F належить до узагальненого $\alpha\beta$-класу збіжності, якщо $\int\limits_{r_0}^{1} \frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{(1-r)^2\beta(\frac{1}{1-r})}dr < +\infty$. Знайдено умови на α, β і F, за яких функція φ належить до узагальненого $\alpha\beta$-класу збіжності тоді і тільки тоді, коли $\int\limits_{x_0}^{\infty} \alpha'(x)\beta_1\left(\frac{x}{\ln(W_F(x)e^x)}\right)dx < +\infty$, де $\beta_1(x) = \int\limits_{x}^{\infty}\frac{dt}{\beta(t)}$ і $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x)$.

Ключові слова: аналітична функція, ймовірнісний закон, характеристична функція, узагальнений клас збіжності.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 91–106
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 91–106
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.091-106

УДК 517.9

КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Микола БОКАЛО, Ірина СКІРА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com

Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі Фур'є для слабко нелінійного еліптично-параболічного інтегро-диференціального рівняння вищого порядку. Також отримано оцінку цього розв'язку.

Ключові слова: задача Фур'є, параболічне рівняння з виродженням, еліптично-параболічне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, функціонально-диференціальне рівняння.

1. Вступ

Нехай n, m – натуральні числа; $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів n дійсних чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$ і наділений нормою $|x| = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$; M – підмножина множини $\{0, 1, \dots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$; N – кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел, тобто елементів множини $\mathbb{Z}_+^n$), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$) є елементами множини M; $\widehat{0} := (0, \dots, 0)$ – мультиіндекс, складений з нулів; $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \dots, \xi_\alpha, \dots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$); $|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2 \Big)^{1/2}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

2010 Mathematics Subject Classification: 35D30, 35K25, 35J30

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$. Вважаємо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою і позначаємо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Під S розуміємо промінь $(-\infty; 0]$. Приймаємо $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$ і $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних t_1 і t_2 (тут і далі вважаємо, що $t_1 < t_2$).

Припускаємо, що

($\mathcal{B}$) $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $0 \leqslant b(x) \leqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Позначаємо $\Omega_0 := \{x \in \Omega \,|\, b(x) > 0\}$, $b_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x)$.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) + \int_\Omega c(x, y, t, u(y, t))\, dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q \tag{1}$$

та крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c : \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| \in M$) – задані функції, які задовольняють певні (наведені нижче) умови. Тут і далі $D^\alpha := \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, і δu – впорядкований набір похідних $D^\alpha u$ функції u порядків $|\alpha| \in M$ (правило впорядкування таке саме, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$).

Вважаємо, що просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) – еліптична, тобто рівняння (1) – параболічне на множині $\Omega_0 \times S$ і еліптичне на множині $(\Omega \setminus \Omega_0) \times S$, а тому його називають *еліптично-параболічним*. Такі рівняння досліджували, зокрема, в [1, 2, 3, 4, 5].

В цій роботі ми вивчаємо питання існування та єдиності розв'язку задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для рівняння (1) з крайовими умовами (2). Задача Фур'є виникає при моделюванні різних динамічних процесів у природі та економіці, коли початок процесу настільки віддалений від актуального моменту, що початкові дані практично не впливають на ситуацію в цей момент (див., наприклад, [6]). Така задача для еволюційних рівнянь з різних класів розглядалася в працях багатьох математиків, зокрема, в [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Досить повний огляд цих результатів можна знайти в [10].

Зауважимо, що в задачі (1),(2) можливе входження невідомої функції як в диференціальну частину рівняння, так і в інтегральну. Інтегро-диференціальні рівняння виникають при моделюванні складних явищ у сучасному природознавстві, економіці та техніці, наприклад, для опису біржових коливань вартості опціонів, в теорії ядерних реакцій при вивченні процесу уповільнення нейтронів в дифузії заряджених частинок у плазмі та в інших різноманітних задачах (див. [12, 13, 14]).

Прикладами рівнянь типу (1), які тут досліджуються, є рівняння:

$$(b(x)u)_t + \sum_{k\in M} \widehat{a}_k(t)(-\Delta)^k u + \int_\Omega \widehat{c}(x,y,t)u(y,t)\,dy =$$

$$= f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{3}$$

де Δ – оператор Лапласа, $\widehat{a}_k \in L^\infty(0,T)\,(k\in M)$, $\widehat{c}\in L^\infty(\Omega\times\Omega\times S)$ – деякі функції, причому функції $\widehat{a}_k\,(k\in M)$ додатні і відділені від нуля, а функція $f: Q\to\mathbb{R}$ – вимірна і така, що її звуження на Q_{t_1,t_2} належить простору $L^2(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1, t_2 \in S$.

Задача Фур'є для рівнянь типу (1) у випадку сильної нелінійності досліджена у [5] та однозначно розв'язна без будь-яких умов на нескінченності. У випадку слабкої нелінійності, розглянутому в цій роботі, задача Фур'є коректна лише за деяких обмежень на поведінку розв'язків при $t\to-\infty$, які будуть вказані пізніше.

2. Основні функційні простори та допоміжні факти

Введемо потрібні нам функційні простори.

Під $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розуміємо лінійний простір вимірних на Q функцій таких, що їх звуження на підмножину Q_{t_1,t_2} належить простору $L^\infty(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1,t_2\in S$.

Нехай X – довільний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ та нормою $\|\cdot\|_X$. Позначаємо через $L^2_{\mathrm{loc}}(S;X)$ лінійний простір функцій, які визначені на S, набувають значення в X і їхнє звуження на будь-який відрізок $[t_1,t_2]\subset S$ належать простору $L^2(t_1,t_2;X)$.

Під $C^1_c(I)$, де I – інтервал числової осі, розуміємо лінійний простір неперервно диференційовних на I функцій з компактним носієм (якщо $I=(\widehat{t_1},\widehat{t_2})$, то писатимемо $C^1_c(\widehat{t_1},\widehat{t_2})$ замість $C^1_c((\widehat{t_1},\widehat{t_2}))$).

Нехай $H^m(\Omega) := \{v\in L^2(\Omega)\,|\, D^\alpha v\in L^2(\Omega)\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n_+, |\alpha|\leqslant m\}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(v,w)_{H^m(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha v D^\alpha w\,dx$ та нормою $\|v\|_{H^m(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha v|^2\,dx\right)^{1/2}$. Під $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ будемо розуміти замикання в $H^m(\Omega)$ простору $C^\infty_c(\Omega)$ ($C^\infty_c(\Omega)$ – лінійний простір, що складається з нескінченно диференційовних на Ω функцій, які мають компактний носій).

Нехай $\widetilde{b}(x) := b(x)$, якщо $x\in\Omega_0$, і $\widetilde{b}(x) := 1$, якщо $x\in\Omega\setminus\Omega_0$. Позначимо через $H_b(\Omega)$ лінійний простір, елементами якого є функції $w=\widetilde{b}^{-1/2}v$, де $v\in L^2(\Omega)$. На просторі H_b вводимо півнорму $\|w\|_{H_b(\Omega)} := \left(\int_\Omega b(x)|w(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, з якою він є повним півнормованим простором. Легко переконатися, що $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ щільно вкладається в H_b (див. [15, I.3.3]).

Вводимо простір $C(S;H_b(\Omega))$ як лінійний простір функцій $h: S\to H_b(\Omega)$ таких, що $b^{1/2}h\in C(S;L^2(\Omega))$.

Через K_α ($|\alpha| \leqslant m$) позначаємо додатні сталі, для яких правильні нерівності

$$\forall\alpha,\ |\alpha| \leqslant m: \int\limits_\Omega |D^\alpha v|^2\,dx \geqslant K_\alpha \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega). \tag{4}$$

Існування таких сталих при $|\alpha| \neq 0$ легко випливає з нерівності Фрідріхса, а $K_{\widehat{0}} = 1$.

3. Формулювання задачі та основних результатів

Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1), (2), а для цього зробимо відповідні припущення.

Нехай вихідні дані рівняння (1) задовольняють такі умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного α ($|\alpha| \in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, – каратеодорівська, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для кожного $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна за Лебегом, а також $a_\alpha(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

($\mathcal{A}_2$) для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$, майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t)|\xi| + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega))$;

($\mathcal{A}_3$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ виконуєтся нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant \sum_{\alpha\in A} \gamma_\alpha(t)|\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2,$$

де множина $A \subset \mathbb{Z}^n_+$ така, що $\{\alpha \,|\, |\alpha| = m\} \subset A \subset \{\alpha \,|\, |\alpha| \in M\}$, та функції $\gamma_\alpha \in C(S)$, $\alpha \in A$ такі, що $\gamma_\alpha(t) > 0$ $\forall t \in S$, $\forall\,\alpha \in A$;

($\mathcal{C}_1$) функція $c(x,y,t,\rho), (x,y,t,\rho) \in \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R}$, – каратеодорівська, тобто для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times S$ функція $c(x,y,t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для всіх $\rho \in \mathbb{R}$ функція $c(\cdot,\cdot,\cdot,\rho) : \Omega \times \Omega \times S \to \mathbb{R}$ – вимірна за Лебегом, а також $c(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$;

($\mathcal{C}_2$) існує стала $L \geqslant 0$ така, що для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times S$ та довільних $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|c(x,y,t,\rho_1) - c(x,y,t,\rho_2)| \leqslant L\gamma(t)|\rho_1 - \rho_2|,$$

де

$$\gamma(t) := \sum_{\alpha\in A} K_\alpha \gamma_\alpha(t) \quad \forall t \in S; \tag{5}$$

($\mathcal{F}$) $f_\alpha \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)) \quad \forall\alpha,\ |\alpha| \in \{0, m\}$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком* задачі (1), (2) називаємо функцію $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C(S; H_b(\Omega))$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ -buv\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v\varphi + v\varphi \int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy \Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q} \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_\alpha D^\alpha v\varphi \, dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall \varphi \in C_c^1(-\infty,0). \tag{6}$$

Зауважимо, що задача (1),(2) може мати багато узагальнених розв'язків. Справді, розглянемо рівняння

$$u_t + (-\Delta)^m u - \int\limits_{\Omega} (\lambda_1 + \lambda_1^m) v_1(x) v_1(y) u(y,t)\, dy = 0, \tag{7}$$

де λ_1 та $v_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, відповідно, перше власне значення та відповідна йому власна функція, норма якої в $L^2(\Omega)$ дорівнює одиниці, задачі на власні значення

$$-\Delta v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega, \qquad v\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Очевидно, що вихідні дані рівняння (7) задовольняють умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{F})$ і для довільної сталої $C \in \mathbb{R}$ функція $u_C(x,t) = Ce^{\lambda_1 t} v_1(x)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, є розв'язком задачі (7), (2).

Звідси випливає, що для забезпечення єдиності узагальненого розв'язку задачі (1),(2) необхідно накладати обмеження на його поведінку при $t \to -\infty$.

Ми будемо розглядати задачу відшукання узагальненого розв'язку задачі (1),(2), який задовольняє такий "аналог" початкової умови

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\omega \int_0^t \gamma(s)ds} \|u(\cdot,t)\|_{H_b(\Omega)} = 0, \tag{8}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$, а γ – функція, яка визначена в (5).

Цю задачу коротко називатимемо задачею (1),(2), (8), а функцію u – узагальненим розв'язком задачі (1),(2),(8).

Далі нам буде потрібний ще такий функційний простір. Нехай $\omega \in \mathbb{R}$, $\beta \in C(S)$, $\beta(t) > 0$ для всіх $t \in S$. Розглянемо гільбертів простір

$$L^2_{\omega,\beta}(S; L^2(\Omega)) := \left\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)) \;\Big|\; \int\limits_S \beta(t) e^{2\omega \int_0^t \gamma(s)ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt < \infty \right\}$$

зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega))} = \int\limits_S \beta(t)\, e^{2\omega \int_0^t \gamma(s)\, ds} (f(\cdot,t), g(\cdot,t))_{L^2(\Omega)}\, dt$$

та нормою

$$\|f\|_{L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega))} := \left(\int\limits_S \beta(t)\, e^{2\omega \int_0^t \gamma(s)\, ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \right)^{1/2},$$

де γ визначено в (5).

Через $\mathrm{mes}_n G$, де G – вимірна множина в $\mathbb{R}^n$, позначатимемо міру Лебега множини G.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_3), (\mathcal{B}), (\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2), (\mathcal{F})$ *і, крім того, у випадку* $b_0 = 0$ *матимемо*

$$Lmes_n\Omega < 1. \tag{9}$$

Припустимо, що $\omega < 1 - Lmes_n\Omega$, *коли виконується умова* (9), *і* $\omega < (1 - Lmes_n\Omega)/b_0$ *в іншому випадку, і маємо включення*

$$f_\alpha \in L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S; L^2(\Omega)) \quad \forall \alpha \ |\alpha| = m, \quad f_{\widehat{0}} \in L^2_{\omega,1/\gamma}(S; L^2(\Omega)). \tag{10}$$

Тоді існує і тільки один узагальнений розв'язок задачі (1), (2),(8), *причому для нього правильна оцінка*

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u(\cdot,\tau)\|_{H_b(\Omega)} + \|u\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{\alpha\in A}\|D^\alpha u\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left[\|f_{\widehat{0}}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{|\alpha|=m}\|f_\alpha\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}\right], \quad \tau \in S, \tag{11}$$

де $S_\tau := (-\infty, \tau]$ $\forall \tau \in (-\infty, 0]$ $(S_0 = S)$, $C_1 > 0$ – *стала, що залежать лише від* L, $mes_n\Omega$, b_0 *та* ω.

4. Обгрунтування основних результатів

При доведенні теореми 1 важливу роль відіграватиме твердження, яке є відомим (див., наприклад, [3]), але ми сформулюємо його у зручній для нас формі.

Лема 1. *Нехай функції* $w \in L^2(0,T; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))$ *і* $g_\alpha \in L^2(\Omega \times (0,T))$ $(|\alpha| \in M)$, *де* $T > 0$ *такі, що правильна тотожність*

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left\{-bwv\varphi' + \left(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v\right)\varphi\right\}\,dxdt = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall \varphi \in C^1_c(0,T). \tag{12}$$

Тоді $w \in C([0,T]; H_b(\Omega))$ *і для будь-яких* $\tau_1, \tau_2 \in [0,T]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ *та довільної* $\theta \in C^1([0,T])$ *матимемо*

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\|w(\cdot,\tau_2)\|^2_{H_b(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\|w(\cdot,\tau_1)\|^2_{H_b(\Omega)} - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega)}\theta'(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\left(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha w\right)\theta\,dxdt = 0. \tag{13}$$

Також нам буде потрібне таке допоміжне твердження.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_3), (\mathcal{B}), (\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2)$ *і у випадку* $b_0 = 0$ – *умова* (9). *Припустимо, що* $\omega < 1 - Lmes_n\Omega$, *коли виконується умова* (9), *і* $\omega < (1 - Lmes_n\Omega)/b_0$ *в іншому випадку. Тоді, якщо* u_1 *та* u_2 – *узагальнені розв'язки,* *відповідно, задач, які відрізняються від задачі (1), (2), (8) тільки тим, що в першій з них $f_\alpha = f_{\alpha,1}$, а в другій — $f_\alpha = f_{\alpha,2}$ $(|\alpha| \in \{0,m\})$, де*

$$f_{\widehat{0},k}\in L^2_{\omega,1/\gamma}(S;L^2(\Omega))\ (k\in\{1,2\}),\ f_{\alpha,k}\in L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))\ (k\in\{1,2\};\ |\alpha|=m), \tag{14}$$

то правильна оцінка

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau\gamma(s)\,ds}\|u_1(\cdot,\tau)-u_2(\cdot,\tau)\|_{H_b(\Omega)}+\|u_1-u_2\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))}+$$
$$+\sum_{\alpha\in A}\|D^\alpha u_1-D^\alpha u_2\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}\leqslant$$
$$\leqslant C_1\Bigg[\|f_{\widehat{0},1}-f_{\widehat{0},2}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))}+\sum_{|\alpha|=m}\|f_{\alpha,1}-f_{\alpha,2}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}\Bigg],\quad \tau\in S, \tag{15}$$

де $C_1>0$ – стала, яка залежить тільки від L, $mes_n\Omega$, b_0 і ω.

Доведення. Вводимо для кожних α $(|\alpha|\in M)$, $x\in\Omega$, $y\in\Omega$, $t\in S$ позначення

$$u_{12}(x,t):=u_1(x,t)-u_2(x,t),\quad a_{\alpha,12}(x,t):=a_\alpha(x,t,\delta u_1(x,t))-a_\alpha(x,t,\delta u_2(x,t)),$$

$$c_{12}(x,y,t):=c(x,y,t,u_1(y,t))-c(x,y,t,u_2(y,t)),\quad f_{\alpha,12}(x,t):=f_{\alpha,1}(x,t)-f_{\alpha,2}(x,t).$$

З (6) отримаємо таку інтегральну тотожність:

$$\iint\limits_Q\Bigg\{-bu_{12}v\varphi'+\sum_{|\alpha|\in M}a_{\alpha,12}D^\alpha v\varphi+\Bigg(\int\limits_\Omega c_{12}(x,y,t)\,dy\Bigg)v\varphi\Bigg\}\,dxdt=$$
$$=\iint\limits_Q\sum_{|\alpha|\in\{0,m\}}f_{\alpha,12}D^\alpha v\varphi\,dxdt\quad\forall v\in\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall\varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{16}$$

На підставі леми 1 з (16) випливає, що

$$\frac12\theta(t)\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}-\frac12\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_\Omega b|u_{12}|^2\theta'\,dxdt+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_\Omega\Bigg\{\sum_{|\alpha|\in M}a_{\alpha,12}\,D^\alpha u_{12}+$$
$$+\Bigg(\int\limits_\Omega c_{12}(x,y,t)\,dy\Bigg)u_{12}\Bigg\}\theta\,dxdt=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\in\{0,m\}}f_{\alpha,12}D^\alpha u_{12}\theta\,dxdt, \tag{17}$$

де $\theta\in C^1(S)$, $\theta(t)>0$ $\forall t\in S$, та $\tau_1,\tau_2\in S$ $(\tau_1<\tau_2)$ – довільні.

Використовуючи нерівність Коші:

$$ac\leqslant\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}c^2\quad\forall a,c\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0, \tag{18}$$

оцінимо праву частину рівності (17) так:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m} f_{\alpha,12}\, D^{\alpha}u_{12}\theta\, dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\, dxdt + \tag{19}$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_{\alpha}}|f_{\alpha,12}|^2\theta\, dxdt,$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} f_{\widehat{0},12}\, u_{12}\theta\, dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma|u_{12}|^2\theta\, dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\theta\, dxdt, \tag{20}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

З умови $(\mathcal{A}_3)$ отримуємо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12}(x,t)D^{\alpha}u_{12}\theta\, dxdt \geqslant \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\, dxdt. \tag{21}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$ і нерівність Коші-Буняковського, отримуємо

$$\left|\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega} c_{12}(x,y,t)\, dy\right)u_{12}\theta\, dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega}|c(x,y,t,u_1(y,t)) - c(x,y,t,u_2(y,t))|\ dy\right)|u_{12}(x,t)|\,\theta(t)\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma(t)\left(\int\limits_{\Omega}|u_{12}(y,t)|\, dy\right)|u_{12}(x,t)|\,\theta(t)\, dxdt =$$

$$= L\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(t)\left(\int\limits_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\, dx\right)\left(\int\limits_{\Omega}|u_{12}(y,t)|\, dy\right)\theta(t)\, dt =$$

$$= L\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(t)\left(\int\limits_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\ dx\right)^2\theta(t)\, dt \leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma\,|u_{12}|^2\,\theta\, dxdt. \tag{22}$$

З (17), на підставі (19) – (22), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\int\limits_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\int\limits_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\, dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} b|u_{12}|^2\theta'\, dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\, dxdt - L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma\,|u_{12}|^2\,\theta dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_\alpha|D^\alpha u_{12}|^2\theta\,dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}|f_{\alpha,12}|^2\theta\,dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma|u_{12}|^2\theta\,dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\theta\,dxdt,$$

де $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

Взявши в цій нерівності $\theta(t):=2e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}$, $t\in S$, матимемо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2dx-e^{2\omega\int_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2dx-$$

$$-2\omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}b\gamma e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2dxdt+$$

$$+2(\delta+(1-\delta))\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt-$$

$$-2L\mathrm{mes}_n\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\;\;dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_\alpha e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt+$$

$$+\varepsilon_2\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt,\tag{23}$$

де $\delta\in(0,1)$ – довільне число.

Звідси та з (4) випливає нерівність

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx-e^{2\omega\int_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx-$$

$$-2\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt+$$

$$+2(1-\delta)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_\alpha e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+$$

$$+2\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \sum_{\alpha\in A} K_\alpha\gamma_\alpha e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |u_{12}|^2\, dxdt - 2L\mathrm{mes}_n\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \gamma e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds} |u_{12}|^2\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |D^\alpha u_{12}|^2\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\gamma_\alpha} e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |f_{\alpha,12}|^2\, dxdt+$$

$$+\varepsilon_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \gamma e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |u_{12}|^2\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \frac{1}{\gamma} e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |f_{\widehat{0},12}|^2\, dxdt. \tag{24}$$

З (24), використавши позначеня (5), отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2 dx - e^{2\omega\int_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2 dx+$$

$$+\big[2(1-\delta)-\varepsilon_1\big]\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \gamma_\alpha e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |D^\alpha u_{12}|^2\, dxdt+$$

$$+(2(\delta - L\mathrm{mes}_n\Omega - \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}) - \varepsilon_2)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \gamma e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |u_{12}|^2\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\gamma_\alpha} e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} |f_{\alpha,12}|^2\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\,ds} \frac{1}{\gamma} |f_{\widehat{0},12}|^2\, dxdt. \tag{25}$$

Зауважимо, що

$$1 - L\mathrm{mes}_n\Omega - \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} > 0. \tag{26}$$

Справді, нехай $1-L\mathrm{mes}_n\Omega > 0$. Тоді $\omega < 1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. Розглянемо два випадки: 1) $\omega \leqslant 0$, 2) $0 < \omega < 1 - L\mathrm{mes}_n\Omega$. В першому випадку ($\omega \leqslant 0$) маємо $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} \leqslant 0$, а отже, нерівність (26) правильна. В другому випадку маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} = \omega \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} b(x) \leqslant \omega < 1 - L\mathrm{mes}_n\Omega,$$

звідки випливає нерівність (26). Тепер нехай $1 - L\mathrm{mes}_n\Omega \leqslant 0$. Тоді $b_0 > 0$ і $\omega b_0 < 1 - L\mathrm{mes}_n\Omega$. Оскільки

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} = \omega \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x) = \omega b_0,$$

то і в цій ситуації нерівність (26) правильна.

Виберемо у (25) $\delta \in (0,1)$ таке, щоб виконувалась нерівність

$$\delta - L\mathrm{mes}_n\Omega - \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\} > 0,$$

і візьмемо $\varepsilon_1 = 1-\delta$, $\varepsilon_2 = \delta - L\mathrm{mes}_n\Omega - \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}$. У підсумку одержимо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx+$$

$$+C_3\left[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha(t)e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\right]\leqslant$$

$$\leqslant C_4\left[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt\right], \tag{27}$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, що залежать лише від L, $\mathrm{mes}_n\Omega$, b_0 та ω.

З (8) випливає умова

$$e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,t)|^2\,dx\to 0 \quad \text{при} \quad t\to-\infty. \tag{28}$$

Фіксуючи довільно вибране $\tau_2=\tau\in S$, спрямуємо τ_1 до $-\infty$ в (27), враховуючи (14) та (28). У підсумку отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^\tau\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+$$

$$+C_3\left[\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\right]\leqslant \tag{29}$$

$$\leqslant C_4\left[\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt\right]. \tag{30}$$

Звідси легко одержуємо оцінку (15). □

Доведення теореми 1. Доведемо *єдиність* узагальненого розв'язку задачі (1), (2), (8). Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (1), (2), (8). Згідно з лемою 2 (див. (15)) матимемо

$$\iint\limits_Q \gamma(t)e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dxdt\leqslant 0. \tag{31}$$

Звідки випливає, що $u_1(x,t)-u_2(x,t)=0$ для м.в. $(x,t)\in Q$. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2),(8) та його оцінку. Почнемо з апріорної оцінки узагальненого розв'язку. Припустимо, що u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2),(8). Легко бачити, використовуючи умови $(\mathcal{A}_1)$ та $(\mathcal{C}_1)$, що $u=0$ є узагальненим розв'язком задачі (1), (2), (8) при $f_\alpha=0$ ($|\alpha|\in\{0,m\}$), а тому на підставі леми 2 (див. оцінку (15)) при $u_1 = u$, $f_{\alpha,1} = f_\alpha$ та $u_2 = 0, f_{\alpha,2} = 0$ $(|\alpha| \in \{0, m\})$ маємо оцінку (11).

Тепер для кожного $m \in \mathbb{N}$ і α, $|\alpha| \in \{0, m\}$ визначимо $f_{\alpha,m}(\cdot, t) := f_\alpha(\cdot, t)$, якщо $-m < t \leqslant 0$, і $f_{\alpha,m}(\cdot, t) := 0$, якщо $t \leqslant -m$, та розглянемо задачу на знаходження функції $u_m \in L^2(-m, 0; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C([-m, 0]; H_b(\Omega))$, що задовольняє початкову умову

$$u_m(x, -m) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{32}$$

(як елемент простору $C([-m, 0]; H_b(\Omega))$) та рівняння (1) в Q_m в сенсі інтегральної тотожності

$$\iint\limits_{Q_m} \left\{ -bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x, t, \delta u_m) D^\alpha v\varphi + \left(\int\limits_\Omega c(x, y, t, u_m(y, t))\, dy \right) v\varphi \right\} dxdt =$$
$$= \iint\limits_{Q_m} \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_{\alpha,m} D^\alpha v\varphi\, dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega), \quad \forall \varphi \in C_c^1(-m, 0). \tag{33}$$

Існування та єдиність розв'язку цієї задачі легко випливає з відомих результатів (див., наприклад, [16]). Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо нулем u_m на весь циліндр $\overline{Q}$ і залишимо позначення u_m для цього продовження. Зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u_m належить до простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C(S; H_b(\Omega))$ та задовольняє інтегральну тотожність (6) з $f_{\alpha,m}$ замість f_α $(|\alpha| \in \{0, m\})$, тобто

$$\iint\limits_{Q} \left\{ -bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x, t, \delta u_m) D^\alpha v\varphi + \left(\int\limits_\Omega c(x, y, t, u_m(y, t))\, dy \right) v\varphi \right\} dxdt =$$
$$= \iint\limits_{Q} \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_{\alpha,m} D^\alpha v\varphi\, dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{34}$$

Це означає, що u_m є узагальненим розв'язком задачі (1), (2), (8) з $f_{\alpha,m}$ замість f_α $(|\alpha| \in \{0, m\})$. Звідси та доведеного вище, зокрема, випливають (див. (11)) оцінки

$$e^{2\omega\int_0^\tau \gamma(s)\, ds} \|u_m(\cdot, \tau)\|^2_{H_b(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\tau} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\gamma_\alpha} e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\, ds} \|f_\alpha(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\gamma} e^{2\omega\int_0^t \gamma(s)\, ds} \|f_{\widehat{0}}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \Bigg],\ \tau \in S, \tag{35}$$

$$\sum_{|\alpha|\in M} D^\alpha \|u_m\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))} + \|u_m\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \Bigg[\sum_{|\alpha|=m} \|f_\alpha\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))} + \|f_{\widehat{0}}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S;L^2(\Omega))} \Bigg], \tag{36}$$

де $C_5>0$ – стала, яка залежить тільки від $L, \mathrm{mes}_n\Omega, b_0$ і ω.

Нехай k,l – довільні натуральні числа, $l>k$. Застосуємо твердження леми 2 до функцій u_k і u_l. У підсумку отримаємо оцінку, яка аналогічна до (15), а саме,

$$\sup_{\tau\in S} e^{2\omega\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u_k(\cdot,\tau)-u_l(\cdot,\tau)\|^2_{H_b(\Omega)}+ \\ +\sum_{|\alpha|\in M}\|D^\alpha u_k-D^\alpha u_l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))}+\|u_k-u_l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))}\leqslant \\ \leqslant C_6\Bigg[\int_{-l}^{-k}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}\|f_{\alpha,k}(\cdot,t)-f_{\alpha,l}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+ \\ +\int_{-l}^{-k}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds}\|f_{\widehat{0},k}(\cdot,t)-f_{\widehat{0},l}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\Bigg], \tag{37}$$

де $C_6>0$ – стала, яка залежить тільки від $L, \mathrm{mes}_n\Omega, b_0$ і ω. З умови (10) випливає, що права частина нерівності (37) прямує до нуля, коли k та l прямують до $+\infty$. Це означає, що послідовність $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в просторах $L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))$ та $C(S;H_b(\Omega))$, а послідовність $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ $(\alpha\in A)$ – в $L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))$ $(\alpha\in A)$. Оскільки ці простори є повними, то звідси випливає існування функції

$$u\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))\cap L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))\cap C(S;H_b(\Omega))$$

такої, що $D^\alpha u\in L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))$ $(\alpha\in A)$ і

$$u_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u\quad \text{сильно в}\quad C(S;H_b(\Omega)),\ L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))\ \text{та}\ L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)), \tag{38}$$

$$D^\alpha u_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}D^\alpha u\quad \text{сильно в}\quad L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega)),\ \ \alpha\in A. \tag{39}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та нерівності (4) і (36), для будь-яких $t_1,t_2\in S$ отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega|a_\alpha(x,t,\delta u_m)|^2\,dxdt\leqslant C_7\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\Bigg(|h_\alpha|^2\sum_{|\widetilde{\alpha}|\in M}\left|D^{\widetilde{\alpha}}u_m\right|^2+|g_\alpha|^2\Bigg)\,dxdt\leqslant C_8, \tag{40}$$

де C_7,C_8 – додатні сталі, які не залежать від m, але можуть залежати від t_1,t_2.

З (40) отримуємо, що для кожного α, $|\alpha|\in M$, послідовність $\{a_\alpha(u_m)\}$ є обмеженою в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$. Звідси та з (38) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ (яку також позначатимемо через $\{u_m\}_{m=1}^\infty$) і функцій $\chi_\alpha\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$ $(|\alpha|\in M)$ таких, що

$$D^\alpha u_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}D^\alpha u\quad \text{майже всюди на}\quad Q,\quad |\alpha|\in M, \tag{41}$$

$$a_\alpha(u_m)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\chi_\alpha\quad \text{слабко в}\quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)),\quad |\alpha|\in M. \tag{42}$$

З умови $(\mathcal{A}_1)$ та (41) випливає, що

$$a_\alpha(u_m)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}a_\alpha(u)\quad \text{майже всюди на}\quad Q,\quad |\alpha|\in M. \tag{43}$$

На підставі [17, лема 1.3], з (42) і (43) отримуємо, що $\chi_\alpha = a_\alpha(u)$ $(|\alpha| \in M)$, тобто

$$a_\alpha(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha(u) \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)), \quad |\alpha| \in M. \tag{44}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, для довільних $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ встановлюємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left| \int\limits_\Omega c(x,y,t,u_m(y,t))\,dy - \int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy \right|^2 dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left| \int\limits_\Omega [c(x,y,t,u_m(y,t)) - c(x,y,t,u(y,t))]\,dy \right|^2 dxdt \leqslant$$
$$\leqslant L^2 \mathrm{mes}_n\Omega \int\limits_{t_1}^{t_2} \gamma^2(t) \left(\int\limits_\Omega |u_m(y,t) - u(y,t)|\,dy \right)^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant L^2(\mathrm{mes}_n\Omega)^2 \max_{t\in[t_1,t_2]} \gamma^2(t) \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |u_m - u|^2\,dxdt. \tag{45}$$

З (38) матимемо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |u_m - u|^2\,dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{46}$$

На підставі (45) і (46) отримуємо

$$\int\limits_\Omega c(\circ,y,\cdot,u_m(y,\cdot))\,dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_\Omega c(\circ,y,\cdot,u(y,\cdot))\,dy \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)). \tag{47}$$

Тепер доведемо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1),(2),(8). Для цього спрямуємо m до $+\infty$ в тотожності (34), враховуючи (38), (44), (47) та означення функцій $f_{\alpha,m}$ $(|\alpha| \in \{0,m\})$. У підсумку отримаємо тотожність (6). Тепер, врахувавши (38), спрямуємо m до $+\infty$ в (35). З отриманої нерівності та умови (10) одержуємо виконання умови (8). Отож, ми довели, що u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2),(8). $\square$

Список використаної літератури

1. R. E. Showalter, *Singular nonlinear evolution equations*, Rocky Mt. J. Math. **10** (1980), no. 3, 499–507. DOI: 10.1216/RMJ-1980-10-3-499
2. R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* Amer. Math. Soc., **49**, Providence, 1997.
3. M. M. Bokalo, O. M. Buhrii, and R. A. Mashiyev, *Unique solvability of initial boundary value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*, J. Nonlinear Evol. Equ. Appl. **2013** (2014), no. 6, 67–87.
4. M. M. Bokalo, *Almost periodic solutions of anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*, Electron. J. Diff. Equ. **2014** (2014), no. 169, 1–13.

5. M. M. Bokalo and I. V. Skira, *Almost periodic solutions for nonlinear integro-differential elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearty*, Int. J. Evol. Equ. **10** (2017), no. 3-4, 297–314.
6. A. Tychonoff, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Матем. сб. **42** (1935), no. 2, 199–216.
7. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений*, УМН **31** (1976), no. 6(192), 142–166; **English version:** O. A. Oleĭnik and G. A. Iosif'yan, *An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains* Russ. Math. Surv. **31** (1976), no. 6, 153–178. DOI: 10.1070/RM1976v031n06ABEH001583
8. П. Я. Пукач, *О задаче без начальных условий для одной нелинейной вырождающейся параболической системы*, Укр. мат. журн. **46** (1994), no. 4, 454–456; **English version:** P. Ya. Pukach, *On the problem without initial conditions for a nonlinear degenerating parabolic system*, Ukr. Math. J. **46** (1994), no. 4, 484–487. DOI: 10.1007/BF01060422
9. С. П. Лавренюк, М. Б. Пташник, *Задача без начальных условий для нелинейной псевдопараболическои системы*, Дифференц. уравнения **36** (2000), no. 5, 667–673; **English version:** S. P. Lavrenyuk and M. B. Ptashnik, *Problem without initial conditions for a nonlinear pseudoparabolic system*, Differ. Equ. **36** (2000), no. 5, 739–748. DOI: 10.1007/BF02754233
10. M. Bokalo and A. Lorenzi, *Linear evolution first-order problems without initial conditions.* Milan J. Math. **77** (2009), 437–494. DOI: 10.1007/s00032-009-0107-6
11. Н. П. Процах, *Задача без початкових умов для нелінійного ультрапараболічного рівняння з виродженням*, Мат. методи фіз.-мех. поля **52** (2009), no. 1, 7–19; **English version**: N. P. Protsakh, *A problem without initial conditions for a nonlinear ultraparabolic equation with degeneration*, J. Math. Sci. **168** (2010), no. 4, 505–522. DOI: 10.1007/s10958-010-0003-1
12. O. Buhrii and N. Buhrii, *On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity*, New Trends in Mathematical Sciences **5** (2017), no. 3, 128–153. DOI: 10.20852/ntmsci.2017.191
13. O. Buhrii and N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Math. **15** (2017), 859-–883. DOI: 10.1515/math-2017-0069
14. M. Loayza, *Asymptotic behavior of solutions to parabolic problems with nonlinear nonlocal terms*, Electron. J. Diff. Equ. **2013** (2013), no. 228, 1–12.
15. R. E. Showalter, *Hilbert space methods for partial differential equations*, Monographs and Studies in Mathematics (Monographs in differential equations), Vol. **1**, Pitman, London-San Francisco, Calif.-Melbourne, 1977.
16. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, пер. с нем., Мир, Москва, 1978.
17. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires.* Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

Стаття: надійшла до редколегії 23.11.2018
доопрацьована 04.12.2018
прийнята до друку 26.12.2018

WELL-POSEDNESS OF THE FOURIER PROBLEM FOR HIGHER-ORDER WEAKLY NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

Mykola BOKALO, Iryna SKIRA

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com

The existence and uniqueness of a weak solution of the Fourier problem for nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems are investigated. In addition, some properties of the weak solutions of the Fourier problem are considered.

Key words: Fourier problem, problem without initial condition, degenarated parabolic equation, elliptic-parabolic equation, integro-differential equation, functional-differential equation.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 107–119
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 107–119
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.107-119

УДК 517.95

ON INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL STOKES SYSTEM

Oleh BUHRII, Mariana KHOMA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua, marianna.khoma88@gmail.com

Some nonlinear integro-differential Stokes system is considered. The initial-boundary value problem for this system is investigated and the existence and uniqueness of the weak solution for the problem is proved.

Key words: evolution Stokes system, integro-differential equation, initial-boundary value problem, weak solution.

1. Introduction

Let $n \in \mathbb{N}$ and $T > 0$ be fixed numbers, $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with the smooth boundary $\partial\Omega$, $Q_{0,T} := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_{0,T} := \partial\Omega \times (0,T)$, $\Omega_\tau := \{(x,t) \mid x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. We seek a weak solution $\{u, \pi\}$ of the problem

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t) u_{x_i}\Big)_{x_j} + G(x,t)|u|^{q-2}u + \int_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y) u(y,t)\, dy + \\ + \nabla\pi(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{2}$$

$$\int_\Omega \pi(x,t)\, dx = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35D30, 76D07, 47G20

Here $u = (u_1, \dots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$ is the velocity field, $|u| = (|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2)^{1/2}$, $\operatorname{div} u = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}$, $\pi : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ is the pressure, $\nabla\pi = \left(\dfrac{\partial \pi}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial \pi}{\partial x_n}\right)$, and $q > 1$ is some number which is called an exponent of the nonlinearity of system (1).

The linearized version of the Navier-Stokes system is called the Stokes system. It is well known that these equations describe the time evolution of the solutions to the mathematical models of the viscous incompressible fluids. For more details about the physical meaning of the Navier-Stokes and Stokes systems see [1], [2], etc. The initial-boundary value problem for the Stokes system is considered in [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] (see also the references given there).

To take into account of some elasticity aspect of the non-Newtonian viscous fluids, the well-known classical Navier-Stokes equations are perturbed by an integral term which means the past history of the fluid (see [10]). The problems for the Navier-Stokes system with the integral memory term of the type

$$u_t + \sum_{k=1}^{n} v_k v_{x_k} - \alpha\,\Delta u - \int\limits_0^t K_1(t,\tau)\Delta u\,d\tau - \int\limits_\Omega K_2(t,y)\Delta u\,dy + \nabla\pi = F,$$

where Δu is a Laplacian, is considered in [11] if either $K_2 \equiv 0$, or $\alpha = 0$ and $K_1 \equiv 0$.

We perturb the classical Stokes equations by the monotonous nonlinear term and the linear integral term. We seek a weak solution to the initial-boundary value problem (1)-(5). As we know this problem is not studied yet. The paper is organized as follows. In Section 2, we formulate the considered problem and main results. The auxiliary statements are given in Section 3. Finally, in Section 4 we prove the main results.

2. Statement of problem and formulation of main results

Let $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ be a scalar product in the space $\mathbb{R}^n$,

$$(u,v)_\Omega := \int\limits_\Omega (u(x), v(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx, \quad u = (u_1,\dots,u_n),\ v = (v_1,\dots,v_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Take $s \in \mathbb{N}$. Let us consider the Sobolev space $[H^s(\Omega)]^n$ with the scalar product

$$((u,v))_s := \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H^s(\Omega)}, \quad u,v \in [H^s(\Omega)]^n. \tag{7}$$

Let $C_{\rm div} := \{u \in [C_0^\infty(\Omega)]^n \ \mid \ \operatorname{div} u = 0\}$,

$$H \ \text{ is the closure of } \ C_{\rm div} \ \text{ in } \ [L^2(\Omega)]^n, \tag{8}$$

$$Z_s \ \text{ is the closure of } \ C_{\rm div} \ \text{ in } \ [H^s(\Omega)]^n, \tag{9}$$

where $||h; H|| := ||h; [L^2(\Omega)]^n|| = \sum_{l=1}^n ||h_l; L^2(\Omega)||, \quad h = (h_1,\dots,h_n) \in H$, and $||z; Z_s|| := \sqrt{((z,z))_s}, \quad z = (z_1,\dots,z_n) \in Z_s$.

By definition, put

$$V := Z_1 \cap [L^q(\Omega)]^n, \quad U(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^q(Q_{0,T})]^n.$$

Assume that the following conditions are fulfilled.

(A): A_{ij} is an n-order square matrix with the elements from $L^\infty(Q_{0,T})$; $A_{ij}=A_{ji}$ $(i,j=\overline{1,n})$; for a.e. $(x,t)\in Q_{0,T}$ and for every $\xi^1,\dots,\xi^n\in\mathbb{R}^n$, we get

$$a_0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2\le\sum_{i,j=1}^n\Big(A_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\Big)_{\mathbb{R}^n}\le a^0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2\quad(0<a_0\le a^0<+\infty);$$

(G): G is an n-order square matrix, $G=diag(g_1,\dots,g_n)$, $g_l\in L^\infty(Q_{0,T})$, and $0<g_0\le g_l(x,t)\le g^0<+\infty$ for a.e. $(x,t)\in Q_{0,T}$, where $l=\overline{1,n}$;

(E): $\mathfrak{Z}$ is an n-order square matrix with the elements from $L^\infty(Q_{0,T}\times\Omega)$;

(F): $F\in L^2(0,T;H)$;

(U): $u_0\in H$.

We define the operators $A(t):V\to V^*$, $\mathcal{A}:U(Q_{0,T})\to[U(Q_{0,T})]^*$, $E(t):[L^2(\Omega)]^n\to[L^2(\Omega)]^n$, and $\mathtt{E}:[L^2(Q_{0,T})]^n\to[L^2(Q_{0,T})]^n$ by the rules:

$$\langle A(t)z,w\rangle_V:=\int\limits_\Omega\Bigg[\sum_{i,j=1}^n\Big(A_{ij}(x,t)z_{x_i}(x),w_{x_j}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}+$$

$$+\Big(G(x,t)|z(x)|^{q-2}z(x),w(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}\Bigg]\,dx,\quad z,w\in V,\quad t\in(0,T),\tag{10}$$

$$\langle\mathcal{A}u,v\rangle_{U(Q_{0,T})}:=\int\limits_0^T\langle A(t)u(t),v(t)\rangle_V\,dt,\quad u,v\in U(Q_{0,T}),\tag{11}$$

$$(E(t)z)(x):=\int\limits_\Omega\mathfrak{Z}(x,t,y)z(y)\,dy,\quad x\in\Omega,\quad z\in[L^2(\Omega)]^n,\quad t\in(0,T),\tag{12}$$

$$(\mathtt{E}u)(x,t):=\big(E(t)u(t)\big)(x)=\int\limits_\Omega\mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\,dy,\ \ (x,t)\in Q_{0,T},\ u\in[L^2(Q_{0,T})]^n.\tag{13}$$

Let

$$q>1,\qquad s\in\mathbb{N},\qquad s\ge\max\left\{2,\ \frac{n}{2},\ n\left(\frac12-\frac1q\right)\right\},\qquad h=\min\left\{2,\frac{q}{q-1}\right\}.\tag{14}$$

Note that (14) implies that $Z_s\ \overline{\circlearrowleft}\ (Z_1\cap[L^q(\Omega)]^n)\ \overline{\circlearrowleft}\ V$.

Definition 1. A pair of the functions $\{u,\pi\}$ is called a *weak solution* of problem (1)–(5), if $u\in U(Q_{0,T})\cap C([0,T];Z_s^*)$, $u_t\in[U(Q_{0,T})]^*$, $\pi\in L^h(Q_{0,T})$, u satisfies (5) in Z_s^*, for $v\in V$ and $t\in(0,T)$ we have

$$\langle u_t(t),v\rangle_V+\langle A(t)u(t),v\rangle_V+(E(t)u(t),v)_\Omega=(F(t),v)_\Omega,\tag{15}$$

π satisfies (1) in $D^*(Q_{0,T})$, and π satisfies (3) in $D^*(0,T)$.

Theorem 1 (existence)**.** *Let conditions* **(A)–(U)** *hold. Then problem (1)–(5) has a weak solution $\{u,\pi\}$. Moreover, $u\in L^\infty(0,T;H)$ and $\nabla\pi\in L^h(0,T;[W^{-1,s}(\Omega)]^n)$.*

Theorem 2 (uniqueness)**.** *Let conditions* **(A)–(E)** *hold. Then, problem (1)–(5) cannot have more than one weak solution.*

3. Auxiliary statements

For Banach spaces X and Y the notation $X \circlearrowleft Y$ means the continuous embedding; the notation $X \overline{\circlearrowleft} Y$ means a continuous and dense embedding; the notation $X \overset{K}{\subset} Y$ means a compact embedding.

3.1. **Projection operator.** Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space with a scalar product $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{V}$ be a reflexive separable Banach space, $\mathcal{V} \overline{\circlearrowleft} \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \overline{\circlearrowleft} \mathcal{V}^*$, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ be an orthonormal basis for the space $\mathcal{H}$, $m \in \mathbb{N}$ be a fixed number, and $\mathfrak{M}$ be the set of all linear combinations of the elements from $\{w^1,\ldots,w^m\}$. Define a unique orthogonal projection $P_m : \mathcal{H} \to \mathfrak{M}$ by the rule (see [12, p. 527])

$$P_m h := \sum_{j=1}^{m} (h, w^j)_{\mathcal{H}}\, w^j, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{16}$$

This is a linear self-adjoint continuous operator (see Theorem 7.3.6 [12, p. 515]). If $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, then let us define an operator $\widehat{P}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (not necessarily self-adjoint) by the rule

$$\widehat{P}_m v := P_m v \quad \text{for every} \quad v \in \mathcal{V}. \tag{17}$$

For a conjugate operator $\widehat{P}^*_m : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*$ we have $\widehat{P}^*_m(\mathcal{V}^*) \subset \mathcal{V}$ (see [13, p. 865]).

Proposition 1 (Lemma 3.9 [13, p. 865-866])**.** *Assume that $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ is an orthonormal basis for the space $\mathcal{H}$ such that $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, $\psi^m_1,\ldots,\psi^m_m \in \mathbb{R}$ are some numbers, and $F \in \mathcal{V}^*$. Then $z^m := \sum_{s=1}^{m} \psi^m_s w^s \in \mathcal{V}$ satisfies*

$$\begin{cases} \langle z^m, w^1\rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^1\rangle_{\mathcal{V}}, \\ \quad\vdots \\ \langle z^m, w^m\rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^m\rangle_{\mathcal{V}}, \end{cases} \tag{18}$$

if the following equality holds

$$z^m = \widehat{P}^*_m F \quad \text{in} \quad \mathcal{V}^*. \tag{19}$$

Suppose that H and Z_s are determined from (8) and (9) respectively, where $s \in \mathbb{N}$. From [14, Ch. 1, §6.1], we obtain the embeddings

$$Z_s \overline{\circlearrowleft} Z_1 \overline{\circlearrowleft} H \cong H^* \overline{\circlearrowleft} Z^*_1 \overline{\circlearrowleft} Z^*_s.$$

Moreover, $Z_s \subset [H^s_0(\Omega)]^n$. Let $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ be a set of all eigenfunctions of the problem

$$((w,v))_s = \lambda\,(w,v)_H \quad \forall\, v \in Z_s, \tag{20}$$

$\{\lambda_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0} := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0\}$ be a set of the corresponding eigenvalues. For the sake of convenience we have assumed that $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ is an orthonormal set in H.

Proposition 2 (see [14, Ch. 1, §6.3])**.** *If $s \in \mathbb{N}$ and $s \geq \frac{n}{2}$, then the set $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ of all eigenfunction of problem (20) is a basis for the space Z_s.*

The following Lemma is needed for the sequel.

Lemma 1. *Suppose that P_m and $\widehat{P}_m$ are determined from (16) and (17) respectively, where $\mathcal{H} = H$, $\mathcal{V} = Z_s$, $s \in \mathbb{N}$, and $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ is an orthonormal basis for the space H that consists of all eigenfunctions of problem (20). Then, for every $w \in L^r(0,T;Z_s^*)$ and $r > 1$, we have the inequality*

$$||\widehat{P}_m^* w; L^r(0,T;Z_s^*)|| \le ||w; L^r(0,T;Z_s^*)||. \tag{21}$$

Proof. From [14, Ch. 1, §6.4.3], we get that

$$||\widehat{P}_m z||_{Z_s} \le ||z||_{Z_s}, \quad z \in Z_s. \tag{22}$$

Since $||D^*||_{\mathcal{L}(B^*,A^*)} = ||D||_{\mathcal{L}(A,B)}$ for every $D \in \mathcal{L}(A,B)$ (see [15, p. 231]), using (22), we have

$$||\widehat{P}_m^* v||_{Z_s^*} \le ||v||_{Z_s^*}, \quad v \in Z_s^*. \tag{23}$$

Hence, $\int_0^T ||\widehat{P}_m^* w(t)||_{Z_s^*}^r \, dt \le \int_0^T ||w(t)||_{Z_s^*}^r \, dt$ and so inequality (21) holds. □

0.1. Cauchy's problem for system of ordinary differential equations. Take $\ell \in \mathbb{N}$ and $Q = (0,T) \times \mathbb{R}^\ell$. In this section we seek a weak solution $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}^\ell$ of the problem

$$\varphi'(t) + L(t,\varphi(t)) = M(t), \quad t \in [0,T], \qquad \varphi(0) = \varphi^0, \tag{24}$$

where $M : [0,T] \to \mathbb{R}^\ell$ and $L : Q \to \mathbb{R}^\ell$ are some functions (for the sake of convenience we have assumed that $L(t,0) = 0$ for every $t \in [0,T]$), and $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_\ell^0) \in \mathbb{R}^\ell$.

Proposition 3 (the Carathéodory-LaSalle Theorem, see Theorem 3.24 [13, p. 872]). *Suppose that $p \ge 2$, the function $L : Q \to \mathbb{R}^\ell$ satisfies L^p-Carathéodory condition, $M \in L^p(0,T;\mathbb{R}^\ell)$, and $\varphi^0 \in \mathbb{R}^\ell$. If there exist nonnegative functions $\alpha, \beta \in L^1(0,T)$ such that for every $\xi \in \mathbb{R}^\ell$ and for a.e. $t \in [0,T]$ the inequality*

$$(L(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^\ell} \ge -\alpha(t)|\xi|^2 - \beta(t) \tag{25}$$

holds, then problem (24) has a global weak solution $\varphi \in W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^\ell)$.

3.2. **Additional statements.** Let $\mathbb{Z}_{\ge -1} := \{s \in \mathbb{Z} \mid s \ge -1\}$. The following Propositions are needed for the sequel.

Proposition 4 (the generalized De Rham Theorem, see Theorem 4.1 [16], Remark 4.3 [16], and Lemma 2 [17]). *Suppose that Ω be an open bounded connected and Lipschitz subset of $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_{\ge -1}$, $h_1, h_2 \in [1,\infty]$, and $\mathcal{F} \in W^{s_1,h_1}(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)$. Then, if*

$$\langle \mathcal{F}(\cdot), v\rangle_{[D(\Omega)]^n} = 0 \quad in \quad D^*(0,T) \tag{26}$$

for all $v \in \mathcal{V} = \{v \in [C_0^\infty(\Omega)]^n \mid \operatorname{div} v = 0\}$, then there exists a unique

$$\pi \in W^{s_1,h_1}(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega)) \tag{27}$$

such that

$$\nabla \pi = \mathcal{F} \quad in \quad [D^*(Q_{0,T})]^n, \tag{28}$$

$$\int_\Omega \pi(\cdot)\, dx = 0 \quad in \quad D^*(0,T). \tag{29}$$

Moreover, there exists a positive number C_1 (independent of $\mathcal{F}, \pi$) such that

$$||\pi; W^{s_1,h_1}(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega))|| \le C_1 ||\mathcal{F}; W^{s_1,h_1}(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)||. \tag{30}$$

Proposition 5 (the Aubin theorem, see [18] and [19, p. 393])**.** *If $s, h \in (1, \infty)$ are fixed numbers, $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ are Banach spaces, and $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$, then*

$$\{u \in L^s(0,T;\mathcal{W}) \ \mid \ u_t \in L^h(0,T;\mathcal{B})\} \overset{K}{\subset} [L^s(0,T;\mathcal{L}) \cap C([0,T];\mathcal{B})].$$

Proposition 6 (Lemma 1.18 [20, p. 39])**.** *If $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ in $L^p(Q_{0,T})$ $(1 \le p \le \infty)$, then there exists a subsequence (we call it $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ again) such that $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ a.e. in $Q_{0,T}$.*

It is clear that if $u = (u_1, \dots, u_n) \in [L^2(\mathcal{O})]^n$, where $\mathcal{O} = \Omega$ or $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, then

$$|| \, |u|; L^2(\mathcal{O})||^2 = \int\limits_{\mathcal{O}} |u|^2 \, dy = \sum_{l=1}^{n} ||u_l; L^2(\mathcal{O})||^2 \le n||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||^2,$$

and so

$$|| \, |u|; L^2(\mathcal{O})|| \le \sqrt{n}||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||. \tag{31}$$

Lemma 2. *If condition* **(E)** *holds, then the operators $\mathtt{E} : [L^2(Q_{0,T})]^n \to [L^2(Q_{0,T})]^n$ and $E(t) : [L^2(\Omega)]^n \to [L^2(\Omega)]^n$, where $t \in (0,T)$, are linear bounded and continuous. Moreover, there exists a constant $E^0 > 0$ such that for every $z \in [L^2(\Omega)]^n$, $t \in (0,T)$, $u \in [L^2(Q_{0,T})]^n$, and $\tau \in (0,T]$, the following estimates are true:*

$$|| \, |E(t)z|; L^2(\Omega)|| \le E^0 || \, |z|; L^2(\Omega)|| \le \sqrt{n} E^0 ||z; [L^2(\Omega)]^n||; \tag{32}$$

$$|| \, |\mathtt{E}u|; L^2(Q_{0,\tau})|| \le E^0 || \, |u|; L^2(Q_{0,\tau})|| \le \sqrt{n} E^0 ||u; [L^2(Q_{0,\tau})]^n||. \tag{33}$$

Proof. It follows from the Cauchy-Bunyakowski-Schwarz inequality and **(E)** that

$$|| \, |E(t)z|; L^2(\Omega)||^2 = \int\limits_{\Omega} |(E(t)z)(x)|^2 \, dx = \int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y) z(y) \, dy \right|^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{\Omega} ||\mathfrak{Z}(x,t,y)||_n \cdot |z(y)| \, dy \right|^2 dx \le \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} ||\mathfrak{Z}(x,t,y)||_n^2 \, dy \right) \left(\int\limits_{\Omega} |z(y)|^2 \, dy \right) dx \le$$

$$\le |E^0|^2 \int\limits_{\Omega} |z(y)|^2 \, dy = |E^0|^2 || \, |z|; L^2(\Omega)||^2,$$

where $E^0 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,T)} \left(\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{\Omega} ||\mathfrak{Z}(x,t,y)||_n^2 \, dy \right)^{1/2}$ and $|| \cdot ||_n$ means a norm of the square matrix. Thus, using (31), we get (32). Estimate (33) is proved in a similar way. □

Lemma 3. *Let conditions* **(A)**–**(E)** *hold, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset V$, $m \in \mathbb{N}$, $L = (L_1, L_2, \dots, L_m)$,*

$$L_\mu(t,\xi) = \langle A(t)z^m, w^\mu \rangle_V + (E(t)z^m, w^\mu)_\Omega, \quad \mu = \overline{1,m}, \quad t \in (0,T), \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

and $z^m(x) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \xi_\mu w^\mu(x)$ for $x \in \Omega$. Then

$$\Big(L(t,\xi), \xi\Big)_{\mathbb{R}^m} \ge \int\limits_{\Omega} \left[a_0 \sum_{i=1}^{n} |z^m_{x_i}|^2 + g_0 |z^m|^q - E^0 |z^m|^2 \right] dx, \quad t \in (0,T), \quad \xi \in \mathbb{R}^m. \tag{34}$$

Proof. It is clear that
$$(L(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^m} = \langle A(t)z^m, z^m\rangle_V + (E(t)z^m, z^m)_\Omega. \tag{35}$$
If we use conditions **(A)** and **(G)**, then we get
$$\langle A(t)z^m, z^m\rangle_V = \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{i,j=1}^n \Big(A_{ij}(x,t)z^m_{x_i}(x), z^m_{x_j}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+\Big(G(x,t)|z^m(x)|^{q-2}z^m(x), z^m(x)\Big)_{\mathbb{R}^n}\Bigg]\, dx \ge \int\limits_\Omega \Bigg[a_0 \sum_{i=1}^n |z^m_{x_i}|^2 + g_0|z^m|^q\Bigg]\, dx. \tag{36}$$
Using (31) and (32), we obtain
$$\Big|(E(t)z^m, z^m)_\Omega\Big| = \Bigg|\int\limits_\Omega (E(t)z^m, z^m)_{\mathbb{R}^n}\, dx\Bigg| \le \int\limits_\Omega |E(t)z^m|\cdot|z^m|\, dx \le$$
$$\le ||\, |Ez^m|; L^2(\Omega)|| \cdot ||\, |z^m|; L^2(\Omega)|| \le E^0||\, |z^m|; L^2(\Omega)||^2 = E^0 \int\limits_\Omega |z^m|^2\, dx. \tag{37}$$
Thus, (35)-(37) imply that (34) holds. □

4. Proofs of main results

Proof of Theorem 1. The solution will be constructed via Faedo-Galerkin's method.

Step 1 (construction of approximation). Let $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ and Z_s be taken from Proposition 2, $s \in \mathbb{N}$ satisfies (14). By definition, put
$$u^m(x,t) := \sum_{\mu=1}^m \varphi^m_\mu(t) w^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \quad m \in \mathbb{N},$$
where the unknown function $\varphi := (\varphi^m_1, \dots, \varphi^m_m)$ satisfies
$$(u^m_t(t), w^\mu)_\Omega + \langle A(t)u^m(t), w^\mu\rangle_V + (E(t)u(t), w^\mu)_\Omega = (F(t), w^\mu)_\Omega,\ t\in(0,T),\ \mu = \overline{1,m}, \tag{38}$$
$$\varphi^m_1(0) = \alpha^m_1, \quad \dots, \quad \varphi^m_m(0) = \alpha^m_m. \tag{39}$$
Here the numbers $\alpha^m_1, \dots, \alpha^m_m \in \mathbb{R}$ are chosen so that, $u^m_0 \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0$ strongly in H, where $u^m_0(x) := \sum\limits_{j=1}^m \alpha^m_j w^j(x), \quad x \in \Omega$. It is clear that the condition
$$u^m(0) = u^m_0 \tag{40}$$
holds. Let us show that the mentioned function φ exists. Let L be a vector-valued function from Lemma 3. Then Cauchy problem (38)-(39) takes form (24) if $M(t) = (\,(F(t), w^1)_\Omega, \dots, (F(t), w^m)_\Omega), \quad t \in (0,T)$. It follows from condition **(F)** that $M \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Conditions **(A)**-**(E)** yield that the function L satisfies L^∞-Carathéodory condition.

Using estimate (34), conditions $a_0 > 0$ and $g_0 > 0$, and the orthogonality of the basis $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ in H, we receive:
$$\Big(L(t,\varphi^m), \varphi^m\Big)_{\mathbb{R}^m} \ge -E^0 \int\limits_{\Omega_t} |u^m|^2\, dx = -E^0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{\mu=1}^m |\varphi^m_\mu|^2 |w^\mu|^2\, dx \ge -C_2|\varphi^m|^2,$$

where $C_2 > 0$ is independent of t, φ^m. Then estimate (25) with $\alpha(t) \equiv C_2$ and $\beta(t) \equiv 0$ is performed, and from the Carathéodory-LaSalle theorem (see Proposition 3) we have that $\varphi \in H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$ is a solution of problem (24) and therefore problem (38)-(39).

Step 2 (getting of estimates). Multipling the μ-th equation of (38) by $\varphi^m_\mu(t)$ and summing $\mu = \overline{1,m}$, we get:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\Big(u^m_t(t), w^\mu\varphi^m_\mu(t)\Big)_\Omega + \sum_{\mu=1}^{m}\langle A(t)u^m(t), w^\mu\varphi^m_\mu(t)\rangle_V + \sum_{\mu=1}^{m}\Big(E(t)u^m(t), w^\mu\varphi^m_\mu(t)\Big)_\Omega = $$
$$= \sum_{\mu=1}^{m}\Big(F(t), w^\mu\varphi^m_\mu(t)\Big)_\Omega, \quad t \in (0,T).$$

After integrating for $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$ and some transformation, we receive:

$$\int_{Q_{0,\tau}} \left[(u^m_t, u^m)_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u^m_{x_i}, u^m_{x_j})_{\mathbb{R}^n} + (G|u^m|^{q-2}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n} + (\mathtt{E}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\right] dxdt =$$
$$= \int_{Q_{0,\tau}} (F, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{41}$$

Clearly, using (40), we obtain:

$$\int_{Q_{0,\tau}} (u^m_t, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt = \int_{Q_{0,\tau}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|u^m|^2)\, dxdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |u^m|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u^m_0|^2\, dx. \tag{42}$$

Using condition **(A)**, we get the following estimate:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}u^m_{x_i}, u^m_{x_j}\Big)_{\mathbb{R}^n} \geq a_0\sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}|^2. \tag{43}$$

It follows from condition **(G)** that

$$\Big(G|u^m|^{q-2}u^m, u^m\Big)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{l=1}^{n} g_l(x,t)|u^m|^{q-2}|u^m_l|^2 \geq g_0\sum_{l=1}^{n}|u^m|^{q-2}|u^m_l|^2 = g_0|u^m|^q. \tag{44}$$

Using the Cauchy-Bunyakowski-Schwarz inequality and (33), we obtain:

$$\left|\int_{Q_{0,\tau}} (\mathtt{E}u^m, u^m)_{\mathbb{R}^n}\, dxdt\right| \leq \int_{Q_{0,\tau}} |\mathtt{E}u^m|\cdot|u^m|\, dxdt \leq ||\, |\mathtt{E}u^m|; L^2(Q_{0,\tau})||\cdot||\, |u^m|; L^2(Q_{0,\tau})|| \leq$$
$$\leq E^0||\, |u^m|; L^2(Q_{0,\tau})||^2 = E^0\int_{Q_{0,\tau}} |u^m|^2\, dxdt. \tag{45}$$

Clearly,

$$|(F, u^m)_{\mathbb{R}^n}| \leq |F|\cdot|u^m| \leq \frac{|F|^2}{2} + \frac{|u^m|^2}{2}. \tag{46}$$

Using (42)-(46), from equality (41), we obtain the following estimate:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2\, dx + \int_{Q_{0,\tau}} \left[a_0\sum_{l=1}^{n}|u^m_{x_l}|^2 + g_0|u^m|^q\right] dxdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_0^m|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |F|^2\, dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left(\frac{1}{2} + E^0\right) |u^m|^2\, dxdt. \tag{47}$$

Take $y(t) := \int_{\Omega} |u^m(x,t)|^2\, dx, \quad t \in [0,T]$. Then, from (47), we get an estimate:

$$\frac{1}{2}\, y(\tau) \leq C_3 + \left(\frac{1}{2} + E^0\right) \int\limits_0^{\tau} y(t)\, dt, \quad \tau \in [0,T].$$

Therefore, the Gronwall lemma implies that $y(\tau) \leq C_4$, and so

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2\, dx \leq C_4, \quad \tau \in (0,T]. \tag{48}$$

It follows from (47) and (48) that

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^m|^2 + |u|^2 + |u|^q\right] dxdt \leq C_5, \quad \tau \in (0,T], \tag{49}$$

This estimate yields that

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left|G|u^m|^{q-2}u^m\right|^{q'} dxdt \leq C_6 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^q\, dxdt \leq C_7. \tag{50}$$

From (33), (48), and (49) it follows the estimates

$$||u^m; L^{\infty}(0,T,H)|| + ||u^m; U(Q_{0,T})|| \leq C_8, \tag{51}$$

$$||\mathtt{E}u^m; L^2(0,T;H)|| \leq C_9, \qquad ||\mathtt{E}u^m; [L^2(Q_{0,T})]^n|| \leq C_8, \tag{52}$$

Here the constants $C_3, \ldots, C_8$ are independent of m.

By (50)-(52) we have existence of the subsequence $\{u^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ such that

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *-\text{weakly in} \quad L^{\infty}(0,T;H) \quad \text{and weakly in} \quad U(Q_{0,T}),$$

$$G|u^m|^{q-2}u^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1 \quad \text{weakly in} \quad [L^{q'}(Q_{0,T})]^n,$$

$$\mathtt{E}u^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_2 \quad \text{weakly in} \quad [L^2(Q_{0,T})]^n.$$

Step 3 (additional estimates). Estimate (49) implies the inequality

$$||\mathcal{A}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \leq C_{10}. \tag{53}$$

Since s satisfies (14), from the construction of the space $U(Q_{0,T})$, we obtain:

$$U(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowleft} L^2(0,T;H) \overline{\circlearrowleft} [U(Q_{0,T})]^*, \tag{54}$$

$$L^{\max\{2,q\}}(0,T;Z_s) \overline{\circlearrowleft} L^{\max\{2,q\}}(0,T;V) \overline{\circlearrowleft} U(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowleft} L^{\min\{2,q\}}(0,T;V). \tag{55}$$

Therefore,

$$[U(Q_{0,T})]^* \overline{\circlearrowleft} L^r(0,T;V^*) \overline{\circlearrowleft} L^r(0,T;Z_s^*), \qquad r = \frac{\max\{2,q\}}{\max\{2,q\}-1}. \tag{56}$$

Using (55) and (51), we obtain:

$$||u^m; L^{\min\{2,q\}}(0,T;V)|| \leq C_{11}||u; U(Q_{0,T})|| \leq C_{12}. \tag{57}$$

Using Proposition 1 and notation (10)-(13), (16), and (17), in same way as in [14, Ch. 1, §5.3], we rewrite (38) as

$$u_t^m = \widehat{P}_m^*(F - \mathcal{A}u^m - \mathtt{E}u^m). \tag{58}$$

Thus, from (58), estimate (21), embeddings (56) and (54), and estimates (52)-(53), we get:

$$||u_t^m; L^r(0,T;Z_s^*)|| = ||\widehat{P}_m^*(F - \mathcal{A}u^m - \mathtt{E}u^m); L^r(0,T;Z_s^*)|| \le$$

$$\le ||F - \mathcal{A}u^m - \mathtt{E}u^m; L^r(0,T;Z_s^*)|| \le C_{13}||F - \mathcal{A}u^m - \mathtt{E}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \le$$

$$\le C_{14}\Big(||F; L^2(0,T;H)|| + ||\mathcal{A}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| + ||\mathtt{E}u^m; L^2(0,T;H)||\Big) \le C_{15}. \tag{59}$$

Here the constants $C_{10}, \ldots, C_{15} > 0$ are independent of m.

Since $V \overset{K}{\subset} H \circlearrowleft Z_s^*$, from (57), (59), the Aubin theorem (see Proposition 5), and Proposition 6, we obtain:

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{in} \quad L^{\min\{2,q\}}(0,T;H) \cap C([0,T];Z_s^*),$$

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{almost everywhere in} \quad Q_{0,T}.$$

Therefore, (5) holds and $\chi_1 = G|u|^{q-2}u$. Since $\mathtt{E}$ is a linear operator, we get $\chi_2 = \mathtt{E}u$.

Step 4 (passing to the limit). Take $\psi \in C^1([0,T])$ such that $\psi(T) = 0$. When we multiply equality (38) by $\psi(t)$, integrate for $t \in (0,T)$, and integrate the first term by parts, we obtain the following:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Bigg[-\Big(u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi_t + \sum_{i,j=1}^n \Big(A_{ij}u_{x_i}^m, w_{x_j}^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi + \Big(G|u^m|^{q-2}u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi +$$

$$+\Big(\mathtt{E}u^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\Bigg]dxdt = \int\limits_\Omega \Big(u_0^m, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi(0)\,dx + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big(F, w^\mu\Big)_{\mathbb{R}^n}\psi\,dxdt.$$

Taking $m = m_k$ and letting $k \to \infty$, due to arbitrariness of ψ, we get (15) and

$$\langle \mathcal{F}, z\rangle_{U(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall\, z \in U(Q_{0,T}), \tag{60}$$

where $\mathcal{F} := F - u_t - \mathcal{A}u - \mathtt{E}u$. Hence, $u_t \in [U(Q_{0,T})]^*$. Taking $z(x,t) = w(x)\varphi(t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, from (60), we obtain:

$$\int\limits_0^T \langle \mathcal{F}(t), w\rangle_{[D(\Omega)]^n}\,\varphi(t)\,dt = 0, \qquad w \in [D(\Omega)]^n, \quad \varphi \in D(0,T),$$

and so (26) holds. Clearly,

$$\mathcal{F} \in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + [L^{\frac{q}{q-1}}(Q_{0,T})]^n \subset W^{0,h}(0,T;[W^{-1,h}(\Omega)]^n),$$

where h is taken from (14). Then, the generalized De Rham theorem (see Proposition 4) yields that there exists $\pi \in W^{0,h}(0,T;W^{0,h}(\Omega)) = L^h(Q_{0,T})$ such that (28)-(29) hold. Thus, π satisfies (1) in $[D^*(Q_{0,T})]^n$ and (3) in $D^*(0,T)$. Theorem 1 is proved. $\square$

Proof of Theorem 2. Let $\{u_1, \pi_1\}$ and $\{u_2, \pi_2\}$ be weak solutions of problem (1)-(5). Set $u := u_1 - u_2$. Take (15) for u_1:

$$\langle u_{1\,t}(t), v\rangle_V + \langle A(t)u_1(t), v\rangle_V + (E(t)u_1(t), v)_\Omega = (F(t), v)_\Omega. \tag{61}$$

Take (15) for u_2:

$$\langle u_{2\,t}(t), v\rangle_V + \langle A(t)u_2(t), v\rangle_V + (E(t)u_2(t), v)_\Omega = (F(t), v)_\Omega. \tag{62}$$

Subtracting (62) from (61), setting $v = u(t)$, and integrating for $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$, we obtain:

$$\int_0^\tau \Big[\langle u_t(t), u(t)\rangle_V + \langle A(t)u_1(t) - A(t)u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_V + (E(t)u(t), u(t))_\Omega\Big]\, dt =$$
$$= \int_0^\tau (F(t), v)_\Omega\, dt, \quad \tau \in (0,T].$$

After the simple transformations, in the same way as (47), from this equality, we get:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |u|^2\, dx + \int_{Q_{0,\tau}} \left[a_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + (G|u_1|^{q-2}u_1 - G|u_2|^{q-2}u_2, u_1 - u_2)_{\mathbb{R}^n}\right] dxdt \le$$
$$\le C_{16} \int_{Q_{0,\tau}} |u|^2\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{63}$$

Let $y(\tau) := \int_{\Omega_\tau} |u|^2\, dx$, $\tau \in (0,T]$. Then, from (63) it follows that $\frac{1}{2}y(\tau) \le C_{16}\int_0^\tau y(t)\, dt$, $\tau \in (0,T]$. Using the Gronwall lemma, we see that $y(\tau) \le 0$ for $\tau \in [0,T]$, and so $u_1 = u_2$.

Since $\{u_1, \pi_1\}$ and $\{u_2, \pi_2\}$ satisfy (1) in $D^*(Q_{0,T})$, we obtain:

$$(u_1 - u_2)_t + \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 + \mathtt{E}u_1 - \mathtt{E}u_2 + \nabla(\pi_1 - \pi_2) = 0.$$

Then the equality $u_1 = u_2$ yields that $\nabla(\pi_1 - \pi_2) = 0$. Therefore, for $t \in (0,T)$ we have that $\pi_1(t) - \pi_2(t) = C(t)$. It follows from condition (3) with π_1 and π_2 that $C(t) = 0$. Thus, $\pi_1 = \pi_2$ and Theorem 2 is proved. □

References

1. R. Temam, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, Mir, Moscow, 1981 (Russian) (translated from: North-Holland Publ., Amsterdam, New York, Oxford, 1979).
2. M. Růžička, *Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory*, Lect. Notes Math. **1748**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
3. В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса*, Краевые задачи математической физики. 1, Сб. работ, Тр. МИАН СССР **70** (1964), 213–317.
4. В. А. Солонников, *Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса*, УМН **58** (2003), no. 2(350), 123–156 DOI: 10.4213/rm613; **English version**: V. A. Solonnikov, *On estimates of solutions of the non-stationary Stokes problem in anisotropic Sobolev spaces and on estimates for the resolvent of the Stokes operator*, Russian Math. Surveys. **58** (2003), no. 2, 331–365. DOI: 10.1070/RM2003v058n02ABEH000613

5. V. A. Solonnikov. *Weighted Schauder estimates for evolution Stokes problem*, Ann. Univ. Ferrara **52** (2006), no. 1, 137–172. DOI: 10.1007/s11565-006-0012-7
6. И. Ш. Могилевский, *О краевой задаче для нестационарной системы Стокса с общими граничными условиями*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **50** (1986), no. 1, 37–66; **English version**: I. Sh. Mogilevskii. *On a boundary value problem for the time-dependent Stokes system with general boundary conditions*, Mathematics of the USSR-Izvestiya. **28** (1987), no. 1, 37–66. DOI: 10.1070/IM1987v028n01ABEH000866
7. G. P. Galdi, C. G. Simader, and H. Sohr, *On Stokes problem in Lipschitz domain*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **167** (1994), no. 1, 147–163. DOI: 10.1007/BF01760332
8. G. P. Galdi, C. G. Simader, and H. Sohr, *A class of solution to stationary Stokes and Navier-Stokes equations with boundary data in* $W^{-\frac{1}{q},q}$, Math. Ann. **331** (2005). no. 1, 41–74. DOI: 10.1007/s00208-004-0573-7
9. O. M. Buhrii, *Visco-plastic, Newtonian, and dilatant fluids: Stokes equations with variable exponent of nonlinearity*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 2, 165–180. DOI: 10.15330/ms.49.2.165-180
10. I. Munteanu, *Boundary stabilisation of the Navier–Stokes equation with fading memory*, Intern. J. of Control. **88**, №3 (2015) 531-542. DOI: 10.1080/00207179.2014.964780
11. N. A. Karazeeva, *Solvability of initial boundary value problems for equations describing motions of linear viscoelastic fluids*, J. Applied Math. **2005** (2005), no. 1, 59–80. DOI: 10.1155/JAM.2005.59
12. E. Suhubi, *Functional analysis*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 2003.
13. O. Buhrii and N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Math. **15** (2017) 859–883. DOI: 10.1515/math-2017-0069
14. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires*, Mir, Moscow, 1972 (translated from: Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969).
15. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of theory of functions and functional analysis*, Nauka, Moscow, 1972 (Russian).
16. J. A. Langa, J. Real, and J. Simon, *Existence and regularity of the pressure for the stochastic Navier-Stokes equations*, Appl. Math. Optim. **48** (2003), no. 3, 195–210. DOI: 10.1007/s00245-003-0773-7
17. J. Simon, *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and preassure*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), no. 5, 1093–1117. DOI: 10.1137/0521061
18. J.-P. Aubin, *Un theoreme de compacite*, Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. **256** (1963), no. 24, 5042–5044.
19. F. Bernis, *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains*, Math. Ann. **279** (1988), no. 3, 373–394. DOI: 10.1007/BF01456275
20. H. Gajewski, K. Groger, and K. Zacharias. *Nonlinear operator equations and operator differential equations*, Mir, Moscow, 1978 (translated from: Akademie-Verlag, Berlin, 1974).

Стаття: надійшла до редколегії 28.08.2018
доопрацьована 12.09.2018
прийнята до друку 18.02.2018

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ СТОКСА

Олег БУГРІЙ, Мар'яна ХОМА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua, marianna.khoma88@gmail.com

Розглянуто нелінійну інтегро-диференціальну систему рівнянь Стокса. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для цієї системи.

Ключові слова: еволюційна система Стокса, інтегро-диференціальне рівняння, мішана задача, узагальнений розв'язок.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 120–131
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 120–131
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.120-131

УДК 517.95

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З СИЛЬНИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Микола ІВАНЧОВ, Віталій ВЛАСОВ

Львівський національний університет ім. І. Франка,
Університетська 1, 79000, Львів
e-mail: mykola.ivanchov@lnu.edu.ua, siphiuel@gmail.com

Встановлено єдиність класичного розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з двома невідомими старшими коефіцієнтами, які залежать від часової змінної, у випадку сильного виродження рівняння.

Ключові слова: обернена задача, двовимірне рівняння теплопровідності, сильне виродження, єдиність розв'язку.

1. Вступ

Обернені задачі знаходять своє застосування у різноманітних галузях — від видобутку корисних копалин, металургії, космічних досліджень до фінансів, медицини, екології тощо. Особливе місце серед коефіцієнтних обернених задач посідають задачі для рівнянь з виродженням, які вимагають свого апарату досліджень. Перші дослідження таких задач були проведені у працях [1]—[3], в яких виродження не було пов'язане з невідомими параметрами. Систематичне дослідження обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь зі слабким та сильним виродженням було здійснене в [4]—[12], де невідомим був залежний від часу старший коефіцієнт, який і спричиняв виродження рівняння. В основному вивчався випадок степеневого виродження, хоча були досліджені і задачі для рівняння з виродженням довільного типу. Згодом частина цих результатів була перенесена на задачі з вільними межами [13], [14]. Перехід до двовимірного випадку створив нову ситуацію, коли в рівнянні невідомими є два старші коефіцієнти. Випадок слабкого виродження було вивчено в [15], [16], а сильного з одним невідомим коефіцієнтом — в [17].

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K65

Ми досліджуємо питання єдиності розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з двома залежними від часу невідомими старшими коефіцієнтами з різною поведінкою при $t \to 0$, коли виродження рівняння є сильним.

2. Формулювання задачі та основний результат

В області $Q_T := \{(x, y, t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо задачу знаходження трійки функцій $(a_1(t), a_2(t), u(x, y, t)), a_i(t) > 0, t \in [0, T], i \in \{1, 2\}$, які задовольняють рівняння теплопровідності

$$u_t = a_1(t)t^{\beta_1}u_{xx} + a_2(t)t^{\beta_2}u_{yy} + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$\beta_i \geq 1, i \in \{1, 2\}$, початкову умову

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y, 0), \quad (x, y) \in \overline{D} := [0, h] \times [0, l], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0, y, t) = \mu_{11}(y, t),\ u(h, y, t) = \mu_{12}(y, t), \quad (y, t) \in [0, l] \times [0, T], \tag{3}$$

$$u_y(x, 0, t) = \mu_{21}(x, t),\ u_y(x, l, t) = \mu_{22}(x, t), \quad (x, t) \in [0, h] \times [0, T] \tag{4}$$

та умови перевизначення

$$\iint\limits_D u(x, y, t)dx\,dy = \mu_{31}(t), \tag{5}$$

$$\iint\limits_D xu(x, y, t)dx\,dy = \mu_{32}(t), \quad t \in (0, T]. \tag{6}$$

Умови єдиності класичного розв'язку задачі (1)-(6) наведено у такій теоремі.

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови:*

(A1) $\varphi \in C^{1,0}(\overline{D}), \mu_{1i} \in C^{2,1}([0, l] \times (0, T]), \mu_{2i} \in C^{1,0}([0, h] \times (0, T]), f \in C^{1,0,0}(\overline{Q}_T)$, $\mu_{3i} \in C^1([0, T]), i \in \{1, 2\}$;

(A2) $\int\limits_0^h (h - x)(\mu_{22}(x, t) - \mu_{21}(x, t))dx \int\limits_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta, \tau) - f(h, \eta, \tau))d\eta - \int\limits_0^h x(\mu_{22}(x, t) - \mu_{21}(x, t))dx \int\limits_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta, \tau) - f(0, \eta, \tau))d\eta > 0$,

$$\mu'_{31}(t) - \iint\limits_D f(x, y, t)dx\,dy \equiv \varkappa_1(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$$

$$\mu'_{32}(t) - \iint\limits_D xf(x, y, t)dx\,dy \equiv \varkappa_2(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}}, \quad \text{де } \varkappa_i(t) > 0, t \in [0, T], i \in \{1, 2\};$$

(A3) *умови узгодження нульового порядку та умови*

$$\iint\limits_D \varphi(x, y)dx\,dy = \mu_{31}(0), \quad \iint\limits_D x\varphi(x, y)dx\,dy = \mu_{32}(0).$$

Якщо $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$, то розв'язок $(a_1(t), a_2(t), u(x,y,t))$ задачі (1)-(6) з класу $\big(C([0,T])\big)^2 \times C^{2,2,1}(Q_T) \cap C^{1,1,0}(\overline{D} \times (0,T]) \cap C^{0,1,0}(\overline{Q}_T)$, [18], і такий, що $a_i(t) > 0, t \in [0,T], i \in \{1,2\}$, єдиний.

3. Зведення задачі (1)-(6) до системи рівнянь стосовно $a_1(t), a_2(t)$

Перепозначимо $\beta_1 := \beta$ і подамо рівняння (1) у вигляді

$$u_t = a_1(t)t^{\beta}u_{xx} + a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T. \tag{7}$$

Диференціюючи умови (5), (6) за змінною t та використовуючи рівняння (7), отримаємо систему рівнянь стосовно $a_1(t), a_2(t)$:

$$\begin{aligned} &a_1(t)t^{\beta}\int_0^l (hu_x(h,y,t) + \mu_{11}(y,t) - \mu_{12}(y,t))dy+ \\ &+ a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}\int_0^h x(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx = \\ &= \mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\,dy, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &a_1(t)t^{\beta}\int_0^l (u_x(h,y,t) - u_x(0,y,t))dy + a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}\int_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx = \\ &= \mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{9}$$

Умови теореми дають змогу розв'язати систему (8), (9) стосовно $a_1(t), a_2(t)$

$$\begin{aligned} a_1(t) = t^{-\beta}\Bigg(&\bigg(\mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\,dy\bigg)\int_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx- \\ &- \bigg(\mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy\bigg)\int_0^h x(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx\Bigg)\Delta^{-1}(t), t \in [0,T], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} a_2(t) = t^{-\frac{1+\beta}{2}}\Bigg(&\bigg(\mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy\bigg)\int_0^l (hu_x(h,y,t) + \mu_{11}(y,t) - \mu_{12}(y,t))dy- \\ &- \bigg(\mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\,dy\bigg)\int_0^l (u_x(h,y,t) - u_x(0,y,t))dy\Bigg)\Delta^{-1}(t), t \in [0,T], \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\Delta(t) = \int_0^l u_x(h,y,t)dy\int_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+$$

$$+\int_0^l u_x(0,y,t)dy\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+$$

$$+\int_0^l (\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\int_0^h (\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx. \tag{12}$$

Надамо системі (10), (11) такого вигляду:

$$a_1(t) = \Bigg(\varkappa_2(t)\int_0^h (\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx-$$

$$-\varkappa_1(t)\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\Bigg)t^{\frac{1-\beta}{2}}\Delta^{-1}(t), \tag{13}$$

$$a_2(t) = \Bigg((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int_0^l u_x(h,y,t)dy+\varkappa_2(t)\int_0^l u_x(0,y,t)dy+$$

$$+\varkappa_1(t)\int_0^l (\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\Bigg)\Delta^{-1}(t), \quad t\in(0,T]. \tag{14}$$

За допомогою функції Гріна знайдемо розв'язок задачі (1)-(4)

$$u(x,y,t) = \int_0^l\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a_1(\tau)\mu_{11}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a_1(\tau)\mu_{12}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{21}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{22}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t \iint_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \qquad (x,y,t)\in \overline{Q}_T. \tag{15}$$

Функція Гріна визначається з рівності

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times$$
$$\times\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^i\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^j\exp\left(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right),$$
$$i,j\in\{1,2\},\qquad \theta_1(t):=\int_0^t\sigma^\beta a_1(\sigma)d\sigma,\qquad \theta_2(t):=\int_0^t\sigma^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\sigma)d\sigma,$$

де значення $i,j=1$ відповідають умовам Діріхле за змінними x,y, а $i,j=2$ — умовам Неймана. Легко бачити, що $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=G_i(x,t,\xi,\tau)G_j(y,t,\eta,\tau)$, G_i — функції Гріна для одновимірних рівнянь теплопровідності за відповідними змінними. З (15) обчислимо

$$u_x(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$
$$-\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-a_2(\tau)\mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-a_2(\tau)\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\iint_D G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{16}$$

Враховуючи рівність

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)dx = 1,$$

яку легко перевірити, знаходимо

$$\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy = \int\limits_0^h G_2(0,t,\xi,0)d\xi \int\limits_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta -$$

$$-\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)d\tau \int\limits_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(0,t,h,\tau)d\tau \int\limits_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22}(0,\tau) - \mu_{21}(0,\tau))d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_2(0,t,h,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22}(h,\tau) - \mu_{21}(h,\tau))d\tau$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau) - \mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau \int\limits_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy = \int\limits_0^h G_2(h,t,\xi,0)d\xi \int\limits_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta -$$

$$-\int\limits_0^t G_2(h,t,0,\tau)d\tau \int\limits_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(h,t,h,\tau)d\tau \int\limits_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(h,t,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22}(0,\tau) - \mu_{21}(0,\tau))d\tau -$$

$$-\int_0^t G_2(h,t,h,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))d\tau-$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)d\xi d\tau\int_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta. \tag{18}$$

Підставимо у (16) рівності (19), (20) і подамо $\Delta(t)$ у вигляді

$$\Delta(t)=\Delta_0(t)\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}+R(t),$$

де

$$\Delta_0(t):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigg[\int_0^h(h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\int_0^l(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta-$$
$$-\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\int_0^l(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta\Bigg],$$

а до $R(t)$ входять всі інші доданки з $\Delta(t)$. Подамо рівняння (14) у вигляді

$$a_1(t)=\frac{F(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta(t)},\quad t\in[0,T], \tag{19}$$

де

$$F(t):=\varkappa_2(t)\int_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx-\varkappa_1(t)\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx.$$

Розглянемо функцію

$$H(t):=\frac{F(t)}{\sqrt{\beta+1}\Delta_0(t)\displaystyle\int_0^1\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}},\quad t\in[0,T]. \tag{20}$$

На підставі (19) та враховуючи припущення теореми, отримуємо

$$a_1(t)\le\frac{F(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta_0(t)\displaystyle\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}}\le\frac{F(t)\sqrt{a_{1\max}(t)}}{\sqrt{\beta+1}\Delta_0(t)\displaystyle\int_0^1\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}}=H(t)\sqrt{a_{1\max}(t)},$$
$t\in[0,T]$,

де $a_{1\max}(t) := \max\limits_{\tau\in[0,t]} a_1(\tau)$. Звідси встановлюємо оцінку

$$a_1(t) \le H^2_{\max}(t), \quad t \in [0,T], \tag{21}$$

де $H_{\max}(t) := \max\limits_{\tau\in[0,t]} H(\tau)$.

Для оцінки $a_1(t)$ знизу зауважимо, що $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta_1(t) = 0$. Це означає, що для довільного $q \in (0,1)$ існує таке $t_0 \in (0,]T$, що виконуватиметься нерівність

$$R(t) \le q\Delta_0(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}, \quad t \in [0,t_0]. \tag{22}$$

Тоді аналогічно до (19) знаходимо

$$a_1(t) \ge \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}, \quad t \in [0,t_0]. \tag{23}$$

Тут вжито позначення $H_{\min}(t) := \min\limits_{\tau\in[0,t]} H(\tau)$.

4. Доведення теореми

Припустимо, що система рівнянь (12), (13) має два розв'язки $(a_{1i}(t), a_{2i}(t)), i \in \{1,2\}$. Позначимо $u(x,y,t) := u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t), b_i(t) := a_{i1}(t) - a_{i2}(t), \theta_{1i} = \int\limits_0^t \tau^\beta a_{1i}(\tau)d\tau, i \in \{1,2\}, \Delta(t) := \Delta_1(t) - \Delta_2(t), R(t) := R_1(t) - R_2(t)$. З рівняння (10) отримуємо

$$b_1(t) = \frac{F(t)(\Delta_2(t)-\Delta_1(t))}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)} = \frac{a_{11}(t)a_{12}(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}}{F(t)}\Bigg(\Delta_0(t)\int\limits_0^t\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\Bigg)d\tau + R_2(t) - R_1(t)\Bigg).$$

З міркувань, наведених при виведенні оцінки (22), можна вважати, що для тих самих значень q та t_0 справджується нерівність

$$|R_2(t)-R_1(t)| \le q\Delta_0(t)\int\limits_0^t\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\Bigg)d\tau, \quad t\in[0,t_0].$$

Тоді

$$|b_1(t)| \le \frac{(1+q)a_{11}(t)a_{12}(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}}{F(t)}\Delta_0(t)\int\limits_0^t\Bigg|\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\Bigg|d\tau. \tag{24}$$

Перетворимо вираз

$$\int\limits_0^t\Bigg|\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\Bigg|d\tau \le$$

$$\leq \int_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)|d\tau}{\sqrt{(\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau))(\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau))}(\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}+\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)})}.$$

Застосовуючи оцінки (21), (23), знаходимо

$$\int_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}}-\frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\right| d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)|d\tau}{\sqrt{(\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau))(\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau))}(\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}+\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)})} \leq$$

$$\leq \frac{(1+q)^3\sqrt{\beta+1}b_{1\max}(t)}{2t^{\frac{\beta-1}{2}}H^3_{\min}(t)} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}.$$

Підставимо цю оцінку в (22):

$$|b_1(t)| \leq \frac{(1+q)^4 a_{11}(t)a_{12}(t)\sqrt{\beta+1}b_{1\max}(t)}{2F(t)H^3_{\min}(t)}\Delta_0(t)\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}} \leq$$

$$\leq \frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)} b_{1\max}(t), \quad t\in[0,t_0]. \tag{25}$$

Оскільки

$$\lim_{t\to 0} H_{\min}(t) = \lim_{t\to 0} H_{\max}(t),$$

то існує таке значення $t_1 \in (0,t_0]$, що виконуватиметься нерівність

$$\frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)} \leq q_0 < 1, \quad t\in[0,t_1].$$

Тоді з (23) доходимо висновку, що $b_1(t)\equiv 0, \quad t\in[0,t_1]$.

З рівняння (14) отримуємо

$$b_2(t) = \left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int_0^l u_x(h,y,t)dy + \varkappa_2(t)\int_0^l u_x(0,y,t)dy\right)(\Delta_1(t))^{-1} - \tag{26}$$

$$-\left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int_0^l u_{2_x}(h,y,t)dy + \varkappa_2(t)\int_0^l u_{2_x}(0,y,t)dy + \right. \tag{27}$$

$$\left. +\varkappa_1(t)\int_0^l (\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\right)\frac{\Delta(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}, \quad t\in[0,T]. \tag{28}$$

Враховуючи те, що $a_{11}(t)=a_{12}(t), t\in[0,t_1]$, з (17), (18) знаходимо

$$\int_0^l u_x(0,y,t)dy = \int_0^t \tau^{\frac{1+\beta}{2}} b_2(\tau)\Big(G_2(0,t,0,\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau)) - G_2(0,t,h,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))+\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi\Big)d\tau,$$

$$\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy=\int\limits_0^t \tau^{\frac{1+\beta}{2}}b_2(\tau)\Big(G_2(h,t,0,\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))-G_2(h,t,h,\tau)\times$$

(29)

$$\times(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))+\int\limits_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi\Big)d\tau,\quad t\in[0,t_1].$$

Тут у функції Гріна приймемо $\theta_1(t)=\int\limits_0^t a_{11}(\tau)d\tau$. Аналогічно з (12) отримуємо

$$\Delta(t)=\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy\int\limits_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+$$

$$\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy\int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx. \tag{30}$$

Враховуючи (29), (30), зведемо рівняння (26) до вигляду

$$b_2(t)=\int\limits_0^t K(t,\tau)b_2(\tau)d\tau,\quad t\in[0,t_1]. \tag{31}$$

Зважаючи на оцінку

$$\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\le C_1\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}_2},$$

робимо висновок про те, що ядро $K(t,\tau)$ не має особливостей, і тому рівняння (31) допускає тільки тривіальний розв'язок $b_2(t)\equiv 0, t\in[0,t_1]$.

Доведення того, що розв'язок задачі (1)–(6) єдиний на всьому часовому проміжку $[0,T]$, проводиться аналогічно до [6].

Список використаної літератури

1. Т. Елдесбаев, *О некоторых обратных задачах для вырождающихся гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения **11** (1976), no. 3, 502–510.
2. Т. Елдесбаев, *Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка*, Изв. АН КазССР, Серия физ.-мат. (1987), no. 3, 27–29.
3. М. М. Гаджиев, *Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения*, Применение методов функ. анал. в уравнениях мат. физ. (1987), Новосибирск, 66–71.
4. М. І. Іванчов, Н. В. Салдіна, *Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням*, Укр. мат. журн. **57** (2005), no. 11, 1563–1570; **English version**: M. I. Ivanchov

and V. Saldina, *Inverse problem for the heat equation with degeneration*, Ukr. Math. J. **57** (2005), no. 11, 1825–1835. DOI: 10.1007/s11253-006-0032-6
5. M. I. Іванчов, Н. В. Салдіна, *Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням*, Укр. мат. журн. **58** (2006), no. 11, 1487–1500; **English version**: M. I. Ivanchov and V. Saldina, *Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration*, Ukr. Math. J. **58** (2006), no. 11, 1685–1703. DOI: 10.1007/s11253-006-0162-x
6. M. Ivanchov and N. Saldina, *Inverse problem for strongly degenerate heat equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **14** (2006), no. 5, 465–480. DOI: 10.1515/156939406778247598
7. Н. Салдіна, *Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням*, Вісн. Львів. ун-ту, Серія мех.-мат. **64** (2005), 245–257.
8. Н. Салдіна, *Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **66** (2006), 186–202.
9. Н. В. Салдіна, *Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням*, Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. (2006), no. 288, 99–106.
10. Н. В. Салдіна, *Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **49** (2006), no. 3, 7–17.
11. Н. В. Салдіна, *Сильно вироджена обернена параболічна задача із загальною поведінкою молодших членів рівняння*, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. **12–13**, (2007), 109–122.
12. M. Ivanchov, A. Lorenzi, and N. Saldina, *Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in Banach space*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **16**, (2008), no. 4, 397–415. DOI: 10.1515/JIIP.2008.022
13. Н. М. Гринців, *Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням в області з вільною межею*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **49**, (2006), no. 4, 28–40.
14. Н. М. Гринців, *Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **66**, (2006), 45–59.
15. М. Іванчов, В. Власов, *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **70**, (2009), 91–102.
16. В. Власов, *Обернена задача для двовимірного анізотропного параболічного рівняння*, Буковинський мат. журнал. **5**, (2017), no. 1-2, 37–48.
17. M. Ivanchov and V. Vlasov, *Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation,* Electron. J. Diff. Equ. **2018**, (2018), no. 77, 1–17.
18. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва, 1967.

Стаття: надійшла до редколегії 06.01.2019
доопрацьована 19.01.2019
прийнята до друку 19.02.2019

UNIQUENESS OF SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM FOR THE TWO-DIMENSIONAL STRONGLY DEGENERATE HEAT EQUATION

Mykola IVANCHOV, Vitaliy VLASOV

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: mykola.ivanchov@lnu.edu.ua, siphiuel@gmail.com

The uniqueness of a classical solution of an inverse problem for the two-dimensional heat equation with two unknown leading coefficients dependent on the time variable is established in the case of the strong degeneration.

Key words: inverse problem, two-dimensional heat equation, strong degeneration, uniqueness of solution.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 132–138
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 132–138
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.132-138

УДК 519.217

НЕЛІНІЙНЕ НОРМУВАННЯ ІМПУЛЬСНОГО РЕКУРЕНТНОГО ПРОЦЕСУ В СХЕМІ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

Оксана Ярова

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

Розглянуто імпульсні рекурентні процеси з марковським перемиканням у схемі апроксимації Леві. Наша мета — знайти нелінійні параметри нормування для імпульсних процесів.

Ключові слова: імпульсний процес, апроксимація Леві, нелінійне нормування, марковське перемикання.

1. Вступ

Імпульсні рекурентні процеси розглядають у працях [1]–[7]. Проте, перемикаючий марковський процес досліджується в масштабі часу $\frac{t}{\varepsilon}$. Мета нашої праці: знайти нелінійні нормуючі множники, тому процеси розглядаються в нормуванні часу $\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}$, де $g_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Імпульсні процеси $\xi(t)$ в евклідовому просторі R^d з марковським або напівмарковським перемиканням визначаються за допомогою суми випадкових величин на вкладеному ланцюзі Маркова

$$\xi(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha_k(x_{k-1}), t \geqslant 0,$$

де $x(t)$ — перемикаючий марковський процес, якому відповідає вкладений марковський процес відновлення $(x_k, \tau_k), k \geqslant 0$, де $x_k = x(\tau_k)$ та рахуючий процес стрибків $\nu(t) = \max\{k \geqslant 0 : \tau_k \leqslant t\}$, $\alpha_k(x_{k-1})$ – сім'я випадкових величин.

2010 Mathematics Subject Classification: 60J25

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85

2. Апроксимація Леві

Розглянемо імпульсний рекурентний процес в умовах апроксимації Леві з нелінійним нормуванням

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0^\varepsilon + \sum_{k=1}^{\nu\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \alpha_k^\varepsilon(x_{k-1}^\varepsilon), \qquad t \geqslant 0,$$

де $x^\varepsilon(t) = x\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)$ — перемикаючий марковський процес, якому відповідає вкладений марковський процес відновлення

$$(x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon), k \geqslant 0.$$

Тут $x_k = x(\tau_k)$, і рахуючий процес стрибків

$$\nu^\varepsilon(t) = \nu\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right).$$

Отож, τ_k^ε — моменти стрибків цього процесу, а

$$x_k^\varepsilon = x(\tau_k^\varepsilon),$$

$$\nu^\varepsilon(t) = max\{k \geqslant 0 : \tau_k^\varepsilon \leqslant t\}.$$

Розглянемо умови апроксимації Леві.

(L1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon(u;x) = \int_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_1(\varepsilon)b_1(u;x) + g_2(\varepsilon)(b(u;x) + \theta_b^\varepsilon(u;x))$$

та

$$c_\varepsilon(u;x) = \int_{R^d} vv^T\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(c(u;x) + \theta_c^\varepsilon(u;x)),$$

де v^T - транспонований вектор до вектора v,

$$g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)), g_1(\varepsilon)\to 0, g_2(\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0.$$

Знехтувальні доданки

$$|\ \theta_b^\varepsilon(u;x)\ | \to 0, |\ \theta_c^\varepsilon(u;x)\ | \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$.

(L2) Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_q^\varepsilon(u;x) = \int_{R^d} q(v)\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q(u;x) + \theta_q^\varepsilon(u;x))$$

для всіх

$$q \in C^3(R), u \in R$$

так, що

$$|\ \Gamma_q(u;x)\ | \leqslant K < \infty.$$

Ядро $\Gamma_q(u;x)$ визначається співвідношенням

$$\Gamma_q(u;x)=\int\limits_{R^d} q(v)\Gamma(u,dv;x).$$

(L3) Умова балансу [4]

$$\int\limits_{E}\rho(dx)b_1(u;x)=0,$$

де $\rho(dx)$ задовольняє умову ергодичності зі стаціонарним розподілом $\pi(A), A\in E$,

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx),$$

$$q=1/m, m=\int\limits_{E}\rho(dx)m(x),$$

$$\rho(B)=\int\limits_{E}\rho(dx)P(x,B), \rho(E)=1.$$

(L4) Умови на початкові значення

$$\sup_{\varepsilon>0}E|\xi_0^\varepsilon|\leqslant C<\infty,$$

$$|\xi_0^\varepsilon|\to x(i_0),\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

(L5) Рівномірна квадратична інтегровність

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{x\in E}\int\limits_{v>c} vv^T\Gamma(u,dv;x)=0.$$

(L6) Умова зростання. Існує додатна константа L така, що

$$|b(u;x)|\leqslant L(1+|u|,|c(u;x)|\leqslant L(1+|u|^2)$$

. Тоді для всіх дійснозначних невід'ємних функцій $f(v), v\in R$, таких, що

$$\int\limits_{R^d}(1+f(v))|v|^2dv<\infty,$$

$$|\Lambda(u,v,x)|\leqslant Lf(v)(1+|u|).$$

Тут $|\Lambda(u,v,x)|$ — похідна Радона-Нікодима ядра $\Gamma(u,B;x)$ стосовно міри Лебега dv в R, тобто

$$\Gamma(u,dv;x)=\Lambda(u,v;x)dv.$$

(L7) Для довільного $r>0$ існує константа l_r така, що

$$|\hat{b}(u)-\hat{b}(u')|+|\sigma^2(u)-\sigma^2(u')|+|\hat{\Gamma}(u,v)-\hat{\Gamma}(u',v)|\leqslant l_r|u-u'|,$$

якщо $|\ u\ |\leqslant r, |\ v\ |\leqslant r.$

Означення. Нехай реалізації випадкових процесів $\xi_n(t)$ і $\xi(t)$ належать деякому метричному простору. Тоді випадковий процес $\xi_n(t)$ *слабо збігається* до $\xi(t)$, якщо виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\mu_n(dx)=\int f(x)\mu(dx),$$

де μ_n та μ — міри випадкових процесів $\xi_n(t)$ та $\xi(t)$, відповідно, а $f(x)$ — функціонал, для якого виконується умова

$$Ef(\xi(t))=\int f(x)\mu(dx),$$

$f(\xi(t))$ — розподіл випадкового процесу $\xi(t)$.

Теорема. *За умов* **(L1)**-**(L6)** *справджується слабка збіжність*

$$\xi^\varepsilon(t)\Rightarrow\xi^0,\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Граничний процес ξ^0 є процесом Леві та за умови **(L7)** *визначається генератором*

$$\hat{L}\varphi(u)=(\hat{b}(u)-\hat{b_0}(u)+\hat{b_1}(u))\varphi'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2(u)\varphi''(u)+\lambda(u)\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(u))\Gamma^0(u,dv),$$

де

$$\hat{b_1}(u,x)=q(x)\int\limits_E P(x,dy)b_1(u;y),\Gamma(u,dv)=q\int\limits_E\rho(dx)\Gamma(u,x;dv),$$

$$\sigma^2(u)=2q\int\limits_E\rho(dx)(\hat{b_1}(u;x)R_0b_1^*(u;x)+\frac{1}{2}(\widehat{c(u;x)}-c_0(u;x))),\qquad\sigma^2(u)>0,$$

$$\lambda(u)=q\Gamma(u,R),\Gamma^0(u;dv)=\frac{\Gamma(u;dv)}{\Gamma(u;r)}.$$

Доведення. В основу доведення покладено семімартингальне зображення процесу.

Передбачувальні характеристики семімартингалу мають такий вигляд:

$$B^\varepsilon(t)=\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}b_\varepsilon(\xi_{k-1}^\varepsilon;x_{k-1}^\varepsilon)=$$

$$=g_1(\varepsilon)\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}b_1(\xi_{k-1}^\varepsilon;x_{k-1}^\varepsilon)+g_2(\varepsilon)\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}b_1(\xi_{k-1}^\varepsilon;x_{k-1}^\varepsilon)+\theta_b^\varepsilon,$$

$$C^\varepsilon(t)=\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}c_\varepsilon(\xi_{k-1}^\varepsilon;x_{k-1}^\varepsilon)=g_2(\varepsilon)\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}c(\xi_{k-1}^\varepsilon;x_{k-1}^\varepsilon)+\theta_c^\varepsilon,$$

$$\Gamma^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(\xi^\varepsilon_{k-1}, dv; x^\varepsilon_{k-1}) =$$
$$= g_2(\varepsilon) \sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \int_R q(v)\Gamma(\xi^\varepsilon_{k-1}, dv; x^\varepsilon_{k-1}) + \theta^\varepsilon_q,$$

де

$$\sup_{x\in E} |\theta^\varepsilon| \to 0, \quad g_1(\varepsilon), \quad g_2(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Позначимо через $A^\varepsilon(t)$ основну частину будь-якої з передбачувальних характеристик.

Розглянемо трикомпонентний марковський процес $A^\varepsilon(t), \xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)$. Цей процес характеризується мартингалом

$$\mu^\varepsilon(t) = \varphi(\xi^\varepsilon(t), A^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)) - \int_0^t L^\varepsilon \varphi(\xi^\varepsilon(s), A^\varepsilon(s), x^\varepsilon(s))ds,$$

де генератор L^ε має вигляд

$$L^\varepsilon \varphi(u, v; x) = (g_2(\varepsilon))^{-1} Q\varphi(\cdot, \cdot; x) + Q_0 A^\varepsilon(u; x)\varphi(\cdot, v; x) + Q_0\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u, \cdot; x).$$

Тут Q — породжуюче ядро,

$$Q_0\varphi(\cdot, \cdot; x) = q(x) \int_E P(x, dy)\varphi(\cdot, \cdot; y),$$

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u, \cdot; \cdot) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R \Gamma^\varepsilon(u, x; dv)(\varphi(u + v) - \varphi(u)),$$

$$A^\varepsilon(u; x)\varphi(\cdot, v; \cdot) = (g_2(\varepsilon))^{-1}(\varphi(\cdot, v + g_2(\varepsilon)a(u; x); \cdot) - \varphi(\cdot, v; \cdot)).$$

Далі потрібно знайти зображення граничного оператора.

Подіємо генератором на тест-функції

$$\varphi^\varepsilon(u; x) = \varphi(u) + g_1(\varepsilon)\varphi_1(u; x) + g_2(\varepsilon)\varphi_2(u; x).$$

Отримаємо

$$L^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u; x) = ((g_2(\varepsilon))^{-1} Q + Q_0\Gamma^\varepsilon(x))(\varphi(u) + g_1(\varepsilon)\varphi_1(u; x) + g_2(\varepsilon)\varphi_2(u; x)).$$

Запишемо асимптотичне зображення генератора

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) = (((g_1(\varepsilon))_{-1} B_1(u; x) + \Gamma(u; x))\varphi(u) + \theta^\varepsilon =$$
$$= (g_1(\varepsilon))^{-1} b_1(u; x)\varphi'(u) + (b(u; x) - b_0(u; x))\varphi'(u) +$$
$$+ \frac{1}{2}(c(u; x) - c_0(u; x))\varphi''(u) +$$
$$+ \int_R (\varphi(u + v) - \varphi(u))\Gamma(u, dv; x) + \theta^\varepsilon,$$

де

$$b_0(u;x) = \int_R v\Gamma(u,dv;x), \quad c_0(u;x) = \int_R vv^T\Gamma(u,dv;x).$$

Отримуємо задачу сингулярного збурення

$$Q\varphi(u) = 0,$$
$$Q\varphi_1(v;x) + Q_0 b_1(u;x)\varphi'(u) = 0,$$
$$Q\varphi_2(v;x) + Q_0 b_1(u;x)\varphi_1'(u;x) + Q_0\Gamma(u;x)\varphi(u) = \hat{L}\varphi(u).$$

Застосувавши умови **(L3)** та **(L7)** остаточно отримаємо граничний генератор

$$\hat{L}\varphi(u) = (\hat{b}(u) - \hat{b_0}(u) + \hat{b_1}(u))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\varphi''(u) + \lambda(u)\int_R(\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^0(u,dv).$$

Теорему доведено. □

Отож, знайдено граничний генератор імпульсного рекурентного процесу з нелінійним нормуванням.

Список використаної літератури

1. В. С. Королюк *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Доповіді НАН України (2010). no. 6, 22–26.
2. H. Chernoff, *Measure of asymptotical efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, Ann. Math. Stat. **23** (1952), no 4, 493–655. DOI: 10.1214/aoms/1177729330
3. J. Feng and T. G. Kurtz, *Large deviation for stochastic processes*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **131**, American Mathematical Society, R.I., 2006.
4. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic systems in merging phase space*, World Scientific Publishing Company, Singapure, 2005. DOI: 10.1142/5979
5. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова думка, Київ, 1976.
6. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії*, Укр. мат. журн. **62** (2010), no. 5, 643–650; **English version**: V. S. Korolyuk, *Problem of large deviations for Markov random evolutions with independent increments in the scheme of asymptotically small diffusion*, Ukr. Math. J. **62** (2010), no. 5, 739–747. DOI: 10.1007/s11253-010-0384-9
7. А. В. Свищук, *Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций*, Ин-т математики АН УССР, 1990, С. 102–111.

Стаття: надійшла до редколегії 06.11.2018
доопрацьована 08.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

NONLINEAR APPROXIMATIONTION FOR IMPULSE RECURRENT PROCESS IN THE SCHEME OF LEVI APPROXIMATION

Oksana YAROVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000, Ukraine
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

In this paper, impulsive recurrence processes with Markov switching in the Levy approximation scheme are considered. The purpose of the work is to find non-linear parameters of normalization for impulse processes.

Key words: impulse process, approximation of Levi, nonlinear normalization, Markov switching.

УРОЧИСТА АКАДЕМІЯ, ПРИСВЯЧЕНА 150-Й РІЧНИЦІ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ГЕОРГІЯ ВОРОНОГО

3 травня 2018 року о 15 годині в головному корпусі Львівського національного університету імені Івана Франка відбулася Урочиста Академія, присвячена 150-й річниці від дня народження видатного українського математика та педагога, професора Георгія Вороного.

Програма

1. **Вступне слово**
   Ігор Гуран, доцент, в. о. декана механіко-математичного факультету.
2. **"Життя та наукова спадщина Георгія Вороного"**
   Микола Працьовитий, професор, декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, в. о. завідувача відділу динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України.
3. **"Сторінки з життя та творчості Георгія Вороного та його учнів"**
   Тарас Банах, професор, завідувач кафедри геометрії і топології,
   Михайло Зарічний, професор кафедри геометрії і топології,
   Ярослав Притула, доцент кафедри математичного та функціонального аналізу.
4. **"Про Українське математичне товариство та його регіональні відділення"**
   Тарас Банах, віце-президент УМТ.

Олег Гутік

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме має передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською та англійською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме подається на веб-сторінці

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 20 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)“ (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2010**.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).
2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.
3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.

4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.

6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248

8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.

9. V. Bovdi, *Free subgroups in group rings*, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.

10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.

11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.