ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 86

Львівський національний університет імені Івана Франка
2018

V I S N Y K	**В І С Н И К**
OF THE LVIV	**ЛЬВІВСЬКОГО**
UNIVERSITY	**УНІВЕРСИТЕТУ**
Series Mechanics and Mathematics	**Серія механіко-математична**
Issue 86	**Випуск 86**
Scientific journal	Збірник наукових праць
Published 1-2 issues per year	Виходить 1-2 рази на рік
Published since 1965	Видається з 1965 року
Ivan Franko National University of Lviv	Львівський національний університет імені Івана Франка

2018

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол №64/03 від 27.03.2019 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №528 від 12.05.2015р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-46-07

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Технічний редактор С. СЕНИК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 11,4
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

Михайло Михайлович ЗАРІЧНИЙ

(до 60-річчя з дня народження)

До тебе зі швидкістю світла
Думка моя долетить
Ти посміхнешся світло
В ту мить ...

Михайло Зарічний,
зі збірки "Вербалізація Верболозу"

Михайло Михайлович Зарічний — багатогранна і непересічна особистість: математик, професор, доктор фізико-математичних наук, один з фундаторів Львівської Топологічної Школи, знакова постать у сучасній львівській математиці, крім того — поет, музикант, громадський діяч, член Ротарі-клубу "Львів–Леополіс", почесний амбасадор міста Львова.

Дитинство і юність (1958-1974)

Народився Михайло Зарічний 7 березня 1958 року в Івано-Франківську у селянській сім'ї (батько – Михайло Михайлович Гашенюк, мати – Марія Андріївна Зарічна, обидвоє 1935 року народження). Невдовзі після народження мати віддала маленького Михайлика на виховання до бабусі Марії Іванівни Гашенюк (1907 р.н.), яка мешкала на Заріччі у селі Старі Богородчани Івано-Франківської області. Там вони проживали у старій хаті під соломою з глиняною долівкою, а коли Михайликові минуло 9 років, переселилися в нову просторішу хату.

Михайло Зарічний в центрі, 1959 рік

Михайло Зарічний і його бабуся Марія Іванівна Гашенюк

Початкову школу Михайло Зарічний закінчував на Заріччі, восьмирічку – у Старих Богородчанах, а останні два класи (дев'ятий і десятий) – в Богородчанах (районному центрі). Улюбленим заняттям малого Михайла було читання книжок, які у великих кількостях знаходив у сільській бібліотеці, причому читав усе підряд: від фантастики до довідників з електротехніки. Якось, узявши з собою чергову кипу книжок, пішов у шкільну їдальню, де хлопця зауважив учитель фізики. Після імпровізованого іспиту в кабінеті фізика з'ясувалося, що знань, отриманих самоосвітою, вистачає, щоб перевести малого Михайла з 3-го відразу в 5-й клас, тому Михайло Зарічний закінчив школу на рік швидше від своїх ровесників.

Таланти Михайла до точних наук виявилися ще у дитинстві, коли він, сільський хлопчина, полишений на самовиховання, успішно виступав на олімпіадах з фізики та математики. Зокрема, в 7-му класі він виборов 1-е місце на районній олімпіаді з математики. Тоді ж на олімпіаді з фізики швидко написав задачі за свій клас і ще встиг розв'язати задачі за 8-й клас, тому отримав 1-ше місце за 7-й клас та 2-ге місце за 8-й клас. У 8-му класі Зарічний виборов 1-е місце на обласній олімпіаді з фізики. В 9-му класі Зарічний брав участь у республіканській олімпіаді з математики, а в 10-му – у Всесоюзній. Своїм успіхам Михайло Зарічний завдячує першій вчительці Ірині Іванівні Гуцуляк, вчителеві фізики Степану Івановичу Долоткові та іншим.

Як згадував Михайло Михайлович, коли він був у 9-му класі, закриття республіканської олімпіади з математики відбувалося в головному корпусі Львівського університету імені Івана Франка, який настільки вразив молодого юнака своєю архітектурною досконалістю, що Михайло зрозумів, що буде навчатися саме там. Тож саме з Львівським університетом пов'язана уся подальша доля Михайла Зарічного.

Перша вчителька Ірина Іванівна Гуцуляк, 1966 рік

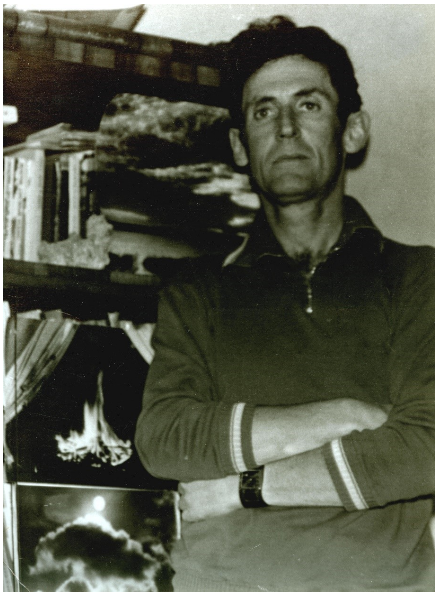
Навчання в університеті (1974-1979)

У 1974 році Михайло Зарічний вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка. Середню школу М. Зарічний закінчив без золотої медалі (хоча мав лише дві четвірки — з фізкультури та праці). Тому до університету вступав на загальних підставах. Твір написав на "4", математику письмово — "5", усну — "5", фізику — "5", атестат — "5" (разом 24 бали, а прохідний бал — 19). Четвірку за твір "Образ Оксани у п'єсі Корнійчука "Загибель Ескадри" (написаний, до речі, без орфографічних помилок) М. Зарічний отримав за лаконічність викладу.

Протягом 1974–1979 років Михайло Зарічний навчався на механіко-математичному факультеті Львівського державного університету імені Івана Франка. Деканом тоді був З. О. Мельник, заступником декана — Я. Г. Притула.

Я. Г. Притула також був наставником групи, де вчився Михайло Зарічний. У ті роки перша та друга групи на механіко-математичному факультеті спеціалізувалися по кафедрі диференційних рівнянь, третя та четверта — по кафедрі теорії функцій і функціонального аналізу, а п'ята та шоста — по кафедрі алгебри та геометрії. У третій групі (аналізу) однокурсниками Михайла Зарічного були О. Б. Скасків, М. В. Заболоцький, Я. В. Васильків. У четвертій групі разом з Зарічним вчилися Л. Базилевич, В. П'яна, О. Веселовська.

Перший День математика, зініційований у 1979 році Я. Г. Притулою



Іван Миколайович Песін

Курсову роботу Михайло Зарічний писав в Івана Миколайовича Песіна, учня Л. І. Волковиського. Песін мав неформальний стиль спілкування зі студентами і часто влаштовував семінари та консультації у себе на квартирі.

На другому курсі І. Песін доручив М. Зарічному простудіювати статтю Зіґмунта Янішевського з теорії континуумів, написану польською мовою. У підсумку Михайло Зарічний освоїв і польську мову, і теорію континуумів. Дипломну роботу з теорії опуклих множин Зарічний захистив у 1979 році.

Сім'я

Науковою роботою під керівництвом І. Песіна також займалася одногрупниця Михайла Зарічного — Лідія Базилевич, яка в 1980 році стала дружиною Михайла Михайловича. У 1984 році у них народився син Ігор, а в 2003 — донька Софія.

Михайло Зарічний і Лідія Базилевич
(весільне фото)

Михайло Зарічний і його діти: Софія та Ігор

Михайло Зарічний і Лідія Базилевич

Аспірантура

У другій половині 70-х років почала діяти угода між Львівським державним університетом імені Івана Франка та Московським державним університетом імені М. В. Ломоносова про підготовку кадрів, підписана за сприяння академіка Я. С. Підстригача.

О. Г. Савченко, В. В. Федорчук, М. М. Зарічний, І. Й. Гуран, 1987 рік

Тоді у Львові топологію вивчали за польським виданн "Загальна топологія" Рішарда Енгелькінга 1977 року (яку привіз Я. Г. Притула з поїздки до Варшавського університету). У Москві про цю фундаментальну монографію лише чули (російський переклад з'явився у 1986 році).

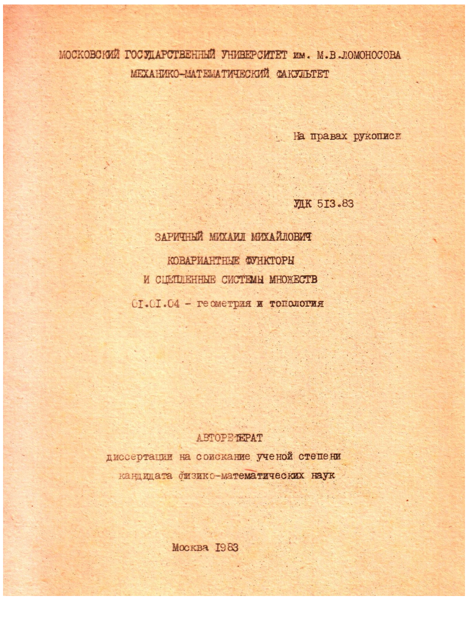
За рекомендацією І. Песіна, Михайла Зарічного, як одного з найкращих студентів факультету, у 1979 році також відправили у цільову аспірантуру до Москви. За порадою І. Й. Гурана (який два роки перед тим вступив до аспірантури на кафедру загальної топології МГУ до професора А. В. Архангельського), М. М. Зарічний вибрав керівником своєї наукової роботи Віталія Віталійовича Федорчука, учня Павла Сергійовича Александрова, одного з творців топології.

У кінці 70-х – початку 80-х Московська топологічна школа була на піку своєї світової потуги й об'єднувала як класиків (О. В. Архангельський, В. І. Пономарьов, Ю. М. Смірнов, В. В. Федорчук, Є. В. Щепін) так і молодших математиків, які згодом стали класиками (С. Аґєєв, С. Антонян, І. Гуран, А. Дранішніков, В. Пестов, О. Сіпачева, М. Ткаченко, В. Ткачук, В. Успенський, А. Чіґогідзе, М. Зарічний).

На кафедрі загальної топології М осковського університету відбувалося три семінари: загальнокафедральний і два спеціалізованіших – з топологічної алгебри (під керівництвом А. В. Архангельського) і геометричної топології (під керівництвом В. В. Федорчука). Концентрація інтелекту мала своїм наслідком самозародження науки. Аспіранти зазвичай самі підшуковували собі задачі, порпаючись у багатющій бібліотеці московського мех-мату чи слухаючи виступи класиків і своїх колег на семінарах.

М. М. Зарічний відвідував усі три семінари, що сприяло розширенню його математичного кругозору. Зокрема, він зацікавився введеною де Гроотом у 1973 році конструкцією суперрозширення λ, яка є слабко нормальним функтором у категорії компактів. Для його підфунктора λ_n Зарічний довів теорему про збереження ANR-компактів і компактних Q-многовидів. Техніку доведення цієї теореми згодом розвинув Басманов, який довів свою знамениту теорему про збереження ANR-компактів і Q-многовидів функторами скінченного степеня.

Слухаючи доповіді з топологічної алгебри на семінарі проф. Архангельського, Зарічний зацікавився топологічною структурою вільної топологічної групи і довів, що для ANR-компакта його вільна топологічна група є многовидом, модельованим простором $\mathbb{R}^\infty$, який є індуктивною границею евклідових просторів $\mathbb{R}^n$. Цей новаторський і елегантний (канадський математик В. Пестов у одній зі своїх публікацій схарактеризував його як charming theorem) результат Зарічного був опублікований у Докладах АН СССР у 1982 році. Пізніше техніка доведення цієї теореми була використана японським математиком К. Сакаї у його класичній характеризації $\mathbb{R}^\infty$-многовидів, яка з'явилася у 1984 році. Варто зауважити, що стаття Зарічного цитується аж дотепер, не зважаючи на те, що минуло понад 35 років від дня її публікації.


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 513.83

ЗАРИЧНЫЙ МИХАИЛ МИХАЙЛОВИЧ

КОВАРИАНТНЫЕ ФУНКТОРЫ
И СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 1983

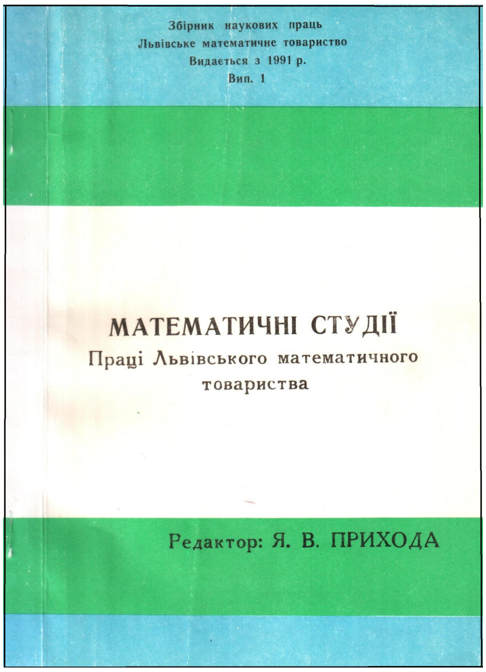
Автореферат кандидатської дисертації М. М. Зарічного

Результати про суперрозширення та вільні топологічні групи склали основу кандидатської дисертації М. М. Зарічного, яку він захистив 22 квітня 1983 року в Московському державному університеті імені Ломоносова.

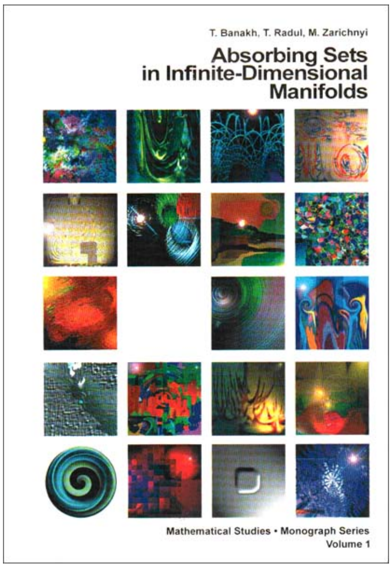
Повернення до Львова

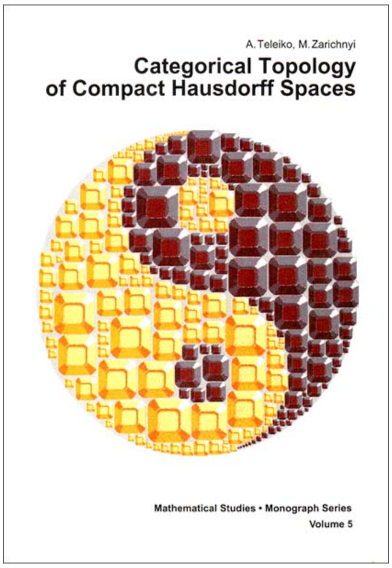
У 1982 році після закінчення цільової аспірантури Михайло Зарічний повернувся до Львова. Його зачислили асистентом на новостворену кафедру математичного моделювання. Також надали університетське житло в однокімнатній квартирі сімейного гуртожитку по вул. Левітана. В кінці 1982 року Зарічного перевели на посаду асистента кафедри алгебри і топології. Дружина Л. Є. Базилевич влаштовалась на роботу в Інститут прикладних проблем механіки і математики АН УРСР.

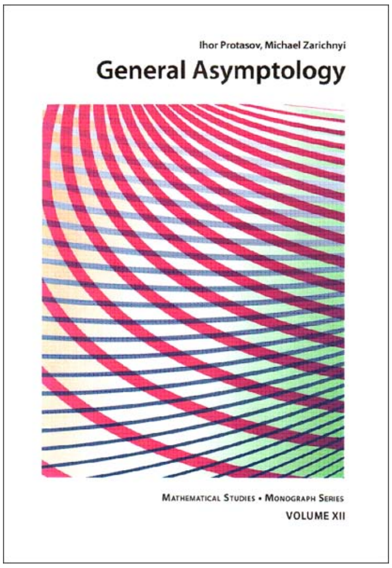
На кінець 80-х років припав процес національного відродження, який почався з горбачовської перебудови і завершився розвалом Радянського Союзу у 1991 році. У руслі державотворчих процесів відбувалася також самоорганізація математичного середовища, в якій М. М. Зарічний брав активну участь. Він був одним із засновників Львівського математичного товариства та його друкованого органу — журналу "Математичні студії", перший том якого вийшов у 1991 році. Разом з львівським видавцем В. Дмитерком Зарічний перетворив збірник наукових праць, яким спочатку були "Математичні студії", у повноцінний науковий журнал.

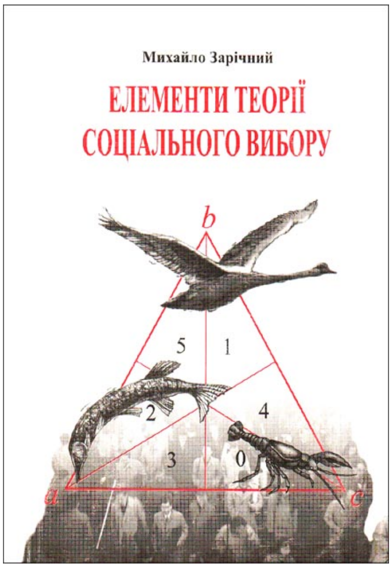


Перший випуск журналу "Математичні студії"









М. М. Зарічний був засновником і багатолітнім редактором монографічної серії "Математичних студій" видавництва VNTL-Класика. Цю серію, яка налічує 17 томів, започаткувала монографія "Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds" Т. Банаха, Т. Радула та М. Зарічного, яка побачила світ у 1997 році. П'ятим томом цієї серії стала монографія М. Зарічного та його учня А. Телейка "Categorical topology of compact Hausdorff spaces", яка є одним із базових підручників з категорної топології, а 12-м томом – монографія "General asymptology", яку написав Зарічний у співавторстві з відомим київським математиком І. В. Протасовим. Ця монографія, поряд з відомою книгою Джона Рое "Lectures in coarse geometry", заклала основи асимптотичної топології і зафіксувала пріоритет української науки у цій новій ділянці математики, що бурхливо розвивається з кінця 80-х років XX століття.

М. М. Зарічний завжди був і залишається відкритим до нових ідей та віянь. У Львівському національному університеті початок XXI століття ознаменувався бурхливим ростом потуги механіко-математичного факультету, зокрема відкриттям нових спеціалізацій: математичної статистики, математичної економіки й економетрики. Як запрошений лектор на літніх школах з математичної економіки, Михайло Зарічний підготував цикл лекцій з теорії соціального вибору і видав відповідний підручник, який користується заслуженою популярністю у студентів та викладачів факультету.

Топологічний семінар у Львові

На відміну від своїх московських колег, які в 90-х залишили СРСР й емігрували на Захід, І. Гуран і М. Зарічний повернулися до Львова з амбітною метою — відродити топологію у Львові і створити потужну топологічну школу. Інструментом досягнення цієї мети став топологічний семінар, заснований І. Гураном у 1981 році. У 1983 році, після повернення з Московської аспірантури, до керівництва семінаром підключився М. М. Зарічний.

Топологічна прогулянка. Привал біля гори Парашка, 1995 рік

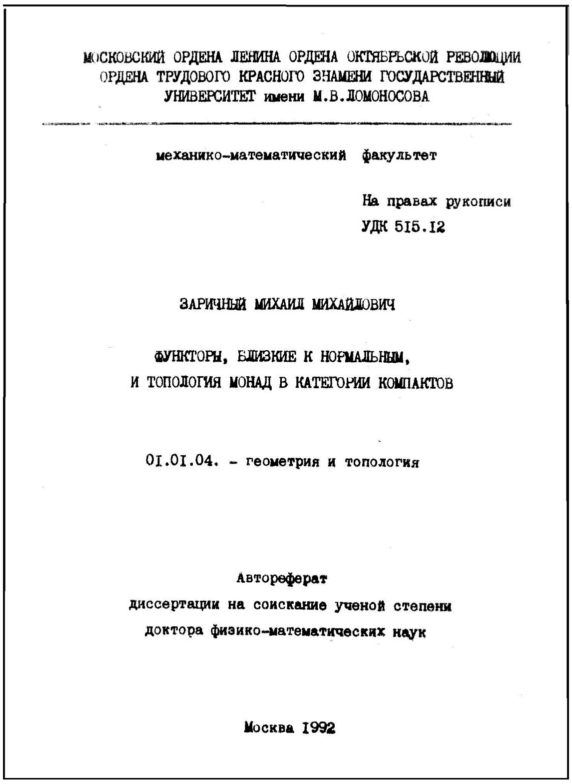
Завдяки харизмі та неформальності його керівників, топологічний семінар мав магічну притягальну силу для студентів та аспірантів математичного факультету. Крім звичайних засідань семінару в університеті (а часом і в кав'ярні "Шкоцька" чи "Рома"), важливу (а може вирішальну) роль відігравали колективні виходи на природу, так звані "топологічні прогулянки", на яких відбувався значно тісніший контакт між студентами та викладачами.

Засідання топологічного семінару

Серед активних учасників топологічного семінару було багато цікавих особистостей: Т. Банах, Т. Радул, О. Гутік, О. Никифорчин, Є. Пенцак, А. Телейко, О. Піхурко, О. Равський, Р. Кожан, Н. Пирч, І. Стасюк, Н. Мазуренко, О. Гринів, О. Червак, С. Бардила та багато інших.

Спільне засідання Львівського та Рижського топологічних семінарів

Двадцяту річницю заснування Львівського топологічного семінару відзначили спеціальним випуском журналу “Topology and its Applications” – найавторитетнішого топологічного журналу в світі. Проблемам Львівського топологічного семінару також присвячений розділ книги “Open Problem in Topology II” видавництва Elsevier, яка вийшла у світ 2007 року.



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.12

ЗАРИЧНЫЙ МИХАИЛ МИХАЙЛОВИЧ

ФУНКТОРЫ, БЛИЗКИЕ К НОРМАЛЬНЫМ, И ТОПОЛОГИЯ МОНАД В КАТЕГОРИИ КОМПАКТОВ

01.01.04. – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 1992

Автореферат докторської дисертації М. М. Зарічного

Крім топологічного семінару, М. Зарічний був одним зі співзасновників семінару з теорії категорій і теорії топосів (який відвідували також деякі алгебристи, зокрема М. Я. Комарницький та В. І. Андрійчук). Набуті на цьому семінарі знання М. Зарічний застосовував для вивчення функторів, які природно виникають у топології. Зокрема, він зайнявся дослідженням монадичних функторів, тобто функторів, які доповнюються до монади. Отримані у цьому напрямі результати стали основою докторської дисертації “Функторы, близкие к нормальным, и топология монад в категории компактов”, яку М. Зарічний захистив 1992 року в Московському державному університеті.

Закордонні стажування

У 90-х–2000-х роках М. Зарічний мав декілька тривалих закордонних стажувань. Зокрема, у 1996 році півроку проходив стажування в Університеті Саскачевану в Канаді, де співпрацював з відомими математиками Чиґоґідзе та Тимчатином. У 2000—2002 і пізніше в 2009 і 2012 перебував на піврічних стажуваннях в Університеті Флориди в Сполучених Штатах Америки, де співпрацював з Александром Дранішніковим (за деякими оцінками, найсильнішим топологом сучасності).

М. Зарічний, E. Tymchatyn, A. Chigogidze

М. Зарічний, A. Dranishnikov

Із кожного стажування Зарічний привозив нові ідеї та нові напрями досліджень, які вдало приживалися та розвивалися на львівському ґрунті.

Адміністративна робота

У 1992 році М. Зарічний, як молодого доктора наук (у віці 34 років) обрали завідувачем кафедри алгебри і топології. Під його керівництвом кафедра зазнала стрімкого розвитку. Зокрема, станом на 2002 рік на кафедрі вже працювало 5 докторів наук: А. Андрійчук, О. Артемович, Т. Банах, М. Зарічний, М. Комарницький. Тому у 2003 році керівництво університету прийняло рішення про поділ кафедри на кафедру алгебри і логіки та кафедру геометрії і топології, незмінним завідувачем якої (до 2015 року) був М. М. Зарічний.

У 2004 році М. М. Зарічного обирали деканом механіко-математичного факультету. Під його керівництвом механіко-математичний факультет пережив (без значних кадрових втрат) дві революції (Помаранчеву 2004/2005 р. та Революцію Гідності 2013/2014). У 2016 році Михайло Зарічний перейшов на посаду професора кафедри геометрії і топології, а також продовжив працювати професором математики у Жешувському університеті (Польща).

М. М. Зарічний, декан механіко-математичного факультету, 2015 рік

Математичні результати М. М. Зарічного

Як відомо, математиків умовно можна поділити на дві категорії: одним краще дається розв'язання конкретних задач, іншим — створення теорії та нових понять. Михайло Зарічний поєднує в собі обидва типи, хоча завдяки ерудиції та широті мислення тяжіє до створення теорій, робить це легко та граціозно — лаконічними мазками виокремлює ключові поняття і результати, залишаючи широке поле діяльності своїм послідовникам. Йому належать фундаментальні концепції та результати в нескінченно-вимірній топології, топологічній теорії функторів, асимптотичній топології, теорії вимірів, теорії продовження метрик, нечіткій топології, тропічній математиці.

Ще в аспірантські роки під впливом В.В. Федорчука та Є.В. Щепіна Зарічний зацікавився функторіальними конструкціями в топологічних категоріях. Крім згаданих раніше результатів про збереження ANR-компактів, він незабаром доводить, що степеневий функтор є єдиним мультиплікативним нормальним функтором, а також доводить характеризацію функторів G-симетричного степеня як відкритих (еквівалентно, бікомутативних) функторів скінченного степеня [18, 36]. Під впливом М. Я. Комарницького Зарічний розглядає нормальні та близькі до них функтори з точки зору монадології. Він, зокрема, характеризує монаду суперрозширення та її алгебри [17], досліджує геометрію відображення множення різних монад, породжених нормальними та близькими до них функторами [21, 23]. Узагальнюючи результати Михайла Зарічного про ітеровані суперрозширення, їхнє поповнення та компактифікації [12, 16], В. В. Федорчук запровадив поняття цілком метризовного та досконало метризовного функтора і дослідив ці поняття з точки зору нескінченновимірної топології.

Низка результатів М. Зарічного пов'язана з теорією поглинаючих множин у нескінченновимірних многовидах [43, 44, 49, 52, 53, 54, 56], яку розвинули М. Бествіна та Є. Могільський. У цьому напрямі інтенсивно працюють львівські математики Т. Банах, Т. Радул, М. Зарічний, а також відомий французький математик Р. Коті, який неодноразово бував у Львові. Михайло Зарічний побудував універсальне відображення передгільбертових просторів [45], яке дало змогу розв'язати деякі проблеми в теорії поглинаючих просторів, зокрема, побудувати універсальні простори в абсолютних борелівських і проективних класах. Відповідні результати він одержав також і у скінченновимірному випадку [49].

Польський математик Чеслав Бессаґа під час свого виступу на топологічному семінарі сформулював задачу про існування лінійного оператора продовдення (псевдо)метрик. Повний розв'язок цієї задачі одержав Т. Банах, а незабаром М. Зарічний запропонував коротке доведення [48], яке ґрунтується на одному результаті Бессаґи і Пелчинського. Пізніше Зарічний і Е. Тимчатин [74] довели існування операторів продовження для псевдометрик зі змінною областю визначення. У цій тематиці багато важливих результатів одержав І. Стасюк.

Конструкцію універсального простору [53], яку М. Зарічний запропонував для когомологічного виміру, канадсько-американський математик А. Чиґоґідзе розвинув для всіх так званих екстенсіональних вимірів. Чиґоґідзе і Зарічний отримали важливі результати [57] у теорії екстенсіонального виміру, зокрема довели метризовність [L]-вимірних компактів, що є абсолютними околовими екстензорами у вимірі L].

М. Зарічний побудував також неметризовний аналог згаданого вище універсального відображення [28]. Т. Банах і Д. Реповш побудували лінійну реалізацію цього аналога (вони назвали його universal Zarichnyi map) та показали відсутність у нього локальної самоподібності.

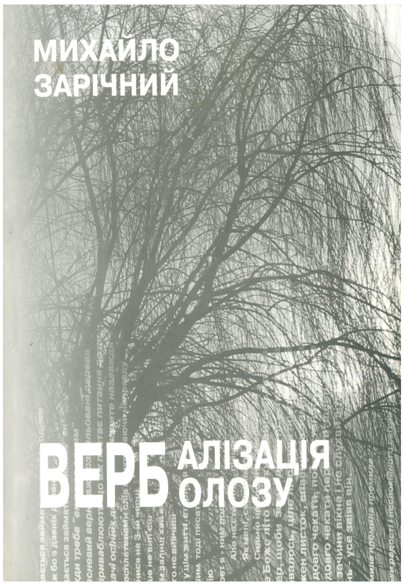
У кінці 90-х років Зарічний почав займатися асимптотичною топологією, основи якої заклав видатний американський математик А. Дранішніков. У спільній статті [71] "Universal spaces for asymptotic dimension", опублікованій 2004 в журналі "Topology and its Application", побудовано універсальний простір в теорії асимптотичного виміру Ґромова. Один з наслідків цієї конструкції — рівність асимптотичних вимірів asdim = asind = asInd – аналог класичного результату теорії виміру для підмножин евклідових просторів. Разом з Я. Куцабом М. Зарічний розвинув теорію асимптотичного степеневого виміру [117]. З ініціативи І. Протасова опубліковано монографію „General Asymptology", де розглянуто загальні аспекти асимптотичної топології.

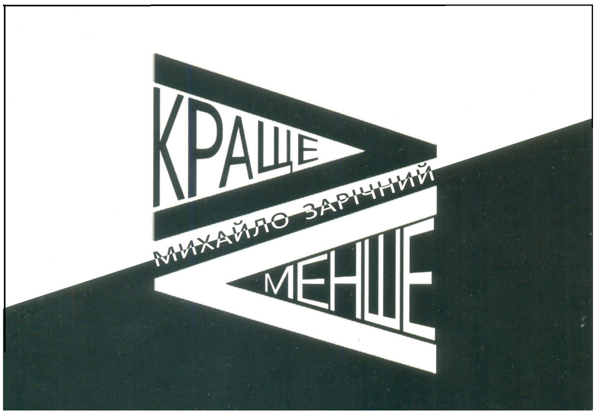
У математичній економіці, зокрема, у теорії корисності та теорії рівноваги, важливу роль відіграють конструкції неадитивних мір. М. Зарічний та О. Никифорчин [94] досліджували функтор ємностей у категорії компактів і довели для цього функтора аналоги властивостей, відомих раніше для функтора ймовірнісних мір, зокрема, довели відкритість функтора ємностей [107]. Разом зі своїм учнем Р. Кожаном, професором Ворікського Університету, Зарічний розглянув ігри зі значеннями в ємностях і довів для них аналоги теорем про рівновагу Неша для ігор зі змішаними стратегіями [95]. Цю тематику пізніше успішно продовжив Т. Радул.

Інший клас неадитивних мір, які розглядав М. Зарічний, — ідемпотентні міри або міри Маслова. Серед результатів,які одержані у цьому напрямі, – теорема про відкриті відображення ідемпотентних мір [102, 103], а також теорема [136] про існування інваріантних ідемпотентних мір для ітерованих систем функцій (разом з Н. Мазуренко).

Поезія та музика

Михайло Зарічний є наочним втіленням крилатого вислову Вейєрштрасса "неможливо бути добрим математиком, не будучи поетом у душі", а поетом Зарічний є не лише у душі. В його поетичному доробку три друковані поетичні збірки: "Вербалізація Верболозу" (2008), "Краще Менше" (2013), "Просто Сто Сторінок" (2017), які жваве обговоювали в літературному середовищі. Феномену поетичної творчості Зарічного присвячено розділ кандидатської дисертації Юлії Починок "Українська експериментальна поезія кінця XX – початку XXI століття: текст, контекст, інтертекст", яку вона захистила 2015 року на кафедрі теорії літератури та порівняльного літературознавства у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Про творчість Зарічного писали Микола Ільницький, Андрій Содомора, Іван Лучук, Валерій Бедрик та Юрій Горблянський.

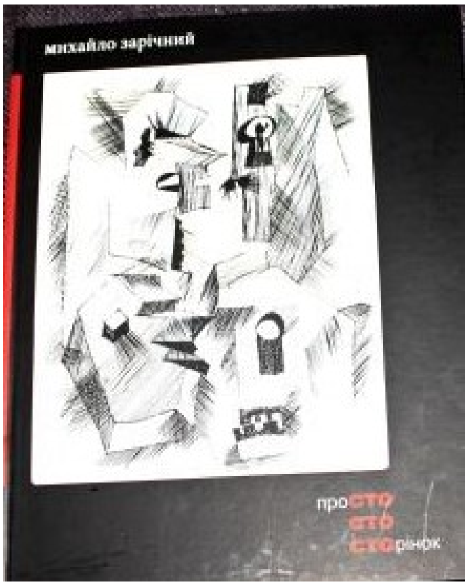


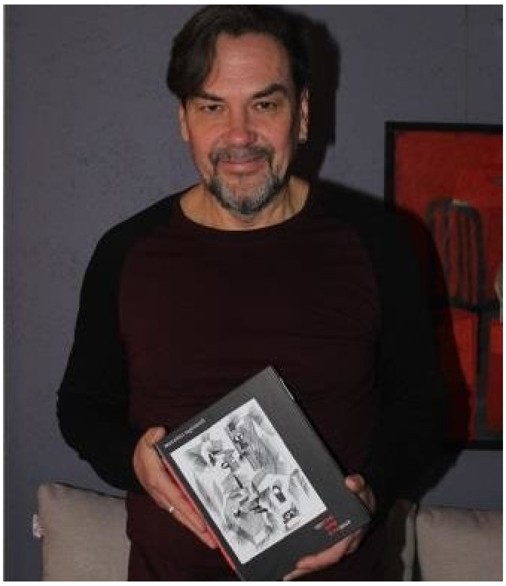


Ось відгук про творчість М. Зарічного живого класика сучасної української літератури Юрія Андруховича: "Збірка поезій Михайла Зарічного "Просто сто сторінок", чи, як її встигли любовно наректи шанувальники, "Три по сто", стала для мене абсолютним відкриттям року. Автор, видатний учений-математик (і саме в цій іпостасті визнаний та високо поцінований міжнародною науковою спільнотою), заявив про себе і як про надзвичайно витонченого, винахідливого та проникливого поета. Неоаванґардне колажування мов, оголення слів до їхньої суті і вільні польоти в космосах постсучасності — все це робить книжку Зарічного суцільним поетичним шедевром".

Михайло Зарічний активно розвиває жанр так званої візуальної поезії (збірки "Я ПRO Я"), чому було присвячено декілька виставок у Львівському університеті (як кажуть, краще раз побачити, ніж 100 разів почути).

Небуденними є його прозові твори: (як називає його сам автор) політнекоректний роман-плагіат “Львов/Lwow” та збірка “Університетських оповідок”, що була опублікована в літературному журналі “Дзвін” у 2017 році.





Михайло Михайлович не уявляє свого життя без музики та музикування. Грати на гітарі він почав ще у школі і з того часу не розлучається з нею. Михайло Зарічний пише пісні, які виконує на власних концертах. На мотиви однієї мелодії Михайла Зарічного відомий львівський композитор Богдан Котюк написав симфонічне рондо “Повертаюсь у Львів”, яке виконував камерний оркестр “Віртуози Львова”. Ще одним результатом творчої співпраці Михайла Зарічного та Богдана Котюка стали дві органні епітафії: Іванові Франкові до слів його поезії “Моїй не моїй” та Джонові Леннонові в дуеті органа з флейтою Пана (запис відповідного диску зроблено у вересні 2016 року у Будинку органної та камерної музики).

Громадська діяльність

Від 2003 року Михайло Зарічний є членом Ротарі-клубу “Львів–Леополіс”, а в 2013/2014 році був його президентом. Варто зазначити, що членами Ротарі-клубу свого часу був видатний математик Стефан Банах. У 2015 році професора Зарічного обрали почесним амбасадором міста Львова (2015–2017). Михайло Зарічний також є активним членом математичної комісії НТШ, а свого часу він її очолював. Увійшов до наглядової ради Українського математичного товариства і багато зусиль віддає справі відновлення Львівського математичного товариства.

Кода

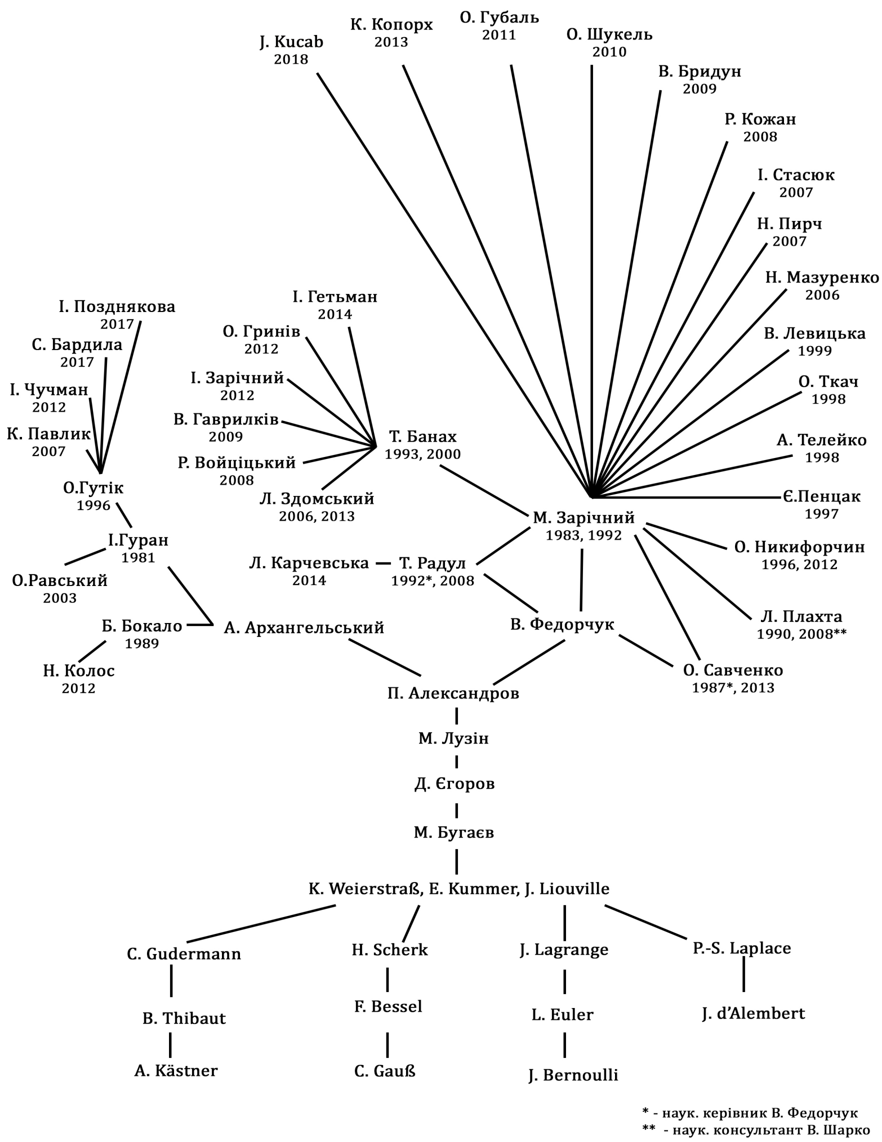
Тож побажаємо Михайлу Михайловичу доброго здоров'я та довгих років життя!

А якщо лаконічно, то – цінуємо, поважаємо, любимо і захоплюємося!

Тарас Банах, Богдан Бокало, Вікторія Бридун, Олена Гринів, Ігор Гуран, Олег Гутік, Наталія Мазуренко, Катерина Максимик, Олег Никифорчин, Ярослав Притула, Олександр Равський, Ярослав Холявка

Кандидатські дисертації, захищені під керівництвом М. М. Зарічного

1. Л. П. Плахта, *Гомологии функторов конечной степени, сохранение многообразий и простого гомотопического типа*, Москва, 1990.
2. Т. О. Банах, *Сильна універсальність в локально-опуклих просторах і розшаруваннях нескінченновимірних многовидів*, Львів, 1993.
3. О. Р. Никифорчин, *Ймовірнісні міри, вимірні відображення і опуклість: категорні властивості*, Львів, 1996.
4. Є. Я. Пенцак, *Зліченні прямі границі не локально компактних абсолютних екстензорів та сильна універсальність*, Львів, 1997.
5. О. Й. Ткач, *Функціональні простори, гомеоморфні модельним просторам нескінченновимірної топології*, Львів, 1998.
6. А. Б. Телейко, *Тополого-алгебраїчні структури в категорній топології компактних просторів*, Львів, 1998.
7. В. С. Левицька, *Алгебро-топологічні властивості функторів, породжених функціональними просторами*, Київ, 1999.
8. Н. І. Мазуренко, *Поглинаючі системи в гіперпросторах, пов'язані з виміром Хаусдорфа*, Львів, 2006.
9. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим просторів і відображень*, Львів, 2007.
10. І. З. Стасюк, *Продовження метричних структур*, Львів, 2007.
11. Р. В. Кожан, *Категорні властивості просторів ймовірносних мір та гіперпросторів включення*, Львів, 2008.
12. В. Л. Бридун, *Асимптотичні властивості алгебраїчних структур*, Львів, 2009.
13. О. Б. Шукель, *Геометричні властивості функторів в асимптотичній категорії*, Київ, 2010.
14. О. Б. Губаль, *Адитивні та неадитивні міри на ультраметричних просторах*, Івано-Франківськ, 2011.
15. К. М. Копорх, *Топології Вієторіса та Вайсмана на просторах функцій*, Київ, 2013.
16. J. Kucab, *Asymptotyczne własności przestrzeni metrycznych generowane przez potęgowe funkcje kontroli*, Kraków, 2018.



Генеалогічне дерево львівської топологічної школи

Докторські дисертації, консультантом яких був М. М. Зарічний

1. Т. О. Банах, *Сильна універсальність та її застосування до топологічної класифікації опуклих множин у лінійних топологічних просторах*, Харків, 2000.
2. Т. М. Радул, *Нескінченновимірні простори та відображення в категорній топології*, Київ, 2008.
3. О. Р. Никифорчин, *Простори неадитивних мір: категорії і топологічні властивості*, Київ, 2012.
4. О. Г. Савченко, *Метричні та рівномірні властивості функторів у топологічних категоріях*, Київ, 2013.

Наукові монографії

1. М. М. Зарічний, *Топологія функторів і монад в категорії компактів*, ІСДО, Київ, 1993, 108 с.
2. T. Banakh, T. Radul, M. Zarichnyi, *Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds*, Math. Studies, **1**, VNTL Publ., Львів, 1996, 232 p.
3. A. Teleiko, M. Zarichnyi, *Categorical topology of compact Hausdorff spaces*, Math. Studies, **5**, VNTL Publ., 1999, 256 p.
4. I. Protasov, M. Zarichnyi, *General asymptology*, Math. Studies, **12**, VNTL Publ., 2007, 220 p.

Навчальні підручники та посібники

1. І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, *Методичні вказівки до розв'язування задач з диференціальної геометрії* (*Теорія кривих і поверхонь*), ЛДУ, Львів, 1990, 40 с.
2. І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, *Диференціальна геометрія і топологія*, ІСДО, Київ, 1991, 92 с.
3. І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, *Елементи теорії топологічних груп*, ІСДО, Київ, 1992, 76 с.
4. Б. М. Бокало, І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, *Збірник задач з курсу диференціальної геометрії і топології (Загальна топологія),* ІСДО, Київ, 1994, 72 с.
5. Б. М. Бокало, І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, *Елементи теорії многовидів і алгебраїчної топології (Задачі і вправи)*, Вид-во ЛДУ, Львів, 1995, 44 с.
6. Л. Є. Базилевич, М. М. Зарічний, *Вступ до топології нескінченновимірних многовидів,* ІЗМН, Київ, 1996, 40 с.
7. М. Зарічний, *Елементи теорії соціального вибору*, Львів, 2001, 160 с.

Наукові статті

1982

1. М. М. Заричный, *Свободные топологические группы абсолютных окрестностных ретрактов и бесконечномерные многообразия*, ДАН СССР **266** (1982), no. 3, 541–544; **English version**: M. M. Zarichnyj, *Free topological groups of absolute neighborhood retracts and infinite-dimensional manifolds*, Sov. Math., Dokl. **26** (1982), 367–371.
2. М. М. Заричный, *Функтор* λ_n *и абсолютные ретракты*, Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех. (1982), no. 4, 15–19.
3. М. М. Заричный, *О подфункторах функтора суперрасширения*, 1982, Деп. в ВИНИТИ, №316–82.

1983

4. М. М. Заричный, *О гиперсимметрических степенях суперкомпактов*, Вестн. МГУ. Мат. Мех, (1983), no. 1, 18–21.
5. М. М. Заричный, *Сохранение* $ANR(\mathfrak{M})$*-пространств и бесконечномерных многообразий некоторыми ковариантными функторами*, ДАН СССР, **271** (1983), 524–528; **English version**: M. M. Zarichnyj, *Preservation of* $ANR(\mathfrak{M})$*-spaces and infinite-dimensional manifolds by certain covariant functors*, Sov. Math., Dokl. **28** (1983), 105–109.

1984

6. М. М. Заричный, *Фундаментальная группа суперрасширения* $\lambda_n X$, В кн. Отображения и функторы, Изд-во МГУ, Москва, 1984, сс. 24–31.
7. И. И. Гуран, М. М. Заричный, *Топология Уитни и ящичные произведения*, ДАН УССР. Сер. А. (1984), no. 11, 5–7.
8. М. М. Заричный, *Бесконечномерные многообразия, возникающие из прямых пределов ANR'ов*, УМН **39** (1984), no. 2(236), 153–154; **English version**: M. M. Zarichnyj, *Infinite-dimensional manifolds arising from direct limits of ANR's*, Russ. Math. Surv. **39** (1984), no. 2, 213–214. DOI: 10.1070/RM1984v039n02ABEH003157

1985

9. М. М. Заричный, *Об одном результате Я. ван Милла и А. Шрийвера*, Вестн. МГУ. Мат. Мех. (1985), no. 2, 6–8.
10. М. М. Зарічний, *Симетричні добутки, що є нескінченновимірними многовидами*, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **24** (1985), 65–69.

1986

11. М. М. Зарічний, *Категорія нормальних функторів*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **26** (1986), 52–56.
12. М. М. Заричный, *Итерированные суперрасширения*, В кн. Общая топология. Отображения топологических пространств, Изд-во МГУ, Москва, 1986, с. 45–59.
13. М. М. Заричный, *О монадичных функторах конечной степени*, В кн. Вопросы геометрии и топологии, Петрозаводск, 1986, с. 24–30.

1987

14. М. М. Зарічний, *Групи автоморфізмів і факторизація нормальних функторів*, Вісн. Львів. Ун-ту. Сер. мех.-мат. **28** (1987), 64–67.
15. М. М. Заричный, *Об операторах внутренности в топосе пучков*, В кн. Топологические Структуры и их отображения. Издв-о Латвийского гос. Унив., Рига, 1987, с. 62–65.
16. Т. О. Банах, М. М. Заричный, *О компактификациях функтора итерированного гиперпространства*, Изв. вузов. Матем. (1987), no. 10, 3–6; **English version**: T. O. Banakh and M. M. Zarichnyj, *Compactifications of functor of iterated hyperspace*, Sov. Math. **31** (1987), no. 10, 1–4.
17. М. М. Заричный, *Монада суперрасширения и ее алгебры*, Укр. мат. журн. **39** (1987), no. 3, 303–309; **English version**: M. M. Zarichnyi, *The superextension monad and its algebras*, Ukr. Math. J. **39** (1987), no. 3, 232–237. DOI: 10.1007/BF01057224
18. М. М. Заричный, *Мультипликативный нормальный функтор — степенной*, Матем. заметки **41** (1987), no. 1, 93–100; **English version**: M. M. Zarichnyj, *A multiplicative normal functor is a power functor*, Math. Notes **41** (1987), no. 1, 58–61. DOI: 10.1007/BF01159531

1988

19. М. М. Зарічний, *Функтори в категорії компактів, що зберігають однорідність*, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **30** (1988), 30–32.
20. М. М. Заричный, Л. П. Плахта, *О поднятии нормальных функторов конечной степени на категорию PL*, Докл. АН УССР (1988), no. 9, 5–9.

1989

21. М. М. Заричный, *О мягкости умножений в суперрасширениях*, В кн. Общая топология. Пространств и отображения, Изд-во МГУ, Москва, 1989, с. 70–76.

1990

22. М. М. Зарічний, О. І. Ткач, *Про топологію простору шарувань на гладкому многовиді*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **34** (1990), 73–75.
23. М. М. Заричный, *Профинитная мультипликативность функторов и характеризация проективных монад в категории компактов*, Укр. мат. журн. **42** (1990), no. 9, 1271–1275; **English version**: M. M. Zarichnyi, *Profinite multiplicativity of functors and characterization of projective monads in the category of compact spaces*, Ukr. Math. J. **42** (1990), no. 9, 1131–1134. DOI: 10.1007/BF01056611
24. M. M. Zarichnyi, *On covariant topological functors, I*, Quest. Answers Gen. Topology **8** (1990), no. 2, 317–369.
25. М. М. Заричный, В. В. Федорчук, *Ковариантные функторы в категориях топологических пространств*, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., **28**, ВИНИТИ, Москва, 1990, с. 47–95; **English version**: M. M. Zarichnyi and V. V. Fedorchuk, *Covariant functors in categories of topological spaces*, J. Soviet Math. **53** (1991), no. 2, 147–176. DOI: 10.1007/BF01098256

1991

26. М. М. Зарічний, *Продовження природних перетворень на категорії Клейслі*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **36** (1991), 45–49.
27. М. М. Зарічний, *Функтори зі скінченними носіями і n-шейпи*, Мат. Студ. **1** (1991), 67–73.
28. М. М. Заричный, *Функторы, порожденные универсальными отображениями инъективных прелелов последовательностей компактом Менгера*, Математика. Научные Труды. (Изд-во Латвийского ун-та, Рига) **562** (1991), 95–102.
29. М. М. Заричный, *Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов*, Матем. сб. **182** (1991), no. 9, 1261–1280; **English version**: M. M. Zarichnyi, *Absolute extensors and the geometry of multiplication of monads in the category of compacta*, Math. USSR-Sb. **74** (1993), no. 1, 9–27. DOI: 10.1070/SM1993v074n01ABEH003331
30. И. И. Гуран, М. М. Заричный, *Пространства непрерывных функций и ящичные произведения*, Изв. вузов. Матем. (1991), no. 11, 22–24; **English version**: I. I. Guran and M. M. Zarichnyj, *Spaces of continuous functions and box products*, Soviet Math. (Iz. VUZ) **35** (1991), no. 11, 22–24.
31. M. M. Zarichnyi, *On covariant topological functors, II*, Quest. Answers Gen. Topology **9** (1991), no. 1, 1–32.
32. M. Zarichnyi, *Preservation of some shape properties by functors in the category of compacta*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **39** (1991), no. 3–4, 235–239.
33. M. Zarichnyi, *Distributivity law for normal triples in the category of compacta andlifting of functors fo the categories of algebras*, Comment. Math. Univ. Carol. **32** (1991), no. 4, 785–790.

1992

34. M. Zarichnyi, *On some categorical properties of probability measures*, Mathematics (Latv. Univ., Riga) **576** (1992), 81–88.
35. М. М. Зарічний, *Характеризація некомпактних $AE(n)$-просторів*, Укр. мат. журн. **44** (1992), no. 7, 986–988; **English version**: M. M. Zarichnii, *Description of noncompact $AE(n)$-spaces*, Ukr. Math. J. **44** (1992), no. 7, 891–892. DOI: 10.1007/BF01056143
36. М. М. Заричный, *Характеризация функторов G-симметрической степени и продолжения функторов на категории Клейсли*, Матем. заметки **52** (1992), no. 5, 42–48; **English version**: M. M. Zarichnyi, *Characterization of functors of G-symmetric power and extension of functors to the Kleisli category* Math. Notes **52** (1992), no. 5, 1107–1111. DOI: 10.1007/BF01236617
37. O. V. Pikhurko and M. M. Zarichnyi, *On lifting of functors to the Eilenberg-Moore category of the triple generated by the functor C_pC_p*, Укр. мат. журн. **44** (1992), no. 9, 1289–1291; **Reprinted version**: O. V. Pikhurko and M. M. Zarichnyy, *Lifting functors to Eilenberg-Moore category of monad generated by functor C_pC_p*, Ukr. Math. J. **44** (1992), no. 9, 1181–1183. DOI: 10.1007/BF01058384
38. M. M. Zarichnyi, Open normal functors with countable kernels // Application of topology in algebra and differential geometry (Tartu, 1991). Tartu Ulik. Toim. 940 (1992), 91–94.

39. М. М. Зарічний, *Деякі гомотопічні властивості функторів зі скінченними носіями*, Укр. мат. журн. **44** (1992), no. 11, 1618–1620; **English version**: M. M. Zarichnii, *Certain homotopic properties of functors with finite supports*, Ukr. Math. J. **44** (1992), no. 11, 1491–1493. DOI: 10.1007/BF01071526

1993

40. Л. Є. Базилевич, М. М. Зарічний, *Про один приклад у теорії м'яких відображень*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **38** (1993), 39–41.
41. M. Zarichnyi, *On universal maps and spaces of probability measures with finite supports*, Мат. Студ. **2** (1993), 78–82.

1994

42. Л. Є. Базилевич, М. М. Зарічний, *Про деякі псевдовнутрішності у гіперпросторі гільбертового куба*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **40** (1994), 26–28.

1995

43. M. Zarichnyi, *Universal maps and absorbing sets for countable-dimensional spaces*, Mat. Stud. **4** (1995), 85–94.
44. M. Zarichnyi, *Some problems related to universality of maps in infinite-dimensional topology*, Mat. Stud. **4** (1995), 111–114.
45. M. Zarichnyi, *Universal map of σ onto Σ and absorbing sets in the classes of absolute Borelian and projective finite-dimensional spaces*, Topology Appl. **67** (1995), no. 3, 221–230. DOI: 10.1016/0166-8641(94)00044-1
46. М. М. Заричный, Т. Н. Радул, *Монады в категории компактов*, УМН **50** (1995), no. 3(303), 83–108; **English version**: M. M. Zarichnyj and T. N. Radul, *Monads in the category of compacta*, Russ. Math. Surv. **50** (1995), no. 3, 549–574. DOI: 10.1070/RM1995v050n03ABEH002563

1996

47. E. Pentsak and M. Zarichnyi, *On strongly universal k_ω-spaces related to transfinite inductive and cohomological dimension*, Methods Funct. Anal. Topol. **2** (1996), no. 3, 122–127.
48. M. Zarichnyi, *Regular linear operators extending metrics: a short proof*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **44** (1996), no. 3, 267–269.
49. М. М. Заричный, *Универсальные n-мягкие отображения n-мерных пространств в абсолютных борелевских и проективных классах*, Матем. заметки **60** (1996), no. 6, 845–850. DOI: 10.4213/mzm1902; **English version**: M. M. Zarichnyi, *Universal n-soft maps of n-dimensional spaces in absolute Borel and projective classes*, Math. Notes **60** (1996), no. 6, 638–641. DOI: 10.1007/BF02305155
50. М. М. Зарічний, *Множення в суперрозширеннях і часткові добутки*, Алгебра і топологія, Вид-во Львів. ун-ту, Львів, 1996, с. 79–83.
51. М. М. Зарічний, А. Б. Телейко, *Напівгрупи і монади*, Алгебра і топологія, Вид-во Львів. ун-ту, Львів, 1996, с. 84–93.

1997

52. L. Bazylevych, O. Tkach, and M. Zarichnyi, *Problems on absorbing sets in hyperspace theory and the theory of functions*, Mat. Stud. **7** (1997), no. 2, 214–216.
53. M. Zarichnyi, *Absorbing sets in the Hilbert cube related to cohomological dimension*, Topology Appl. **80** (1997), no. 1-2, 195–200. DOI: 10.1016/S0166-8641(97)00011-4
54. M. M. Заричный, *Поглощающие множества для n-мерных пространств в абсолютных борелевских и проективных классах*, Матем. сб. **188** (1997), no. 3, 113–126. DOI: 10.4213/sm212; **English version**: M. M. Zarichnyi, *Absorbing sets for n-dimensional spaces in absolute Borel and projective classes*, Sb. Math. **188** (1997), no. 3, 435–447. DOI: 10.1070/SM1997v188n03ABEH000212

1998

55. M. M. Заричный, *Сильно счетномерные резольвенты сигма-компактных групп*, Фундамент. и прикл. матем. **4** (1998), no. 1, 101–108.
56. T. Radul and M. Zarichnyi, *Nonexistence of absorbing set for a transfinite extension of covering dimension*, Mat. Stud. **9** (1998), no. 1, 94–98.
57. A. Chigogidze and M. Zarichnyi. *On absolute extensors module a complex*, Topology Appl. **86** (1998), no. 2, 169–178. DOI: 10.1016/S0166-8641(97)00115-6

1999

58. M. Зарічний, В. Левицька, *Функторіальна топологізація простору кусково-лінійних відображень*, Прикладна матем. Вісн. ун-ту "Львівська політехніка" **364** (1999), 216–218.

2000

59. M. Zarichnyi, *Extension property and ANR-systems*, Topology Appl. **107** (2000), no. 1–2, 207–214. DOI: 10.1016/S0166-8641(99)00094-2
60. T. Banakh and M. Zarichnyi, *The interval* $[0,1]$ *admits no functorial embedding into a finite-dimensional or metrizable topological group*, Serdica Math. J. **26** (2000), no. 1, 1–4.

2001

61. V. Levytska and M. Zarichnyi, *Spaces of nonexpanding maps: categorical properties*, Mat. Stud. **16** (2001), no. 1, 3–12.
62. A. Chigogidze, A. Karasev, and M. Zarichnyi, *Topological semigroups and universal spaces related to extension dimension*, Mat. Stud. **16** (2001), no. 2, 195–198.
63. M. M. Зарічний, С. О. Іванов, *Гіперпростір опуклих компактних підмножин Тихоновського куба*, Укр. мат. журн. **53** (2001), no. 5, 698–701; **English version**: M. M. Zarichnyi and S. O. Ivanov, *On the hyperspace of convex compact subsets of the Tikhonov cube* Ukr. Math. J. **53** (2001), no. 5, 809–813. DOI: 10.1023/A:1012590603017

2002

64. N. M. Pyrch and M. M. Zarichnyi, *On a generalization of Okunev's construction*, Алгебраїчні структури та їх застосування, Ін-т математики НАН України, Київ, 2002, с. 346–350.
65. E. D. Tymchatyn and M. M. Zarichnyi, *A note on a question of Nagata*, Mat. Stud. **18** (2002), no. 2, 177–178.

2003

66. A. Chigogidze and M. M. Zarichnyi, *Universal Noebeling spaces and pseudo-boundaries of Euclidean spaces*, Mat. Stud. **19** (2003), no. 2, 193–200.
67. I. Guran and M. Zarichnyi, *Universal countable-dimensional topological groups*, Topology Appl. **128** (2003), no. 1, 55–61. DOI: 10.1016/S0166-8641(02)00085-8
68. V. Frider and M. Zarichnyi, *Hyperspace functor in the coarse category*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **61** (2003), 78-86.
69. M. Zarichnyi, *Asymptotic category and spaces of probability measures*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **61** (2003), 211–217.

2004

70. M. M. Zarichnyi, *Space of probability measures and absolute extensors in the asymptotic category*, Functional Analysis and its Applications: Proc. of the International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110th Anniversary of Stefan Banach, May 28–31, 2002, Lviv, Ukraine Eds: V. Kadets and W. Żelazko. North-Holland Mathematics Studies, **197**, 2004, pp. 311–316. DOI: 10.1016/S0304-0208(04)80179-8
71. A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension*, Topology Appl. **140** (2004), no. 2–3, 203–225. DOI: 10.1016/j.topol.2003.07.009
72. V. L. Frider and M. M. Zarichnyi, *On coarse anti-Lawson semilattices*, Mat. Stud. **21** (2004), no. 1, 3–12.
73. O. Ye. Shabat and M. M. Zarichnyi, *Universal maps of k_ω-spaces*, Mat. Stud. **21** (2004), no. 1, 71–80.
74. E.D. Tymchatyn and M. Zarichnyi, *On simultaneous linear extensions of partial (pseudo)metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. **132**(2004), no. 9, 2799–2807. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07413-1
75. Л. Базилевич, М. Зарічний, *Про гіперпростір просторових кривих сталої ширини*, Мат. Вісник НТШ. **1** (2004), 7–12.
76. M. Zarichnyi, *Continuity of the payoff function revisited*, Economics Bulletin. **3** (2004), no. 14, 1–4.

2005

77. L. E. Bazylevych and M. Zarichnyi, *Hyperspaces of Radon curves and strictly convex Radon curves*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **50** (2005), no. 5–6, 437–442.
78. E. D. Tymchatyn and M. Zarichnyi, *A note on operators extending partial ultrametrics*, Comment. Math. Univ. Carol. **46** (2005), no. 3, 515–524.
79. O. Hubal and M. Zarichnyi, *Whitney topology and spaces of preference relations*, Economics Bulletin **3** (2005), no. 4, 1–7.

80. М. Зарічний, *Продовження метрик у асимптотичній категорії*, Мат. Вісник НТШ **2** (2005), 92–96.

2006

81. L. E. Bazylevych and M. M. Zarichnyi, *On convex bodies of constant width*, Topology Appl.**153** (2006), no. 11, 1699–1704. DOI: 10.1016/j.topol.2004.08.025
82. D. Repovš and M. Zarichnyi, *Topology of manifolds modeled on countable direct limits of Menger compacta*, Topology Appl. **153** (2006), no. 17, 3230–3240. DOI: 10.1016/j.topol.2006.01.014
83. V. Frider and M. Zarichnyi, *Modified probability measure functor in the coarse category*, Вісник. нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. **566** (2006), 5–11.
84. I. Guran and M. Zarichnyi, *On normality of the strong-weak topology*, Мат. Вісик НТШ **3** (2006), 227–232.

2007

85. M. Zarichnyi, *Spaces of measures related to dequantization*, J. Phys. Stud. **11** (2007), no. 1, 34–40.
86. V. Chatyrko and M. Zarichnyi, *A remark on asymptotic dimension and digital dimension of finite metric spaces*, Mat. Stud. **27** (2007), no. 1, 100–104.
87. M. Zarichnyi, *Michael selection theorem for max-plus compact convex sets*, Topology Proc. **31** (2007), no. 2, 677–681.
88. T. Banakh, B. Bokalo, I. Guran, T. Radul, and M. Zarichnyi, *Problems from the Lviv topological seminar*, In: Open Problems in Topology II, Elsevier, 2007, pp. 655–667. DOI: 10.1016/B978-044452208-5/50060-0
89. T. Banakh, R. Cauty, and M. Zarichnyi, *Open problems in infinite-dimensional topology* // In: Open Problems in Topology II, Elsevier, 2007, pp. 601–624. DOI: 10.1016/B978-044452208-5/50056-9
90. T. Banakh, O. Shabat, and M. Zarichnyi, *A uniform approach to producing model spaces of infinite-dimensional topology*, In: General Topology, Geometric Topology and their applications, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University **1531** (2007), pp. 68–74.

2008

91. O. B. Hubal and M. M. Zarichnyi, *Probability measure monad on the category of ultrametric spaces*, Appl. Gen. Topol. **9** (2008), no. 2, 229–237. DOI: 10.4995/agt.2008.1803
92. O. Hubal and M. Zarichnyi, *Idempotent probability measures on ultrametric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2008), no. 2, 1052–1060. DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.01.095
93. L. Bazylevych, D. Repovš, and M. Zarichnyi, *Hyperspace of convex compacta of nonmetrizable compact convex subspaces of locally convex spaces*, Topology Appl. **155** (2008), no. 8, 764–772. DOI: 10.1016/j.topol.2007.02.014
94. М. М. Заричный, О. Р. Никифорчин, *Функтор емкостей в категории компактов*, Матем. сб. **199** (2008), no. 2, 3–26. DOI: 10.4213/sm1504; **English version**: M. M. Zarichnyi and O. R. Nykyforchyn, *Capacity functor in the category of*

compacta, Sb. Math. **199** (2008), no. 2, 159–184.
DOI: 10.1070/SM2008v199n02ABEH003914

95. R. Kozhan and M. Zarichnyi, *Nash equilibria for games in capacities*, Economic Theory **35** (2008), no. 2, 321–331. DOI: 10.1007/s00199-007-0241-8
96. O. Shukel' and M. Zarichnyi, *Asymptotic dimension and symmetric powers*, Мат. Вісник НТШ **5** (2008), 304–311.
97. O. Shabat and M. Zarichnyi, *Manifolds modeled on countable direct limits of absolute extensors*, J. Kubarski (ed.) et al., Special issue: Proceedings of the 8th conference on geometry and topology of manifolds (Lie algebroids, dynamical systems and applications), Luxembourg-Poland-Ukraine conference, Przemyśl, Poland, L'viv, Ukraine, April 30–May 6, 2007. Luxembourg: University of Luxembourg, Faculty of Science, Technology and Communication. Travaux Mathématiques **18** (2008), 111–123.

2009

98. M. Zarichnyi, *Coarse structure and fuzzy metrics*, Mat. Stud. **32** (2009), no. 2, 180–184.
99. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Fuzzy ultrametrics on the set of probability measures*, Topology **48** (2009), no. 2–4, 130–136. DOI: 10.1016/j.top.2009.11.011
100. T. Banakh, O. Shabat, and M. Zarichnyi, *A universal model infinite-dimensional space*, Topology **48** (2009), no. 2–4, 186–196. DOI: 10.1016/j.top.2009.11.018

2010

102. L. Bazylevych, D. Repovš, and M. Zarichnyi, *Spaces of idempotent measures of compact metric spaces*, Topol. Appl. **157** (2010), no. 1, 136–144.
DOI: 10.1016/j.topol.2009.04.040
103. М. М. Заричный, *Пространства и отображения идемпотентных мер*, Изв. РАН. Сер. матем. **74** (2010), no. 3, 45–64. DOI: 10.4213/im2785; **English version**: M. M. Zarichnyi, *Spaces and maps of idempotent measures*, Izv. Math. **74** (2010), no. 3, 481–499. DOI: 10.1070/IM2010v074n03ABEH002495
104. D. Repovš and M. Zarichnyi, *On asymptotic extension dimension*, Укр. мат. журн. **62** (2010), no. 11, 1523–1530; **Reprinted version**: D. Repovš and M. Zarichnyi, *On asymptotic extension dimension*, Ukr. Math. J. **62** (2010), no. 11, 1766–1774. DOI: 10.1007/s11253-011-0466-3
105. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Metrization of free groups on ultrametric spaces*, Topology Appl. **157** (2010), no. 4, 724–729. DOI: 10.1016/j.topol.2009.08.015

2011

106. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces*, Azerb. J. Math. **1** (2011), no. 1, 114–121.
107. O. Nykyforchyn and M. Zarichnyi, *Open mapping theorems for capacities*, Fund. Math. **211** (2011), no. 1, 1–13. DOI: 10.4064/fm211-1-1
108. D. Repovš and M. Zarichnyi, *Convex hyperspaces of probability measures and extensors in the asymptotic category*, Topology Appl. **158** (2011), no. 13, 1571–1574. DOI: 10.1016/j.topol.2011.05.026

109. D. Repovš, A. Savchenko, and M. Zarichnyi, *Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures*, Fuzzy Sets Syst. **175** (2011), no. 1, 96–104. DOI: 10.1016/j.fss.2011.02.014

2012

110. D. Repovš and M. Zarichnyi, *Nonexistence of linear operators extending Lipschitz (pseudo)metrics*, Publ. Math. Debrecen **81** (2012), no. 1–2, 31–39. DOI: 10.5486/PMD.2012.4913
111. L. Bazylevych, D. Repovš, and M. Zarichnyi, *Hyperspaces of max-plus convex subsets of powers of the real line*, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), no. 2, 481–487. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.05.002
112. T. O. Banakh, M. V. Martynenko, and M. M. Zarichnyi, *On monomorphic topological functors with finite supports*, Carpathian Math. Publ. **4** (2012), no. 1, 4–11.
113. В. Л. Бридун, М. М. Зарічний, *Монада ймовірнісних мір у категорії неархімедових грубих просторів*, Прикл. проблеми мех. мат. **10** (2012), 86–89.

2013

114. M. Cencelj, D. Repovš, and M. Zarichnyi, *Max-min measures on ultrametric spaces*, Topology Appl. **160** (2013), no. 5, 673–681. DOI: 10.1016/j.topol.2013.01.022
115. Л. Є. Базилевич, О. Г. Савченко, М. М. Зарічний, *Метризовні функтори і K-ультраметрики*, Праці міжнар. геометр. центру. **6** (2013), no. 2, 13–21.

2014

116. A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Asymptotic dimension, decomposition complexity, and Haver's property C*, Topology Appl. **169** (2014), 99–107. DOI: 10.1016/j.topol.2014.02.035
117. J. Kucab and M. Zarichnyi, *Subpower Higson corona of a metric space*, Algebra Discr. Math. **17** (2014), no. 2, 280–287.
118. L. Bazylevych, A. Savchenko, and M. Zarichnyi, *Functionals, functors and ultrametric spaces*, Proc. Intern. Geom. Center **7** (2014), no. 1, 16–23.
119. N. Mazurenko and M. Zarichnyi, *Idempotent ultrametric fractals*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **79** (2014), 111–118.
120. L. Bazylevych, O. Savchenko, and M. Zarichnyi, *Pairs of compact convex sets: categorical properties*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **79** (2014), 169–176.
121. O. Lozinska, A. Savchenko, and M. Zarichnyi, *Hyperspaces and spaces of probability measures on $\mathbb{R}$-trees*, Proc. Intern. Geom. Center **7** (2014), no. 3, 48–57.
121. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Correspondences of probablility measures with restricted marginal*, Proc. Intern. Geom. Center **7** (2014), no. 4, 34–39.

2015

122. V. Brydun, A. Savchenko, and M. Zarichnyi, *On mim-spaces*, Proc. Intern. Geom Center **8** (2015), no. 2, 26–33.
123. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Open problems in the theory of fuzzy metric spaces*, Mat. Stud. **43** (2015), no. 1, 110–112. DOI: 10.15330/ms.43.1.110-112

124. М. М. Зарічний, М. М. Романський, О. Г. Савченко, *Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях*, Праці міжнародного геометричного центру **8** (2015), no. 1, 83–91.
125. L. Bazylevych and M. Zarichnyi, *Infinite-dimensional hyperspaces of convex bodies of constant width*, Topology Appl. **179** (2015), 215–220. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.030
126. O. Lozinska, A. Savchenko, and M. Zarichnyi, *Frechet distance on the set of compact trees*, Праці міжнародного геометричного центру **8** (2015), no. 3–4, 40–45.
127. M. Zarichnyi and M. Romanskyi, *Asymptotic properties of the (convex) hyperspaces*, Праці міжнародного геометричного центру **8** (2015), no. 3–4, 60–64.

2016

128. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Triples of infinite iterations of hyperspaces of max-plus compact convex sets*, Proc. Intern. Geom. Center **9** (2016), no. 2, 24–31.
129. J. Kucab and M. Zarichnyi, *On asymptotic power dimension*, Topology Appl. **201** (2016), 124–130. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.031

2017

130. O. Berezsky and M. Zarichnyi, *Frechet distance between weighted rooted trees*, Mat. Stud. **48** (2017), no. 2, 165–170. DOI: 10.15330/ms.48.2.165-170
131. A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Remarks on straight finite decomposition complexity*, Topology Appl. **227** (2017), 102–110. DOI: 10.1016/j.topol.2017.01.020
132. T. Banakh, I. Stasyuk, E. D. Tymchatyn, and M. Zarichnyi, *Extension of functions and metrics with variable domains*, Topology Appl. **231** (2017), 353–372. DOI: 10.1016/j.topol.2017.09.019
133. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Troples of infinite iterations of hyperspaces of max-plus compact convex sets*, Proc. Intern. Geom. Center **9** (2017), no. 2, 24–31.
134. L. Bazylevych and M. Zarichnyi, *On hyperspaces of max-plus and max-min convex sets*, ESAIM: Proceedings and Surveys **57** (2017), 97–103.
135. M. Romanskyi and M. Zarichnyi, *On coarse equivalence of the hyperspaces of euclidean spaces*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 67–70.

2018

136. N. Mazurenko and M. Zarichnyi, *Invariant idempotent measures*, Carpathian Math. Publ. **10** (2018), no. 1, 172–178. DOI: 10.15330/cmp.10.1.172-178
137. O. Shabat and M. Zarichnyi, *Functors and manifolds modeled on some k_ω-space*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **85** (2018), 41–47.

Навколоматематичні та науково-популярні статті М. М. Зарічного

1. А. А. Гольдберг, М. М. Заричный, Б. И. Пташник, *К истории украинской математической культуры в Галиции*, Очерки истории естествознания и техники **40** (1991), 8–13.
2. Л. Є. Базилевич, М.М. Зарічний, І. Я. Олексів, Я. Г. Притула, *Іван Миколайович Песін (до 70-річчя від дня народження)*, Мат. Студ. **13** (2000), no. 1, 100.
3. O. B. Skaskiv, B. V. Vynnytskyi, M. V. Zabolotskyi, M. M. Zarichnyi, *Myroslav Sheremeta (an attempt of scientific biography)*, Mat. Stud. **19** (2003), no. 1, 2–20.
4. Т. Банах, М. Зарічний, *Robert Cauty: короткий біографічний нарис*, Мат. Студ. **27** (2007), no. 1, 105–112.
5. М. Зарічний, Б. Пташник, *Видатний український математик і педагог Мирон Зарицкий (до 120-річчя від народження)*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **70** (2009), 191–207.
6. T. O. Banakh, R. I. Grigorchuk, I. I. Guran, V. V. Kirichenko, V. V. Nekrashevych, A. Oliynyk, B. Oliynyk, A. Petravchuk, V. Sushchansky, M. Zarichnyi, A. Zuchok, Yu. Zuchok, *Igor Volodymyrovych Protasov (dedicated to 60-th Birthday)*, Algebra Discrete Math. **17** (2014), no. 2, 3–6.
7. S. Domoradzki and M. Zarichnyi, *On some aspects of the set theory and topology in J. Puzyna's monumental work*, Technical Transactions. Fundamental Sci. **1** (2014), no. 7, 85–97.
8. М. Зарічний, *Математика і соціум*, В кн.: Обрії науки (Ю. Головач, Я. Грицак — ред.), "Манускрипт-Львів", Львів, 2014. с. 77–88.
9. Т. О. Банах, Б. М. Бокало, О. В. Гутік, М. М. Зарічний, Я. Г. Притула, І. В. Протасов, О. В. Равський, Т. М. Радул, Я. М. Холявка, *Ігор Йосипович Гуран (до 60-річчя з дня народження)*, Мат. Вісник НТШ **12** (2016), 147–154.
10. L. Bazylevych, I. Guran, and M. Zarichnyi, *Lwów period of S. Ulam's mathematical creativity*, Technical Trans. Fundamental Sci. **2** (2015), 33–39.
11. S. Domoradzki and M. Zarichnyi, *On the beginning of topology in Lwów*, Technical Trans. Fundamental Sci. **2** (2015), 143–152.

Концерти та виставки М. М. Зарічного

1. Творчий вечір Михайла Зарічного: авторська пісня та поезія (26.12.2006 — музично-меморіальний музей С. Крушельницької).
2. Літературний вечір "Вербалізація верболозу" та презентація однойменної збірки (11.04.2008 — міський палац культури імені Гната Хоткевича).
3. Вечір співаної поезії "Віртуалізація вітру" (разом з Андрієм Бадюком; 06.11.2008 — міський палац культури імені Гната Хоткевича).
4. Виставка візуальної поезії Михайла Зарічного (10.05.2011 — Львівський університет).
5. Літературно-музичний вечір "Та ще спадає листопад ..." (17.11.2011 — міський палац культури імені Гната Хоткевича).

6. Літературно-музичний вечір “Unplugged” (разом з Володимиром Куземським; 19.12.2012 — актова зала університету).
7. Творча зустріч «Банах forever» (23.06.2015 — Мала сцена національного академічного українського драматичного театру імені Марії Заньковецької).
8. Концерт “СЛОВОБРАЗВУК” (з Оленою та Ігором Мацелюхами та Володимиром Куземським; 09.03.2016 — будинок органної та камерної музики).
9. В очікуванні книги Михайла Зарічного “Просто сто сторінок”, концерт “Поезія музики, музика поезії” (з Оленою та Ігорем Мацелюхами та Ліліаною Стадник; 08.03.2017 — будинок органної та камерної музики).
10. Презентація збірки поезій “Просто сто сторінок” (з Андрієм Содоморою; 25.04.2017 — Львівський етнографічний музей).
11. Урочиста академія з нагоди 35-річчя наукової діяльності і 60-річчя з дня народження Михайла Зарічного (07.03.2018 — актова зала університету).
12. Творчий вечір “net. лінне” Михайла Зарічного (21.01.2019 — Музей етнографії та художнього промислу).

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 39–44
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 39–44
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.039-044

УДК 51-78:74

ПРО ВПЛИВИ МАТЕМАТИКИ НА МИСТЕЦТВО

Присвячується 60-ти річчю проф. М. М. Зарічного

Володимир МАСЛЮЧЕНКО,
Галина-Жанна МАСЛЮЧЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2б, Чернівці, 58012
e-mail: v.maslyuchenko@gmail.com

Досліджено впливи математики на малярство, зокрема, на супрематизм, і фракталів на абстактне мистецтво.

Ключові слова: супрематизм, фрактал, математика, мистецтво.

1. Вступ

Математику здавна використовують у різних видах мистецтва (музика, танець, малярство, скульптура, архітектура, література і текстиль). Вивчення зв'язків між математикою і мистецтвом стало предметом наукових досліджень. Цьому присвячена, наприклад, об'ємна праця О. В. Волошинова [1], який захистив на цю тему докторську дисертацію "Онтологія краси і математичні початки мистецтва" на філософському факультеті МДУ імені М. В. Ломоносова у 1993 році. Віднедавна цією темою почали цікавитися автори (математик і мистецтвознавець), в яких у минулому році вийшло друком кілька публікацій про математику та мистецтво [2-6]. Так сталося, що у цей самий час (незалежно від нас) зв'язки між математикою і мистецтво стали предметом зацікавлення відомого українського математика, поета і композитора М. М. Зарічного, якому у цьому році виповнюється 60 років. Ця стаття, в якій продовжуємо наші дослідження, заторкнувши нову тему "Фрактали в мистецтві", присвячується Михайлові Зарічному.

2010 Mathematics Subject Classification: 00A66

2. Основні напрями застосування математики в малярстві

У цій статті здебільшого йтиметься про математику та малярство. Нам відомі такі напрями застосування математики у цій галузі мистецтва:

а) вчення про перспективу;
б) золотий переріз;
в) математичні мотиви у творчості німецького художника Альбрехта Дюрера, зокрема в картині "Меланхолія" і творі "Посібник до вимірювання циркулем і лінійкою" (1625 рік);
г) математичні ідеї у творчості нідерландського художника Мауріца Ешера;
ґ) естетика математичних формул у мистецькому проекті "Я – формула" буковинського скульптора і художника Святослава Вірсти;
д) "Чорний квадрат" Казимира Малевича і супрематизм;
е) застосування фракталів.

Про напрями а)-ґ) йшлося в [6]. Тут ми детальніше розглянемо два останні напрями.

3. Казимир Малевич і супрематизм

Український художник польського походження Казимир Малевич (1879-1935) відомий як визначний діяч українського авангарду, засновник супрематизму і один із фундаторів кубофутуризму.

Рис. 1. Чорний хрест. Чорний квадрат. Чорний круг

Слово супрематизм, що його ввів сам митець, однокореневе з відомим математичним терміном супремум, що означає точну верхню межу множини, тобто найменшу з її верхніх меж. Воно має латинський корінь, що означає найвищий, граничний, початковий [7]. Іконою супрематизму [7, 8] вважають картину К. Малевича, датовану 1913 роком, широко відому під назвою "Чорний квадрат" (рис. 1). Як бачимо, на рис. 1 К. Малевич використовував і інші геометричні фігури: хрест і круг. На інших картинах трапляються і трикутники. Фігури зафарбовані не тільки чорним, а й червоним кольором. Стосовно картини "Чорний квадрат" виникає природне питання: "Що це означає?". Сам К. Малевич тлумачив свою картину так: "Квадрат – відчуття, біле поле – "Ніщо" поза цим відчуттям". Таке ж питання можна поставити і стосовно інших картин К. Малевича: "Чорний хрест", "Чорний круг". Чим відрізняється тлумачення "Червоного квадрата" від "Чорного квадрата", наприклад? Звичайно, відчуття бувають різними, отже, можна думати, що кольори про це свідчать.

У Петербурзі у 2001 році вийшов великий том [9] літературних творів К. Малевича російською мовою під назвою "Черный квадрат". До речі, К. Малевич народився в Києві, володів українською мовою і позиціонував себе українцем польського походження. Досить повну біографію К. Малевича написав Анжей Туровський [10]. Фрагменти цієї книги в українському перекладі Олени Новикової можна знайти в Інтернеті.

Картин з геометричним антуражем у К. Малевича багато: білі і червоні квадрати, чорні і червоні прямокутники та круги, трикутники з накладеними кругами. Цікаву інформацію про К. Малевича подав Ростислав Шмагало. У монографії [11, с. 359] в абзаці про так званий супрематичний чайник він зазначив: "В основу формотворення художник поклав прямий кут, кулю, куб, циліндр. В основу орнаменту – математичний, тобто "машинний" шлях його створення".

Про зв'язки К. Малевича з Україною написано багато. Відповідна література зібрана, наприклад, у згаданому перекладі розділу книжки А. Туровського. Згадаємо ще книжку [12] і статтю [13] Дмитра Горбачова, якого вважають найвідомішим в Україні, а то й у світі, знавцем творчості К. Малевича.

Учні К. Малевича Ілля Чашник і Микола Суєтін продовжували традицію вчителя, використовуючи різні геометричні фігури у своїх супрематичних композиціях.

Переосмислення ідей К. Малевича є і у творах українського художника Дмитра Гопанчука.

Геометричні мотиви міських пейзажів, інтер'єрів та екстер'єрів будинків можна побачити у творах буковинських художників Артура Кольніка, Леона Копельмана, Петра Грицика і Ореста Криворучка (див [14]).

4. Фрактали в мистецтві

Хоча перші приклади фракталів (канторова множина, сніжинка Коха, килими і губка Серпінського) з'явилися в математиці в кінці XIX чи на початку XX століть, сам термін "фрактал" виник порівняно недавно, його ввів у 1975 році Б. Мандельброт [15, с. 5]. Він розглядав фрактали в широкому розумінні, які характеризуються тим, що для них топологічний вимір $\dim(E)$ не збігався з виміром Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E)$ [15, с. 64], і у вузькому розумінні, якщо $\alpha_0(E)$ не є цілим числом [15, с. 65]. Праці Б. Мандельброта [16, 17] є основоположними у цій галузі математики. Вікіпедія дає поняття фрактала як самоподібної множини [15, с. 67].

Сьогодні поняття фрактала широко використовують у науці, зокрема у фізиці та біології (відповідні посилання є у [15]). Крім того, фрактали мають естетичну привабливість, про що йдеться в праці [18] з відповідними ілюстраціями. Тому не дивно, що фрактали застосовують і в мистецтві.

Білоруський вчений В. А. Шлик [19] досліджує фрактали в абстрактному мистецтві і дизайні. Поняття фрактал він трактує досить широко як не регулярну геометричну фігуру. У статті В. А. Шлика простежуються зв'язки фракталів з творами таких художників-абстакціоністів: Франтішек Купка (1871–1957), Василь Кандинський (1866–1944), Піт Мондріан (1872–1944) та інші, майстра графічного дизайну німецького художника Антона Штанковського (1906–1998). Виклад супроводжується відповідними ілюстраціями. Цікаво, що фрактали в творах згаданих художників з'явилися задовго до Б. Мандельброта, який вважав, що "фрактальні форми притаманні природі внутрішньо, генетично" [19, с. 243], тому й не дивно, що вони відображені у творах мистецтва.

До речі, В. Кандинський вплинув на творчість сучасного буковинського художника А. Житару, виставка творів якого під назвою "Добрий день Кандинський" нещодавно відбулася в Художньому музеї Чернівцях.

Додаткову інформацію про фрактали в мистецтві можна знайти в [20].

Рис. 2. Гобелен Олени Чорногуз

Фрактали іншого роду використано в гобеленах буковинської мисткині з Вашківців Олени Чорногуз. Свої чудові твори вона компонує з фрагментів, які називає фракталами, як і винайдену нею техніку. Зазначимо, що картини на її гобеленах споріднені з фракталами як самоподібними фігурами завдяки повторам деяких елементів.

Список використаної літератури

1. А. В. Волошинов, *Математика и искусство*, Просвещение, Москва, 2000, 400 с.
2. В. К. Маслюченко, Г. Я. Матвіїшин, *Мистецтво і математика*, VII міжнар. наук.-пр. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта", Світязь, 3-5 червня 2018р., тези доповідей, ПП Іванюк В. П., Луцьк, 2018, С. 159.
3. В. К. Маслюченко, Г. Я. Матвіїшин, *Мистецький проект "Я формула"*, VII міжнар. наук.-пр. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта", Світязь, 3-5 червня 2018р., тези доповідей, ПП Іванюк В. П., Луцьк, 2018, С. 160–161.
4. В. Маслюченко, Г.-Ж. Маслюченко, *Математика і Казимир Малевич*, Матеріали міжнародної наукової конференці "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях". Чернівці, 17-19 вересня 2018. Чернівці, ЧНУ, 2018, С. 186–187.
5. В. К. Маслюченко, Г.-Ж. Я. Маслюченко, *Математика і живопис*, Нелінійні проблеми аналізу: VI Всеукраїнська мат. конф. ім. Б. В. Василишина. Тези доповідей, (26–28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ – Микуличин), Івано-Франківськ, Голіней, 2018, С. 35.
6. В. К. Маслюченко, Г.-Ж. Я. Маслюченко, *Математика ів мистецтві: історія і сучасність*, Прикарпатський вісник НТШ. Число (2018), no. 1(45), С.230–234.
7. І. Власенко, *Таємниця чорного квадрата*, https://auamodna.com/articles/taemnytcya-chornogo-kvadrata/
8. Т. Філевська, *Все що ви хотіли знати про "Чорний квадрат", але боялись запитати*, https://life.pravda.com.ua/culture/2015/06/24/196184/
9. К. Малевич *Черный квадрат*, Азбука, Санкт-Петербург, 2001, 576 с.
10. A. Turowski, *Malewicz w Warszavie*, Krakow, 2002.
11. Р. Шмагало, *Мистецька освіта в Україні середини XIX – середини XX ст.: структурування, методологія, художні позиції*, Українські технології, Львів, 2005, 528 с.
12. Д. Горбачов, *Малевич та Україна*, СІМ студія, Київ, 2006, 456 с.
13. Д. Горбачов, *Всесвіт Малевича з центром у Києві*, Україна (1988), no. 28, 11–12.
14. С. Осадчук, Т. Дугаєва, *Чернівці. Художній альбом*, Книги XXI, Чернівці, 2017, 362 с.
15. А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитий, *Фрактальные множества, функции, распределения*, Наукова думка, Київ, 1992, 208 с.
16. B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, San Francisko, Freeman, 1977. – 346 p. (англійський переклад з французького оригіналу, виданого у 1975 році)
17. B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of natur*, Freeman and Co., New York, 1983, 540 p.
18. H. O. Peitgen and P. H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer, Berlin, 1986, 199 p. (рос. переклад Х. О. Пайтген, П. Рихтер, *Красота фракталов*, Мир, Москва, 1993, 173 с.)
19. В. А. Шлык, *Фракталы в абстрактном исскустве и дизайне*, Известия Челябинского научного центра (2004), no. 1(22), 231–244.

20. I. А. Яковець, О. О. Лясковська, *Фрактал – математика мистецтва. Дослідження природності фрактальних проявів*, Образотворче мистецтво **166** (2011), no. 2.

Стаття: надійшла до редколегії 04.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

ABOUT THE INFLUENCE OF MATHEMATICS ON ART

Volodymyr MASLYUCHENKO,
Halyna-Zhanna MASLYUCHENKO

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,
Kotsyubynsky 2, 58012, Chernivtsi Ukraine
e-mail: v.maslyuchenko@gmail.com

The influence of mathematics on painting, in particular, on suprematism and fractals on abstract art is investigated.

Key words: suprematism, fractals, mathematics, art.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 45–50
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 45–50
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.045-050

УДК 511.3

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUES OF WEIERSTRASS AND JACOBI ELLIPTIC FUNCTIONS IN THE PERIODS AND ALGEBRAIC POINT

Dedicated to the 60th birthday of M. M. Zarichnyi

Yaroslav KHOLYAVKA, Olga MYLYO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: ya_khol@franko.lviv.ua,
olga.mylyo@gmail.com

Let $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$ be algebraically independent Weierstrass and Jacobi elliptic functions with algebraic invariants and algebraic elliptic module, $(2\omega_1,\ 2\omega_3)$ and $(4K, 2iK')$ be the main periods of $\wp(z)$ and $\operatorname{sn} z$ respectively, α be an algebraic number different from the poles of $\wp(z)$ and $\operatorname{sn} z$. We estimate from below the simultaneous approximation of $\operatorname{sn}(2\omega_1), \operatorname{sn}(\alpha), \wp(4K)$, and $\wp(\alpha)$.

Key words: simultaneous approximation, Weierstrass elliptic function, Jacobi elliptic function.

1. Introduction

Let $\wp(z)$ and $\operatorname{sn} z$ be the elliptic Weierstrass function and the elliptic Jacobi function, respectively. Then $\wp(z)$ satisfies the equation $(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z)$-$g_2\wp(z) - g_3$, the numbers g_2, g_3 are called invariants of $\wp(z)$, $2\omega_1$, $2\omega_3$ is a fixed pair of the main periods $\wp(z)$. The function $\operatorname{sn} z$ satisfies the equation $(\operatorname{sn}' z)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 z)$. The number $\varkappa$ is called the elliptic module of $\operatorname{sn} z$, $0 < \varkappa < 1$, the number $\varkappa' = (1 - \varkappa^2)^{1/2}$ is called its additional elliptic module. A pair of main the periods $\operatorname{sn} z$ is $(4K,\ 2iK')$, where $K,\ K'$ are complete elliptic integrals of the first kind corresponding to $\varkappa$, $\varkappa'$ ([1]). In the present article we will consider algebraically independent elliptic functions $\wp(z)$ and $\operatorname{sn} z$ with

2010 Mathematics Subject Classification: 11J82 algebraic g_2, g_3 and $\varkappa$. Let the periods $2\omega_1$, $4K$ form a lattice, $2m\omega_1$ and $4mK$ $(m \in \mathbb{Z})$ are different from the poles of $\operatorname{sn} z$ and $\wp(z)$.

For $d(P)$, $L(P)$ denote the degree and the length of a polynomial P with integer coefficients, $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ is the degree and the length of algebraic number α [2], α is different from the poles of $\wp(z)$ and $\operatorname{sn} z$. Let ξ_i be approximating algebraic numbers, $n_i = d(\xi_i)$ and $L_i = L(\xi_i)$ be their powers and lengths respectively $(i = 1, \ldots, 4)$, $n = \deg \mathbb{Q}(g_2, g_3, \varkappa, \alpha, \xi_1, \ldots, \xi_4)$.

Theorem 1. *For any algebraic numbers $\xi_1, \ldots, \xi_4$ the following inequality holds:*

$$|\wp(4K) - \xi_1| + |\operatorname{sn}(2\omega_1) - \xi_2| + |\wp(\alpha) - \xi_3| + |\operatorname{sn}(\alpha) - \xi_4| > \exp\left(-\Lambda\, n^3 T^2\right), \tag{1}$$

where

$$T = \max\left(\frac{\ln L_1}{n_1} + \cdots + \frac{\ln L_4}{n_4} + 1, \ln n\right), \tag{2}$$

$\Lambda > 0$ is a constant that depends only on $g_2, g_3, \varkappa$ and α.

Similar estimates for other numbers can be found in [2]–[6].

2. Auxiliary statements

In the following lemma $c_{10}, \ldots, c_{15}$ stand for positive constants that are independent of n, n_i, L_i and λ.

Lemma 1 ([1]). *If z, w, $z + w$ are admissible values, then*

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w), \quad \operatorname{sn}(z+w) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn}' w + \operatorname{sn} w \operatorname{sn}' z}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} z^2 \operatorname{sn} w^2}.$$

Lemma 2. *For each integer $m \geqslant 1$, there exist polynomials $P_{1,s,l}$, $P_{2,s,l}$ with the integer coefficients such that*

$$\frac{d^s}{d\,z^s}((\wp(z)^l) = P_{1,s,l}(g_2, g_3, \wp(z), \wp'(z)), \quad \frac{d^s}{d\,z^s}((\operatorname{sn} z)^l) = P_{2,s,l}(\varkappa^2, \operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z),$$

$$\deg P_{i,s,l} \leqslant c_1(s+l), \quad L(P_{i,s,l}) \leqslant \exp(c_2 s \log(s+l)), \quad i = 1,\, 2.$$

Lemma 3. *For each integer $m \geqslant 1$, there exist polynomials with the integer coefficients $P_{1,m}$, $P_{2,m}$, $Q_{1,m}$, $Q_{2,m}$ such that*

$$\wp(mz) = \frac{P_{1,m}(\wp(z), g_2, g_3)}{Q_{1,m}(\wp(z), g_2, g_3)}, \quad \operatorname{sn} mz = \frac{P_{2,m}(\operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z)}{Q_{2,m}(\varkappa^2, \operatorname{sn} z)},$$

where $L(P_{i,m}), L(Q_{i,m}) \leqslant \exp(c_3 m^2)$, $\deg P_{i,m}$, $\deg Q_{i,m} \leqslant m^2$, $i = 1,\, 2$.

The proof of Lemma 2 and Lemma 3 for the function $\wp(z)$ is, for example, in [1], [2], [8], and proof for $\operatorname{sn} z$ is similar to the proof for $\wp(z)$.

Lemma 4 ([4]). *Let $B, P \in \mathbb{N}$, $Q_{p,b} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $0 \leqslant b < B$, $0 \leqslant p < P$, $L(Q_{p,b}) \leqslant L$, $\deg_{x_i} Q_{p,b} \leqslant \mathcal{N}_i$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be algebraic numbers, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. If $P > mB$, then the system of linear equations*

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p Q_{p,b}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad 0 \leqslant b < B,$$

has integer rational solutions $A_0, \ldots, A_{P-1}$ *such that*

$$0 < \max |A_i| < 1 + (LP)^{\frac{mB}{P-mB}} \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + \mathcal{N}_i) \left(L(\alpha_i)(1 + d(\alpha_i)) \right)^{\frac{\mathcal{N}_i}{d(\alpha_i)}} \right)^{\frac{mB}{P-mB}}.$$

We denote $|f(z)|_D = \sup_{|z| \leqslant D} |f(z)|$.

Lemma 5 ([5]). *Let* $\sigma_1(z)$ *be the Weierstrass* σ*-function which corresponds to* $\wp(z)$*. The functions* $\sigma_1(z)$ *and* $\sigma_1(z)\wp(z)$ *is entire functions and for* $M > 1$

$$|\sigma_1(z)\wp(z)|_M, |\sigma_1(z)|_M \leqslant {c_4}^{M^2}.$$

If ε *is a distance from the nearest to* z_0 *pole of* $\operatorname{sn} z$ *and* $|z_0| \leqslant M$*, then* $|\sigma(z_0)| \geqslant \varepsilon {c_5}^{-M^2}$.

Lemma 6. *Let* $\sigma_2(z)$ *be the Weierstrass* σ*-function which corresponds to the function* $\widetilde{\wp}(z)$ *associated with* $\operatorname{sn}(z)$*. The functions*

$$\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1 - e_3}), \quad \sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1 - e_3}) \operatorname{sn}(z)$$

are entire functions and for $M > 1$

$$|\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1 - e_3}) \operatorname{sn}(z)|_{|z| \leqslant M} \leqslant {c_6}^{M^2}, \quad |\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1 - e_3})|_{|z| \leqslant M} \leqslant {c_7}^{M^2}.$$

If δ *is the distance from* z_0 *to the nearest pole of* $\operatorname{sn}(z)$ *and* $|z_0| \leqslant M_0$*, then*

$$|\sigma_2((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3})| \geqslant \delta {c_8}^{-M_0^2}.$$

The proof of Lemma 6 is similar to the proof of Lemma 5.

Lemma 7 ([4]). *Let* R_1*,* $R_2 \in \mathbb{R}$*,* $8 < 4R_1 < R_2$*,* $f(z)$ *be analytic in the circle* $|z| \leqslant R_2$*, and* E *is the set of* $\mathcal{D}^2$ *points belonging to the circle* $|z| \leqslant R_1$ *and the distance between them for each pair of points is not less than* ε*,* $0 < \varepsilon < 1$*. Then*

$$|f(z)|_{|z| \leqslant R_1} \leqslant 2|f(z)|_{|z| \leqslant R_2} \left(\frac{4R_1}{R_2} \right)^{\mathcal{D}^2 S} + 2\mathcal{D}R_1^{-1} \left(\frac{33R_1}{\epsilon \mathcal{D}} \right)^{\mathcal{D}^2 S} \max_{x \in E, 0 \leqslant s \leqslant S} \left| \frac{f^{(s)}(x)}{s!} \right|.$$

Lemma 8 ([2]). *Let* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *be algebraic numbers,* $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$*,* $\deg_{x_i} P \leqslant \mathcal{N}_i$*,* $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*. If* $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \not\equiv 0$*, then*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \geqslant L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-\mathcal{N}_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Lemma 9 ([1], [7]). *Let* $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$*,* $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$*, be the polynomial of degree not greater than* $\mathcal{D}_1$ *in* x_1 *and* $\mathcal{D}_2$ *in* x_2*,* $\mathcal{D}_1$*,* $\mathcal{D}_2 \geqslant 1$*,* $\wp(z)$ *and* $\operatorname{sn} z$ *are algebraic independent elliptic functions. Then the number of zeros of* $P(\wp(z), \operatorname{sn} z)$*, taking into account their multiplicity, for* $|z| < K$ *does not exceed* $c_9 K^2(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$.

3. Proof of Theorem 1

The proof of Theorem 1 is based on the second Gelfond's method [7, 8]. Suppose that for a sufficiently large $\lambda \in \mathbb{N}$ we have

(3) $$|\wp(4K) - \xi_1| + |\operatorname{sn}(2\omega_1) - \xi_2| + |\wp(\alpha) - \xi_3| + |\operatorname{sn}(\alpha) - \xi_4| < \exp\left(-\lambda^7 n^3 T^2\right).$$

We denote

$$N^2 = [\lambda^3 \, n T], \quad S = L = [N^2 \ln \lambda]. \tag{4}$$

Define a function

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L} \sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2} \wp^{l_1}(z) \operatorname{sn}^{l_2} z, \quad C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau} \zeta_\tau, \; C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

where ζ_τ are generating elements of $\mathbb{Q}(g_2, g_3, \varkappa, \alpha, \xi_1, \ldots, \xi_4)$. As in [8], we denote $\varphi_1(z) = \wp(z+\omega_1)$, $\varphi_{2,1}(z) = \operatorname{sn}(z + \frac{K}{2})$, $\varphi_{2,2}(w) = \operatorname{sn}(w + \frac{3K}{2})$. Then from the Lemma 1

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_1'(z) - \varphi_1'(w)}{\varphi_1(z) - \varphi_1(w)}\right)^2 - \varphi_1(z) - \varphi_1(w) = \frac{\Lambda_{1,1}(z,w)}{\Lambda_{1,2}(z,w)}, \tag{6}$$

$$\operatorname{sn}(z+w) = \frac{\varphi_{2,1}(z)\varphi_{2,2}'(w) + \varphi_{2,2}(w)\varphi_{2,1}'(z)}{1 - \varkappa^2 \varphi_{2,1}^2(z)\varphi_{2,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{2,1}(z,w)}{\Lambda_{2,2}(z,w)}. \tag{7}$$

From (6), (7) and Lemma 2 it follows that there exist polynomials $G_{i,s,k,l}(z)$ such that

$$G_{i,s,k,l}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}\left((\Lambda_{i,1}^k(z,w)\Lambda_{i,2}^l(z,w)\right)|_{w=0}, \tag{8}$$

$\deg G_{i,s,k,l} \leqslant 4(k+l)$, $\ln L(G_{i,s,k,l}) \leqslant s \ln(s(k+l) + c_{10}(s+k+l))$.

Applying the technique of [7], [8] one can deduce from (5), (6), (7), (8) the equality

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w)\left(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)\right))|_{w=0} =$$

$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0} \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2} \sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i} G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(z) \times$$

$$\times G_{2,i,l_2,L-l_2}(z) = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0} F_{s,t}(z). \tag{9}$$

Let $\xi_5^2 = 4\xi_1^3 - g_2\xi_1 - g_3$, $\xi_6^2 = (1-\xi_2^2)(1-\varkappa^2\xi_2^2)$, $\xi_7^2 = 4\xi_3^3 - g_2\xi_3 - g_3$, $\xi_8^2 = (1-\xi_4^2)(1-\varkappa^2\xi_4^2)$. Applying Lemma 3, denote by $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\ldots,\xi_8)$ and $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\ldots,\xi_8)$ the expressions obtained from $F^{(s)}(4n_1K + 2n_2\omega_1 + \alpha)$ and $F_{s,t}(4n_1K + 2n_2\omega_1 + \alpha)$ by the substitution $\wp(4K)$, $\operatorname{sn}(2\omega_1)$, $\wp(\alpha)$, $\operatorname{sn}(\alpha)$, $\wp'(4K)$, $\operatorname{sn}'(2\omega_1)$, $\wp'(\alpha)$, $\operatorname{sn}'(\alpha)$ on $\xi_1,\ldots,\xi_8$. Consider $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\ldots,\xi_8)$ for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$ as $N^2 S$ of linear forms of nL^2 variables $C_{l_1,l_2,\tau}$. Applying Lemma 4, we choose $C_{l_1,l_2,\tau}$ not all equal to zero such that for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\ldots,\xi_8) = 0, \quad |C_{l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_{11}\lambda^6 \ln \lambda \, n^2 T^3). \tag{10}$$

From (2), (3), (4), (10) we obtain for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$

$$|F^{(s)}(4n_1K + 2n_2\omega_1 + \alpha) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\ldots,\xi_8)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 T^3). \tag{11}$$

From (10), (11) for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$ it follows

$$|F^{(s)}(4n_1K + 2n_2\omega_1 + \alpha)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 T^3). \tag{12}$$

We show that (12) holds for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$.

Let $H(z) = F(z)\sigma_1^L(z)\sigma_2^L((z+K)/\sqrt{e_1 - e_3})$. We will select the least $r \in \mathbb{N}$ such that $r > 32N(|K| + |\omega_1| + 1)$, $R = 12r$. From (2), (4), (5), (10) and Lemma 5 it follows

$$|H(z)|_{|z|\leqslant R} < \exp(-\lambda^6 \ln\lambda\, n^2T^3). \tag{13}$$

From (13) and Lemma 7 we obtain for $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|H^{(s)}(z)|_{|z|\leqslant r} < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^6 \ln\lambda\, T^2 \ln T). \tag{14}$$

From Lemma 6 for a sufficiently small ε in the ε-neighborhood of points $4n_1K + \alpha$ function $\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1 - e_3})$ and ε-neighborhood of the points $2n_2\omega_1 + \alpha$ the function $\sigma_1(z)$ has no zeros, thus for $|n_1|, |n_2| \leqslant 32N$ we see that

$$|\sigma_1(z)|_{z\in V(\varepsilon, 4n_1K+2n_2\omega_1+\alpha)} > \exp(-c_{12}\lambda^5 \ln\lambda\, n^2T^3), \tag{15}$$

$$|\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1 - e_3})|_{z\in V(\varepsilon, 4n_1K+2n_2\omega_1+\alpha)} > \exp(-c_{13}\lambda^5 \ln\lambda\, n^2T^3). \tag{16}$$

The conditions (13)–(16) imply that for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2 + \alpha)| < \exp\left(-\frac{1}{3}\lambda^6 \ln\lambda\, n^2T^3\right). \tag{17}$$

From (11) and (17) for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$ and $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ it follows

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_8)| < \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^6 \ln\lambda\, n^2T^3\right). \tag{18}$$

Considering $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_8))$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$, $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, as the value of the corresponding polynomial in the algebraic points, from Lemma 8 we obtain for $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_8)) \neq 0$ the inequality

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_8))| > \exp\left(-\lambda^5 \ln\lambda\, n^2T^3\right). \tag{19}$$

From (9), (19) we obtain for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_8))| > \exp(-2\lambda^5 \ln\lambda\, n^2T^3). \tag{20}$$

Since (18) and (20) are contradictory,

$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_8)) = 0$ for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$. Then for $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_8) = 0. \tag{21}$$

From (21) it follows that the polynomial $F(z)$ has at least $c_{14}\lambda^7 \ln\lambda\, n^2T^2$ zeros (taking into account multiplicity), but according to Lemma 9 the number of zeros can be at most $c_{15}\lambda^6 \ln\lambda\, n^2T^2$, therefore for sufficiently large $\lambda \in \mathbb{N}$ assumption (3) leads to the contradiction which proves the theorem.

References

1. D. F. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
2. Н. И. Фельдман, *Седьмая проблема Гильберта*, Изд-во МГУ, Москва, 1982.
3. N. I. Fel'dman, Yu. V. Nesterenko, *Transcendental Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
4. E. Reyssat, *Approximation algébrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*, Bull. Soc. Math. France. **108** (1980), 47–79.

5. D. Masser, *Elliptic functions and transcendence*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
6. О. Мильо, Я. Холявка, *Сумісні наближення значень еліптичних функцій Вейєрштраса та Якобі,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. **22** (2014), 85–91.
7. Ю. В. Нестеренко, *О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции,* Изв. РАН. Сер. матем. **59** (1995), no. 4, 155–178; **English version**: Yu. V. Nesterenko, *On the measure of algebraic independence of values of an elliptic function,* Izv. Math. **59** (1995), no. 4, 815–838. DOI: 10.1070/IM1995v059n04ABEH000035
8. G. V. Chudnovsky, *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem,* Invent. Math. **61** (1980), no. 3, 267–290. DOI: 10.1007/BF01390068

Стаття: надійшла до редколегії 28.01.2019
доопрацьована 11.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА ТА ЯКОБІ В ПЕРІОДАХ І АЛГЕБРИЧНІЙ ТОЧЦІ

Ярослав ХОЛЯВКА, Ольга МИЛЬО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: ya_khol@franko.lviv.ua,
olga.mylyo@gmail.com

Нехай $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$ — алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса та Якобі з алгебричними інваріантами й еліптичним модулем, $(2\omega_1,\, 2\omega_3)$ і $(4K,\, 2iK')$ — пари основних періодів $\wp(z)$ та $\operatorname{sn} z$, α — довільне алгебричне число, відмінне від полюсів $\wp(z)$ і $\operatorname{sn} z$. Отримано оцінку сумісного наближення $\operatorname{sn}(2\omega_1), \operatorname{sn}(\alpha), \wp(4K)$ та $\wp(\alpha)$.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Вейєрштрасса, еліптична функція Якобі.

ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. C. 51–62*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 51–62
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.051-062

УДК 512+514+515.1

BORNOLOGICAL, COARSE AND UNIFORM GROUPS

To Taras Banakh and Michael Zarichnyi on their birthdays

Igor PROTASOV

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Academic Glushkov Pr. 4d, 03680 Kyiv, Ukraine
e-mail: i.v.protasov@gmail.com

We survey and analyze different ways in which bornologies, coarse structures and uniformities on a group agree with the group operations.

Key words: bornology, coarse structure, uniformity, Stone-Čech compactification.

1. Bornological groups

1.1. **Bornological spaces.** A family $\mathcal{I}$ of subsets of a set X is called an *ideal* (in the Boolean algebra $\mathcal{P}_X$ of all subsets of X) if $\mathcal{I}$ is closed under formation of finite unions and subsets. If $\bigcup\mathcal{I} = X$ then $\mathcal{I}$ is called a *bornology*, so a bornology is an ideal containing the ideal $[X]^{<\omega}$ of all finite subsets of X.

A *bornological space* is a pair $(X, \mathcal{B})$ consisting of a set X and a bornology $\mathcal{B}$ on X. Any set $Y \in \mathcal{B}$ is called *bounded*. If $X \in \mathcal{B}$, then the bornological space $(X, \mathcal{B})$ is *bounded*.

Any subset $Y \subset X$ of a bornological space $(X, \mathcal{B})$ carries the *subbornology*

$$\mathcal{B}\restriction Y := \{B \in \mathcal{B} : B \subset Y\},$$

induced by $\mathcal{B}$.

A bornology $\mathcal{B}$ on X is called

- *tall* if $\mathcal{B}\restriction Y \neq [Y]^{<\omega}$ for any infinite subset Y;
- *antitall* if any subset $Y \notin \mathcal{B}$ of X contains an infinite subset $Z \subseteq Y$ such that $\mathcal{B}\restriction Z = [Z]^{<\omega}$.

2010 Mathematics Subject Classification: 20F69, 22A05, 54E35, 54H35

By [15, Proposition 1], every bornology is the meet of some tall and antitall bornologies.

A family $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ is called a *base* of a bornology $\mathcal{B}$ if each set $B \in \mathcal{B}$ is contained in some set $B' \in \mathcal{B}'$. Every bornology with a countable base is antitall. In particular, the bornology of all bounded subsets of a metric space is antitall. We note also that for every bornology $\mathcal{B}$ on X with a countable base, there exists a metric d on X such that $\mathcal{B}$ is a bornology of all bounded subsets of (X, d).

The product of a family of bornological spaces $(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$, $\alpha \in A$, is the Cartesian product $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ of their supports endowed with the bornology generated by the base $\{\prod_{\alpha\in A} B_\alpha : (B_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{B}_\alpha\}$.

A mapping $f : X \to Y$ between two bornological spaces $(X, \mathcal{B}_X)$ and $(Y, \mathcal{B}_Y)$ is called *bornologous* if $\{f(B) : B \in \mathcal{B}_X\} \subset \mathcal{B}_Y$.

A *variety* is a class of bornological spaces closed under formation of subspaces, products and bornologous images.

We denote by $\mathfrak{M}_{single}$ the variety of all singletons, $\mathfrak{M}_{bound}$ the variety of all bounded bornological spaces, $\mathfrak{M}_\kappa$ the variety of all κ-bounded spaces. For an infinite cardinal κ, a bornological space $(X, \mathcal{B})$ is called *κ-bounded* if each subset $B \subset X$ of cardinality $|B| < \kappa$ is bounded.

Every variety of bornological spaces coincides with one of the varieties in the chain:

$$\mathfrak{M}_{single} \subset \mathfrak{M}_{bound} \subset \dots \subset \mathfrak{M}_\kappa \subset \dots \subset \mathfrak{M}_\omega,$$

see the proof of Theorem 2 in [16].

1.2. **Bornologies on groups.** A bornology on a group G is called *right* (*left*) *invariant* if $\mathcal{B}g \subseteq \mathcal{B}$ (resp. $g\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$) for each every $g \in G$. Here $\mathcal{B}g = \{Bg : B \in \mathcal{B}\}$ and $g\mathcal{B} = \{gB : B \in \mathcal{B}\}$. A group G endowed with a right (left) invariant bornology is called a *right* (*left*) *bornological* group.

We say that a group G endowed with a bornology $\mathcal{B}$ is a *bornological group* if the group multiplication and inversion are bornologous mapping. In this case, $\mathcal{B}$ is called a *group bornology*. We note that $\mathcal{B}$ is a group bornology if and only if for any $A, B \in \mathcal{B}$ we have $AB^{-1} \in \mathcal{B}$.

1.3. **Duality.** Now we endow every group G with the discrete topology and identify the Stone-Čech compactification βG of G with the set of all ultrafilters on G. Then the family $\{\overline{A} : A \subseteq G\}$, where $\overline{A} = \{p \in \beta G : A \in p\}$, forms a base of the topology of βG. Given a filter φ on G, we denote $\overline{\varphi} = \cap\{\overline{A} : A \in \varphi\}$, so φ defines the closed subset $\overline{\varphi}$ of βG, and each closed subset K of βG can be obtained in this way: $K = \overline{\varphi}$, where $\overline{\varphi} = \{A \subseteq G : K \subseteq \overline{A}\}$.

We use the standard extension [8, Section 4.1] of the multiplication on G to the semigroup multiplication on βG such that for every $p \in \beta G$ the right shift $\beta G \to \beta G$, $x \mapsto xp$, is continuous, and for every $g \in G$ the left shift $\beta G \to \beta G$, $x \mapsto gx$, is continuous. For ultrafilters $p, q \in \beta G$ their product pq in βG is defined by the formula

$$pq = \{\bigcup_{x\in P} xQ_x : P \in p,\ \{Q_x\}_{x\in P} \subset q\}.$$

Let $G^* := \beta G \setminus G$ be the set of all free ultrafilters on G. It follows directly from the definition of the multiplication in βG that G^* and $\overline{G^*G^*}$ are ideals in the semigroup βG, and G^* is the unique maximal closed ideal in G. By Theorem 4.44 from [8], the closure

$\overline{K(\beta G)}$ of the minimal ideal $K(G)$ of βG is an ideal, so $\overline{K(\beta G)}$ is the smallest closed ideal in βG. For the structure of $\overline{K(\beta G)}$ and some other ideals in βG see [8, Sections 4, 6].

For an ideal $\mathcal{I}$ on a group G and a closed subset K of βG, we put

$$\mathcal{I}^\wedge = \{p \in \beta G : \forall A \in \mathcal{I} \ \ G \setminus A \in p\} \text{ and } K^\vee = \{G \setminus A : A \in \varphi, \ \ \overline{\varphi} = K\}.$$

We have the following duality statements:

- $\mathcal{I}$ is left translation invariant if and only if $\mathcal{I}^\wedge$ is a left ideal of the semigroup βG;
- $\mathcal{I}$ is right translation invariant if and only if $(\mathcal{I}^\wedge)G \subseteq \mathcal{I}^\wedge$;
- $(\mathcal{I}^\wedge)^\vee = \mathcal{I}$;
- $\mathcal{I}$ is a bornology if and only if $\mathcal{I}^\wedge \subseteq G^*$.

Thus, we have the duality between left invariant bornologies on G and closed left ideals of βG containing in G^*. We say that a subset A of a group G is

- *large* if $G = FA$ for some $F \in [G]^{<\omega}$;
- *small* if $L \setminus A$ is large for every large subset L of G;
- *sparse* if for every infinite subset X of G there exists a finite subset $F \subset X$ such that $\bigcap_{g \in F} gA$ is finite.

Theorem 1. *For every infinite group G, the family $\mathcal{Sm}_G$ of all small subsets of G is a left and right invariant bornology and $\mathcal{Sm}_G^\wedge = \overline{K(\beta G)}$.*

This is Theorem 4.40 from [8] in the form given in [17, Theorem 12.5].

Theorem 2. *For every infinite group G, the family $\mathcal{Sp}_G$ of all sparse subsets of G is a left and right invariant bornology and $\mathcal{Sp}_G^\wedge = G^*G^*$.*

This is Theorem 10 from [4].

More applications of this duality can be found in [18].

Let $\mathcal{B}$ be a group bornology on G. By [23], $\mathcal{B}^\wedge$ is an ideal in βG but the converse statement does not hold: $\mathcal{Sm}_G^\wedge$ is an ideal but $\mathcal{Sm}_G$ is not a group bornology.

1.4. **Plenty of bornologies.** We say that a left invariant bornology $\mathcal{B}$ of G is *maximal* if $G \notin \mathcal{B}$ but $G \in \mathcal{B}'$ for every left invariant bornology $\mathcal{B}'$ on G such that $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}'$.

Theorem 3. *For every infinite group G, of cardinality κ, there are 2^{2^κ} distinct maximal left invariant bornologies on G.*

Proof. By Theorem 6.30 from [8], there exists a family $\mathfrak{F}$ consisting of $|\mathfrak{F}| = 2^{2^\kappa}$ pairwise disjoint closed left ideals in βG. Each $I \in \mathfrak{F}$ contains some minimal closed left ideal L_I. Then $\{L_I^\vee : I \in \mathfrak{F}\}$ is the desired family of maximal left invariant bornologies on G. $\square$

Theorem 4 ([14]). *Every countable group G admits exactly $2^\mathfrak{c}$ group bornologies.*

By Theorem 6.3.3 from [26], each Abelian group G admits exactly $2^{2^{|G|}}$ group bornologies. However this theorem does not extend to uncountable non-commutative groups. The following (consistent) counterexample was suggested by Taras Banakh.

Example 1. Under **CH** there exists a group G of cardinality $|G| = \mathfrak{c} = \omega_1$ admitting exactly $2^\mathfrak{c} < 2^{2^\mathfrak{c}}$ group bornologies.

Proof. In [29] Shelah constructed a **CH**-example of a group G of cardinality $|G| = \mathfrak{c} = \omega_1$ such that $G = A^{6641}$ for any uncountable subset $A \subset G$. This implies that each group bornology $\mathcal{B}$ on G either coincides with $\mathcal{P}_G$ or is contained in the bornology $[G]^{\le\omega}$ of countable subsets of G. Thus, the number of group bornologies of Shelah's group G is $\le 2^{|[G]^{\le\omega}|} = 2^{\mathfrak{c}}$. On the other hand, Theorem 4 ensures that this number is $\ge 2^{\mathfrak{c}}$. Therefore, the number of group bornologies of Shelah's group G is equal to $2^{\mathfrak{c}}$, which is strictly smaller than $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ by known Cantor's Theorem. $\square$

Theorem 4 implies that under the assumption $2^{\omega_1} = 2^{\omega}$, each group G of cardinality $|G| = \omega_1$ has exactly $2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{|G|}}$ group bornologies. This observation shows that the group from Example 1 cannot be constructed in ZFC.

Theorem 5 ([18]). *For every infinite group G, the following statements hold:*

(i) *if $\mathcal{B}$ is a left invariant bornology on G and $\mathcal{B} \ne [G]^{<\omega}$, then there is a left invariant bornology $\mathcal{B}'$ on G such that $[G]^{<\omega} \subsetneq \mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}$;*

(ii) *if G is either countable or Abelian and $\mathcal{B}$ is a left and right invariant bornology on G such that $\mathcal{B} \ne [G]^{<\omega}$ then there is a left and right invariant bornology $\mathcal{B}'$ on G such that $[G]^{<\omega} \subsetneq \mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}$;*

(iii) *if G is the group S_κ of all permutations of an infinite cardinal κ then there exists a left and right invariant bornology $\mathcal{B}$ on G such that $[G]^{<\omega} \subsetneq \mathcal{B}$ and there are no left and right invariant bornologies on G between $[G]^{<\omega}$ and $\mathcal{B}$.*

Theorem 6. *Let G be an infinite group and let $\mathcal{B}$ be a group bornology of G such that $\mathcal{B} \ne [G]^{<\omega}$. If G is either countable or Abelian then there is a group bornology $\mathcal{B}'$ such that $[G]^{<\omega} \subsetneq \mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}$.*

This is Theorem 6.4.1. from [26]. We do not know (Question 6.4.1. in [26]) if Theorem 6 remains true for every infinite group G, in particular, for $G = S_\kappa$.

By [17, Theorem 12.9], every infinite group can be partitioned into countably many small subsets.

Question 1. *Given an infinite group G, do there exist a small subset S and a countable subset A of G such that $\{aS : a \in A\}$ is a covering (partition) of G?*

This is so if either G is amenable or G has a subgroup of countable index.

2. Coarse groups

2.1. **Balleans and coarse spaces.** For a set X a subset $\varepsilon \subset X \times X$ containing the diagonal $\triangle_X := \{(x,x) : x \in X\}$ is called an *entourage* on X. For two entourages $\varepsilon, \varepsilon'$ on X the sets

$$\varepsilon \circ \varepsilon' = \{(x,z) : \exists y \in X \ (x,y) \in \varepsilon, \ (y,z) \in \varepsilon'\} \quad \text{and} \quad \varepsilon^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \varepsilon\}.$$

also are entourages on X.

A family $\mathcal{E}$ of entourages on X is called a *ball structure* if it satisfies two axioms:

(a) for any $\varepsilon, \delta \in \mathcal{E}$ the entourage $\varepsilon \circ \delta^{-1}$ is contained in some $\lambda \in \mathcal{E}$;

(b) $\bigcup \mathcal{E} = X \times X$.

A ball structure $\mathcal{E}$ on X is called a *coarse structure* if it satisfies one additional axiom:

(c) if $\varepsilon \in \mathcal{E}$ and $\triangle_X \subseteq \delta \subseteq \varepsilon$, then $\delta \in \mathcal{E}$.

It follows that each coarse structure is a ball structure and each ball structure $\mathcal{E}$ on X is a base of the unique coarse structure

$$\downarrow\mathcal{E} = \{\delta : \exists \varepsilon \in \mathcal{E} \ \ \triangle_X \subseteq \delta \subseteq \varepsilon\}.$$

A subfamily $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ is called a *base* of a coarse structure $\mathcal{E}$ if for every $\varepsilon \in \mathcal{E}$ is contained in some $\delta \in \mathcal{E}'$.

A *ballean* is a pair $(X, \mathcal{E})$ consisting of a set X and a ball structure $\mathcal{E}$ on X. If the ball structure $\mathcal{E}$ is a coarse structure, then the ballean $(X, \mathcal{E})$ is called a *coarse space*. We note that coarse spaces can be considered as asymptotic counterparts of uniform spaces and balleans can be defined in terms of balls, see [17], [26].

Let $\mathcal{E}$ be a ball structure on a set X. For every $x \in X$ and $\varepsilon \in \mathcal{E}$ the set $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : (x, y) \in \varepsilon\}$ is called the *ball of radius ε centered at x*.

A subset Y of X is called *bounded* if there exist $x \in X$ and $\varepsilon \in \mathcal{E}$ such that $Y \subseteq B(x, \varepsilon)$. The coarse structure $\mathcal{E} = \{\varepsilon \in X \times X : \triangle_X \subseteq \varepsilon\}$ is the unique coarse structure such that $(X, \mathcal{E})$ bounded.

For a ballean $(X, \mathcal{E})$, each subset $Y \subseteq X$ carries the induced ball structure $\mathcal{E}\restriction Y := \{\varepsilon \cap (Y \times Y) : \varepsilon \in \mathcal{E}\}$. The ballen $(Y, \mathcal{E}\restriction Y)$ is called a *subballean* of $(X, \mathcal{E})$.

A subset Y of a ballean X is called *large* (or *coarsely dense*) if there exists $\varepsilon \in \mathcal{E}$ such that $X = B(Y, \varepsilon)$ where $B(Y, \varepsilon) = \bigcup_{y \in Y} B(y, \varepsilon)$.

Let $(X, \mathcal{E})$, $(X', \mathcal{E}')$ be balleans. A mapping $f : X \to X'$ is called *coarse* if for every $\varepsilon \in \mathcal{E}$ there exists $\varepsilon' \in \mathcal{E}'$ such that, for every $x \in X$, we have $f(B(x, \varepsilon)) \subseteq B(f(x), \varepsilon')$. If f is surjective and coarse, then $(X', \mathcal{E}')$ is called a *coarse image* of $(X, \mathcal{E})$. If f is a bijection such that f and f^{-1} are coarse mappings, then f is called an *asymorphism*. Two balleans $(X, \mathcal{E})$, $(X', \mathcal{E}')$ are called *coarsely equivalent* if there exist large subsets $Y \subseteq X$, $Y' \subseteq X'$ such that the balleans $(Y, \mathcal{E}\restriction Y)$ and $(Y', \mathcal{E}'\restriction Y')$ are asymorphic.

To conclude the coarse vocabulary, we take a family $\{(X_\alpha, \mathcal{E}_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ of balleans and define their *product* $\prod_{\alpha<\kappa}(X_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)$ as the Cartesian product $\prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ endowed with the ball structure consisting of the entourages

$$\{((x_\alpha), (y_\alpha)) : \forall \alpha \in A \ (x_\alpha, y_\alpha) \in \varepsilon_\alpha\}$$

where $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} \mathcal{E}_\alpha$.

For lattices of coarse structures and varieties of coarse spaces, see [19] and [16].

For every ballean $(X, \mathcal{E})$, the family of all bounded subsets of X is a bornology. On the other hand, for every bornology $\mathcal{B}$ on X, there is the smallest by inclusion coarse structure $\mathcal{E}_\mathcal{B}$ on X such that $\mathcal{B}$ is the bornology of all bounded subsets of $(X, \mathcal{E}_\mathcal{B})$. A coarse structure $\mathcal{E}$ on X is of the form $\mathcal{E}_\mathcal{B}$ if and only if $(X, \mathcal{E})$ is *thin*: for every $\varepsilon \in \mathcal{E}$, there exists a bounded subset A of $(X, \mathcal{E})$ such that $B(x, \varepsilon) = \{x\}$ for all $x \in X \setminus A$. The thin coarse structures are also called *discrete*.

2.2. **Coarse structures on groups.** We remind that a bornology $\mathcal{I}$ on a group G is a *group bornology* if and $AB^{-1} \in \mathcal{I}$ for all $A, B \in \mathcal{I}$. A group bornology $\mathcal{I}$ is called *invariant* if $\bigcup_{g \in G} g^{-1}Ag \in \mathcal{I}$ for each $A \in \mathcal{I}$.

Let X be a G-space with an action $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$, of a group G. We assume that G acts on X transitively, take a group bornology $\mathcal{I}$ on G and consider the coarse structure $\mathcal{E}(G,\mathcal{I},X)$ on X generated by the base consisting of the entourages $\varepsilon_A := \{(x,y) \in X \times X : y \in \{x\} \cup Ax\}$. In this case $B(x,\varepsilon_A) = \{x\} \cup Ax$.

By [10, Theorem 1], for every coarse structure $\mathcal{E}$ on X, there exist a group G of permutations of X and a group ideal $\mathcal{I}$ on G such that $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G,\mathcal{I},X)$.

Now let $X = G$ and G acts on X by the left shifts. We denote $\mathcal{E}_{\mathcal{I}} = \mathcal{E}(G,\mathcal{I},G)$. Thus, every group bornology $\mathcal{I}$ on G turns G into the coarse space $(G,\mathcal{E}_{\mathcal{I}})$. We note that a subset A of G is bounded in $(G,\mathcal{E}_{\mathcal{I}})$ if and only if $A \in \mathcal{I}$.

A group G endowed with a coarse structure $\mathcal{E}$ is called *left (right) coarse group* if, for every $\varepsilon \in \mathcal{E}$, there exists $\varepsilon' \in \mathcal{E}$ such that $gB(x,\varepsilon) \subseteq B(gx,\varepsilon')$ (resp. $B(x,\varepsilon)g \subseteq B(xg,\varepsilon')$) for all $x,g \in G$. Equivalently, $(G,\mathcal{E})$ is a left (right) coarse group if $\mathcal{E}$ has a base consisting of left (right) invariant entourages. An entourage ε is *left* (*right*) *invariant* if $g\varepsilon = \varepsilon$ (resp. $\varepsilon g = g$) for each $g \in G$, where $g\varepsilon = \{(gx,gy) : (x,y) \in \varepsilon)\}$ and $\varepsilon g = \{(xg,yg) : (x,y) \in \varepsilon)\}$. For finitely generated groups, the right coarse groups $(G,\mathcal{E}_{[G]^{<\omega}})$ in metric form play an important role in Geometric Group Theory, see [6, Chapter 4].

A group G endowed with a coarse structure $\mathcal{E}$ is called a *coarse group* if the group multiplication $(G,\mathcal{E}) \times (G,\mathcal{E}) \to (G,\mathcal{E})$, $(x,y) \mapsto xy$, and the inversion $(G,\mathcal{E}) \to (G,\mathcal{E})$, $x \mapsto x^{-1}$, are coarse mappings. In this case, $\mathcal{E}$ is called a *group coarse structure.*

The following two statements are taken from [22], see also [26, Chapter 6].

Proposition 1. *A group G endowed with a coarse structure $\mathcal{E}$ is a right coarse group if and only if there exists a group bornology $\mathcal{I}$ on G such that $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{I}}$.*

Proposition 2. *For a group G endowed with a coarse structure $\mathcal{E}$, the following conditions are equivalent:*

(i) *$(G,\mathcal{E})$ is a coarse group;*
(ii) *$(G,\mathcal{E})$ is a left and right coarse group;*
(iii) *there exists an invariant group bornology $\mathcal{I}$ on G such that $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{I}}$.*

Applying Theorem 1.4, we get $2^{2^{\aleph_0}}$ distinct right coarse structures on any countable group. For every infinite group G and any infinite cardinal $\kappa \leqslant |G|$, the bornology $[G]^{<\kappa}$ defines an unbounded right coarse structure on G. But if G has only two conjugated classes then there is only one, bounded, group coarse structure on G.

2.3. **Asymorphisms.** For an infinite cardinal κ, we say that two groups G and H are *κ-asymorphic* (resp. *κ-coarsely equivalent*) if the right coarse structures on G and H defined by the bornologies $[G]^{<\kappa}$ and $[H]^{<\kappa}$ are asymorphic (resp. coarsely equivalent). In the case $\kappa = \aleph_0$, G and H are called *finitarily asymorphic* and *finitarily coarsely equivalent*, respectively.

Let us recall that a group G is *locally finite* if each finite subset of G is contained in a finite subgroup of G. A classification of countable locally finite groups up to finitary asymorphisms is obtained in [12] (cf. [17, p. 103]).

Theorem 7. *Two countable locally finite groups G_1 and G_2 are finitarily asymorphic if and only if the following conditions hold:*

(i) *for every finite subgroup $F_1 \subset G_1$, there exists a finite subgroup F_2 of G_2 such that $|F_1|$ is a divisor of $|F_2|$;*

(ii) *for every finite subgroup F_2 of G_2, there exists a finite subgroup F_1 of G_1 such that $|F_2|$ is a divisor of $|F_1|$.*

It follows that there are continuum many distinct types of countable locally finite groups and each group is finitarily asymorphic to some direct sum of finite cyclic groups.

The following coarse classification of countable Abelian groups is obtained in [2].

Theorem 8. *Two countable groups G and H are finitarily coarsely equivalent if and only if the torsion-free ranks of G and H coincide and G, H are both either finitely generated or infinitely generated.*

In particular, any two countable torsion Abelian groups are finitarily coarsely equivalent.

For κ-asymorphisms, we have the following two results.

Theorem 9 ([25])**.** *For any uncountable cardinal κ, any two groups G, H of cardinality $|G| = \kappa = |H|$ are κ-asymorphic.*

Theorem 10 ([24])**.** *Let κ be a cardinal and G be an Abelian group of cardinality $|G| \geq \kappa$. The group G is κ-asymorphic to a free Abelian group. If $\kappa < |G|$ or $\kappa = |G|$ is a singular cardinal, then G is not not κ-coarsely equivalent to a free group. In particular, G is not κ-asymorphic to a free group.*

Theorem 11 ([20])**.** *For every countable group G there are continuum many distinct classes of finitarily coarsely equivalent subsets of G.*

2.4. **Free coarse groups.** A class $\mathfrak{M}$ of groups is a *variety* if $\mathfrak{M}$ is closed under subgroups, products and homomorphic images. We assume that $\mathfrak{M}$ is non-trivial (i.e. there exists $G \in \mathfrak{M}$ such that $|G| > 1$) and recall that the a group $F_{\mathfrak{M}}(X)$ in the variety $\mathfrak{M}$ is defined by the following conditions: $F_{\mathfrak{M}}(X) \in \mathfrak{M}$, $X \subset F_{\mathfrak{M}}(X)$, X generates $F_{\mathfrak{M}}(X)$ and every mapping $X \to G$, $G \in \mathfrak{M}$ can be extended to homomorphism $F_{\mathfrak{M}}(X) \to G$.

For a coarse space $(X, \mathcal{E})$, a *free coarse group* $F_{\mathfrak{M}}(X, \mathcal{E})$ is defined as a coarse group $(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathcal{E}')$ such that $(X, \mathcal{E})$ is a subballean of $(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathcal{E}')$ and every coarse mapping $(X, \mathcal{E}) \to (G, \mathcal{E}'')$, $G \in \mathfrak{M}$, $(G, \mathcal{E}'')$ is a coarse group, can be extended to a coarse homomorphism $(F_{\mathfrak{M}}(X), \mathcal{E}') \to (G, \mathcal{E}'')$. The definition implies that a free coarse group is unique up to an asymorphism, which is the identity on X.

The following theorem is proved in [21] with explicit description of the coarse structure of $F_{\mathfrak{M}}(X, \mathcal{E})$.

Theorem 12. *For every coarse space $(X, \mathcal{E})$ and every non-trivial variety $\mathfrak{M}$ of groups, there exists a free coarse group $F_{\mathfrak{M}}(X, \mathcal{E})$.*

2.5. **Maximality.** A topological space X with no isolated points is called *maximal* if X has an isolated point in any stronger topology. A topological group G is called *maximal* if G is maximal as a topological space. Every maximal topological group has an open countable Boolean subgroup, and can be constructed using the Martin Axiom. On the other hand, the existence of a maximal topological group implies the existence of a P-point in ω^*, see [11].

An unbounded coarse space $(X,\mathcal{E})$ is called *maximal* if X is bounded in every coarse structure $\mathcal{E}'$ such that $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}'$. A coarse group G is called *maximal* if G is maximal as a coarse space. If a coarse group $(G,\mathcal{I})$ is maximal then $\{g^2 : g\in G\}$ is bounded in $(G,\mathcal{I})$, and a maximal coarse Boolean group is constructed in [27] under CH, (see also [26, Chapter 10]), but the following question remains open.

Question 2. Does there exist a maximal coarse group in **ZFC**?

2.6. **Normality.** We say that subsets Y,Z of a coarse space $(X,\mathcal{E})$ are *asymptotically disjoint* if, for every $\varepsilon\in\mathcal{E}$ the intersection $B(Y,\varepsilon)\cap B(Z,\varepsilon)$ is bounded.

A subset $U\subset X$ of a coarse space $(X,\mathcal{E})$ is called an *asymptotic neighborhood* of a set $A\subset X$ if the sets A and $X\setminus U$ are asymptotically disjoint.

A coarse space $(X,\mathcal{E})$ is called *normal* if any asymptotically disjoint subsets $Y,Z\subset X$ have disjoint asymptotic neighborhoods O_Y, O_Z.

Theorem 13 ([13]). *For a coarse space $(X,\mathcal{E})$ the following conditions are equivalent:*

(1) *$(X,\mathcal{E})$ is normal;*
(2) *for any disjoint and asymptotically disjoint sets $Y,Z\subset X$ there exists a slowly oscillating function $f:(X,\mathcal{E})\to[0,1]$ such that $f(Y)\subset\{0\}$ and $f(Z)\subset\{1\}$.*
(3) *for each subballean Y of X, every bounded slowly oscillating function $f:Y\to\mathbb{R}$ can be extended to a bounded slowly oscillating function on X.*

We recall that a real-valued function $f:X\to\mathbb{R}$ defined on a coarse space $(X,\mathcal{E})$ is *slowly oscillating* if for any $\varepsilon\in\mathcal{E}$ and real number $\delta>0$ there exists a bounded set $B\subset X$ such that $\mathrm{diam} f(B(x,\varepsilon))<\delta$.

Every metrizable coarse space is normal. More generally, a coarse space is normal if its coarse structure has a linearly ordered base, see [13]. A partial conversion of this result for products was recently proved in [3].

Theorem 14. *If the product $X\times Y$ of two unbounded coarse spaces X,Y is normal, then the coarse space $X\times Y$ has bounded growth and its bornology has a linearly ordered base.*

A coarse space $(X,\mathcal{E})$ is defined to have *bounded growth* if there exists a (multi-valued) function $\Phi: X\to\mathcal{P}_X$ such that for every bounded set $B\subset X$ the union $\bigcup_{x\in B}\Phi(x)$ is bounded and for every entourage $\varepsilon\in\mathcal{E}$ there exists a bounded set $D\subset X$ such that $B(x,\varepsilon)\subset\Phi(x)$ for all $x\in X\setminus D$.

Theorem 15 ([3]). *Let κ be an infinite cardinal and G be a group of cardinality $|G|\geq\kappa$, endowed with the coarse structure $\mathcal{E}_{[G]^{<\kappa}}$, generated by the group ideal $[G]^{<\kappa}$. If the coarse space $(X,\mathcal{E}_{[G]^{\kappa}})$ is normal (and G is solvable), then $|G|=\kappa$ (and the cardinal $\kappa=|G|$ is regular).*

2.7. **Coarse structures on topological groups.** A subset A of a topological group G (all topological groups are supposed to be Hausdorff) is called *totally bounded* if, for every neighborhood U of the identity, there exists a finite set $F\subset G$ such that $A\subseteq FU\cap UF$. The group bornology $\mathcal{B}_\tau$ of all totally bounded subsets of (G,τ) defines two (antitall) coarse structures $\mathcal{E}_l$ and $\mathcal{E}_r$ generated by the ball structures

$\big\{\{(x,y)\in G\times G\colon y\in\{x\}\cup Bx\}\colon B\in\mathcal{B}_\tau\big\}$ and $\{\{(x,y)\in G\times G\colon y\in\{x\}\cup Bx\colon B\in\mathcal{B}_\tau\big\}$, respectively.

The following questions are from [7].

Question 3. Given a group bornology $\mathcal{B}$ on a group G, how can one detect whether there exists a group topology τ on G such that $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\tau$?

Let (G, τ) be a topological group. We denote by $\tau^\sharp$ the strongest group topology on G such that $\mathcal{B}_{\tau^\sharp} = \mathcal{B}_\tau$, and say that (G, τ) is *b-determined* if $\tau^\sharp = \tau$. Clearly, every discrete group is b-determined. A totally bounded group G is b-determined if and only if τ is the maximal totally bounded topology on G.

Question 4. Given a topological group G, how can one detect whether G is b-determined?

For the coarse structures $\mathcal{E}_l$, $\mathcal{E}_r$ and slowly oscillating functions on locally compact groups, see [5].

3. Uniform groups

We recall that a family $\mathcal{U}$ of subsets of $X \times X$ is a *uniformity* on a set X if

- $\triangle_X \subseteq u$ for each $u \in \mathcal{U}$;
- if $u, v \in \mathcal{U}$ then $u \cap v \in \mathcal{U}$;
- if $u \in \mathcal{U}$ and $u \subseteq v \subset X \times X$ then $v \in \mathcal{U}$.
- for every $u \in \mathcal{U}$, there exists $v \in \mathcal{U}$ such that $v \circ v^{-1} \subseteq u$.

A family $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ is called a *base* of $\mathcal{U}$ if for every $u \in \mathcal{U}$ there exists $v \in \mathfrak{F}$ such that $v \subseteq u$. A set X, endowed with a uniformity $\mathcal{U}$, is called a *uniform space*.

We say that a uniformity $\mathcal{U}$ on a group G is *left* (*right*) *invariant* if $\mathcal{U}$ has a base consisting of left (right) translation invariant entourages (cf. 2.2).

A filter φ on a group G is called a *group filter* if for every $A \in \varphi$ there exists $B \in \varphi$ such that $BB^{-1} \in \varphi$. In this case every set $A \in \varphi$ contains the unit e of the group G. If $\{\varepsilon\} \in \varphi$, then the group filter φ is called *principal*.

Every group filter φ determines two uniformities $\mathcal{L}_\varphi$ and $\mathcal{R}_\varphi$ on G with the bases

$$\big\{\{(x,y) \in G \times G : y \in xA\} : A \in \varphi\big\} \qquad \text{and} \qquad \big\{\{(x,y) \in G \times G : y \in Ax\} : A \in \varphi\big\}.$$

Proposition 3. *A uniformity $\mathcal{U}$ on a group G is right invariant if and only if $\mathcal{U} = \mathcal{R}_\varphi$ for some group filter φ on G.*

We recall that a topological group G is *balanced* (= SIN) if the left and right uniformities on G coincide (= G has a base of invariant neighborhoods of the identity).

Proposition 4. *A uniformity $\mathcal{U}$ on a group G is left and right invariant if and only if G endowed with the topology generated by the uniformity $\mathcal{U}$ is a balanced topological group.*

Example 2. Let H be a topological group and let f be an arbitrary automorphism of H. Then the semidirect product $G = H \leftthreetimes \langle f \rangle$ is a right uniform group determined by the filter of neighbourhoods of e in H. If f is discontinuous then G is not left uniform. Now let H be the Cartesian product of infinitely many copies of $\mathbb{Z}_p$. It is easy to find a discontinuous automorphism of order 2 of H. Hence, the right uniform group G contains a compact topological group of index 2 but G is not a topological group.

We say that a group G is *uniformizable* if there is a non-principal group filter φ on G such that $\cap\varphi = \{e\}$.

We recall that a group G is *topologizable* if G admits a non-discrete (Hausdorff) group topology. Clearly, every topologizable group is uniformizable, but the class of uniformizable groups is much wider than the class of topologizable groups. By [30], every group can be embedded into some non-topologizable group, and if a group G contains a uniformizable subgroup then G is uniformizable.

Does there exists a non-uniformizable group? In [9], Alexander Olshansky used the following example to construct a countable non-topologizable group.

Example 3. Let $n \geq 2$ be a natural number and $m \geq 665$ be an odd number. Let $A(n, m)$ be the Adian group, see [1]. This group is generated by n elements and has the following properties:

(a) $A(n, m)$ is torsion free;
(b) the center C of $A(n, m)$ is an infinite cyclic group, $C = \langle c\rangle$;
(c) $A(n, m)/C$ is an infinite group of period m.

We put $G = A(n, m)/\langle c^m\rangle$, denote by $f : A(n, m) \to G$ the quotient map and observe that if $g \in G \setminus \{e\}$ then g or g^m belongs to the set $\{f(c), f(c^2), \dots, f(c^{m-1})\}$. It follows that if φ is a group filter on G and $\cap\varphi = \{e\}$ then $\{e\} \in \varphi$, so G is non-uniformizable.

Question 5. Does every uniformizable group contain a topologizable subgroup?

Question 6. Can one find a criterion of uniformizability of countable groups in spirit of Markov's criterion of topologizability?

References

1. S. Adian, *Classification of periodic words and their applications in group theory*, In: Burnside Groups, Proc. Bielefeld, Germany 1977 Workshop, J.L. Mennicke (Ed.), Lecture Notes Math. **806** (1980), 1–40. DOI: 10.1007/BFb0091266
2. T. Banakh, M. Cencelj, D. Repovš, and I. Zarichnyi, *Coarse classification of Abelian groups and amenable shift-homogeneous metric spaces*, Quaterly. J. Math. **65** (2004), no. 1, 1127–1144. DOI: 10.1093/qmath/hau006
3. T. Banakh and I. V. Protasov, *The normality and bounded growth of balleans*, Preprint (arXiv:1810.07979).
4. M. Filali, Ie. Lutsenko, and I. Protasov, *Boolean group ideal and the ideal structure of βG*, Mat. Stud. **31** (2009), no. 1, 19–28.
5. M. Filali and I. Protasov, *Slowly oscillating functions on locally compact groups*, Appl. Gen. Topology **6** (2005), no. 1, 67–77.
6. P. Harpe, *Topics in geometric group theory*, University Chicago Press, 2000.
7. S. Hernandes and I. V. Protasov, *Balleans of topological groups*, Укр. мат. вісник **8** (2011), no. 1, 87–100; **reprinted version**: J. Math. Sci. **178** (2011), no. 1, 65–74. DOI: 10.1007/s10958-011-0526-0
8. N. Hindman and D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification*, de Gruyter, Berlin, New York, 1998.
9. A. Olshanskii *A remark on countable non-topologizable groups*, Vestnik Mosk. Gos. Univ. Mat. Mekh. (1980), no. 3, 103 (Russian).

10. O. V. Petrenko and I. V. Protasov, *Balleans and G-spaces*, Укр. мат. журн. **64** (2012), no. 3, 344–350; **reprinted version**: Ukr. Math. J. **64** (2012), no. 3, 387–393. DOI: 10.1007/s11253-012-0653-x
11. И. В. Протасов, *Максимальные топологии на группах*, Сиб. матем. журн. **39** (1998), no. 6, 1368–1381; **English version**: I. V. Protasov, *Maximal topologies on groups*, Siberian Math. J. **39** (1998), no. 6, 1184–1194. DOI: 10.1007/BF02674129
12. I. V. Protasov, *Morphisms of ball structures of groups and graphs*, Укр. мат. журн. **54** (2002), no. 6, 847–855; **reprinted version**: Ukr. Math. J. **54** (2002), no. 6, 1027–1037. DOI: 10.1023/A:1021772505988
13. I. V. Protasov, *Normal ball structures*, Mat. Stud. **20** (2003), no. 1, 3–16.
14. I. V. Protasov, *Counting Ω-ideals,* Algebra Univers. **62** (2009), no. 4, 339–343. DOI: 10.1007/s00012-010-0032-0
15. I. V. Protasov, *A note on bornologies*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 13–18. DOI: 10.15330/ms.49.1.13-18
16. I. Protasov, *Varieties of coarse spaces*, Axioms. **7** (2018), no. 2, 32. DOI: 10.3390/axioms7020032
17. I. V. Protasov and T. Banakh, *Ball Structures and Colorings of Groups and Graphs*, Math. Stud. Monogr. Ser., **11**, VNTL, Lviv, 2003.
18. I. Protasov and K. Protasova, *Ideals in P_G and βG*, Topology Appl. **238** (2018), 24–31. DOI: 10.1016/j.topol.2018.02.003
19. I. V. Protasov and K. D. Protasova, *Lattices of coarse structures,* Math. Stud. **48** (2017), no. 2, 115–123. DOI: 10.15330/ms.48.2.115-123
20. I. Protasov and K. Protasova, *Counting coarse subsets of a countable group*, Appl. Gen. Topol. **19** (2018), no. 1, 85–90. DOI: 10.4995/agt.2018.7721
21. I. Protasov and K. Protasova, *Free coarse groups*, arXiv:1803.10504, 2018, preprint.
22. I. V. Protasov and O. I. Protasova, *Sketch of group balleans,* Math. Stud. **22** (2004), no. 1, 10–20.
23. I. V. Protasov and O. I. Protasova, *On closed ideals in βG*, Semigroup Forum **75** (2007), no. 1, 237–240. DOI: 10.1007/s00233-006-0650-1
24. I. Protasov and S. Slobodianiuk, *On asymorphisms of groups*, J. Group Theory. **20** (2017), no. 2, 393–399. DOI: 10.1515/jgth-2016-0038
25. I. V. Protasov and A. Tsvietkova, *Decomposition of cellular balleans*, Topology Proc. **36** (2010) 77–83.
26. I. Protasov and M. Zarichnyi, *General Asymptology*, Math. Stud. Monogr. Ser., **12**, VNTL, Lviv, 2007.
27. O. V. Protasova, *Maximal balleans,* Appl. Gen. Topol. **7** (2006), no. 2, 151–163. DOI: 10.4995/agt.2006.1920
28. J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, AMS University Lecture Ser. **31**, Providence, R.I., 2003.
29. S. Shelah, *On a problem of Kurosh, Jónsson groups, and applications*, Word problems, II (Conf. on Decision Problems in Algebra, Oxford, 1976), pp. 373–394, Stud. Logic Foundations Math., 95, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980.
30. A. V. Trofimov, *A theorem on embedding into nontopologizable groups*, Vestn. Mosk. Univ., Ser. I (2005), no. 3, 60–62 (Russian); **English version**: Mosc. Univ. Math. Bull. **60** (2005), No. 3, 42–44.

Стаття: надійшла до редколегії 24.10.2018
доопрацьована 26.10.2018
прийнята до друку 26.12.2018

БОРНОЛОГІЧНІ, ГРУБІ ТА РІВНОМІРНІ СТРУКТУРИ НА ГРУПАХ

Ігор ПРОТАСОВ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Проспект академіка Глушкова, 4d, 03680, Київ, Україна
e-mail: i.v.protasov@gmail.com

Дано огляд та аналіз різних способів, якими борнології, грубі структури та рівномірності можуть узгоджуватися з груповою операцією.

Ключові слова: борнологія, груба структура, рівномірність, компактифікація Стоуна-Чеха.

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2018. Випуск 86. C. 63–70
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 63–70
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.063-070

УДК 512+515.1

ON THE SPREAD OF TOPOLOGICAL GROUPS CONTAINING SUBSETS OF THE SORGENFREY LINE

Dedicated to the 60th birthday of M. M. Zarichnyi

Taras BANAKH[1], Igor GURAN[1], Oleksandr RAVSKY[2]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska str., 1, 79000, Lviv, Ukraine*
[2] *Ya. Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics of Ukrainian Academy of Sciences, Naukova 3b, 79061, Lviv, Ukraine*
e-mail: t.o.banakh@gmail.com, igor-guran@ukr.net, alexander.ravsky@uni-wuerzburg.de

We prove that any topological group G containing a subspace X of the Sorgenfrey line has spread $s(G) \geq s(X \times X)$. Under OCA, each topological group containing an uncountable subspace of the Sorgenfrey line has uncountable spread. This implies that under OCA a cometrizable topological group G is cosmic if and only if it has countable spread. On the other hand, under CH there exists a cometrizable Abelian topological group that has hereditarily Lindelöf countable power and contains an uncountable subspace of the Sorgenfrey line. This cometrizable topological group has countable spread but is not cosmic.

Key words: Sorgenfrey line, topological group, spread, OCA, CH.

1. Introduction

The main result of this paper is the following theorem answering the problem [2], posed by the first author on MathOverflow.

Theorem 1. *Each topological group containing a topological copy of the Sorgenfrey line contains a discrete subspace of cardinality continuum.*

2010 Mathematics Subject Classification: 22A05; 54A25; 54H11

We recall that *the Sorgenfrey line* is the real line endowed with the topology, generated by the half-intervals $[a, b)$ where $a < b$ are arbitrary real numbers. The Sorgenfrey line endowed with the (continuous) operation of addition of real numbers is a classical example of a paratopological group, which is not a topological group, see [1, 1.2.1]. The Sorgenfrey line has countable spread and shows that Theorem 1 cannot be generalized to paratopological groups.

Theorem 1 follows from a more refined theorem evaluating the spread of a topological group that contains a topological copy of an uncountable subspace of the Sorgenfrey line.

We recall that for a topological space X the cardinal

$$s(X) = \sup\{|D| : D \subset X \text{ is a discrete subspace of } X\}$$

is called the *spread* of X.

Theorem 2. *Assume that a topological group G contains a subspace X, homeomorphic to an uncountable subspace of the Sorgenfrey line. Then $s(G) \geq s(X \times X)$.*

Theorems 1 and 2 will be proved in Section 2. Theorem 2 has the following corollary holding under OCA (the Open Coloring Axiom, see [11, §8]).

Corollary 1. *Under OCA any topological group G containing an uncountable subspace X of the Sorgenfrey line has uncountable spread.*

Proof. Proposition 8.4(c) of [11] implies that X contains an uncountable subset Z admitting a strictly decreasing function $f : Z \to X$ (with respect to the linear order inherited from the real line). Then $D = \{(x, f(x)) : z \in Z\}$ is a discrete subspace of $X \times X$ and hence

$$s(G) \geq s(X \times X) \geq |D| = |Z| > \omega.$$

□

We shall apply Corollary 1 to detect cosmic topological groups among cometrizable topological groups.

A topological space X

- is *cosmic* if it is a continuous image of a separable metrizable space;
- is *cometrizable* if X admits a weaker metrizable topology such that each point has a (not necessarily open) neighborhood base consisting of sets which are closed in the metric topology.

Cometrizable spaces were introduced by Gruenhage in [8]. The interplay between cometrizable spaces and other generalized metric spaces was studied in [3] and [4]. It was proved in [3] and [4] that the class of cometrizable spaces includes all stratifiable and all sequential $\aleph_0$-spaces. On the other hand, there exists a countable (and hence cosmic) space, which is not cometrizable.

In [8] Gruenhage proved that under PFA a regular cometrizable space X is cosmic if and only if X has countable spread and contains no uncountable subspace of the Sorgenfrey line. In [11, 8.5] Todorčević observed that this characterization remains true under OCA (which is a weaker assumption than PFA). Unifying Theorem 8.5 [11] of Todorčević with Corollary 1, we obtain the following OCA-characterization of cosmic topological groups.

Corollary 2. *Under OCA, a cometrizable topological group is cosmic if and only if it has countable spread.*

It is interesting that this OCA-characterization of cosmic cometrizable groups does not hold under the Continuum Hypothesis (briefly, CH).

Theorem 3. *Under CH there exists a cometrizable topological group G that contains an uncountable subspace of the Sorgenfrey line (and hence is not cosmic) but has hereditarily Lindelöf countable power G^ω (and hence G^ω has countable spread).*

Theorem 3 will be proved in Section 3.

Remark 1. By [10], there exists a hereditarily Lindelöf topological group G whose square is not normal. The topological group G has countable spread but is not cosmic. Corollary 2 implies that the space G is not cometrizable under OCA.

Remark 2. Using the Continuum Hypothesis, Hajnal and Juhász [7] constructed a hereditarily separable Boolean topological group G with uncountable pseudocharacter. This topological group has countable spread (being hereditarily separable) but is not hereditarily Lindelöf and not cosmic (because it has uncountable pseudocharacter).

2. Proof of Theorem 2

Theorems 1 and 2 will be deduced from the following

Lemma 1. *Let κ be a cardinal of uncountable cofinality and X be a subspace of the Sorgenfrey line whose square contains a discrete subspace $\Gamma \subset X \times X$ of cardinality $|\Gamma| = \kappa$. If a topological group G contains a subspace homeomorphic to X, then G contains a discrete subspace of cardinality κ.*

Proof. We shall identify the subspace X of the Sorgenfrey line with a subspace of the topological group G. For every $x \in X$ and a rational number $q > x$ let

$$[x, q) = \{y \in X : x \leq y < q\}$$

be the order half-interval in X. Let also

$$\uparrow\! x = \{y \in X : x \leq y\}.$$

By the definition of the Sorgenfrey topology, the countable family $\{[x, q) : x < q \in \mathbb{Q}\}$ is a neighborhood base at x in the space X.

Since the subspace $\Gamma \subset X \times X$ is discrete, each point $(x, y) \in \Gamma$ has a neighborhood $O_{(x,y)} \subset X \times X$ such that $\Gamma \cap O_{(x,y)} = \{(x, y)\}$. Find rational numbers $u_{(x,y)}, v_{(x,y)}$ such that

$$(x, y) \in [x, u_{(x,y)}) \times [y, v_{(x,y)}) \subset O_{(x,y)}.$$

Since the cardinal $|\Gamma| = \kappa$ has uncountable cofinality, for some rational numbers u, v the set

$$\Gamma' = \big\{(x, y) \in \Gamma : u_{(x,y)} = u,\ v_{(x,y)} = v\big\}$$

has cardinality $|\Gamma'| = |\Gamma|$. Replacing the set Γ by the set Γ', we can assume that $u_{(x,y)} = u$ and $v_{(x,y)} = v$ for all $(x, y) \in \Gamma$.

Let

$$\Gamma_1 := \{x \in X : \exists y \in X\ (x, y) \in \Gamma\} \qquad \text{and} \qquad \Gamma_2 = \{y \in X : \exists x \in X\ (x, y) \in \Gamma\}$$

be the projections of the set $\Gamma \subset X \times X$ onto the coordinate axes. We claim that Γ coincides with the graph of some strictly decreasing function $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. First observe that for any $x \in \Gamma_1$ there exists a unique $y \in \Gamma$ with $(x, y) \in \Gamma$. Otherwise we could find two real numbers $y_1 < y_2$ with $(x, y_1), (x, y_2) \in \Gamma$ and conclude that

$$(x, y_2) \in [x, u) \times [y_2, v) \subset [x, u) \times [y_1, v) \subset O_{(x,y_1)},$$

which contradicts the choice of the neighborhood $O_{(x,y_1)}$. This contradiction shows that Γ coincides with the graph of some function $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. Let us show that this function is strictly decreasing. Assuming that this is not true, we could find two points $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$ with $x_1 < x_2$ and $y_1 \le y_2$. Then

$$(x_2, y_2) \in [x_2, u) \times [y_2, v) \subset [x_1, u) \times [y_1, v) \subset O_{(x_1,y_1)},$$

which contradicts the choice of the neighborhood $O_{(x_1,y_1)}$.

Therefore the function $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ is strictly decreasing, which implies that

$$|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = |\Gamma| = \kappa.$$

For any point $x \in X$ choose a neighborhood $V_x \subset G$ of the unit e of G such that

$$X \cap (V_x^{-1} V_x x \cup x V_x V_x^{-1}) \subset {\uparrow}x.$$

Next, for every point $x \in X$, choose a rational point $r_x > x$ such that $[x, r_x) \subset xV_{f(x)}$ if $x \in \Gamma_1$ and $[x, r_x) \subset V_{f^{-1}(x)}x$ if $x \in \Gamma_2$. Since the cardinal $|\Gamma_1| = \kappa$ has uncountable cofinality, for some $c, d \in \mathbb{Q}$ the set $Z = \{z \in \Gamma_1 : r_z = c,\ r_{f(z)} = d\}$ has cadinality κ.

We claim that the subspace $D := \{z \cdot f(z) : z \in Z\}$ has cardinality κ and is discrete in G. For every $z \in Z$ consider the neighborhood $z(V_z \cap V_{f(z)})f(z)$ of the point $z \cdot f(z)$ in G. We claim that $x \cdot f(x) \notin z(V_z \cap V_{f(z)})f(z)$ for any $x \in Z \setminus \{z\}$. To derive a contradiction, assume that $x \cdot f(x) \in zV_{f(z)}f(z)$ for some $x \ne z$ in Z.

If $x > z$, then $x \in [z, r_z) \subset zV_{f(z)}$ and

$$f(x) = x^{-1}xf(x) \in x^{-1}zV_{f(z)}f(z) \subset V_{f(z)}^{-1}z^{-1}zV_{f(z)}f(z) = V_{f(z)}^{-1}V_{f(z)}f(z).$$

Then

$$f(x) \in X \cap V_{f(z)}^{-1}V_{f(z)}f(z) \subset {\uparrow}f(z)$$

and $f(x) \ge f(z)$, which is not possible as $x > z$ and f is strictly decreasing.

If $z > x$, then $f(x) > f(z)$ and

$$f(x) \in [f(x), r_{f(x)}) = [f(x), d) \subset [f(z), d) = [f(z), r_{f(z)}) \subset V_z f(z)$$

and then

$$x \in zV_z f(z) f(x)^{-1} \subset zV_z f(z) f(z)^{-1} V_z^{-1} = zV_zV_z^{-1} \subset {\uparrow}z$$

which contradicts $z > x$. □

Proof of Theorem 1. Assume that a topological group G contains a topological copy of the Sorgenfrey line $\mathbb{S}$. Observe that the square of $\mathbb{S}$ contains a discrete subset $\Gamma = \{(x, -x) : x \in \mathbb{S}\}$ of cardinality continuum $\mathfrak{c}$. By [6, 5.12], the continuum has uncountable cofinality. Applying Lemma 1, we conclude that the topological group G contains a discrete subspace of cardinality $\mathfrak{c}$. □

Proof of Theorem 2. Let G be a topological group G containing a subspace X, homeomorphic to an uncountable subspace of the Sorgenfrey line. Assuming that $s(G) < s(X \times X)$, we conclude that $s(X \times X) \geq \kappa^+$ for the cardinal $\kappa = s(G)$. Then $X \times X$ contains a discrete subspace D of cardinality $|D| = \kappa^+$, which has uncountable cofinality. In this case we can apply Lemma 1 and conclude that G contains a discrete subspace of cardinality κ^+, which implies that $\kappa = s(G) \geq \kappa^+ > \kappa$ and this is a desired contradiction. $\square$

3. Proof of Theorem 3

In this section we prove Theorem 3. But first we prove that the Sorgenfrey line $\mathbb{S}$ embeds into a cometrizable topological group. In the proof of this embedding result, we use the k-separability of $\mathbb{S}$.

A subset D of a topological space X is called *k-dense* in X if each compact subset $K \subset X$ is contained in a compact set $\tilde{K} \subset X$ such that the intersection $D \cap \tilde{K}$ is dense in $\tilde{K}$.

A topological space X is defined to be *k-separable* if it contains a countable k-dense subset.

Lemma 2. *The set $\mathbb{Q}$ of rational numbers is k-dense in the Sorgenfrey line $\mathbb{S}$.*

Proof. Given a compact set $K \subset \mathbb{S}$, observe that K is metrizable and hence contains a countable dense subset $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset K$. For every $n, k \in \omega$ fix a rational numbers $x_{n,k}$ such that $x_n < x_{n,k} < x_n + \frac{1}{2^{n+k}}$. We claim that the subset $\tilde{K} = K \cup \{x_{n,k}\}_{n,k\in\omega}$ is compact. Indeed, let $\mathcal{U}$ be a cover of $\tilde{K}$ by open subsets of $\mathbb{S}$. For every $x \in K$ find a set $U_x \in \mathcal{U}$ with $x \in U_x$ and a real number b_x such that $[x, b_x) \subset U_x$. By the compactness of K the open cover $\{[x, b_x) : x \in K\}$ of K has a finite subcover $\{[x, b_x) : x \in F\}$ (here F is a suitable finite subset of K). For every $x \in F$ the set $[x, b_x)$ is closed in $\mathbb{S}$ and hence the intersection $K \cap [x, b_x)$ is compact, which implies that the number $\varepsilon_x := b_x - \max\big(K \cap [x, b_x)\big)$ is strictly positive. Choose $m \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{2^m} < \min_{x\in F} \varepsilon_x$. Then

$$\tilde{K} \setminus \bigcup_{x\in F} [x, b_x) \subset \{x_{n,k} : n + k \leq m\}$$

is finite and hence is contained in the union $\bigcup \mathcal{F}$ of some finite subfamily $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Then $\mathcal{F} \cup \{U_x : x \in F\} \subset \mathcal{U}$ is a finite subcover of $\tilde{K}$, witnessing that the subset $\tilde{K}$ of $\mathbb{S}$ is compact. By the definition of $\tilde{K}$, the set $\tilde{K} \cap \mathbb{Q} \supset \{x_{n,k}\}_{n,k\in\omega}$ is dense in $\tilde{K}$. $\square$

Lemma 2 implies that the Sorgenfrey line is k-separable. Now we prove that for any k-separable space X and a cometrizable space Y the function space $C_k(X, Y)$ is cometrizable. Here for topological spaces X, Y by $C_k(X, Y)$ we denote the space of continuous functions from X to Y, endowed with the compact-open topology, which is generated by the subbase consisting of the sets

$$[K, U] := \{f \in C_k(X, Y) : f(K) \subset U\}$$

where K is a compact subset of X and U is an open subset of Y.

Lemma 3. *For any k-separable space X and any cometrizable space Y the function space $C_k(X, Y)$ is cometrizable.*

Proof. Let D be a countable k-dense set in X and τ be a metrizable topology on Y, witnessing that the space Y is cometrizable. By Y_τ we denote the metrizable topological space (Y, τ).

The density of the set D in X ensures that the restriction operator

$$r : C_k(X, Y) \to Y_\tau^D, \ \ r : f \mapsto f{\restriction}D,$$

is injective. Let σ be the (metrizable) topology on $C_k(X, Y)$ such that the map

$$r : (C_k(X, Y), \sigma) \to Y_\tau^D$$

is a topological embedding. We claim that the topology σ witnesses that the space $C_k(X, Y)$ is cometrizable.

Fix any function $f \in C_k(X, Y)$ and an open neighborhood $O_f \subset C_k(X, Y)$. Without loss of generality, O_f is of basic form $O_f = \bigcap_{i=1}^n [K_i, U_i]$ for some non-empty compact sets $K_1, \dots, K_n \subset X$ and some open sets $U_1, \dots, U_n \subset Y$. For every $i \le n$ and point $x \in K_i$, find a neighborhood $V_{f(x)} \subset Y$ of $f(x) \in U_i$ whose τ-closure $\overline{V}^\tau_{f(x)}$ is contained in U_i. Using the regularity of the cometrizable space Y, find two open neighborhoods $N_{f(x)}, W_{f(x)}$ of $f(x)$ such that

$$\overline{N}_{f(x)} \subset W_{f(x)} \subset \overline{W}_{f(x)} \subset V_{f(x)}.$$

By the compactness of K_i, the open cover $\{f^{-1}(N_{f(x)}) : x \in K_i\}$ of K_i has a finite subcover $\{f^{-1}(N_{f(x)}) : x \in F_i\}$ where $F_i \subset K_i$ is a finite subset of K_i. By the k-density of D in X, for every $x \in F_i$ the compact set $K_{i,x} := K_i \cap f^{-1}(\bar{N}_{f(x)})$ can be enlarged to a compact set $\tilde{K}_{i,x} \subset X$ such that $K_{i,x}$ is contained in the closure of the set $\tilde{K}_{i,x} \cap D$. Replacing the set $\tilde{K}_{i,x}$ by $\tilde{K}_{i,x} \cap f^{-1}(\overline{W}_{f(x)})$, we can assume that $f(\tilde{K}_{i,x}) \subset \overline{W}_{f(x)} \subset V_{f(x)}$.

Consider the open neighborhood

$$V_f = \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{x \in F_i} [\tilde{K}_{i,x}, V_{f(x)}]$$

of f in the function space $C_k(X, Y)$. We claim that its σ-closure $\overline{V}^\sigma_f$ is contained in O_f.

Given any function $g \notin O_f$, we should find a neighborhood $O_g \in \sigma$ of g that does not intersect V_f. Since $g \notin O_f$, there exists $i \le n$ and a point $z \in K_i$ such that $g(z) \notin U_i$. Find a point $x \in F_i$ with $z \in K_{i,x}$. Taking into account that $\overline{V}^\tau_{f(x)} \subset U_i \subset Y \setminus \{g(z)\}$, we conclude that $g(z) \notin \overline{V}^\tau_{f(x)}$. Since the point z belongs to the closure of the set $\tilde{K}_{i,n} \cap D$, the continuity of the function $g : Z \to Y_\tau$ yields a point $d \in \tilde{K}_{i,n} \cap D$ such that $g(d) \notin \overline{V}^\tau_{f(x)}$. Then $O_g := \big[\{d\}, Y \setminus \overline{V}^\tau_{f(x)}\big] \in \sigma$ is a required σ-open neighborhood of g that is disjoint with the neighborhood V_f. □

Lemma 4. *The Sorgenfrey line $\mathbb{S}$ admits a topological embedding into the cometrizable locally convex linear vector space $C_k(\mathbb{S})$.*

Proof. By Lemma 2, the Sorgenfrey line $\mathbb{S}$ is k-separable, and by Lemma 3, the function space $C_k(\mathbb{S})$ is cometrizable. It remains to observe that the map $\chi : \mathbb{S} \to C_k(\mathbb{S})$ assigning to each point $x \in \mathbb{S}$ the function $\chi_x : \mathbb{S} \to \{0, 1\}$ defined by $\chi_x^{-1}(1) = [-x, \infty)$ is a topological embedding of $\mathbb{S}$ into the function space $C_k(\mathbb{S})$, which has the structure of a locally convex topological vector space. $\square$

Proof of Theorem 3. By Lemma 4, the Sorgenfrey line $\mathbb{S}$ can be identified with a subspace of some cometrizable Abelian topological group H. According to Michael [9], under CH the Sorgenfrey line contains an uncounatble subspace X whose countable power X^ω is hereditarily Lindelöf. Observe that the topological sum $X^{<\omega} = \bigoplus_{n\in\omega} X^n$ of finite powers of X admits a topological embedding into X^ω, which implies that $X^{<\omega}$ is hereditarily Lindelöf as well as its countable power $(X^{<\omega})^\omega$.

Observing that the group hull G of X in the group $H \supset \mathbb{S} \supset X$ is a continuous image of $X^{<\omega}$, we conclude that the space G is hereditarily Lindelöf. Moreover, the countable power G^ω is hereditarily Lindelöf, being a continuous image of the hereditarily Lindelöf space $(X^{<\omega})^\omega$. $\square$

References

1. A. Arhangel'skii and M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Paris; World Sci. Publl. Hackensack, NJ, 2008.
2. T. Banakh, *Topological groups containing the Sorgenfrey line*, https://mathoverflow.net/questions/321051.
3. T. Banakh, *Is each cosmic space cometrizable?*, https://mathoverflow.net/questions/321483.
4. T. Banakh and Ya. Stelmakh, *The cometrizability of generalized metric spaces*, arXiv:1901.10987, 2019, preprint.
5. J. E. Baumgartner, *Applications of the proper forcing axiom*, in: Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, p. 913–959.
6. T. Jech, *Set theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
7. A. Hajnal and I. Juhasz, *A separable normal topological group need not be Lindelöf*, General Topology Appl. **6** (1976), no. 2, 199–205. DOI: 10.1016/0016-660X(76)90033-7
8. G. Gruenhage, *Cosmicity of cometrizable spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), no. 1, 301–315. DOI: 10.1090/S0002-9947-1989-0992600-5
9. E. A. Michael, *Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products*, Compositio Math. **23** (1971), no. 2, 119–214.
10. Y. Peng and L. Wu, *A Lindelöf group with non-Lindelöf square*, Adv. Math. **325** (2018), 215–242. DOI: 10.1016/j.aim.2017.11.021
11. S. Todorčević, *Partition problems in topology*, Contemporary Math. **84**. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1989.

Стаття: надійшла до редколегії 28.01.2019
прийнята до друку 18.02.2019

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86

ПРО СПРЕД ТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП, ЩО МІСТЯТЬ ПІДМНОЖИНИ СТРІЛКИ ЗОРҐЕНФРЕЯ

Тарас БАНАХ[1], Ігор ГУРАН[1], Олександр РАВСЬКИЙ[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, Університетська, 1, 79000, Львів*
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, 79060, Львів*
e-mail: t.o.banakh@gmail.com, igor-guran@ukr.net, alexander.ravsky@uni-wuerzburg.de

Доведено, що топологічна група G, яка містить підпростір X стрілки Зарґенфрея, має спред $s(G) \geq s(X \times X)$. В припущенні OCA, довільна топологічна група, що містить незлічений підпростір стрілки Зарґенфрея має незлічений спред. Звідси випливає, що при OCA кометризовна топологічна група має злічену сітку тоді і лише тоді, коли вона має злічений спред. З іншого боку, при CH існує кометризовна абелева топологічна група, що має спадково лінделефову злічену степіть і містить деякий незлічнний підпростір стрілки. Ця топологічна група має злічений спред, проте не має зліченної сітки.

Ключові слова: стрілка Зорґенфрея, топологічна група, спред, OCA, CH.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 71–76
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 71–76
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.071-076

УДК 512+515.1

BAIRE CATEGORY PROPERTIES OF TOPOLOGICAL GROUPS

Dedicated to the 60th birthday of our teacher M. M. Zarichnyi

Taras BANAKH, Olena HRYNIV

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: t.o.banakh@gmail.com, ohryniv@gmail.com

We present several known and new results on the Baire category properties in topological groups. In particular, we prove that a Baire topological group X is metrizable if and only if X is point-cosmic if and only if X is a σ-space. A topological group X is Choquet if and only if its Raikov completion $\bar{X}$ is Choquet and X is G_δ-dense in $\bar{X}$. A topological group X is complete-metrizable if and only if X is a point-cosmic Choquet space if and only if X is a Choquet σ-space. Finally, we pose several open problem, in particular, whether each Choquet topological group is strong Choquet.

Key words: topological group, Baire space, Choquet space, strong Choquet space, Choquet game.

In this paper we collect some results on Baire category properties of topological groups and pose some open problems.

The best known among Baire category properties are the meagerness and Baireness defined as follows.

A topological space X is defined to be

- *meager* if it can be written as the countable union of closed subsets with empty interior in X;
- *Baire* if for any sequence $(U_n)_{n\in\omega}$ of open dense subsets fo X the intersection $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ is dense in X.

It is well-known that a topological space is Baire if and only if it contains no non-empty open meager subspace. This fact and the topological homogeneity of topological groups imply the following known characterization, see [5, 9.8].

Proposition 1. *A topological group is Baire if and only if it is not meager.*

2010 Mathematics Subject Classification: 22A05, 54E52

In framework of topological groups, the Baireness combined with a suitable network property often implies the metrizability.

A family $\mathcal{N}$ of subsets of a topological space X is called

- a *network* at a point $x \in X$ if for any neighborhood $O_x \subset X$ of x the union $\bigcup\{N \in \mathcal{N} : N \subset O_x\}$ is a neighborhood of x;
- a *network* if $\mathcal{N}$ is a network at each point.

A regular topological space X is called

- *point-cosmic* if X has a countable network $\mathcal{N}_x$ at each point $x \in X$;
- *cosmic* if X has a countable network;
- a *σ-space* of X has a σ-discrete network.

It is easy to see that each first-countable regular space is point-cosmic, and each cosmic space is both point-cosmic and a σ-space. The sequential fan S_{ω_1} with uncountably many spikes is an example of a σ-space, which is not point-cosmic. More information on cosmic and σ-spaces can be found in [3, §4].

Theorem 1. *For a Baire topological group X the following conditions are equivalent:*

(1) *X is metrizable;*
(2) *X is point-cosmic;*
(3) *X is a σ-space.*

Proof. The implications $(1) \Rightarrow (2, 3)$ are trivial (or well-known).

$(3) \Rightarrow (1)$ Assume that X is a σ-space. By Theorems 5.4 and 7.1 in [1], the Baire σ-space X contains a dense metrizable subspace $M \subset X$. The regularity of X implies that X is first-countable at each point $x \in M$. Being topologically homogeneous, the topological group X is first-countable and by Birkhoff-Kakutani Theorem [5, 9.1], X is metrizable.

$(2) \Rightarrow (1)$ Assume that the topological group X is point-cosmic and hence X has a countable network $\mathcal{N}$ at the unit e. For every $N \in \mathcal{N}$ let $(N^{-1}\bar{N})^\circ$ be the interior of the set $N^{-1}\bar{N} = \{x^{-1}y : x \in N,\ y \in \bar{N}\}$ in X. Here $\bar{N}$ stands for the closure of the set N in X.

We claim that the family

$$\mathcal{B} := \{(N^{-1}\bar{N})^\circ : N \in \mathcal{N},\ \ e \in (N^{-1}\bar{N})^\circ\}$$

is a countable neighborhood base at the unit e of the group X. Given any neighborhood $U \subset X$ of e, find an open neighborhood $V \subset X$ of e such that $V^{-1}VV^{-1} \subset U$. By the definition of a network at the point e, the union $\bigcup\mathcal{N}_V$ of the subfamily $\mathcal{N}_V := \{N \in \mathcal{N} : N \subset V\}$ contains some open neighborhood O_e of e in X. Since O_e is Baire (as an open subset of the Baire space X), some set $N \in \mathcal{N}_V$ is not nowhere dense in V. Consequently, its closure $\bar{N}$ contains a non-empty open subset W of X. Since $W \subset \bar{N}$, the intersection $W \cap N$ contains some point w. Then $w^{-1}W$ is an open neighborhood of e such that

$$w^{-1}W \subset N^{-1}\bar{N} \subset V^{-1}\bar{V} \subset V^{-1}VV^{-1} \subset U.$$

Consequently, $w^{-1}W \subset (N^{-1}\bar{N})^\circ$ and $(N^{-1}\bar{N}) \in \mathcal{B}$.

Being first-countable, the topological group X is metrizable by the Birkhoff-Kakutani Theorem [5, 9.1]. □

Both Baire and meager spaces have nice game characterizations due to Oxtoby [8]. To present these characterizations, we need to recall the definitions of two infinite games $\mathsf{G}_{\mathsf{EN}}(X)$ and $\mathsf{G}_{\mathsf{NE}}(X)$ played by two players E and N (abbreviated from Empty and $\mathsf{Non\text{-}Empty}$) on a topological space X.

The game $\mathsf{G}_{\mathsf{EN}}(X)$ is started by the player E who selects a non-empty open set $U_0 \subset X$. Then player N responds selecting a non-empty open set $U_1 \subset U_0$. At the n-th inning the player E selects a non-empty open set $U_{2n} \subset U_{2n-1}$ and the player N responds selecting a non-empty open set $U_{2n+1} \subset U_{2n}$. At the end of the game, the player E is declared the winner if $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ is empty. In the opposite case the player N wins the game $\mathsf{G}_{\mathsf{EN}}(X)$.

The game $\mathsf{G}_{\mathsf{NE}}(X)$ differs from the game $\mathsf{G}_{\mathsf{EN}}(X)$ by the order of the players. The game $\mathsf{G}_{\mathsf{NE}}(X)$ is started by the player N who selects a non-empty open set $U_0 \subset X$. Then player E responds selecting a non-empty open set $U_1 \subset U_0$. At the n-th inning the player N selects a non-empty open set $U_{2n} \subset U_{2n-1}$ and the player E responds selecting a non-empty open set $U_{2n+1} \subset U_{2n}$. At the end of the game, the player E is declared the winner if $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ is empty. In the opposite case the player N wins the game $\mathsf{G}_{\mathsf{NE}}(X)$.

The following classical characterization can be found in [8].

Theorem 2 (Oxtoby)**.** *A topological space X is*

- *meager if and only if the player* E *has a winning strategy in the game* $\mathsf{G}_{\mathsf{NE}}(X)$*;*
- *Baire if and only if the player* E *has no winning strategy in the game* $\mathsf{G}_{\mathsf{EN}}(X)$*.*

A topological space X is defined to be *Choquet* if the player N has a winning strategy in the Choquet game $\mathsf{G}_{\mathsf{EN}}(X)$. Choquet spaces were introduced in 1975 by White [10] who called them *weakly α-favorable spaces.*

Oxtoby's Theorem 2 implies that

$$\text{Choquet} \Rightarrow \text{Baire} \Rightarrow \text{non-meager}.$$

Let us also recall the notion of a strong Choquet space, which is defined using a modification $\dot{\mathsf{G}}_{\mathsf{EN}}(X)$ of the Choquet game $\mathsf{G}_{\mathsf{EN}}(X)$, called the strong Choquet game.

The game $\dot{\mathsf{G}}_{\mathsf{EN}}(X)$ is played by two players, E and N on a topological space X. The player E starts the game selecting a open set $U_0 \subset X$ and a point $x_0 \in U_0$. Then the player N responds selecting an open neighborhood $U_1 \subset U_0$ of x_0. At the n-th inning the player E selects an open set $U_{2n} \subset U_{2n-1}$ and a point $x_n \in U_{2n}$ and player N responds selecting a neighborhood $U_{2n+1} \subset U_{2n}$ of x_n. At the end of the game the player E is declared the winner if the intersection $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ is empty. Otherwise the player N wins the game $\dot{\mathsf{G}}_{\mathsf{EN}}(X)$.

A topological space X is called *strong Choquet* if the player N has a winning strategy in the game $\dot{\mathsf{G}}_{\mathsf{EN}}(X)$. More information on (strong) Choquet spaces can be found in [5, 8.CD]. Various topological games are analyzed in [4] and [9].

It is known (and easy to see) that the class of strong Choquet spaces includes all spaces that are homeomorphic to complete metric spaces. Such spaces will be called *complete-metrizable.*

So, for any topological space X we have the implications

$$\text{complete-metrizable} \Rightarrow \text{strong Choquet} \Rightarrow \text{Choquet} \Rightarrow \text{Baire} \Rightarrow \text{non-meager}.$$

By [2] and [8] (see also [5, 8.17]), a metrizable space is

- strong Choquet if and only if it is complete-metrizable;
- Choquet if and only if it contains a dense complete-metrizable subspace.

In the following theorem we present a characterization of Choquet topological groups. A subset A of a topological space X is called *G_δ-dense* in X if A has non-empty intersection with any non-empty G_δ-set $G \subset X$.

Theorem 3. *A topological group X is Choquet if and only if its Raikov completion $\bar{X}$ is Choquet and X is G_δ-dense in $\bar{X}$.*

Proof. The "if" part easily follows from the definitions of the Choquet game and the G_δ-density of X in $\bar{X}$.

To prove the "only if" part, assume that a topological group X is Choquet. Then its Raikov completion $\bar{X}$ also is Choquet (since $\bar{X}$ contains a dense Choquet subspace). It remains to prove that X is G_δ-dense in $\bar{X}$. Assuming that this is not true, we could find a point $\bar{x} \in \bar{X}$ and a sequence $(O_n)_{n\in\omega}$ of neighborhoods of $\bar{x}$ such that $X \cap \bigcap_{n\in\omega} O_n = \varnothing$. Choose a decreasing sequence $(\Gamma_n)_{n\in\omega}$ of open neighborhoods of the unit in $\bar{X}$ such that $\Gamma_n^{-1}\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1}$, and $\bar{x}\Gamma_n \subset O_n$ for every $n \in \omega$. Then the intersection $\Gamma := \bigcap_{n\in\omega} \Gamma_n$ is a subgroup in $\bar{X}$ such that the set

$$g\Gamma = \bigcap_{n\in\omega} g\Gamma_n \subset \bigcap_{n\in\omega} O_n$$

is disjoint with the subgroup X. This implies $X \cap X\bar{x}\Gamma = \varnothing$ and $X\Gamma \cap X\bar{x} = \varnothing$.

Given a subset $A \subset \bar{X}$ consider the Banach-Mazur game $\mathsf{BM}(\bar{X}, A)$ played by two players, E and N according to the following rules. The player E starts the game selecting a non-empty open set $U_0 \subset \bar{X}$ and the player N responds selecting a non-empty open set $U_1 \subset U_0$. At the n-th inning the player E chooses a non-empty open set $U_{2n} \subset U_{2n-1}$ and the player N responds selecting a non-empty open set $U_{2n+1} \subset U_{2n}$. At the end of the game the player E is declared the winner if the intersection $A \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n$ is empty. In the opposite case the player N wins the game.

It is easy to see that for any dense Choquet subspace $A \subset \bar{X}$ the player N has a winning strategy in the Banach-Mazur game $\mathsf{BM}(\bar{X}, A)$. Moreover, at nth inning the player N can replace the set U_{2n} selected by the player E by a set $U'_{2n} \subset U_{2n}$ so small that $U'_{2n} \subset x_n\Gamma_n$ for some $x_n \in X$. Then the set U_{2n+1} chosen by player N according to his/her strategy will be contained in $x_n\Gamma_n$.

In particular, the player N has a winning strategy in the game $\mathsf{BM}(\bar{X}, X)$ having this smalleness property. By the same reason, the player N has a winning strategy in the Banach-Mazur game $\mathsf{BM}(\bar{X}, X\bar{x})$. Now the players E and N can use these winning strategies in the games $\mathsf{BM}(X, H)$ and $\mathsf{BM}(X, Hg)$ to construct a decreasing sequence $(U_n)_{n\in\omega}$ of non-empty open sets in $\bar{X}$ such that the intersection $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ meets both sets X and $X\bar{x}$. Moreover, in the nth inning the player N can make his/sets U_{2n} so small that $U_{2n} \subset x_n\Gamma_n$ for some $x_n \in X$. Choose two points $x \in H \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n$ and $y \in Hg \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Then for every $n \in \omega$ we have $x \in U_{2n} \subset x_n\Gamma_n$ and hence $x_n \in x\Gamma_n^{-1}$ and $U_{2n} \subset x_n\Gamma_n \subset x\Gamma_n^{-1}\Gamma_n \subset x\Gamma_{n-1}$. Consequently, $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{2n} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} x\Gamma_{n-1} = x\Gamma$ and hence $y \in X\bar{x} \cap x\Gamma \subset X\bar{x} \cap X\Gamma = \varnothing$, which is a desired contradiction. □

It is easy to see that each G_δ-dense subspace of a strong Choquet space is strong Choquet.

Problem 1. *Is the Raikov-completion of a strong Choquet topological group strong Choquet?*

Using Theorems 1 and 3 we can prove the following characterization of complete-metrizable topological groups.

Theorem 4. *For a topological group X the following conditions are equivalent:*

(1) *X is complete-metrizable;*
(2) *X is a point-cosmic Choquet space;*
(3) *X is Choquet σ-space.*

Proof. The implications $(1) \Rightarrow (2,3)$ are trivial.

$(2,3) \Rightarrow (1)$ Assuming that a Choquet topological group X is point-cosmic or a σ-space, we can apply Theorem 1 and conclude that the Choquet (and hence Baire) topological group X is metrizable. Then its Raikov completion $\bar{X}$ is a complete-metrizable topological group, see [5, 9.A]. By Theorem 3, X is G_δ-dense in $\bar{X}$. Since each seingleton in $\bar{X}$ is a G_δ-set, the G_δ-density of X in $\bar{X}$ implies that $X = \bar{X}$ and hence X is a complete-metrizable (and complete) topological group. □

Problem 2. *Is each Choquet topological group strong Choquet?*

Remark 1. By Theorem 4, the answer to Problem 2 is affirmative for topological groups which are point-cosmic or σ-spaces.

It is known [5, 8.13] (and [5, 8.16]) that the product of two (strong) Choquet space is (strong) Choquet. On the other hand, the product $X \times Y$ of two Baire spaces can be meager, see [7]. Nonetheless, by a recent result of Li and Zsilinszky [6], the product of two Baire spaces is Baire if one of the spaces has countable cellularity. We recall that a topological space X has *countable cellularity* if X does not contain uncountably many pairwise disjoint open sets.

Problem 3. *Let H be a closed normal subgroup of a topological group G and G/H be the quotient topological group.*

(1) *Assume that H and G/H are Baire and H or G/H has countable cellularity. Is G Baire?*
(2) *Assume that H and G/H are (strong) Choquet. Is G (strong) Choquet?*

References

1. T. Banakh, *Quasicontinuous functions with values in Piotrowski spaces*, Real Anal. Exchange **43** (2018), no. 1, 77–104. DOI: 10.14321/realanalexch.43.1.0077
2. G. Choquet, *Lectures on analysis. Vol. I: Integration and topological vector spaces, I*, Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
3. G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, in: Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier, 1984, p. 425–501.
4. G. Gruenhage, *The story of a topological game*, Rocky Mt. J. Math. **36** (2006), no. 6, 1885–1914. DOI: 10.1216/rmjm/1181069351
5. A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.
6. R. Li snd L. Zsilinszky, *More on products of Baire spaces*, Topology Appl. **230** (2017), 35–44. DOI: 10.1016/j.topol.2017.08.003

7. J. van Mill and R. Pol, *The Baire category theorem in products of linear spaces and topological groups*, Topology Appl. **22** (1986), no. 3, 267–282. DOI: 10.1016/0166-8641(86)90025-8
8. J. C. Oxtoby, *The Banach-Mazur game and Banach Category Theorem*, in: Contributions to the theory of games, Vol. III, Annals of Math. Studies, **39**, Princeton Univ. Press, 1957, p. 159–163.
9. R. Telgársky, *Topological games: on the 50th anniversary of the Banach-Mazur game*, Rocky Mt. J. Math. **17** (1987), no. 2, 227–276. DOI: 10.1216/RMJ-1987-17-2-227
10. H. E. White, Jr. *Topological spaces that are α-favorable for a player with perfect information*, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), no. 1, 477–482. DOI: 10.2307/2040588

Стаття: надійшла до редколегії 14.01.2019
доопрацьована 24.01.2019
прийнята до друку 18.02.2019

БЕРІВСЬКІ ВЛАСТИВОСТІ ТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП

Тарас БАНАХ, Олена ГРИНІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: t.o.banakh@gmail.com, ohryniv@gmail.com

Подано короткий огляд відомих і нових берівських властивостей топологічних груп. Зокрема, доведено, що берівська топологічна група є метризовною тоді і лише тоді, коли вона або точково-космічна, або є σ-простором. Топологічна група X є простором Шоке тоді і лише тоді її поповнення за Райковим є простором Шоке і X – G_δ-щільна в $\bar{X}$. Топологічна група X метризовна повною метрикою тоді і лише тоді, коли X є точково-космічним простором Шоке тоді і лише тоді, коли X є σ-простором Шоке. Також поставлено декілька відкритих проблем, зокрема чи кожна топологічна група Шоке є сильним простором Шоке.

Ключові слова: топологічна група, берівський простір, простір Шоке, сильний простір Шоке, гра Шоке, гра Банаха-Мазура.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 77–90
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 77–90
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.077-090

УДК 512.53

ІНТЕРАСОЦІАТИВНОСТІ ПОЛІЦИКЛІЧНОГО МОНОЇДА

Присвячується 60-ти річчю проф. М. М. Зарічного

Маркіян ХИЛИНСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: khymarkyan@gmail.com

Досліджено властивості інтерасоціативностей поліциклічного моноїда P_λ. Описано відношення Гріна на інтерасоціативності поліциклічного моноїда $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, а також доведено критерій, коли його дві інтерасоціативності є ізоморфними.

Ключові слова: поліциклічний моноїд, інтерасоціативність, відношення Гріна, ізоморфізм, антиізоморфізм.

1. Термінологія та означення

Напівгрупа – це непорожня множина з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією.

Напівгрупа S називається:

- *простою*, якщо S не має власних двобічних ідеалів;
- 0-*простою*, якщо S містить нуль і S не має власних двобічних ідеалів відмінних від $\{0\}$;
- *біпростою*, якщо S містить єдиний $\mathscr{D}-$клас;
- 0-*біпростою*, якщо S має нуль і S містить два $\mathscr{D}-$класи: $\{0\}$ і $S \setminus \{0\}$;
- *конгруенц-простою*, якщо S має лише одиничну й універсальну конгруенції;
- *інверсною*, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує єдиний елемент $y \in S$ такий, що $xyx = x$ і $yxy = y$.

2010 Mathematics Subject Classification: 20M05, 20M10, 20M15

Якщо S — напівгрупа, то відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ і $\mathscr{H}$ на S визначаються так (див. [33, §2.1]):

$$a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;$$
$$a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;$$
$$a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;$$
$$\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}.$$

Для будь-якого $a \in S$ через $R_a(S)$, $L_a(S)$, $H_a(S)$, $D_a(S)$ і $J_a(S)$ позначимо $\mathscr{R}-$, $\mathscr{L}-$, $\mathscr{H}-$, $\mathscr{D}-$ і $\mathscr{J}-$клас, який містить елемент a, відповідно. Через $R(a), L(a), J(a)$ позначимо правий (лівий, двобічний) головний ідеал, породжений елементом a. Нагадаємо (див. [29, с. 82–83]), що інверсна напівгрупа S називається *комбінаторною*, якщо відношення Ґріна $\mathscr{H}$ на S є відношенням рівності.

Нехай S напівгрупа. Через $E(S)$ позначимо множину ідемпотентів в S. Напівгрупова операція визначає частковий порядок $\leqslant$ на $E(S)$ так:

$$e \leqslant f \text{ тоді і лише тоді, коли } ef = fe = e.$$

Цей порядок називається *природним частковим порядком* на $E(S)$. *Напівґратка* – це комутативна напівгрупа ідемпотентів.

Біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ – це напівгрупа з одиницею 1 породжена двома елементами p і q, що задовольняють умову $pq = 1$. На напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ операція визначається так:

$$q^k p^l \cdot q^m p^n = q^{k+m-\min\{i,m\}} p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

Відомий результат Андерсена [1] стверджує, що (0–)проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком (0–)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфної копії біциклічної напівгрупи. Біциклічний моноїд допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію [17].

У1970 році Ніва і Перро запропонували таке узагальнення біциклічного моноїда ([29], [32]). Для будь-якого ненульового кардинала λ, λ-поліциклічний моноїд P_λ є напівгрупою з нулем визначеною такими співвідношеннями:

$$P_\lambda = \left\langle \{p_i\}_{i\in\lambda}, \{p_i^{-1}\}_{i\in\lambda} \mid p_i p_i^{-1} = 1, p_i p_j^{-1} = 0 \text{ для } i \neq j \right\rangle.$$

Очевидно, що у випадку, коли $\lambda = 1$ напівгрупа P_1 ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем. У [3] доведено, що поліциклічний моноїд є універсальним об'єктом у класі інверсних напівгруп над орієнтованими графами. Зокрема, доведено, що кожна інверсна напівгрупа $G(E)$ над орієнтованим графом E вкладається в поліциклічний моноїд P_λ, де $\lambda = |G(E)|$. Напігрупові та трансляційно неперервні топологізації λ-поліциклічного моноїда, його повнота та занурення вивчали у [2, 4, 5].

Варіантом напівгрупи S стосовно елемента $a \in S$ називається напівгрупа $S^a = (S, *_a)$ з сендвіч-операцією $x *_a y = xay$. Варіанти напівгруп першим почав вивчати Хікі в праці [23]. *Інтерасоціативністю* напівгрупи $(S,\cdot)$ називається напівгрупа $(S,*)$ така, що $a\cdot(b*c) = (a\cdot b)*c$ і $a*(b\cdot c) = (a*b)\cdot c$ для будь-яких $a,b,c \in S$. Інтерасоціативності напівгруп вивчали Бойд, Гольд і Нельсон [6] у 1996 році. Вони довели, що кожна інтерасоціативність моноїда є варіантом. Крім того, кожна інтерасоціативність цілком простої напівгрупи є цілком простою напівгрупою. Також легко довести, що кожна інтерасоціативність групи ізоморфна цій групі. В [20] розглянуто алгебричні властивості інтерасоціативностей біциклічного моноїда. Зокрема, доведено, що будь-які дві його інтерасоціативності не є ізоморфними. Трансляційно неперервні топологізації інтерасоціативностей біциклічного моноїда вивчали в [21]. Варіантам розширеного біциклічного моноїда та їхніми напівгруповим топологізаціям присвячена праця [22]. Варіанти напівгруп бінарних відношень вивчали в працях Хасе [7, 8, 9]. Варіантам напівгруп перетворень присвячені праці [14, 15, 16, 25, 30]. Багато авторів розробили загальну теорію варіантів різних класів напівгруп, див. зокрема [23, 24, 28]. Про сучасний стан варіантів скінченних повних напівгруп перетворень для подальших посилань та історичних дискусій див. [14] і [19, розділ 13]. Варіанти напівґраток вивчали в [10, 18]. Статті [11, 12, 13, 14] започаткували вивчення варіантів напівгруп у довільних (локально малих) категоріях.

Нехай λ – довільний кардинал. Через λ^* будемо позначати вільний моноїд над алфавітом λ, через ε – пусте слово в λ^*. Для кожного слова $a \in \lambda^*$ введемо такі позначення:

$\mathrm{pref}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \quad bc = a\}$ – множина всіх префіксів слова a;

$\mathrm{pref}^{\mathrm{o}}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}\ bc = a\}$ – множина всіх власних префіксів слова a;

$\mathrm{suff}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \quad cb = a\}$ – множина всіх суфіксів слова a;

$\mathrm{suff}^{\mathrm{o}}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}\ cb = a\}$ – множина всіх власних суфіксів слова a.

За лемою 2.4 з [4] (див. також [27, зауваження 2.6], [27, с. 453], [26, §2.1] і [29, твердження 9.3.1] у випадку скінченного кардинала) для довільного кардинала $\lambda \geqslant 2$ кожен ненульовий елемент x поліциклічного моноїда P_λ має зображення у вигляді $u^{-1}v$, де u і v — елементи вільного моноїда λ^*, і напівгрупова операція на P_λ у цьому зображенні визначається так:

$$a^{-1}b \cdot c^{-1}d = \begin{cases} (c_1a)^{-1}d, & \text{якщо } c = c_1b \quad \text{для деякого } c_1 \in \lambda^*; \\ a^{-1}b_1d, & \text{якщо } b = b_1c \quad \text{для деякого } b_1 \in \lambda^*; \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

і $a^{-1}b \cdot 0 = 0 \cdot a^{-1}b = 0 \cdot 0 = 0$.

Надалі λ – кардинал $\geqslant 2$ і $k_1^{-1}k_2$ – деякий ненульовий елемент напівгрупи P_λ. Оскільки P_λ — моноїд, то його інтерасоціативності є варіантами.

2. Деякі властивості інтерасоціативностей поліциклічного моноїда

Надалі для довільного кардинала $\lambda \geqslant 2$ і довільного елемента $k_1^{-1}k_2$ поліциклічного моноїда P_λ через $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ будемо позначати варіант поліциклічного моноїда з напівгруповою сендвіч-операцією

$$a^{-1}b *_{k_1^{-1}k_2} c^{-1}d = a^{-1}b \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot c^{-1}d, \qquad a^{-1}b, c^{-1}d \in P_\lambda.$$

Твердження 1. *Ненульовий елемент $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ є ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли існує слово $b \in \lambda^*$ таке, що $a_1^{-1}a_2 = (bk_2)^{-1}bk_1$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $a_1^{-1}a_2$ – ненульовий ідемпотент в $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $k_1 = ua_2$ і $a_1 = vk_2$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}k_2 \cdot k_2^{-1}v^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}u^{-1}v^{-1}a_2. \end{aligned}$$

З іншого боку, $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, а тому $u^{-1}v^{-1} = \varepsilon$. Звідси випливає, що $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $a_1 = k_2$, $a_2 = k_1$ і $b = \varepsilon$.

2. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = uk_1$ і $a_1 = vk_2$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}uk_1 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot k_2^{-1}v^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}u \cdot v^{-1}a_2. \end{aligned}$$

Розглянемо можливі два підвипадки.

(a) Існує слово $w \in \lambda^*$ таке, що $u = wv$. Тоді $a_1^{-1}u \cdot v^{-1}a_2 = a_1^{-1}wa_2$. Оскільки $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, то $w = \varepsilon$. Отож, $u = v = b$, а отже, $a_2 = bk_1$ і $a_1 = bk_2$.

(b) Існує слово $w \in \lambda^*$ таке, що $v = wu$. Тоді $a_1^{-1}u \cdot v^{-1}a_2 = a_1^{-1}w^{-1}a_2$. Оскільки $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, то $w = \varepsilon$. Отож, $u = v = b$, а отже, $a_2 = bk_1$ і $a_1 = bk_2$.

3. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $k_1 = ua_2$ і $k_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}va_1 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}u^{-1}va_2. \end{aligned}$$

З іншого боку, $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, а тому $u^{-1}v = \varepsilon$. Звідси випливає, що $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $a_1 = k_2$, $a_2 = k_1$ і $b = \varepsilon$.

4. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = uk_1$ і $k_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}uk_1 \cdot k_1^{-1}va_1 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}uva_2. \end{aligned}$$

З іншого боку, $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, а тому $uv = \varepsilon$. Звідси випливає, що $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $a_1 = k_2$, $a_2 = k_1$ і $b = \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Нехай $a_1^{-1}a_2 = (bk_2)^{-1}bk_1$, для деякого слова $b \in \lambda^*$. Тоді

$$a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = (bk_2)^{-1}bk_1 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot (bk_2)^{-1}bk_1 = (bk_2)^{-1}bk_1 = a_1^{-1}a_2.$$

Отже, $a_1^{-1}a_2$ – ідемпотент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. □

Наслідок 1. *Нехай* $(ak_2)^{-1}ak_1, (bk_2)^{-1}bk_1$ *– ідемпотенти напівгрупи* $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$*. Якщо існує слово* $c \in \lambda^*$ *таке, що* $a = cb$*, то*

$$(ak_2)^{-1}ak_1 *_{k_1^{-1}k_2} (bk_2)^{-1}bk_1 = (bk_2)^{-1}bk_1 *_{k_1^{-1}k_2} (ak_2)^{-1}ak_1 = (ak_2)^{-1}ak_1.$$

Лема 1. *Нехай* $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2$ *– довільні елементи напівгрупи* P_λ*. Якщо* $a_1^{-1} \cdot b_1^{-1}b_2 = c_1^{-1}c_2 \neq 0$*, то* $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ *і* $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$*.*

Доведення. Оскільки $a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 \neq 0$, то можливі два випадки.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді
$$c_1^{-1}c_2 = a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = a_1^{-1}ub_1 \cdot b_1^{-1}b_2 = a_1^{-1}ub_2.$$
2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді
$$c_1^{-1}c_2 = a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}b_2 = a_1^{-1}u^{-1}b_2.$$

Отже, $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$. □

Наслідок 2. *Нехай* $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2$ *– довільні елементи напівгрупи* $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$*. Якщо* $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} b_1^{-1}b_2 = c_1^{-1}c_2 \neq 0$*, то* $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ *і* $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$*.*

Лема 2. *Якщо напівгрупа* $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ *містить одиничний елемент, то* $k_1^{-1}k_2 = 1_{P_\lambda}$*.*

Доведення. Нехай $e_1^{-1}e_2$ – одиничний елемент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Тоді:

1) $1_{P_\lambda} = e_1^{-1}e_2 *_{k_1^{-1}k_2} 1_{P_\lambda} = e_1^{-1}e_2 \cdot k_1^{-1}k_2$, тому за лемою 1 матимемо, що $k_2 \in \operatorname{suff}(\varepsilon)$, а отже, $k_2 = \varepsilon$;
2) $1_{P_\lambda} = 1_{P_\lambda} *_{k_1^{-1}k_2} e_1^{-1}e_2 = k_1^{-1}k_2 \cdot e_1^{-1}e_2$, тому за лемою 1 маємо, що $k_1 \in \operatorname{suff}(\varepsilon)$, а отже, $k_1 = \varepsilon$.

Отож, отримуємо, що $k_1^{-1}k_2 = 1_{P_\lambda}$. □

Визначимо відображення $h : P_\lambda \to P_\lambda$ так: $h(a_1^{-1}a_2) = a_2^{-1}a_1$ і $h(0) = 0$ для довільного $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$.

Лема 3. *Для довільних* $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda$ *виконується рівність*
$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$

Доведення. Розглянемо можливі випадки.

1. $a_1^{-1}a_2 = 0$ або $b_1^{-1}b_2 = 0$, або $a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = 0$. Тоді
$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(0) = 0 = b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$
2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді
$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}ub_1 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}ub_2) = b_2^{-1}u^{-1}a_1 = b_2^{-1}b_1 \cdot b_1^{-1}u^{-1}a_1 =$$
$$= b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$
3. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді
$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}u^{-1}b_2) = b_2^{-1}ua_1 =$$
$$= b_2^{-1}ua_2 \cdot a_2^{-1}a_1 = b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$

□

Твердження 2. *Відображення h визначає антиізоморфізмом з напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ у напівгрупу $P_\lambda^{k_2^{-1}k_1}$.*

Доведення. Очевидно, що відображенням h є бієктивним. Покажемо, що воно є антигомоморфізмом. За лемою 3,

$$\begin{aligned} h(a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} b_1^{-1}b_2) &= h(a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = \\ &= h(k_1^{-1}k_2 \cdot b_1^{-1}b_2)h(a_1^{-1}a_2) = \\ &= h(b_1^{-1}b_2)h(k_1^{-1}k_2)h(a_1^{-1}a_2) = \\ &= h(b_1^{-1}b_2) \cdot k_2^{-1}k_1 \cdot h(a_1^{-1}a_2) = \\ &= h(b_1^{-1}b_2) *_{k_2^{-1}k_1} h(a_1^{-1}a_2), \end{aligned}$$

а отже, виконується твердження леми. □

Нехай $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2 \in P_\lambda$. Позначимо через $P_\lambda(t_1^{-1}t_2, k_1^{-1}k_2)$ піднапівгрупу $\{(a_1t_1)^{-1}a_2t_2 \mid a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda\}$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.

Твердження 3. *Нехай $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2 \in P_\lambda$. Якщо існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $k_1 = t_1u$ і $k_2 = t_2v$, то напівгрупа $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ ізоморфна піднапівгрупі $P_\lambda(v^{-1}u, k_1^{-1}k_2)$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.*

Доведення. Визначимо відображення $f : P_\lambda^{t_1^{-1}t_2} \to P_\lambda(v^{-1}u, k_1^{-1}k_2)$ так: $f(a_1^{-1}a_2) = (a_1v)^{-1}a_2u$ і $f(0) = 0$. Очевидно, що це відобаження бієктивне. Покажемо, що f – гомоморфізм. Для довільних $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ маємо

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) *_{k_1^{-1}k_2} f(b_1^{-1}b_2) &= v^{-1}a_1^{-1}a_2u \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot v^{-1}b_1^{-1}b_2u = \\ &= v^{-1}a_1^{-1}a_2u \cdot u^{-1}t_1^{-1}t_2v \cdot v^{-1}b_1^{-1}b_2u = \\ &= v^{-1}a_1^{-1}a_2 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot b_1^{-1}b_2u = \\ &= f(a_1^{-1}a_2 *_{t_1^{-1}t_2} b_1^{-1}b_2). \end{aligned}$$

Отже, відображення f є ізоморфізмом. □

У випадку $t_1^{-1}t_2 = 1_{P_\lambda}$ отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3. *λ-поліциклічний моноїд P_λ ізоморфний піднапівгрупі $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.*

З того, що всі ідемпотенти напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ належать піднапівгрупі $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ випливає такий наслідок.

Наслідок 4. *Будь-які два ідемпотенти з напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ комутують.*

Твердження 4. *Елемент $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ має інверсний тоді і тільки тоді, коли $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$.*

Доведення. Якщо $a_1^{-1}a_2 = (b_1k_2)^{-1}b_2k_1 \in P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2) \setminus \{0\}$, то інверсним до нього буде елемент $(b_2k_2)^{-1}b_1k_1$. Нехай $a_1^{-1}a_2 \notin P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$. Тоді $c_1^{-1}c_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} c_1^{-1}c_2 = 0$ для будь-якого $c_1^{-1}c_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Тому $a_1^{-1}a_2$ не має інверсних елементів. □

Наслідок 5. *Піднапівгрупа $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ є найбільшою ізоморфною копією λ-поліциклічного моноїда.*

3. Відношення Ґріна на напівгрупі $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$

Твердження 5. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$. Тоді для довільного ненульового елемента $a_1^{-1}a_2$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ виконуються такі рівності:*

$$a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} = \begin{cases} a_1^{-1}u^{-1}P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}, & \text{якщо існує слово } u \in \lambda^* \text{ таке, що } k_1 = ua_2 \\ a_1^{-1}P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}, & \text{якщо існує слово } v \in \lambda^* \text{ таке, що } a_2 = vk_1 \\ \{0\}, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

і

$$P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = \begin{cases} P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}ua_2, & \text{якщо існує слово } u \in \lambda^* \text{ таке, що } k_2 = ua_1 \\ P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}a_2, & \text{якщо існує слово } v \in \lambda^* \text{ таке, що } a_1 = vk_2 \\ \{0\}, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Доведення. Нехай $b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda$. З теореми 1.17 [33] випливає, що

$$R_{P_\lambda}(b_1^{-1}b_2) = b_1^{-1}b_2P_\lambda = b_1^{-1}P_\lambda, \quad L_{P_\lambda}(b_1^{-1}b_2) = P_\lambda b_1^{-1}b_2 = P_\lambda b_2$$

і $b_1^{-1}b_1, b_2^{-1}b_2$ – єдині ідемпотенти, які породжують ідеали $R(b_1^{-1}b_2)$ і $L(b_1^{-1}b_2)$, відповідно. Враховуючи це і те, що

$$a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} = (a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2)P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$$

і

$$P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}(k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2),$$

отримуємо відповідні рівності. □

Нехай S – напівгрупа. Для довільного $s \in S$ введемо такі позначення:

$$K_1^s = \{t \in S \mid ts\mathscr{R}t\},\ K_2^s = \{t \in S \mid st\mathscr{L}t\},\ K_3^s = \{t \in S \mid sts\mathscr{J}t\},\ K^s = K_1^s \cap K_2^s.$$

Ми використаємо таке твердження зі статті [14] для описання відношень Ґріна на напівгрупі $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.

Твердження 6 ([14, твердження 3.2])**.** *Якщо $s \in S$, то*

1) $R_s(S^a) = \begin{cases} R_s(S) \cap K_1^a, & \text{якщо } s \in K_1^a \\ \{s\}, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$

2) $L_s(S^a) = \begin{cases} L_s(S) \cap K_2^s, & \text{якщо } s \in K_2^a \\ \{s\}, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$

3) $H_s(S^a) = \begin{cases} H_s(S), & \textit{якщо } s \in K^a \\ \{s\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

4) $D_s(S^a) = \begin{cases} D_s(S) \cap K^a, & \textit{якщо } s \in K^a \\ R_s(S^a), & \textit{якщо } s \in K_1^a \setminus K_2^a \\ L_s(S^a), & \textit{якщо } s \in K_2^a \setminus K_1^a \\ \{s\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

5) $J_s(S^a) = \begin{cases} J_s(S) \cap K_3^2, & \textit{якщо } s \in K_3^a \\ D_s(S^a), & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$

Наступна лема доведена в [4].

Лема 4. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$. Якщо $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda$, то:*

1) *$a_1^{-1}a_2 \mathscr{R} b_1^{-1}b_2$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = b_1$;*
2) *$a_1^{-1}a_2 \mathscr{L} b_1^{-1}b_2$ тоді і тільки тоді, коли $a_2 = b_2$;*
3) *P_λ – комбінаторна напівгрупа;*
4) *P_λ – 0-біпроста напівгрупа;*
5) *P_λ – 0-проста напівгрупа.*

Наступна теорема описує структуру відношень Ґріна на напівгрупі $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.

Теорема 1. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$ і $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Тоді*

(1) $R_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} \left\{a_1^{-1}bk_1 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \mid b \in \lambda^*\right\}, & \textit{якщо } k_1 \in \operatorname{suff}(a_2); \\ \left\{a_1^{-1}a_2\right\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

(2) $L_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} \left\{(ck_2)^{-1}a_2 \mid c \in \lambda^*\right\}, & \textit{якщо } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1); \\ \left\{a_1^{-1}a_2\right\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

(3) $H_{a_1^{-1}a_2} = \left\{a_1^{-1}a_2\right\}$;

(4) $D_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2) \setminus \{0\}, & \textit{якщо } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1) \quad \textit{i} \quad k_1 \in \operatorname{suff}(a_2); \\ R_{a_1^{-1}a_2}, & \textit{якщо } k_1 \in \operatorname{suff}(a_2) \quad \textit{i} \\ & \quad (k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0 \textit{ або } a_1 \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(k_2)); \\ L_{a_1^{-1}a_2}, & \textit{якщо } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1) \quad \textit{i} \\ & \quad (a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0 \textit{ або } a_2 \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(k_1)); \\ \{a_1^{-1}a_2\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

(5) $J_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \mid k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0\right\}, & \\ & \textit{якщо } k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0; \\ D_{a_1^{-1}a_2}, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$

Доведення. Для доведення використаємо твердження 6.

(1) З леми 4(1) випливає, що $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \mathscr{R} a_1^{-1}a_2$ тоді і тільки тоді, коли існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = uk_1$, тобто $k_1 \in \operatorname{suff}(a_2)$. Тому

$$K_1^{k_1^{-1}k_2} = \{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid k_1 \in \operatorname{suff}(a_2)\}$$

і

$$R_{a_1^{-1}a_2}(P_\lambda) \cap K_1^{k_1^{-1}k_2} = \left\{b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda \mid b_1 = a_1 \quad \text{і} \quad k_1 \in \operatorname{suff}(b_2)\right\} =$$
$$= \left\{a_1^{-1}bk_1 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \mid b \in \lambda^*\right\}.$$

Доведення твердження (2) аналогічне до твердження (1).

(3) Оскільки за лемою 4 у поліциклічному моноїді усі $\mathscr{H}$-класи є одноточковими, то з твердження 6 випливає твердження (3).

4. З (1) і (2) випливає, що

$$K^{k_1^{-1}k_2} = K_1^{k_1^{-1}k_2} \cap K_2^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid k_1 \in \operatorname{suff}(a_2) \quad \text{і} \quad k_2 \in \operatorname{suff}(a_1)\right\}.$$

Оскільки P_λ – 0-біпроста напівгрупа, то $D_{a_1^{-1}a_2}(P_\lambda) \cap K^{k_1^{-1}k_2} = K^{k_1^{-1}k_2}$. Якщо $k_1 \notin \operatorname{suff}(a_2)$, то або $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0$, або $a_2 \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(k_1)$. Тому

$$K_2^{k_1^{-1}k_2} \setminus K_1^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid \left(a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0 \text{ або } a_2 \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(k_1)\right) \text{ і } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1)\right\}.$$

Аналогічно отримуємо

$$K_1^{k_1^{-1}k_2} \setminus K_2^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid \left(k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0 \text{ або } a_1 \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(k_2)\right) \text{ і } k_1 \in \operatorname{suff}(a_2)\right\}.$$

5. Позаяк поліциклічний моноїд P_λ є 0-простою напівгрупою, то

$$k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \ \mathscr{J} \ a_1^{-1}a_2$$

тоді і тільки тоді, коли $k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0$. Тому

$$K_3^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0\right\}.$$

Оскільки $J_{a_1^{-1}}(P_\lambda) = P_\lambda \setminus \{0\}$ і $0 \notin K_3^{k_1^{-1}k_2}$, то $J_{a_1^{-1}}(P_\lambda) \cap K_3^{k_1^{-1}k_2} = K_3^{k_1^{-1}k_2}$. □

4. Ізоморфізми інтерасоціативностей поліциклічного моноїда

Лема 5. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$, $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2$ – довільні ненульові елементи напівгрупи P_λ, $a_1^{-1}a_2$ – довільний елемент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, $b_1^{-1}b_2$ – елемент напівгрупи $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ такий, що $f(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2$ і $f \colon P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ – ізоморфізм. Тоді виконуються такі умови:*

1) *якщо $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0$, то $b_1^{-1}b_2 \cdot t_1^{-1}t_2 = 0$;*
2) *якщо $k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0$, то і $t_1^{-1}t_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = 0$;*
3) *якщо існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_2 = ua_1$, то існує слово $v \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $t_2 = vb_1$;*
4) *якщо існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_1 = ua_2$, то існує слово $v \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $t_1 = vb_2$;*
5) *якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_1 = uk_2$, то існує слово $v \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = vt_2$;*
6) *якщо існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_2 = ua_1$, то існує слово $v \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $t_2 = vb_1$.*

Доведення. З твердження 5 і теореми 1 випливають такі еквівалентності:

1) $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $R(a_1^{-1}a_2)$ – скінченний і $R_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
2) $k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $L(a_1^{-1}a_2)$ – скінченний і $L_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
3) існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_2 = ua_1$ тоді і тільки тоді, коли $L(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $L_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
4) існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_1 = ua_2$ тоді і тільки тоді, коли $R(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $R_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
5) існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_1 = uk_2$, тоді і тільки тоді, коли $L(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $L_{a_1^{-1}a_2}$ – нескінченний;
6) існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = uk_2$ тоді і тільки тоді, коли $R(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $R_{a_1^{-1}a_2}$ – нескінченний.

Це і завершує доведення леми. □

Лема 6. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$, $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2$ – довільні ненульові елементи напівгрупи P_λ, $a_1^{-1}a_2$ – довільний ненульовий елемент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ і $f : P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ – ізоморфізм. Тоді виконуються такі умови:*

(1) *$f(k_2^{-1}k_1) = t_2^{-1}t_1$;*
(2) *існує автоморфізм поліциклічного моноїда $i\colon P_\lambda \to P_\lambda$ такий, що*

$$f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1) = t_2^{-1} \cdot i(a_1^{-1}a_2) \cdot t_1,$$

для довільного $k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1 \in D_{k_2^{-1}k_1}$;
(3) *якщо $f(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2$, $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2$ і $f(k_2^{-1}a_2) = c_1^{-1}c_2$, то $c_1 \in \mathrm{suff}(b_1)$ і $c_2 \in \mathrm{suff}(b_2)$;*
(4) *якщо $f(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2$, $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2$ і $f(k_2^{-1}a_2) = d_1^{-1}d_2$, то $b_1 = c_1$ і $b_2 = d_2$;*

Доведення. (1) З того, що всі ідемпотенти напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ належать її піднапівгрупі $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ і $k_2^{-1}k_1$ є образом 1_{P_λ} при відповідному ізоморфізмі випливає, що $k_2^{-1}k_1$ є найбільшим ідемпотентом стосовно природного порядку. Тому $f(k_2^{-1}k_1) = t_2^{-1}t_1$.

(2) Нехай $g_1 : P_\lambda \to P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, $g_2 : P_\lambda^{t_1^{-1}t_2} \to P_\lambda$ – ізоморфізми такі, що $g_1(a_1^{-1}a_2) = k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1$ і $g_2(t_2^{-1}a_1^{-1}a_2t_1) = a_1^{-1}a_2$. Тоді $g_2 \circ f \circ g_1$ – автоморфізм поліциклічного моноїда. Припустимо протилежне. Для будь-якого автоморфізму $i\colon P_\lambda \to P_\lambda$ поліциклічного моноїда існує $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$ такий, що $f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1) \neq t_2^{-1}i(a_1^{-1}a_2)t_1$. Тоді для будь-якого автоморфізму i моноїда P_λ існує $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$ такий, що

$$(g_2 \circ f \circ g_1)(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2 \neq i(a_1^{-1}a_2),$$

а це суперечить тому, що $g_2 \circ f \circ g_1$ – автоморфізм поліциклічного моноїда.

(3) Розглянемо рівність $a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}k_1 *_{k_1^{-1}k_2} k_2^{-1}a_2$. З леми 5 випливає, що $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2t_1$ і $f(k_2^{-1}a_2) = t_2^{-1}d_1^{-1}d_2$. Тому

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) &= c_1^{-1}c_2t_1 *_{t_1^{-1}t_2} t_2^{-1}d_1^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}c_2t_1 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot t_2^{-1}d_1^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}c_2 \cdot d_1^{-1}d_2. \end{aligned}$$

З леми 1 випливає, що $c_1 \in \operatorname{suff}(b_1)$ і $d_2 \in \operatorname{suff}(b_2)$.

(4) Нехай $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2t_1$. З пункту (2) випливає, що $f^{-1}(t_2^{-1}c_2t_1) = k_2^{-1}i(c_2)k_1$, де i – деякий автоморфізм поліциклічного моноїда. Тоді з пункту (3) випливає, що $i(c_2)k_1 \in \operatorname{suff}(k_1)$. Тому $i(c_2) = \varepsilon$, і отже, $c_2 = \varepsilon$. Отож, $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}t_1$. Аналогічно доводиться, що $f(k_2^{-1}a_2) = t_2^{-1}d_2$.

Розглянемо рівність $a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}k_1 *_{k_1^{-1}k_2} k_2^{-1}a_2$. Тоді

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) &= f(a_1^{-1}k_1) *_{t_1^{-1}t_2} f(k_2^{-1}a_2) = \\ &= c_1^{-1}t_1 *_{t_1^{-1}t_2} t_2^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}t_1 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot t_2^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}d_2, \end{aligned}$$

що і завершує доведення леми. □

Теорема 2. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ і $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2$ – довільні ненульові елементи напівгрупи P_λ. Якщо $f\colon P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ – ізоморфізм, то перетворення $f\colon P_\lambda = P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda = P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ поліциклічного моноїда P_λ є його автоморфізмом.*

Доведення. Розглянемо рівність $a_1^{-1}a_2 = k_1^{-1} *_{k_1^{-1}k_2} k_2^{-1}a_1^{-1}a_2$. З леми 6(4) випливає, що $f(k_1) = y_1^{-1}t_1$ і $f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2) = t_2^{-1} \cdot i(a_1^{-1}) \cdot y_2$, де i – деякий автоморфізм λ-поліциклічного моноїда. Тому

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) &= f(k_1^{-1}) *_{t_1^{-1}t_2} f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2) = \\ &= y_1^{-1}t_1 *_{t_1^{-1}t_2} t_2^{-1}i(a_1^{-1})y_2 = \\ &= y_1^{-1}t_1 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot t_2^{-1}i(a_1^{-1})y_2 = \\ &= y_1^{-1}i(a_1^{-1})y_2. \end{aligned}$$

Оскільки y_1 не залежить від вибору елемента $a_1^{-1}a_2$, то $f(P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}) = y_1^{-1}P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$. Звідси випливає, що $y_1 = \varepsilon$. Тому $f(a_1^{-1}a_2) = i(a_1^{-1}) \cdot y_2$. Аналогічно доводиться, що $f(a_1^{-1}a_2) = z_1^{-1} \cdot i(a_2)$. Отже, $f(a_1^{-1}a_2) = i(a_1^{-1}) \cdot i(a_2) = i(a_1^{-1}a_2)$. □

Твердження 7. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$. Якщо $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2 \in P_\lambda$, то напівгрупа $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ ізоморфна напівгрупі $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм $i\colon P_\lambda \to P_\lambda$ поліциклічного моноїда такий, що $i(k_1^{-1}k_2) = t_1^{-1}t_2$.*

Доведення. Імплікація ($\Rightarrow$) випливає з теореми 2.

($\Leftarrow$) Припустимо, що існує автоморфізм $i : P_\lambda \to P_\lambda$ такий, що $i(k_1^{-1}k_2) = t_1^{-1}t_2$. Для довільних $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ маємо

$$\begin{aligned} i(a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} b_1^{-1}b_2) &= i(a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = \\ &= i(a_1^{-1}a_2)i(k_1^{-1}k_2)i(b_1^{-1}b_2) = \\ &= i(a_1^{-1}a_2) \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot i(b_1^{-1}b_2) = \\ &= i(a_1^{-1}a_2) *_{t_1^{-1}t_2} f(b_1^{-1}b_2). \end{aligned}$$

Тому відображення $i\colon P_\lambda \to P_\lambda$ визначає ізоморфізм між напівгрупами $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ і $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$, оскільки елементи напівгруп $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ і P_λ є рівними тоді і лише тоді, коли вони мають однакові зображення як елементи поліциклічного моноїда P_λ. □

Подяка

Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику Олегу Гутіку за допомогу, цінні поради та сприяння під час написання роботи, а також рецензетові за корисні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis, Hamburg, 1952.
2. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **13** (2016), 13–28.
3. S. Bardyla, *On universal objects in the class of graph inverse semigroups*, Eur. J. Math. (to appear). DOI: 10.1007/s40879-018-0300-7
4. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163-183.
5. S. Bardyla and O. Gutik, *On a complete topological inverse polycyclic monoid*, Carpathian Math. Publ. *8* (2016) no.2. 183–194. DOI: 10.15330/cmp.8.2.183-194
6. S. J. Boyd, M. Gould, and A. Nelson, *Interassociativity of semigroups*, Misra, P. R. (ed.) et al., Proceedings of the Tennessee topology conference, Nashville, TN, USA, June 10–11, 1996. Singapore, World Scientific, (1997), pp. 33–51.
7. K. Chase, *Sandwich semigroups of binary relations*, Discrete Math. **28** (1979), no. 3, 231–236. DOI: 10.1016/0012-365X(79)90130-4
8. K. Chase, *New semigroups of binary relations*, Semigroup Forum **18** (1979), no. 1, 79–82. DOI: 10.1007/BF02574176
9. K. Chase, *Maximal groups in sandwich semigroups of binary relations*, Pac. J. Math. **100** (1982), no. 1, 42–59. DOI: 10.2140/pjm.1982.100.43
10. O. O. Desiateryk, *Variants of commutative bands with zero,* Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2015), no. 4, 15–20.
11. I. Dolinka, I. Đurđev, and J. East, *Sandwich semigroups in diagram categories*, Preprint (in preparation).
12. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories I: Foundations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 75, pp. 35. DOI: 10.1007/s00012-018-0537-5

13. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories II: Transformations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 76, pp. 63. DOI: 10.1007/s00012-018-0539-3
14. I. Dolinka and J. East, *Variants of finite full transformation semigroups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 8, 1187–1222. DOI: 10.1142/S021819671550037X
15. I. Dolinka and J. East, *Semigroups of rectangular matrices under a sandwich operation*, Semigroup Forum **96** (2018), no. 2, 253–300. DOI: 10.1007/s00233-017-9873-6
16. J. East, *Transformation representations of sandwich semigroups*, Exp. Math. (2018) (to appear). DOI: 10.1080/10586458.2018.1459963
17. C. Eberhart and J. Selden, *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 115–126. DOI: 10.2307/1995273
18. O. G. Ganyushkin and O. O. Desiateryk, *Variants of a semilattice*, Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2013), no. 4, 12–16.
19. O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups, an introduction*, **9** of Algebra and Appl., Springer, London, 2009.
20. B. N. Givens, A. Rosin, and K. Linton, *Interassociates of the bicyclic semigroup*, Semigroup Forum **94** (2017), no. 1, 104–122. DOI: 10.1007/s00233-016-9794-9
21. O. Gutik and K. Maksymyk, On semitopological interassociates of the bicyclic monoid, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **82** (2016), 98–108.
22. O. Gutik and K. Maksymyk, *On variants of the bicyclic extended semigroup*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 22–37.
23. J. B. Hickey, *Semigroups under a sandwich operation*, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. **26** (1983), no. 3, 371–382. DOI: 10.1017/S0013091500004442
24. J. B. Hickey, *On variants of a semigroup*, Bull. Austral. Math. Soc. **34** (1986), no. 3, 447–459. DOI: 10.1017/S0004972700010339
25. W. Huang, *Matrices which belong to an idempotent in a sandwich semigroup of circulant Boolean matrices*, Linear Algebra Appl. **249** (1996), no. 1–3, 157–167. DOI: 10.1016/0024-3795(95)00325-8
26. D. G. Jones, *Polycyclic monoids and their generalizations.* PhD Thesis, Heriot-Watt University, 2011.
27. D. G. Jones and M. V. Lawson, *Graph inverse semigroups: Their characterization and completion*, J. Algebra **409** (2014), 444–473. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.04.001
28. T. Khan and M. Lawson, *Variants of regular semigroups*, Semigroup Forum **62** (2001), no. 3, 358–374. DOI: 10.1007/s002330010034
29. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
30. V. Mazorchuk and G. Tsyaputa, *Isolated subsemigroups in the variants of* $\mathscr{T}_n$, Acta Math. Univ. Comen., New Ser. **77** (2008), no. 1, 63–84
31. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
32. M. Nivat and J.-F. Perrot, *Une generalisation du monoide bicyclique*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. **A 271** (1970), 824–827.
33. А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Том 1, пер. с англ., Мир, Москва, 1972.
34. А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Том 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1972.

Стаття: надійшла до редколегії 04.2.2018
доопрацьована 13.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

INTERASSOCIATES OF A POLYCYCLIC MONOID

Markiian KHYLYNSKYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine
e-mail: khymarkyan@gmail.com

We study properties of interassociativities of a polycyclic monoid P_λ. Green's relations on an interassociativity $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ of a polycyclic monoid P_λ are described. Also we proved a criterium when two interassociativities of P_λ are isomorphic.

Key words: polycyclic monoid, interassociate, Green's relations, isomorphism, antiisomorphism.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 91–102
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 91–102
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.091-102

УДК 512.534

НАПІВГРУПА ЗІРКОВИХ ЧАСТКОВИХ ГОМЕОМОРФІЗМІВ СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Присвячується 60-ти річчю проф. М. М. Зарічного

Олег ГУТІК, Катерина МЕЛЬНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
chepil.kate@gmail.com

Введено поняття зіркового часткового гомеоморфізму скінченновимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ і досліджується структура напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ зіркових часткових гомеоморфізмів простору $\mathbb{R}^n$. Описано структуру ідемпотентів напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ і відношення Ґріна на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Зокрема доведено, що $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ — біпроста інверсна напівгрупа, а також, що кожна неодинична конгруенція на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є груповою.

Ключові слова: напівгрупа перетворень, інверсна напівгрупа, частковий гомеоморфізм, зірка, відношення Ґріна, конгруенція.

Ми користуватимемося термінологією з [26, 27, 33, 39].

Надалі будемо вважати, що на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно.

Часткове відображення (перетворення) $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ топологічного простору X називається *частковим гомеоморфізмом* простору $\mathbb{R}$, якщо його звуження $\alpha|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \to \operatorname{ran}\alpha$ є гомеоморфізмом.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. В інверсній напівгрупі S

2010 Mathematics Subject Classification: 20M15, 20M50, 18B40

вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb),(ad,bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c,d \in S$. Відношення $(a,b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи* a *і* b *є* $\mathfrak{K}$*-еквівалентними*. На кожній напівгрупі S існують такі конгруенції: *універсальна* $\mathfrak{U}_S = S \times S$ та *одинична* (*діагональ*) $\Delta_S = \{(s,s) \colon s \in S\}$. Такі конгруенції називаються *тривіальними*. Кожен двобічний ідеал I напівгрупи S породжує на ній конгруенцію Ріса: $\mathfrak{K}_I = (I \times I) \cup \Delta_S$. Конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *груповою*, якщо фактор-напівгрупа $S/\mathfrak{K}$ є групою.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \leqslant f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S так:

$$s \leqslant t \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad s = te,$$

для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [33]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нагадаємо (див., наприклад [26, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначена одним визначальним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема Олафа Андерсена [22] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи.

Через $\mathscr{I}_\lambda$ позначимо множину всіх часткових взаємнооднозначних перетворень кардинала λ разом з такою напівгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \qquad \text{для } \alpha,\beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* або *симетричним інверсним моноїдом* над кардиналом λ (див. [26]). Симетрична інверсна напівгрупа введена В. В. Вагнером у працях [3, 4] і вона відіграє важливу роль у теорії напівгруп.

Якщо A — підмножина евклідового простору $\mathbb{R}^n$, то через $\operatorname{int} A$ позначатимемо внутрішність множини A в просторі $\mathbb{R}^n$. Ми позначатимемо одиничну сферу та замкнену кулю радіуса $r > 0$ в $\mathbb{R}^n$ через $\mathbb{S}^{n-1}$ і $\mathbf{B}_r$, відповідно.

Для довільних двох точок $x,y \in \mathbb{R}^n$ через $[x,y]$ позначатимемо відрізок в $\mathbb{R}^n$, який з'єднує точки x,y, тобто $[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \overrightarrow{xz} = \alpha \cdot \overrightarrow{xy}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.

Компактна опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$ з непорожньою внутрішністю називається *опуклим тілом*. Підмножина $L \subseteq \mathbb{R}^n$ називається *зіркою* в початку $\mathbf{0}$, якщо для довільної точки $x \in L$ відрізок $[\mathbf{0},x]$ міститься в L. Якщо L є компактною підмножиною, яка є зіркою в початку $\mathbf{0}$, то її радіальна функція ρ_L визначається для всіх

$u \in \mathbb{S}^{n-1}$ так, що промінь відкладений у початку $\mathbf{0}$ паралельно до u перетинає L, за формулою

$$(u)\rho_L = \max\{c \geqslant 0\colon cx \in L\}.$$

Зауважимо, що в [28], у якій введено всі вище означенні поняття, не припускається, що початок $\mathbf{0}$ належить зірці L. Надалі, ще крім того, ми будемо вважати, що $\mathbf{0} \in \operatorname{int} L$ для довільної зірки $L \subseteq \mathbb{R}^n$, що еквівалентно умові $\rho_L(u) \neq 0$ для всіх $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, а також припускатимемо, що радіальна функція $\rho_L\colon \mathbb{S}^{n-1} \to L$ є неперервною.

Нехай L_1 і L_2 — зірки в початку $\mathbf{0}$. Тоді гомеоморфізм $\alpha\colon L_1 \to L_2$ називається *зірковим*, якщо $(\mathbf{0})\alpha = \mathbf{0}$ і $([\mathbf{0}, x])\alpha = [\mathbf{0}, (x)\alpha]$ для довільного відрізка $[\mathbf{0}, x] \subseteq L_1$. Надалі вважатимемо, що всі зірки $L \subseteq \mathbb{R}^n$ є в початку $\mathbf{0}$ і під *частковими зірковими гомеоморфізмами* простору $\mathbb{R}^n$ будемо розуміти гомеоморфізми між зірками в $\mathbb{R}^n$.

З означення зіркового гомеоморфізму випливає твердження 1.

Твердження 1. *Композиція двох часткових зіркових гомеоморфізмів простору $\mathbb{R}^n$ і обернене часткове відображення до часткового зіркового гомеоморфізму є частковими зірковими гомеоморфізмами простору $\mathbb{R}^n$.*

Твердження 2. *Довільні дві зірки в $\mathbb{R}^n$ є зірково гомеоморфними.*

Доведення. Доведемо, що довільна зірка L зірково гомеоморфна одиничній кулі $\mathbf{B}_1$ в $\mathbb{R}^n$. Означимо відображення $\alpha_L\colon L \to \mathbf{B}_1$ наступним чином. Нехай $\rho_L\colon \mathbb{S}^{n-1} \to L$ — радіальна функція зірки L. Для довільного $x \in \mathbf{B}_1$ покладемо $(x)r$ — точка на одиничній сфері $\mathbb{S}^{n-1}$ така, що $x \in [\mathbf{0}, (x)r]$. Тоді з неперервності радіальної функції $\rho_L\colon \mathbb{S}^{n-1} \to L$ випливає, що відображення $\beta_L\colon \mathbf{B}_1 \to L$, означене за формулою

$$(x)\beta_L = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } x = \mathbf{0}; \\ x \cdot ((x)r)\rho_L, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

є бієктивним і неперервним, і оскільки $\mathbf{B}_1$ — компактний підпростір в $\mathbb{R}^n$, то β_L є зірковим гомеоморфізмом. Покладемо $\alpha_L\colon L \to \mathbf{B}_1$ — обернене відображення до β_L. Очевидно, що відображення α_L є зірковим гомеоморфізмом. □

З твердження 14.1.7 [36] і з міркувань викладених в [27, §1.4, с. 29–30] випливає твердження 3.

Твердження 3. *Перетин двох зірок є зіркою в $\mathbb{R}^n$.*

Через $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ позначимо множину всіх часткових зіркових гомеоморфізмів простору $\mathbb{R}^n$ з операцією композицією відображень.

З тверджень 2 і 3 випливає твердження 4.

Твердження 4. $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *— інверсна піднапівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathfrak{c}}$.*

Дослідження автоморфізмів і груп автоморфізмів многовидів малої розмірності формують широку область сучасної математики, яка дуже швидко розвивається та розташована на стику топології, алгебри й теорії динамічних систем. Ця область охоплює вивчення груп гомеоморфізмів прямої та кола, теорію автоморфізмів поверхонь і теорію груп класів відображень.

Автоморфізмам і групам автоморфізмів многовидів розмірності 1 і 2 присвячено фундаментальні праці Клейна, Фрике, Пуанкаре, Гурвіца, Дена, Данжуа, Александера, Нільсена, Артіна, Керек'ярто, А. А. Маркова. Сучасні дослідження груп гомеоморфізмів прямої викладено в оглядах Бекларяна [1, 2] та її застосування в теорії динамічних систем у монографії [32].

Основні результати теорії напівгруп перетворень отримані в період 50-70-х років минулого століття, викладені в оглядах Меггіла [34] та Глускіна, Шайна, Шнепермана та Ярокера [29]. У цьому напрямі працювали такі відомі математики: Гауі, Гельфанд, Глускін, Грін, Енгелькінг, Кліффорд, Ляпін, Меггіл, Престон, Саббах, Серпінський, Сушкевич, Улам, Шайн, Шнеперман, Шутов, Ярокер. На думку Меггіла (див. [34]) Теорія напівгруп неперервних перетворень топологічних просторів бере свій початок з праць Глускіна [5, 6, 7, 8, 9, 10]. В основному ці праці Глускіна присвячені описанню структури напівгрупи $S(I)$ неперервних перетворень одиничного відрізка I, а також описанню піднапівгруп напівгрупи $S(X)$ неперервних перетворень топологічного простору X. Напівгрупу $S(I)$ неперервних перетворень одиничного відрізка також досліджував Шутов у працях [20, 21], де він описав максимальну власну конгруенцію на $S(I)$.

Напівгрупу $S(I)$ також досліджували в [12, 14, 15, 16, 17, 19, 24, 31, 35, 40, 41], зокрема в [5, 12] описано конгруенц-прості піднапівгрупи в $S(I)$. Шнеперман [18] та Уарндоф [42] довели, що одиничний відрізок визначається напівгрупою неперервних перетворень. Інші класи топологічних просторів, що визначаються своїми напівгрупами неперервних перетворень, описав Уарндоф у [42] і Росіцкий у [40, 41]. Зокрема такими є: локально зв'язні сепарабельні метричні континууми, локально евклідові гаусдорфові простори, нульвимірні метричні простори, CW-комплекси та ін. Також О'Рейлі в праці [38] довела, що кожен гаусдорфовий простір X визначається напівгрупою усіх компактних відношень на X.

Зауважимо, що група гомеоморфізмів дійсної прямої ізоморфна групі гомеоморфізмів одиничного відрізка (інтервалу). Таким чином виникає задача: *описати структуру напівгрупи часткових гомеоморфізмів топологічного простору* X, а в частковому випадку одиничного відрізка, чи дійсної прямої. Однією з останніх робіт з цієї тематики є праця Чучмана [25], в якій описано структуру напівгрупи замкнених зв'язних часткових гомеоморфізмів одиничного відрізка з однією нерухомою точкою. Також у [11] описана структура напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ усіх монотонних коскінченних часткових гомеоморфізмів звичайної дійсної прямої $\mathbb{R}$. Зокрема, в [11] доведено, що фактор-напівгрупа $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за найменшою груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ усіх гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію простору $\mathbb{R}$, а також, що напівгрупа $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ з групою $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$.

Нагадаємо [25], що часткове перетворення $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ топологічного простору X називається *замкненим зв'язним частковим гомеоморфізмом*, якщо його звуження $\alpha\colon \operatorname{dom}\alpha \to \operatorname{ran}\alpha$ є гомеоморфізмом і $\operatorname{dom}\alpha$ та $\operatorname{ran}\alpha$ — замкнені зв'язні підмножини в X. Очевидно, що кожен замкнений зв'язний частковий гомеоморфізм одиничного відрізка, чи прямої, з однією нерухомою точкою можна розглядати як зірковий частковий гомеоморфізм цього простору. Тому природно виникає задача про можливість поширення результатів, отриманих у праці [25] на вищі виміри.

У цій праці досліджується структура напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ зіркових часткових гомеоморфізмів скінченновимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Описана структура ідемпотентів напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ і відношення Ґріна на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Зокрема доведено, що $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ – біпроста інверсна напівгрупа, а також, що кожна неодинична конгруенція на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є груповою.

Надалі в статті через $\mathbf{St}_0(\mathbb{R}^n)$ позначатимемо множину усіх зірок в початку $\mathbf{0}$. З означення напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ і твердження 4 випливає твердження 5.

Твердження 5. *(i) Елемент α є ідемпотентом напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\alpha\colon S \to S$ – тотожне відображення для деякої зірки $S \in \boldsymbol{St}_0(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) В'язка $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$ ізоморфна напівґратці $(\boldsymbol{St}_0(\mathbb{R}^n), \cap)$.

(iii) $\varepsilon \leqslant \iota$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\varepsilon \subseteq \operatorname{dom}\iota$.

(iv) $\alpha \leqslant \beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} = \alpha$.

Зауважимо, що пункти (i) і (ii) твердження 5 випливають з того факту, що в симетричному інверсному моноїді ідемпотентами є лише тотожні часткові перетворення (див. [33, твердження 1.1.2]), а пункти (iii) і (iv) випливають з означення природного часткового порядку на $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$ і $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, відповідно, та з леми 3 [33].

Якщо S — напівгрупа, то відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ і $\mathscr{H}$ на S визначаються так (див. [30] або [26, §2.1]):

$$\begin{aligned}
&a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;\\
&a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;\\
&a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;\\
&\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L};\\
&\mathscr{H} = \mathscr{L}\cap\mathscr{R}.
\end{aligned}$$

Напівгрупа S називається *простою*, якщо S не має власного двобічного ідеалу, тобто S має єдиний $\mathscr{J}$-клас, і *біпростою*, якщо S має єдиний $\mathscr{D}$-клас.

Позаяк за твердженням 4, $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ — інверсна піднапівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathfrak{c}}$, то з визначень відношень Ґріна на $\mathscr{I}_{\mathfrak{c}}$ і твердження 3.2.11 [33] випливає твердження 6.

Твердження 6. *Нехай α, β – елементи напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді:*

(i) $\alpha\mathscr{R}\beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$;

(ii) $\alpha\mathscr{L}\beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$;

(iii) $\alpha\mathscr{H}\beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$ і $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$.

Твердження 7. *$\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ – біпроста напівгрупа.*

Доведення. Нехай ε і ι – довільні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді за твердженням 5$(i)$ існують зірки $E, I \in \mathbf{St}_0(\mathbb{R}^n)$ такі, що $\varepsilon\colon \operatorname{dom}\varepsilon = E \to \operatorname{ran}\varepsilon = E$ і $\iota\colon \operatorname{dom}\iota = I \to \operatorname{ran}\iota = I$ – тотожні відображення. За твердженням 2 існує зірковий гомеоморфізм $\alpha\colon E \to I$. Очевидно, що $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ і $\alpha^{-1}\alpha = \iota$. Позаяк напівгрупа $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є інверсною, то з леми Манна (див. [37, лема 1.1]) випливає, що $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є біпростою напівгрупою. □

Оскільки кожен $\mathscr{D}$-клас елемента a напівгрупи S міститься в його $\mathscr{J}$-класі (див. [26, §2.1]), то з твердження 7 випливає наслідок 1.

Наслідок 1. $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *– проста напівгрупа.*

З твердження 7 і теореми 2.20 [26] випливає наслідок 2.

Наслідок 2. *Довільні дві максимальні підгрупи в* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *є ізоморфними. Більше того кожна максимальна підгрупа в* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *ізоморфна групі всіх зіркових гомеоморфізмів одиничної кулі* $\mathbf{B}_1$ *в* $\mathbb{R}^n$*.*

Лема 1. *Нехай* $\mathfrak{C}$ *— конгруенція на напівгрупі* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, r_1, r_2 *— довільні різні дійсні додатні числа та* $\varepsilon_{r_1}\colon \mathbf{B}_{r_1} \to \mathbf{B}_{r_1}$ *і* $\varepsilon_{r_2}\colon \mathbf{B}_{r_2} \to \mathbf{B}_{r_2}$ *— тотожні відображення. Якщо* $\varepsilon_{r_1}\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$*, то всі ідемпотенти напівгрупи* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *є* $\mathfrak{C}$*-еквівалентними.*

Доведення. Спочатку доведемо, що для довільного дійсного додатного числа r ідемпотент ε_r, де $\varepsilon_r\colon \mathbf{B}_r \to \mathbf{B}_r$ — тотожне відображення, є $\mathfrak{C}$-еквівалентним ідемпотентам ε_{r_1} і ε_{r_2}.

Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $r_1 < r_2$. Розглянемо можливі випадки:

$$a)\ r < r_1; \qquad b)\ r_1 < r < r_2; \qquad \text{і} \qquad c)\ r_2 < r.$$

Припустимо, що виконується випадок $b)$ $r_1 < r < r_2$. Тоді з твердження 5 випливає, що $\varepsilon_{r_1} = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_r = \varepsilon_r$, а отже, $\varepsilon_{r_1}\mathfrak{C}\varepsilon_r$ і $\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$.

Припустимо, що виконується випадок $a)$ $r < r_1$. Означимо часткове відображення $\alpha\colon \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$\operatorname{dom}\alpha = \mathbf{B}_{r_2}, \qquad \operatorname{ran}\alpha = \mathbf{B}_{r_1} \qquad \text{і} \qquad (x)\alpha = x\cdot\frac{r_1}{r_2}.$$

Тоді часткове відображення α та обернене до нього α^{-1} є елементами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ й існує натуральне число n_r таке, що $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n_r} < r$.

Нехай $S = \langle \alpha, \alpha^{-1}\rangle$ — піднапівгрупа в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, породжена елементами α і α^{-1}. Тоді легко бачити, що

$$\varepsilon_{r_2}\alpha = \alpha\varepsilon_{r_2} = \alpha, \qquad \varepsilon_{r_2}\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\varepsilon_{r_2} = \alpha^{-1}, \qquad \alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_{r_2} \quad \text{і} \quad \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_{r_1} \neq \varepsilon_{r_2},$$

а отже, за лемою 1.31 з [26] напівгрупа $S = \langle \alpha, \alpha^{-1}\rangle$ ізоморфна біциклічному моноїдові $\mathscr{C}(p,q)$, причому всі елементи напівгрупи S єдиним чином зображаються у вигляді $\left(\alpha^{-1}\right)^i\alpha^j$, де i та j — невід'ємні цілі числа, а ізоморфізм $\mathfrak{I}\colon S \to \mathscr{C}(p,q)$ визначається за формулою $\left(\left(\alpha^{-1}\right)^i\alpha^j\right)\mathfrak{I} = q^ip^j$. За наслідком 1.32 з [26] кожна неодинична конгруенція на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ є груповою, а отже з наших припущень випливає, що усі ідемпотенти напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Тоді для $r_0 = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n_r}$ маємо, що ідемпотент ε_{r_0}, де $\varepsilon_{r_0}\colon \mathbf{B}_{r_0} \to \mathbf{B}_{r_0}$ — тотожне відображення, є $\mathfrak{C}$-еквівалентним ідемпотентам ε_{r_1} і ε_{r_2}. Але за побудовою, $\varepsilon_{r_0} \leqslant \varepsilon_r \leqslant \varepsilon_{r_1}$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, а отже, з випадку $b)$ випливає, що $\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$.

Припустимо, що виконується випадок $c)$ $r_2 < r$. Тоді існує натуральне число n_r таке, що $r_2\cdot\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{n_r} > r$. Означимо часткове відображення $\beta\colon \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$\operatorname{dom}\beta = \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r}}, \qquad \operatorname{ran}\beta = \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r-1}} \qquad \text{і} \qquad (x)\beta = x\cdot\frac{r_1}{r_2}.$$

Тоді часткове відображення β та обернене до нього β^{-1} є елементами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Нехай $\varepsilon_1\colon \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r}} \to \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r}}$ і $\varepsilon_2\colon \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r-1}} \to \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r-1}}$ — тотожні відображення. Тоді очевидно, що ε_1 і ε_2 є різними ідемпотентами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, причому $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$. Також легко бачити, що виконуються такі рівності

$$\varepsilon_1\beta = \beta\varepsilon_1 = \beta, \qquad \varepsilon_1\beta^{-1} = \beta^{-1}\varepsilon_1 = \beta^{-1}, \qquad \beta\beta^{-1} = \varepsilon_1 \qquad \text{і} \qquad \beta^{-1}\beta = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_1,$$

а отже, за лемою 1.31 з [26] піднапівгрупа $T = \langle\beta,\beta^{-1}\rangle$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, породжена елементами β і β^{-1}, ізоморфна біциклічному моноїдові $\mathscr{C}(p,q)$, причому всі елементи напівгрупи T єдиним чином зображаються у вигляді $\left(\beta^{-1}\right)^i\beta^j$, де i та j — невід'ємні цілі числа, а ізоморфізм $\mathfrak{I}\colon T \to \mathscr{C}(p,q)$ визначається за формулою $\left(\left(\beta^{-1}\right)^i\beta^j\right)\mathfrak{I} = q^ip^j$. Очевидно, що ідемпотенти $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r}\beta^{n_r}$ і $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r+1}\beta^{n_r+1}$ напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, як часткові відображення, є тотожними відображеннями куль $\mathbf{B}_{r_2}$ і $\mathbf{B}_{r_1}$, відповідно, а отже, $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r}\beta^{n_r} = \varepsilon_{r_2}$ і $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r+1}\beta^{n_r+1} = \varepsilon_{r_1}$. Отож, два різні ідемпотенти напівгрупи T є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. За наслідком 1.32 з [26] кожна нетотожня конгруенція на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ є груповою, а отже, з наших припущень випливає, що усі ідемпотенти напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Але за побудовою, $\varepsilon_{r_2} \leqslant \varepsilon_r \leqslant \varepsilon_1$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, а отже, з випадку b) випливає, що $\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$. $\square$

Лема 2. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конгруенція на напівгрупі $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ така, що два різні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Тоді всі ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. Припустимо, що ε і ι — різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді з $\varepsilon\mathfrak{C}\iota$ випливає, що $\varepsilon\iota\mathfrak{C}\iota\iota = \iota$, а отже, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varepsilon \leqslant \iota$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, а тоді за твердженням 5(iii), $\operatorname{dom}\varepsilon \subseteq \operatorname{dom}\iota$.

Нехай $\alpha_\iota\colon \operatorname{dom}\iota \to \mathbf{B}_1$ — частковий зірковий гомеоморфізм зірки $\operatorname{dom}\iota$ на одиничну кулю $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$. За твердженням 1 звуження $\alpha_\iota|_{\operatorname{dom}\varepsilon}\colon \operatorname{dom}\varepsilon \to (\operatorname{dom}\varepsilon)\alpha_\iota$ є частковим зірковим гомеоморфізмом зірки $\operatorname{dom}\varepsilon$ на зірку $(\operatorname{dom}\varepsilon)\alpha_\iota$. Тоді $\alpha_\iota^{-1}\alpha_\iota\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — тотожне відображення одиничної кулі $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$. Позаяк $\alpha_\iota^{-1}\alpha_\iota = \alpha_\iota^{-1}\iota\alpha_\iota\mathfrak{C}\alpha_\iota^{-1}\varepsilon\alpha_\iota$ і $\alpha_\iota^{-1}\alpha_\iota \neq \alpha_\iota^{-1}\varepsilon\alpha_\iota$, то ідемпотент ε_1, $\varepsilon_1\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — тотожне відображення одиничної кулі $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$, є $\mathfrak{C}$-еквівалентним деякому ідемпотентові ε_s такому, що $\operatorname{dom}\varepsilon_s$ — власна підмножина в $\mathbf{B}_1$. Тоді існує елемент $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $(u_0)\rho_{\operatorname{dom}\varepsilon_s} < 1$. Позаяк радіальна функція $\rho_{\operatorname{dom}\varepsilon_s}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ є неперервною, то існує відкритий окіл $U(u_0)$ точки u_0 на сфері $\mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $(u)\rho_{\operatorname{dom}\varepsilon_s} < 1$ для всіх $u \in U(u_0)$.

Для довільної точки $x \in \mathbb{S}^{n-1}\setminus U(u_0)$ через $\alpha_x\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ позначимо ортогональне перетворення одиничної кулі $\mathbf{B}_1$, яке відображає точку $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ в $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Очевидно, що $\alpha_x \in \mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, оскільки відображення $\alpha_x\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ є гомеоморфізмом, як елемент ортогональної групи матриць $O(n,\mathbb{R})$ (див. [13]). Позаяк підпростір $\mathbb{S}^{n-1}\setminus U(u_0)$ в $\mathbb{S}^{n-1}$ є компактним, то відкрите покриття $\left\{(U(u_0))\alpha_x\colon x \in \mathbb{S}^{n-1}\setminus U(u_0)\right\}$ простору $\mathbb{S}^{n-1}\setminus U(u_0)$ містить скінченне підпокриття $\{(U(u_0))\alpha_{x_1},\ldots,(U(u_0))\alpha_{x_k}\}$.

Позаяк $\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_s$ і $\alpha_{x_i}^{-1}\varepsilon_1\alpha_{x_i}=\varepsilon_1$ для всіх $i=1,\ldots,k$, то $\varepsilon_1\mathfrak{C}\alpha_{x_i}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_i}$ для кожного $i=1,\ldots,k$, а отже,

$$\varepsilon_1\mathfrak{C}\alpha_{x_1}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_1}\cdots\alpha_{x_k}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_k}.$$

Очевидно, що елемент $\alpha_{x_i}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_i}$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ для кожного $i=1,\ldots,k$, а отже, $\phi=\varepsilon_s\alpha_{x_1}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_1}\cdots\alpha_{x_k}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_k}$ є також ідемпотентом в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, оскільки $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ — інверсна напівгрупа, а ідемпотенти в інверсній напівгрупі комутують (див. [26, теорема 1.17]). За побудовою, $(x)\rho_{\operatorname{dom}\phi}<1$ для довільного $x\in\mathbb{S}^{n-1}$, а оскільки радіальна функція $\rho_{\operatorname{dom}\phi}\colon\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}$ є неперервною, то з компактності одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ випливає, що відображення $\rho_{\operatorname{dom}\phi}$ на $\mathbb{S}^{n-1}$ набуває свого найбільшого значення. Нехай $R_\phi=\max\left\{(x)\rho_{\operatorname{dom}\phi}\colon x\in\mathbb{S}^{n-1}\right\}$ і $\varepsilon_{R_\phi}\colon\mathbf{B}_\phi\to\mathbf{B}_\phi$ — тотожне відображення кулі радіуса R_ϕ в початку $\mathbf{0}$. Легко бачити, що $\varepsilon_{R_\phi}\in E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, $\varepsilon_{R_\phi}\phi=\phi$ і $\varepsilon_{R_\phi}\varepsilon_1=\varepsilon_{R_\phi}$. Тоді з умови $\varepsilon_1\mathfrak{C}\phi$ випливає, що $\varepsilon_{R_\phi}=\varepsilon_{R_\phi}\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_{R_\phi}\phi=\phi$, а отже $\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_{R_\phi}$. Далі скористаємося лемою 1. □

Теорема 1. *Кожна неодинична конгруенція на напівгрупі* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *є груповою.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{C}$ — неодинична конгруенція на напівгрупі $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні елементи α і β напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$.

Розглянемо можливі випадки:

(1) елементи α і β не належать одному $\mathscr{H}$-класу;

(2) $\alpha\mathscr{H}\beta$.

Припустимо, що виконується випадок (1). За твердженням 2.3.4 з [33], $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha^{-1}\alpha\mathfrak{C}\beta^{-1}\beta$. З твердження 6 випливає, що $\operatorname{ran}\alpha\neq\operatorname{ran}\beta$ або $\operatorname{dom}\alpha\neq\operatorname{dom}\beta$, а отже, за твердженням 5(i) існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Далі скористаємося лемою 2 і лемою I.7.10 з [39].

Припустимо, що $\alpha\mathscr{H}\beta$. За теоремою 2.20 з [26] і наслідком 2, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що α і β — зіркові гомеоморфізми одиничної кулі $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$. Позаяк $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\alpha\beta^{-1}$, то з вище сказаного випливає, що існує зірковий гомеоморфізм $\gamma\in\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ одиничної кулі $\mathbf{B}_1$, який є $\mathfrak{C}$-еквівалентним її тотожному відображенню ε_1 такий, що $\gamma\neq\varepsilon_1$. Тоді $(x)\gamma\neq x$ для деякого $x\in\mathbf{B}_1$.

Тоді виконується хоча б одна з умов:

(a) існує елемент $x\in\mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $([\mathbf{0},x])\gamma=[\mathbf{0},x]$ та існує $y\in[\mathbf{0},x]$ такий, що $(y)\gamma\neq y$;

(b) існує елемент $x\in\mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $([\mathbf{0},x])\gamma\neq[\mathbf{0},x]$.

Припустимо, що виконується умова (a). Припустимо, що $[\mathbf{0},y]\subsetneqq[\mathbf{0},(y)\gamma]$. У випадку $[\mathbf{0},y]\supsetneqq[\mathbf{0},(y)\gamma]$ міркування аналогічні.

Нехай $\mathbf{B}_y$ — максимальна куля в початку $\mathbf{0}$, що містить точку y і $\varepsilon_y\colon\mathbf{B}_y\to\mathbf{B}_y$ — тотожне відображення кулі $\mathbf{B}_y$. Тоді $(y)\gamma\notin B_y$. Позаяк $\varepsilon_1\mathfrak{C}\gamma$, то $\varepsilon_y\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_y\gamma$. Використавши твердження 2.3.4 з [33], отримуємо, що

$$\varepsilon_y=\varepsilon_y\varepsilon_1=\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_y^{-1}\varepsilon_y\varepsilon_1\mathfrak{C}\gamma^{-1}\varepsilon_y^{-1}\varepsilon_y\gamma=\gamma^{-1}\varepsilon_y\gamma.$$

Очевидно, що $\gamma^{-1}\varepsilon_y\gamma$ — ідемпотент напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, причому $(y)\gamma\in\operatorname{dom}(\gamma^{-1}\varepsilon_y\gamma)$, але $(y)\gamma\notin\operatorname{dom}\varepsilon_y$, а отже, за твердженням 5(i) існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Далі скористаємося лемою 2 і лемою I.7.10 з [39].

Припустимо, що виконується умова (b). Позаяк γ — частковий зірковий гомеоморфізм, то $(x)\gamma\neq x$. Існує відкрита δ-куля $U_\delta((x)\gamma)$ точки $(x)\gamma$ в просторі $\mathbb{R}^n$, що не містить точку x. З метризовності простору $\mathbb{S}^{n-1}$ випливає, що він є цілком регулярним, а отже, існує неперервне відображення $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to [0,1]$ таке, що $((x)\gamma)f = 1$ і $(z)f = 0$ для всіх $z \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus U_\delta((x)\gamma)$.

Визначимо зірку L_γ в початку $\mathbf{0}$ наступним чином. Радіальною функцією зірки L_γ є відображення $\rho_{L_\gamma}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, яке визначається за формулою

$$(z)\rho_{L_\gamma} = z \cdot (1 + (z)f).$$

Очевидно, що так означене відображення $\rho_{L_\gamma}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ є неперервним, а отже, відображення $\beta_{L_\gamma}\colon \mathbf{B}_1 \to L_\gamma$, означене за формулою

$$(z)\beta_{L_\gamma} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } z = \mathbf{0}; \\ z \cdot ((z)r)\rho_{L_\gamma}, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де $(z)r$ — точка на одиничній сфері $\mathbb{S}^{n-1}$ така, що $z \in [\mathbf{0}, (z)r]$, є бієктивним і неперервним, а оскільки $\mathbf{B}_1$ — компактний підпростір в $\mathbb{R}^n$, то β_{L_γ} є зірковим гомеоморфізмом.

Позаяк $\varepsilon_1 \mathfrak{C} \gamma$, то $\varepsilon_1 \beta_{L_\gamma} \mathfrak{C} \gamma \beta_{L_\gamma}$. За твердженням 2.3.4 з [33] маємо, що

$$(\varepsilon_1 \beta_{L_\gamma})^{-1}(\varepsilon_1 \beta_{L_\gamma}) \mathfrak{C} (\gamma \beta_{L_\gamma})^{-1}(\gamma \beta_{L_\gamma}),$$

а отже,

$$\begin{aligned} \beta_{L_\gamma}^{-1}\beta_{L_\gamma} &= \beta_{L_\gamma}^{-1}\varepsilon_1\beta_{L_\gamma} = \\ &= \beta_{L_\gamma}^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_1\beta_{L_\gamma} = \\ &= (\varepsilon_1\beta_{L_\gamma})^{-1}(\varepsilon_1\beta_{L_\gamma}) \mathfrak{C} (\gamma\beta_{L_\gamma})^{-1}(\gamma\beta_{L_\gamma}) = \\ &= \beta_{L_\gamma}^{-1}\gamma^{-1}\gamma\beta_{L_\gamma}. \end{aligned}$$

Очевидно, що елементи $\beta_{L_\gamma}^{-1}\beta_{L_\gamma}$ і $\beta_{L_\gamma}^{-1}\gamma^{-1}\gamma\beta_{L_\gamma}$ є ідемпотентами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Зауважимо, що $(x)\rho_{L_\gamma} = x \cdot (1 + (x)f) = x \cdot (1 + 0) = x$ і

$$((x)\gamma)\rho_{L_\gamma} = (x)\gamma \cdot (1 + ((x)\gamma)f) = (x)\gamma \cdot (1 + 1) = (x)\gamma \cdot 2,$$

а отже, маємо, що $\beta_{L_\gamma}^{-1}\beta_{L_\gamma} \neq \beta_{L_\gamma}^{-1}\gamma^{-1}\gamma\beta_{L_\gamma}$. За твердженням 5$(i)$ існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Далі скористаємося лемою 2 і лемою I.7.10 з [39]. $\square$

Автори висловлюють подяку рецензентові за суттєві зауваження та поради.

Список використаної літератури

1. Л. А. Бекларян, *Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты*, УМН **59** (2004), no. 4(358), 3–68. DOI: 10.4213/rm758; **English version**: L. A. Beklaryan, *Groups of homeomorphisms of the line and the circle. Topological characteristics and metric invariants*, Russian Math. Surveys **59** (2004), no. 4, 599–660. DOI: 10.1070/RM2004v059n04ABEH000758
2. Л. А. Бекларян, *Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Метрические инварианты и вопросы классификации*, УМН, **70** (2015), no. 2(422), 3–54. DOI: 10.4213/rm9654; **English version**: L. A. Beklaryan, *Groups of line and circle*

homeomorphisms. Metric invariants and questions of classification, Russian Math. Surveys **70** (2015), no. 2, 203–248. DOI: 10.1070/RM2015v070n02ABEH004946

3. В. В. Вагнер, *К теорнн частичных преобразований*, ДАН СССР **84** (1952), 653–656.
4. В. В. Вагнер, *Обобшенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
5. Л. М. Глускин, *Полугруппа гомеоморфных отображений отрезка*, Матем. сб. **49** (1959), no. 1(91), 13–28.
6. Л. М. Глускин, *Полугруппы топологических отображений*, ДАН СССР **125** (1959), 699–702.
7. Л. М. Глускин, *Транзитивные полугруппы преобразований*, ДАН СССР **129** (1959), 16–18.
8. Л. М. Глускин, *Идеалы полугрупп преобразований*, Матем. сб. **47** (1959), no. 1(89), 111–130.
9. Л. М. Глускін, *Про одну півгрупу неперивиих функцій*, Доповіді АН УРСР **5** (1960), 582–585.
10. Л. М. Глускин, *Полугруппы топологических преобразований*, Изв. вузов. Матем. (1963), no. 1, 54–65.
11. О. Гутік, К. Мельник, *Напівгрупа монотонних ко-скінченних часткових гомеоморфізмів дійсної прямої*, Мат. вісник Наук. тов. ім. Т. Шевченка **12** (2015), 24–40.
12. Х. Н. Инасаридзе, *О простых полугруппах*, Матем. сб. **57** (1962), no. 2(99), 225–232.
13. А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия.* Учебное пособие для вузов. 2-е изд., перераб. Наука, Москва, 1986.
14. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований*, ДАН СССР **144** (1962), no. 3, 509–511.
15. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований и гомеоморфизмов простой дуги*, ДАН СССР **146** (1962), 1301–1304.
16. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований метрических пространств*, Матем. сб. **61** (1963), no. 3(103), 306–318.
17. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований замкнутых множеств числовой прямой*, Изв. вузов. Матем. (1965), no. 6, 166–175.
18. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств*, Сиб. матем. журн. **4** (1965), no. 1, 221–229.
19. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппа гомеоморфизмов простой дуги*, Изв. вузов. Матем. (1966), no. 2, 127–136.
20. Э. Г. Шутов, *О гомоморфизмах некоторых полугрупп непрерывнех функций*, Сиб. матем. журн. **4** (1963), no. 3, 695–701.
21. Э. Г. Шутов, *О гомоморфизмах некоторых полугрупп непрерывных монотонных функций*, Сиб. матем. журн. **4**:4 (1963), 944–950.
22. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
23. R. D. Anderson, *The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Amer. J. Math. **80** (1958), no. 4, 955—963. DOI: 10.2307/2372842
24. F. A. Cezus, *Green's relations in semigroups of functions*, Ph.D. Thesis, Australian National University, Canberra, Australia, 1972.
25. I. Chuchman, *On a semigroup of closed connected partial homeomorphisms of the unit interval with a fixed point*, Algebra Discr. Math. **12** (2011), no. 2, 38–52.
26. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic theory of semigroups*, Vols. I and II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961 and 1967.
27. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

28. R. J. Gardner and A. Volčič, *Tomography of convex and star bodies*, Adv. Math. **108** (1994), no. 2, 367–399. DOI: 10.1006/aima.1994.1075
29. L. M. Gluskin, B. M. Schein, L. B. Šneperman, and I. S. Yaroker, *Addendum to a survey of semigroups of continuous self-maps*, Semigroup Forum **14** (1977), no. 1, 95–125. DOI: 10.1007/BF02194658
30. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. Ser. 2 **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
31. V. Jarník et V. Knichal, *Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositlons de deux fonctlons*, Fund. Math. **24** (1935), no. 1, 206–208. DOI: 10.4064/fm-24-1-206-208
32. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
33. M. V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
34. K. D. Magill, jr., *A survey of semigroups of continuous selfmaps*, Semigroup Forum **11** (1975/1976), no. 1, 189–282. DOI: 10.1007/BF02195270
35. J. V. Mioduszewski, *On a quasi-ordering in the class of continuous mappings of a closed interval into itself*, Colloq. Math. **9** (1962), no. 2, 233–240. DOI: 10.4064/cm-9-2-233-240
36. M. Moszyńska, *Selected topics in convex geometry*, Birkhäuser, Basel, 2005.
37. W. D. Munn, *Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups*, Quart. J. Math. **17** (1966), no. 1, 151–159. DOI: 10.1093/qmath/17.1.151
38. S. B. O'Reilly, *The characteristic semigroup of topological space*, General Topology Appl. **5** (1975), no. 2, 95–106. DOI: 10.1016/0016-660X(75)90015-X
39. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
40. J. V. Rosický, *Remarks on topologies uniquely determined by their continuous self maps*, Czech. Math. J. **24(99)** (1974), no. 3, 373–377.
41. J. V. Rosický, *The topology of the unit interval is not uniquely determined by its continuous self maps among set systems*, Colloq. Math. **31** (1974), no. 2, 179–188. DOI: 10.4064/cm-31-2-179-188
42. J. C. Warndof, *Topologies uniquely determined by their continuous selfmaps*, Fund. Math. **66** (1970), no. 1, 25–43. DOI: 10.4064/fm-66-1-25-43

Стаття: надійшла до редколегії 15.11.2018
доопрацьована 19.12.2018
прийнята до друку 18.02.2019

THE SEMIGROUP $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ OF STAR PARTIAL HOMEOMORPHISMS OF A FINITE DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Oleg GUTIK, Kateryna MELNYK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
chepil.kate@gmail.com

In the paper the notion of a star partial homeomorphism of a finite dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is introduced. We describe the structure of the semigroup $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ of star partial homeomorphisms of the space $\mathbb{R}^n$. The structure of the band of $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ and Green's relations on $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ are described. We show that $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ is a bisimple inverse semigroup and every non-unit congruence on $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ is a group congruence.

Key words: transformation semigroup, inverse semigroup, partial homeomorphism, star, Green's relations, congruence.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 103–108
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 103–108
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.103-108

УДК 512.582

EXTENSION OF BOUNDED BAIRE-ONE FUNCTIONS VS EXTENSIONS OF UNBOUNDED BAIRE-ONE FUNCTIONS

Dedicated to the 60th birthday of M. M. Zarichnyi

Olena KARLOVA[1], **Volodymyr MYKHAYLYUK**[1,2]

[1]*Chernivtsi National University*
Kotsyubynskoho Str., 2, 58000, Chernivtsi, Ukraine
[2]*Jan Kochanowski University in Kielce, Poland*
e-mail: maslenizza.ua@gmail.com, vmykhaylyuk@ukr.net

We compare possibilities of extension of bounded and unbounded Baire-one functions from subspaces of topological spaces.

Key words: extension, Baire-one function, B_1-embedded set, B_1^*-embedded set.

1. Introduction

Let X be a topological space. A function $f\colon X \to \mathbb{R}$ belongs *to the first Baire class*, if it is a pointwise limit of a sequence of real-valued continuous functions on X. We will denote by $\mathrm{B}_1(X)$ and $\mathrm{B}_1^*(X)$ the collections of all Baire-one and bounded Baire-one functions on X, respectively.

A subset E of X is B_1-*embedded* (B_1^*-*embedded*) in X, if every (bounded) function $f \in \mathrm{B}_1(E)$ can be extended to a function $g \in \mathrm{B}_1(X)$. We will say that a space X has the *property* $(\mathrm{B}_1^* = \mathrm{B}_1)$ if every B_1^*-embedded subset of X is B_1-embedded in X.

Characterizations of B_1- and B_1^*-embedded subsets of topological spaces were obtained in [3] and [4].

This short note is devoted to the following interesting problem: to find topological spaces with the property $(\mathrm{B}_1^* = \mathrm{B}_1)$.

In the second section of this note we extend results from [4, Section 6] and show that every hereditarily Lindelöff hereditarily Baire space X which hereditarily has a σ-discrete π-base has the property $(\mathrm{B}_1^* = \mathrm{B}_1)$. In Section 3 we show that any countable completely

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 54C20, 26A21; Secondary 54C30, 54C50

regular hereditarily irresolvable space X without isolated points is B_1^*-embedded and is not B_1-embedded in βX.

2. Spaces with the property $(\mathrm{B}_1^* = \mathrm{B}_1)$

Recall that a set A in a topological space X is *functionally G_δ (functionally F_σ)*, if A is an intersection (a union) of a sequence of functionally open (functionally closed) subsets of X. We say that a subset A of a topological space X is *functionally ambiguous* if A is functionally F_σ and functionally G_δ simultaneously.

Lemma 1. *Let X be a completely regular topological space of the first category with a σ-discrete π-base. Then there exist disjoint functionally ambiguous sets A and B such that*

$$X = A \cup B = \overline{A} = \overline{B}.$$

Proof. We fix a π-base $\mathscr{V} = (\mathscr{V}_n : n \in \omega)$ of X, where each family $\mathscr{V}_n$ is discrete and consists of functionally open sets in X. Denote $V_n = \bigcup\{V : V \in \mathscr{V}_n\}$ for all $n \in \omega$.

Let us observe that every open set $G \subseteq X$ contains a functionally open subset U such that $U \subseteq G \subseteq \overline{U}$. Indeed, for every $n \in \omega$ we put $U_n = \cup\{V \in \mathscr{V}_n \colon V \subseteq G\}$ and $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Then each U_n is functionally open as a union of a discrete family of functionally open sets. Hence, U is functionally open. It is easy to see that U is dense in G.

Keeping in mind the previous fact, we may assume that there exists a covering $(F_n \colon n \in \omega)$ of the space X by nowhere dense functionally closed sets $F_n \subseteq X$. Let $X_0 = F_0$ and $X_n = F_n \setminus \bigcup_{k<n} F_k$ for all $n \geq 1$. Then $(X_n \colon n \in \omega)$ is a partition of X by nowhere dense functionally ambiguous sets X_n.

Fix $n \in \omega$ and $V \in \mathscr{V}_n$. Since X is regular, we can choose two open sets H_1 and H_2 in V such that $\overline{H_1} \cap \overline{H_2} = \varnothing$ and $\overline{H_i} \subseteq V$ for $i = 1, 2$. Let G_i and O_i be functionally open sets such that $G_i \subseteq H_i \subseteq \overline{G_i}$ and $O_i \subseteq X \setminus \overline{H_i} \subseteq \overline{O_i}$, $i = 1, 2$. We put $A_{V,n} = X \setminus (G_1 \cup O_1)$ and $B_{V,n} = X \setminus (G_2 \cup O_2)$ and obtain disjoint nowhere dense functionally closed subsets of V.

We put $m_0 = 0$ and choose numbers $n_1 \geq 0$ and $m_1 > n_1$ such that $X_{n_1} \cap V_1 \neq \varnothing$ and $X_{m_1} \cap V_1 \neq \varnothing$. Notice that $A_1' = \bigcup_{n=0}^{n_1} X_n$ and $B_1' = \bigcup_{n=n_1+1}^{m_1} X_n$ are nowhere dense functionally ambiguous sets in X. Now we consider the set

$$\mathscr{W}_1 = \{V \in \mathscr{V}_1 : V \cap (A_1' \cup B_1') = \varnothing\}$$

and observe that the sets $A_1'' = \cup\{A_{V,1} \colon V \in \mathscr{W}_1\}$ and $B_1'' = \cup\{B_{V,1} \colon V \in \mathscr{W}_1\}$ are functionally closed and nowhere dense in X. Let $A_1 = A_1' \cup A_1''$ and $B_1 = B_1' \cup B_1''$. Notice that A_1 and B_1 are functionally ambiguous nowhere dense disjoint subsets of X.

Since $\overline{X \setminus (A_1 \cup B_1)} = X$, there exists a number $n_2 > m_1$ such that $(X_{n_2} \setminus (A_1 \cup B_1)) \cap V_2 \neq \varnothing$. We put $A_2' = \bigcup_{n=m_1+1}^{n_2} (X_n \setminus (A_1 \cup B_1))$. Moreover, there exists $m_2 > n_2$ such that $(X_{m_2} \setminus (A_1 \cup B_1)) \cap V_2 \neq \varnothing$. Let $B_2' = \bigcup_{n=n_2+1}^{m_2} (X_n \setminus (A_1 \cup B_1))$. We put $\mathscr{W}_2 = \{V \in \mathscr{V}_2 \colon V \cap (A_2' \cup B_2') = \varnothing\}$ and observe that the sets $A_2'' = \{A_{V,2} \colon V \in \mathscr{W}_2\}$ and $B_2'' = \{b_{V,2} \colon V \in \mathscr{W}_2\}$ are functionally closed and nowhere dense in X. We denote $A_2 = A_2' \cup A_2''$ and $B_2 = B_2' \cup B_2''$. Then A_2 and B_2 are functionally ambiguous nowhere dense disjoint subsets of X.

Proceeding this process inductively we obtain sequences $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ and $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ of functionally ambiguous sets such that $A_k \cap V \neq \varnothing \neq B_k \cap V$, $A_k \cap B_k = \varnothing$ for all $k \in \mathbb{N}$ and $V \in \mathscr{V}_k$. It remains to put $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ and observe that $A \cup B = X$.

In addition, note that Borel resolvability of topological spaces was also studied in [1, 2].

We say that a topological space X *hereditarily has a σ-discrete π-base* if every its closed subspace has a σ-discrete π-base. It is easy to see that if a space X hereditarily has a σ-discrete π-base, then each subspace of X has a σ-discrete π-base.

Recall that a subspace E of a topological space X is *z-embedded in X*, if any functionally closed subset F of E can be extended to a functionally closed subset of X.

Lemma 2. *Let X be a normal space such that X hereditarily has a σ-discrete π-base. If X is a B_1^*-embedded subset of a hereditarily Baire space Y, then X is hereditarily Baire.*

Proof. Assume that X is not hereditarily Baire and find a closed subset $F \subseteq X$ of the first category. According to Lemma 1, there exist disjoint functionally ambiguous subsets A and B in F such that $F = A \cup B = \overline{A} = \overline{B}$. Since F is a closed subset of a normal space, F is z-embedded in X. Therefore, there are two functionally ambiguous disjoint sets $\widetilde{A}$ and $\widetilde{B}$ in X such that $\widetilde{A} \cap F = A$ and $\widetilde{B} \cap F = B$ (see [4, Proposition 4.3]). Let us observe that the characteristic function $\chi : X \to [0, 1]$ of the set $\widetilde{A}$ belongs to the first Baire class. Then there exists an extension $f \in \mathrm{B}_1(Y)$ of χ. The sets $f^{-1}(0)$ and $f^{-1}(1)$ are disjoint G_δ-sets which are dense in $\overline{X}$. We obtain a contradiction, because $\overline{X}$ is a Baire space as a closed subset of a hereditarily Baire space. □

Remark 1. There exist a metrizable separable Baire space X and its B_1^*-embedded subspace E which is not a Baire space. Let $X = (\mathbb{Q} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times (0, 1])$ and $E = \mathbb{Q} \times \{0\}$. Then E is closed in X. Therefore, any F_σ- and G_δ-subset C of E is also F_σ- and G_δ- in X. Hence, E is B_1^*-embedded in X.

Theorem 1. *Let Y be a hereditarily Baire completely regular space and $X \subseteq Y$ be a Lindelöf space which hereditarily has a σ-discrete π-base. The following are equivalent:*

(1) *X is B_1^*-embedded in Y;*
(2) *X is B_1-embedded in Y.*

Proof. We need only to show 1) ⇒ 2). By Lemma 2, X is hereditarily Baire. Then X is B_1-embedded in Y by [3, Theorem 13]. □

Corollary 1. *Every hereditarily Lindelöff hereditarily Baire space X which hereditarily has a σ-discrete π-base has the property $(\mathrm{B}_1^* = \mathrm{B}_1)$.*

3. Spaces without the property $(\mathrm{B}_1^* = \mathrm{B}_1)$

A subset A of a topological space X is called *(functionally) resolvable in the sense of Hausdorff* or *(functionally) H-set* if

$$A = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_3 \setminus F_4) \cup \cdots \cup (F_\xi \setminus F_{\xi+1}) \cup \ldots,$$

where $(F_\xi)_{\xi<\alpha}$ is a decreasing chain of (functionally) closed sets in X.

It is well-known [5, §12.I] that a set A is an H-set if and only if for any closed nonempty set $F \subseteq X$ there is a nonempty relatively open set $U \subseteq F$ such that $U \subseteq A$ or $U \subseteq X \setminus A$.

A topological space without isolated points is called *crowded*.

A topological space X is *irresolvable* if it is not a union of two disjoint dense subsets. A space X is *hereditarily irresolvable* if every subspace of X is irresolvable.

Lemma 3. *Every subset of a hereditarily irresolvable space is an H-set.*

Proof. Assume that there is a closed nonempty set F in a hereditarily irresolvable space X and a set $A \subseteq X$ such that $\overline{F \cap A} \cap \overline{F \setminus A} = F$. Then

$$\overline{F \cap A} = \overline{F \setminus A} = F = (F \cap A) \cup (F \setminus A),$$

which contradicts to irresolvability of F. □

A function $f : X \to Y$ from a topological space X to a metric space (Y, d) is called *fragmented* if for every $\varepsilon > 0$ and for every closed nonempty set $F \subseteq X$ there exists a relatively open nonempty set $U \subseteq F$ such that $\mathrm{diam} f(U) < \varepsilon$.

Proposition 1. *Every bounded function $f : X \to \mathbb{R}$ on a hereditarily irresolvable space X is fragmented.*

Proof. To obtain a contradiction we assume that there exists a bounded function $f : X \to \mathbb{R}$ which is not fragmented. Then there is $\varepsilon > 0$ and a closed nonempty set $F \subseteq X$ such that for every relatively open set $U \subseteq F$ we have $\mathrm{diam} f(U) \geq \varepsilon$.

Since $f(X)$ is a compact set, we take a finite partition $\{B_1, \dots, B_n\}$ of $f(X)$ by sets of diameter $< \varepsilon$. Let $H_k = f^{-1}(B_k) \cap F$ for every $k \in \{1, \dots, n\}$. Then each H_k has empty interior in F, because f is not fragmented. By Lemma 3, each H_k is an H-set and, therefore, is nowhere dense in F. Hence, $\{H_1, \dots, H_n\}$ is a finite partition of F by nowhere dense sets, which is impossible. □

Lemma 4. *Let E be a z-embedded countable subspace of a topological space X and $A \subseteq E$ be a functionally H-set in E. Then there exists a functionally H-set $B \subseteq X$ such that B is F_σ and $B \cap E = A$.*

Proof. We take a decreasing transfinite sequence $(A_\xi : \xi < \alpha)$ of functionally closed subsets of E such that $A = \bigcup_{\xi<\alpha}(A_\xi \setminus A_{\xi+1})$ (every ordinal ξ is odd). Since $|A| \leq \aleph_0$, we may assume that $|(A_\xi : \xi < \alpha)| \leq \aleph_0$. The subspace E is z-embedded in X and we choose a decreasing sequence $(B_\xi : \xi < \alpha)$ of functionally closed sets in X such that $A_\xi = B_\xi \cap E$ for all $\xi < \alpha$. We put

$$B = \bigcup_{\xi<\alpha,\, \xi \text{ is odd}} (B_\xi \setminus B_{\xi+1}).$$

Then B is functionally F_σ-set in X and $B \cap E = A$. □

Lemma 5. *Let X be a compact space and $B \subseteq X$ be functionally Borel measurable H-set. Then B is functionally ambiguous in X.*

Proof. Since B is functionally Borel measurable, there exists a sequence $(f_n)_{n\in\omega}$ of continuous functions $f_n : X \to [0,1]$ such that B belongs to the σ-algebra generated by the system of sets $\{f_n^{-1}(0) : n \in \omega\}$. We consider a continuous map $f : X \to [0,1]^\omega$, $f(x) = (f_n(x))_{n\in\omega}$ for all $x \in X$, and a compact metrizable space $Y = f(X) \subseteq [0,1]^\omega$.

We show that the set $B' = f(B)$ is an H-set in Y. Suppose to the contrary that there is a closed nonempty set Y' in Y such that $\overline{Y' \cap B'} = \overline{Y' \setminus B'} = Y'$. We put $X' = f^{-1}(Y')$ and $g = f|_{X'}$. Since X' is a compact space and $f(X') = Y'$, we apply Zorn's Lemma and find a closed nonempty set $Z \subseteq X'$ such that the restriction $g|_Z : Z \to Y'$ of the continuous map $g : X' \to Y'$ is irreducible. Keeping in mind that the preimage of any everywhere dense set remains everywhere dense under an irreducible map, we obtain that

$$\overline{g^{-1}(Y' \cap B')} = \overline{g^{-1}(Y' \setminus B')} = Z = \overline{Z \cap B} = \overline{Z \setminus B},$$

which contradicts to resolvability of B.

By [5, §30, X, Theorem 5] the set $f(B)$ is F_σ and G_δ in a compact metrizable space Y. Since $B = f^{-1}(f(B))$ and f is continuous, we have that B is functionally ambiguous subset of X. □

Proposition 2. *Let X be a countable hereditarily irresolvable completely regular space. Then X is B_1^*-embedded in βX.*

Proof. Since X is countable and completely regular, it is perfectly normal. Therefore, every subsets of X is functionally ambiguous.

Fix an arbitrary $A \subseteq X$. By Lemma 3 the set A is an H-set. We apply Lemma 4 and find a functionally H-set $B \subseteq \beta X$ such that B is F_σ and $B \cap X = A$. Notice that B is functionally ambiguous by Lemma 5. Hence, B is a B_1^*-embedded subspace of βX according to [4, Proposition 5.1]. □

Let us observe that examples of countable hereditarily irresolvable completely regular spaces can be found, for instance, in [6, p. 536].

Proposition 3. *Let X be a countable completely regular space without isolated points. Then X is not B_1-embedded in βX.*

Proof. Observe that X is a functionally F_σ-subset of βX. Now assume that X is B_1-embedded in βX. According to [3, Proposition 8(iii)] there should be a function $f \in \mathrm{B}_1(\beta X)$ such that $X \subseteq f^{-1}(0)$ and $\beta X \setminus X \subseteq f^{-1}(1)$. Then the set X is G_δ in βX. Therefore, X is a Baire space, which implies a contradiction, since X is of the first category in itself. □

Propositions 2 and 3 imply the following fact.

Theorem 2. *Let X be a countable hereditarily irresolvable completely regular space without isolated points. Then X is B_1^*-embedded in βX and is not B_1-embedded in βX.*

Acknowledgements

The first author is partially supported by a grant of Chernivtsi National University for young scientists in 2018 year.

The authors would like to thank the anonymous referee for careful reading of the manuscript.

References

1. J. G. Ceder, *On maximally Borel resolvable spaces*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **11** (1966), 89—94.
2. R. Jiménez and V. Malykhin, *Structure resolvability*, Commentat. Math. Univ. Carol. **39** (1998), no. 2, 379–387.
3. O. Kalenda and J. Spurný, *Extending Baire-one functions on topological spaces*, Topol. Appl. **149** (2005), no. 1–3, 195–216. DOI: 10.1016/j.topol.2004.09.007
4. O. Karlova, *On α-embedded sets and extension of mappings*, Commentat. Math. Univ. Carol. **54** (2013), no. 3, 377–396.
5. K. Kuratowski, *Topology*, vol. 1, Academic Press, New York, 1966.
6. V. V. Tkachuk, *A C_p-theory problem book. Special features of function spaces*, Problem Books in Math., Springer, Cham, 2014.

Стаття: надійшла до редколегії 05.11.2018
доопрацьована 21.11.2018
прийнята до друку 26.12.2018

ПРОДОВЖЕННЯ ОБМЕЖЕНИХ І НЕОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ ПЕРШОГО КЛАСУ БЕРА

Олена КАРЛОВА[1], **Володимир МИХАЙЛЮК**[1,2]

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, 58000, Чернівці*
[2] *Університет Яна Кохановського, Кельци, Польща*
e-mail: maslenizza.ua@gmail.com, vmykhaylyuk@ukr.net

Порівнюються можливості продовження обмежених і необмежених функцій першого класу Бера з підпросторів топологічних просторів.

Ключові слова: продовження, функція першого класу Бера, B_1-вкладена множина, B_1^*-вкладена множина.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 109–115
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 109–115
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.109-115

УДК 517.51, 515.12

THE INVARIANCE OF THE LINDELÖF NUMBER UNDER SOME DISCONTINUOUS FUNCTIONS

Dedicated to the 60th birthday of M. M. Zarichnyi

Bogdan BOKALO, Nadiya KOLOS

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: b.m.bokalo@gmail.com, nadiya_kolos@ukr.net

A function $f\colon X \to Y$ between topological spaces is called scatteredly continuous (barely continuous) if for each non-empty (closed) subspace $A \subset X$ the restriction $f|_A$ has a point of continuity. We show that if $f\colon X \to Y$ is a scatteredly continuous (barely continuous) surjective function between topological spaces, then for each natural number n we have $\mathrm{hl}(Y^n) \leqslant \mathrm{hl}(X^n)$ $(l(Y) \leqslant hl(X)$, respectively).

Key words: scatteredly continuous function, weakly discontinuous function, barely continuous function, Lindelöf number.

1. Introduction

By definition, a function $f\colon X \to Y$ between topological spaces is *scatteredly continuous* if for each non-empty subspace $A \subset X$ the restriction $f|A$ has a point of continuity.

We recall that a function $f\colon X \to Y$ is called *barely continuous* if for each non-empty closed subspace $A \subset X$ the restriction $f|A$ has a point of continuity.

Following [19] we define a function $f\colon X \to Y$ to be *weakly discontinuous* if for each subspace $A \subset X$ the set $D(f|_A)$ of discontinuity points of the restriction $f|_A$ is nowhere dense in A.

Obviously, every weakly discontinuous function is scatteredly continuous and each scatteredly continuous function is barely continuous.

As an example of scatteredly continuous, not a weakly discontinuous function one can take an identity function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ from the real line equipped with the standard topology τ to the real line endowed with the topology generated by the subbase $\tau \cup \{\mathbb{Q}\}$.

2010 Mathematics Subject Classification: 54C08

In [2] it is proved, in particular, that any scatteredly continuous function $f\colon X \to Y$ into a regular space Y is weakly discontinuous.

Recall that the *Riemann function* is a function $R\colon [0,1] \to [0,1]$ defined as follows

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{if } x = \frac{m}{n} \text{ is a rational number;} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Obviously, the Riemann function is an example of a barely continuous, but not scatteredly continuous function.

These discontinuous functions arose naturally and were studied in various fields of mathematics under different names (see also [12, 4, 9, 10, 11, 5, 6, 8, 13, 15, 3, 17]).

Some topological properties preserved by weakly discontinuous functions were detected in [7]. In particular, it was shown that if $f\colon X \to Y$ is a weakly discontinuous surjective map between topological spaces, then

(1) $nw(Y) \leqslant nw(X)$;
(2) $hl(Y) \leq hl(X)$;
(3) $hd(Y) \leq \max\{hd(X), hl(X)\}$.

In this paper we analyze the behavior of the Lindelöf number under scatteredly continuous and barely continuous functions. We show that if $f\colon X \to Y$ is a scatteredly continuous (barely continuous) surjective function between topological spaces, then for each natural number n we have $\mathrm{hl}(Y^n) \leqslant \mathrm{hl}(X^n)$ ($l(Y) \leqslant hl(X)$, respectively).

1.1. **Terminology and notations.** Our terminology and notation are standard and follow [1] and [14]. A “space” always means a “topological space”. Maps between topological spaces can be discontinuous.

For a subset A of a topological space X by $\mathrm{cl}_X(A)$ or $\overline{A}$ we denote the closure of A in X while $\mathrm{Int}(A)$ stands for the interior of A in X. For a function $f\colon X \to Y$ between topological spaces by $C(f)$ and $D(f) = X \setminus C(f)$ we denote the sets of continuity and discontinuity points of f, respectively.

Suppose that we are given a family $\{X_s\colon s \in S\}$ of topological spaces. We consider the Cartesian product $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ of the sets $\{X_s\colon s \in S\}$ with Tychonoff topology.

Suppose that we are given two families $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ and $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in S}$ of topological spaces and a family of maps $\{f_\alpha\}_{\alpha\in S}$, where $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$. The map assigning to the point $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in S} \in \prod\limits_{\alpha\in S} X_\alpha$ the point $\{f_\alpha(x_\alpha)\}_{\alpha\in S} \in \prod\limits_{\alpha\in S} Y_\alpha$ is called the *Cartesian product of the maps* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in S}$ and is denoted by $\prod\limits_{\alpha\in S} f_\alpha$ or $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$ if $S = \{1, 2, \ldots, k\}$.

By $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}$ we denote the spaces of real and rational numbers, respectively; ω stands for the space of finite ordinals (= non-negative integers) endowed with the discrete topology. We shall identify cardinals with the smallest ordinals of the given cardinality.

All spaces encountered in this paper (unless stated otherwise) are assumed to be Hausdorff.

2. Some useful properties

In this section we recall some definitions and statements which will be used in the following sections.

Theorem 1 ([10]). *Let $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in S}$ be a family of functions f_α of a topological space X_α into a topological space Y_α respectively. The Cartesian product $\prod\limits_{\alpha\in S} f_\alpha \colon \prod\limits_{\alpha\in S} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in S} Y_\alpha$ is a scatteredly continuous function if and only if the following conditions hold:*

- (i) *all the functions f_α are scatteredly continuous;*
- (ii) *all the functions f_α, except maybe one, are weakly discontinuous;*
- (iii) *all the functions f_α, except maybe finite number, are continuous.*

Recall that the *Lindelöf number* $l(X)$ of a space X is the smallest infinite cardinal κ for which every open cover has a subcover of cardinality at most κ. The *hereditary Lindelöf number* $hl(X)$ of X is the supremum of the cardinals $l(Y)$ ranging over subspaces Y of X.

Also we need some other important result known as a theorem of Juhász. Firstly, recall that a space X is called *right separated* (respectively *left separated*) if there is a well ordering $<$ of X such that $\{y \in X : y < x\}$ is open (respectively closed) for any $x \in X$.

Theorem 2 ([16]). *For any topological space X we have*

$$hd(X) = \sup\{|Y| \colon Y \textit{ is a left separated subspace of } X\}$$

and

$$hl(X) = \sup\{|Y| : Y \textit{ is a right separated subspace of } X\}.$$

Recall that a topological space X is called *scattered* if each non-empty subspace H of X contains at least one point which is isolated in H.

Proposition 1. *A space X is right separated if and only if X is scattered.*

Lemma 1. *Let $f\colon X \to Y$ be a scatteredly continuous function. Then for each non-empty subspace $A \subset X$ the set $C(f|_A)$ is dense in A.*

Proof. Without loss of generality we can assume that $A = X$. If $f\colon X \to Y$ is scatteredly continuous, then for each non-empty open set $U \subset X$ the restriction $f|_U$ has a continuity point $x \in U$ which remains a continuity point of f. Therefore, $C(f)$ is dense in X. □

Proposition 2. *Let f be an injective scatteredly continuous function from a topological space X onto a scattered topological space Y. Then X is also scattered.*

Proof. Let us prove that the space X contains an isolated point. Denote by $C(f)$ the set of continuity points of the function f. Since the space $f(C(f)) \subset Y$ is scattered, there is some $y_0 \in f(C(f))$ which is an isolated point in $f(C(f))$. And since the restriction $f|_{C(f)}\colon C(f) \to Y$ is continuous, the point $x_0 = f^{-1}(y_0)$ is an isolated point in $C(f)$. Since $f\colon X \to Y$ is scatteredly continuous, due to Lemma 1 the set $C(f)$ is dense in X, and hence the point x_0 is an isolated point in X.

Similarly, one can prove that each non-empty subspace $A \subset X$ contains an isolated point. □

3. The main results

From Theorem 1 it follows that the Cartesian product of two scatteredly continuous functions is not necessarily scatteredly continuous. It is also known that the hereditary Lindelöf number hl is not saved by finite products. That is, the Cartesian product of two hereditary Lindelöf spaces is not necessarily a Lindelöf space. However, the following statement is true

Theorem 3. *Let f be a scatteredly continuous surjective function from a topological space X onto a topological space Y. Then for each natural number n we have $\mathrm{hl}(Y^n) \leqslant \mathrm{hl}(X^n)$.*

Proof. Suppose that f is a scatteredly continuous surjective function from a topological space X onto a topological space Y. And let $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ and $\mathrm{id}_Y \colon Y \to Y$ be the identity functions. We put $X^n \times X^0 = X^n$ and $Y^n \times Y^0 = Y^n$.

For each $i \in \{1, \ldots, n\}$ we consider the function

$$\mathrm{id}_X^{n-i} \times f \times \mathrm{id}_Y^{i-1} \colon X^{n-i} \times X \times Y^{i-1} \to X^{n-i} \times Y^i.$$

Since the functions id_X and id_Y are continuous and the function f is scatteredly continuous, due to Theorem 1, the function $\mathrm{id}_X^{n-i} \times f \times \mathrm{id}_Y^{i-1}$ is scatteredly continuous.

Let us prove that $\mathrm{hl}(X^{n-i} \times Y^i) \leqslant \mathrm{hl}(X^{n-i+1} \times Y^{i-1})$ for each $i \in \{1, \ldots, n\}$. Suppose that there is $k \in \{1, \ldots, n\}$ such that $\mathrm{hl}(X^{n-k} \times Y^k) > \mathrm{hl}(X^{n-k+1} \times Y^{k-1})$. Applying Theorem 2 and Proposition 1 find a scattered subspace $Z \subset X^{n-k} \times Y^k$ such that $|Z| = hl(X^{n-k} \times Y^k)$. For an arbitrary $z \in Z$ let us fix some point $x_z \in (\mathrm{id}_X^{n-k} \times f \times \mathrm{id}_Y^{k-1})^{-1}(z)$. Put $A = \{x_z \colon z \in Z\}$. The restriction map $\mathrm{id}_X^{n-k} \times f \times \mathrm{id}_Y^{k-1}|_A \colon A \to Z$ is bijective and scatteredly continuous. Using Proposition 2 we get that subspace A is scattered and $|A| = |Z| = hl(X^{n-k} \times Y^k) > hl(X^{n-k+1} \times Y^{k-1})$ which is a contradiction to Theorem 2. Therefore $\mathrm{hl}(X^{n-i} \times Y^i) \leqslant \mathrm{hl}(X^{n-i+1} \times Y^{i-1})$ for each $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Consequently,

$$\mathrm{hl}(Y^n) \leqslant \mathrm{hl}(X \times Y^{n-1}) \leqslant \mathrm{hl}(X^2 \times Y^{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{hl}(X^n).$$

□

Recall that spaces X and Y are *scatteredly homeomorphic* if there is a bijective map $f \colon X \to Y$ such that both f and f^{-1} are scatteredly continuous.

Proposition 3. *Each topological space is scatteredly homeomorphic to a left separated space.*

Proof. Let (X, τ) be a topological space with the topology τ. Fix some well ordering $<$ of the set X. Choose the family $\tau \cup \{\{a \leqslant x \colon x \in X\} : a \in X\}$ to be a subbase of a new topology τ' on X. Obviously, the space (X, τ') is left separated. Consider the identity function $i \colon (X, \tau) \to (X, \tau')$. Note that for an arbitrary non-empty subset A of X, the smallest element of the set A in the well ordering $<$ is a point of continuity of the restriction $i|_A$. Hence the identity function i is scatteredly continuous. Obviously, the function $i^{-1} \colon (X, \tau') \to (X, \tau)$ is continuous. □

Example 1. Consider the real line $\mathbb{R}$ equipped with the standard topology. Proposition 3 implies that there is a bijective scatteredly continuous function from $\mathbb{R}$ onto some left separated space Y. The real line $\mathbb{R}$ equipped with the standard topology is a separable metrizable space. However, since space Y is left separated, according to Theorem 2, we have the following

$$hd(Y) = |Y| = |\mathbb{R}| > \aleph_0.$$

Theorem 4. *Let $f\colon X \to Y$ be a barely continuous surjective function between topological spaces. Then $l(Y) \leqslant hl(X)$.*

Proof. Let $f\colon X \to Y$ be a barely continuous surjective function and $\mathrm{hl}(X) \leqslant \tau$. Suppose that $l(Y) > \tau$. Without loss of generality, we can assume that the function f is bijective. Since $l(Y) > \tau$, there is a τ-centered family $\mathcal{F}$ of closed subsets of Y such that $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap\{F\colon F \in \mathcal{F}\} = \varnothing$. We can assume that the family $\mathcal{F}$ contains the intersections of its τ-element subfamilies. Let $A = \bigcap\big\{\mathrm{cl}_X(f^{-1}(F))\colon F \in \mathcal{F}\big\}$. Since the family $\big\{\mathrm{cl}_X(f^{-1}(F))\colon F \in \mathcal{F}\big\}$ is τ-centered and $\mathrm{hl}(X) \leqslant \tau$, the set A is not empty. The τ-centeredness means that $\bigcap \mathcal{E} \neq \varnothing$ for any subfamily $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ having cardinality $|\mathcal{E}| \leq \tau$. Let us show that there is a set $F_0 \in \mathcal{F}$ such that $f^{-1}(F_0) \subset A$. Assume that for all $F \in \mathcal{F}$ we have $f^{-1}(F) \setminus A \neq \varnothing$. Then $\big\{\mathrm{cl}_{X\setminus A}(f^{-1}(F) \setminus A)\colon F \in \mathcal{F}\big\}$ is a τ-centered family of sets closed in $X\setminus A$ and

$$\bigcap\big\{\mathrm{cl}_{X\setminus A}(f^{-1}(F) \setminus A)\colon F \in \mathcal{F}\big\} \subset \bigcap\big\{\mathrm{cl}_X(f^{-1}(F))\colon F \in \mathcal{F}\big\} \cap X \setminus A = \\ = A \cap X \setminus A = \varnothing.$$

This contradicts with the fact that $l(X\setminus A) \leqslant \tau$. Since f is barely continuous and A is a non empty closed subset of X, there is a continuity point $x \in A$ of the restriction $f|_A\colon A \to Y$. Since $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$, there is $F^* \in \mathcal{F}$ such that $f(x^*) \notin F^*$. Let $F^{**} = F^* \cap F_0$. Since $x^* \in A$, we have that $x^* \in \mathrm{cl}_X(f^{-1}(F^{**}))$. And from the continuity of the restriction $f|_A$ at the point x^* we have $f(x^*) \in \mathrm{cl}_Y(f(f^{-1}(F^{**}))) = F^{**}$. The resulting contradiction proves that $l(Y) \leqslant \tau$. □

The following example shows that the fact that Y is a barely continuous image of the space X does not imply that $hl(Y) \leqslant hl(X)$.

Example 2. Let space X be the closed interval $[0, 1]$ with the usual topology and let M be a Bernstein subset of X, that is, a subspace of space X of cardinality continuum that contains no uncountable compact subsets.

It is easy to check that the family of all sets of the form $U \cup K$, where U is an open set in X and $K \subset M$, forms a topology base on the set X. We denote by Y the set X with this topology. Let us show that the identity function $\mathrm{id}\colon X \to Y$ is barely continuous.

Let F be a closed subset of X. If $F \cap (X \setminus M) \neq \varnothing$, then each point of $F \cap (X \setminus M)$ is a continuity point of the restriction $id_F\colon F \to Y$. If $F \cap (X \setminus M) = \varnothing$, then $F \subset M$. Since F is a closed subset of the segment $[0, 1]$ with the usual topology, F is compact. Since F is a subset of the space M, F is countable, and hence has isolated points. These points will be continuity points of the restriction $\mathrm{id}_F\colon F \to Y$. Consequently, the function id is barely continuous. Since X has a countable base, $hl(X) \leqslant \aleph_0$. By the construction, $|M| = 2^{\aleph_0}$ and M is a discrete subspace of the space Y. Then $hl(Y) = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Corollary 1. *For the metrizable spaces, separability is invariant with respect to the barely continuous functions.*

Proof. Let X be a metrizable separable space. Then $\mathrm{hl}(X) \leqslant \aleph_0$. According to the Theorem 4 $l(Y) \leqslant \aleph_0$. And since Y is metrizable, it is also separable. □

Corollary 2. *The Cartesian product of two barely continuous maps need not be a barely continuous map.*

Proof. Consider the space $X = [0; 1)$. Let τ_S be the Sorgenfrey topology on X and τ be the usual topology on X, respectively. Consider also the identity function $i\colon (X, \tau) \to (X, \tau_S)$. The function i is barely continuous. However since the product $(X, \tau) \times (X, \tau)$ is metrizable separable and $l((X, \tau_S) \times (X, \tau_S)) > \aleph_0$, the Cartesian product $i \times i$ is not barely continuous. □

References

1. А. В. Архангельский, *Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты*, УМН **33** (1978) no. 6(204), 29–84; **English version**: A. V. Arkhangelskii, *Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants*, Russian Math. Surveys, **33** (1978), no. 6, 33–96. DOI: 10.1070/RM1978v033n06ABEH003884
2. А. В. Архангельский, Б. М. Бокало, *Касание топологий и тангенциальные свойства топологических пространств*, Тр. ММО, **54** (1992), 160–185; **English version**: A. V. Arkhangelskii and B. M. Bokalo, *Tangency of topologies and tangential properties of topological spaces*, Trans. Mosc. Math. Soc. **1993** (1993), 139–163.
3. R. Baire, *Sur les fonctions de variables reelles*, Annali di Mat. (3) **3** (1899), no. 1, 1–123. DOI: 10.1007/BF02419243
4. T. Banakh and B. Bokalo, *On scatteredly continuous maps between topological spaces*, Topology Appl. **157** (2010), no. 1, 108–122. DOI: 10.1016/j.topol.2009.04.043
5. T. Banakh, B. Bokalo, and N. Kolos, *On σ-convex subsets in spaces of scatteredly continuous functions*, Math. Bulletin Shevchenko Sci. Soc. **9** (2012), 401–413.
6. T. Banakh, B. Bokalo, and N. Kolos, *On ∞-convex sets in spaces of scatteredly continuous functions*, Topology Appl. **169** (2014), 33–44. DOI: 10.1016/j.topol.2014.02.030
7. T. Banakh, B. Bokalo, and N. Kolos, *Topological properties preserved by weakly discontinuous maps and weak homeomorphisms*, Topology Appl. **221** (2017), 91–106. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.036
8. Т. О. Банах, С. М. Куцак, В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко, *Прямі та обернені задачі берівської класифікації інтегралів, залежних від параметра*, Укр. мат. журн. **56** (2004), no. 11, 1443–1457; **English version**: T. O. Banakh, S. M. Kutsak, V. K. Maslyuchenko, and O. V. Maslyuchenko, *Direct and inverse problems of Baire classifications of integrals dependent on a parameter*, Ukr. Math. J. **56** (2004), no. 11, 1721–1737. DOI: 10.1007/s11253-005-0147-1
9. B. Bokalo and N. Kolos, *When does $SC_p(X) = \mathbb{R}^X$ hold?*, Topology **48** (2009), no. 2-4 178–181. DOI: 10.1016/j.top.2009.11.016
10. B. M. Bokalo and N. M. Kolos, *On operations on some classes of discontinuous functions*, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no. 2, 36–48.
11. B. Bokalo and N. Kolos, *On normality of spaces of scattredly continuous maps*, Mat. Stud. **35** (2011), no. 2, 196–204.
12. B. Bokalo and O. Malanyuk, *On almost continuous mappings*, Mat. Stud. **9** (1995), no. 1, 90–93 (Ukrainian).
13. F. Chaatit and H. Rosenthal, *On differences of semi-continuous functions*, Quaest. Math. **23** (2000), no. 3, 295–311. DOI: 10.2989/16073600009485979

14. R. Engelking, *General topology*. Warszawa, PWN, 1977.
15. R. Haydon, E. Odell, and H. Rosenthal, *On certain classes of Baire-1 functions with applications to Banach space theory*, Functional Analysis, Austin, TX, 1987/1989, Lecture Notes in Math., vol. **1470**, Springer, Berlin, 1991, pp. 1–35. DOI: 10.1007/BFb0090209
16. I. Juhász, *Cardinal function in topology — ten years later*, Math. Centre Tracts **123**, Amsterdam, 1981.
17. O. O. Karlova and O. V. Sobchuk, *On H_1-compositors and piecewise continuous mappings*, Mat. Stud. **38** (2012), no. 2, 139–146.
18. E. Michael and I. Namioka, *Barely continuous functions*, Bull. Acad. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **24** (1976), 889–892.
19. V. A. Vinokurov, *Strong regularizability of discontinuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **281** (1985), no. 2, 265–269 (Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 28.08.2018
доопрацьована 12.09.2018
прийнята до друку 26.12.2018

ІНВАРІАНТНІСТЬ ЧИСЛА ЛІНДЕЛЬОФА ЗА ДЕЯКИХ РОЗРИВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Богдан БОКАЛО, Надія КОЛОС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, Львів
e-mail: b.m.bokalo@gmail.com, nadiya_kolos@ukr.net

Відображення $f\colon X \to Y$ між топологічними просторами називають розріджено неперервним (насичено неперервним), якщо для кожного непорожнього (замкненого) підпростору $A \subset X$ звуження $f|_A$ має точку неперервності. Доведено таке: якщо відображення $f\colon X \to Y$ є сюр'єктивним розріджено неперервним (насичено неперервним), то для довільного натурального числа n маємо $\mathrm{hl}(Y^n) \leqslant \mathrm{hl}(X^n)$ ($l(Y) \leqslant hl(X)$, відповідно).

Ключові слова: розріджено неперервне відображення, слабко розривне відображення, насичено неперервне відображення, число Ліндельофа.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 116–124
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 116–124
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.116-124

УДК 515.1

ON SOME FUNCTIONAL GENERALIZATIONS OF THE REGULARITY OF TOPOLOGICAL SPACES

Dedicated to the 60th birthday of M. M. Zarichnyi

Taras BANAKH, Bogdan BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: t.o.banakh@gmail.com, b.m.bokalo.gmail.com

We introduce and study some generalizations of regular spaces which were motivated by studying continuity properties of functions between (regular) topological spaces. In particular, we prove that a first-countable Hausdorff topological space is regular if and only if it does not contain a topological copy of the Gutik hedgehog.

Key words: regular space, quasi-regular space, sw-regular space, $w\theta$-regular space, θ-weakly regular space, weakly regular space, locally regular space, the Gutik hedgehog.

In this paper we introduce and study some generalizations of regular spaces which were motivated by continuity properties of functions between (regular) topological spaces. First we introduce the necessary definitions.

A subset U of a topological space X is called *θ-open* if each point $x \in U$ has a neighborhood $O_x \subset X$ such that $\bar{O}_x \subset U$. It is clear that each θ-open set is open. Moreover, a topological space is *regular* if and only if each open subset of X is θ-open.

Lemma 1. *Let U be a θ-open subset of a topological space X and V be a θ-open subset of U. Then V is θ-open in X.*

Proof. For each point $x \in V$, the θ-openness of U in X yields an open neighborhood $U_x \subset X$ such that $\mathrm{cl}_X(U_x) \subset U$. The θ-openness of V in U yields an open neughborhood $V_x \subset U$ such that $\mathrm{cl}_U(V_x) \subset U$. Now consider the open neighborhood $O_x = V_x \cap U_x$ and observe that $\mathrm{cl}_X(O_x) \subset \mathrm{cl}_X(V_x) \cap \mathrm{cl}_X(U_x) \subset \mathrm{cl}_X(V_x) \cap U = \mathrm{cl}_U(V_x) \subset V$. □

2010 Mathematics Subject Classification: 54C08; 54D10

For a function $f : X \to Y$ between topological spaces by $C(f)$ we denote the set of continuity points of f.

Definition 1. A function $f : X \to Y$ beween topological spaces is called

- *scatteredly continuous* if for any non-empty subset $A \subset X$ the set $C(f|A)$ is not empty;
- *weakly discontinuous* if if for any non-empty subset $A \subset X$ the set $C(f|A)$ has non-empty interior in A;
- *θ-weakly discontinuous* if if for any non-empty subset $A \subset X$ the set $C(f|A)$ contains a non-empty θ-open subset of A.

So, we have the implications:

θ-weakly discontinuous $\Rightarrow$ weakly discontinuous $\Rightarrow$ scatteredly continuous.

The first and last implications can be reversed for functions with regular domain and range, respectively.

Theorem 1 (trivial). *A function $f : X \to Y$ from a regular topological space X to a topological space Y is weakly discontinuous if and only if it is θ-weakly discontinuous.*

Theorem 2 (Bokalo). *A function $f : X \to Y$ from a topological space X to a regular space Y is scatteredly continuous if and only if it is weakly discontinuous.*

A proof the Theorem 2 can be found in [1], [8]. More information on various sorts of generalized continuity can be found in [2]–[12].

Motivated by Theorems 1 and 2, let us introduce the following definition.

Definition 2. A topological space X is called

- *sw-regular* if any scatteredly continuous function $f : Z \to X$ defined on a topological space Z is weakly discontinuous;
- *$w\theta$-regular* if any weakly discontinuous function $f : X \to Y$ to any topological space Y is θ-weakly discontinuous.

Theorems 1 and 2 imply that each regular space is sw-regular and $w\theta$-regular.

The following theorem characterizes $w\theta$-regular spaces.

Theorem 3. *A topological space X is $w\theta$-regular if and only if for each subspace $A \subset X$, each non-empty open subset $U \subset A$ contains a non-empty θ-open subset of A.*

Proof. To prove the "if" part, assume that for each subspace $A \subset X$, every non-empty open subset $U \subset A$ contains a non-empty θ-open subset of A. To show that the space X is $w\theta$-regular, fix any weakly discontinuous map $f : X \to Y$. To show that f is θ-weakly discontinuous, take any non-empty subset $A \subset X$. Since f is weakly discontinuous, there exists a non-empty open subset $U \subset A$ such that $f|U$ is continuous. By our assumption, U contains a θ-open subspace V of A. Since $f|V$ is continuous, the function f is θ-weakly discontinuous.

Now we prove the "only if" part. Assume that the space X is $w\theta$-regular. Given any subset $A \subset X$ and a non-empty open subset $U \subset A$, consider the closures $\bar{A}$ and $\overline{A \setminus U}$ of the sets A and $A \setminus U$ in X. Observe that $\tilde{U} := \bar{A} \setminus \overline{A \setminus U}$ is an open set in $\bar{A}$ with $\tilde{U} \cap A = U$ and $\tilde{U} \subset \overline{U}$. Consider the topological sum $Y = \tilde{U} \oplus (X \setminus \tilde{U})$ and observe that the identity map $f : X \to Y$ is weakly discontinuous. The $w\theta$-regularity of the space X ensures that f is θ-weakly discontinuous. Consequently, the closure $\bar{U}$ of U in $\bar{A}$ contains a non-empty θ-open subset $V \subset \bar{U}$ such that $f|V$ is continuous. The continuity of $f|V$ ensures that $V \subset \tilde{U}$. We claim that V is θ-open in $\bar{A}$. Since V is θ-open in $\bar{U}$, for any $x \in V$ there exists a neighborhood O_x of x such that O_x is open in $\bar{U}$ and $O_x \subset \overline{O}_x \subset V \subset \tilde{U}$. So, O_x is open in $\tilde{U}$ and hence is open in $\bar{A}$.

Taking into account that V is a non-empty θ-open subset of $\bar{A}$, we conclude that $V \cap A \subset \tilde{U} \cap A = U$ is a non-empty θ-open subset of A, contained in the set U. □

Problem 1. *Characterize topological spaces which are sw-regular.*

We shall prove that sw-regular and $w\theta$-regular spaces are preserved by θ-weak homeomorphisms.

Definition 3. A bijective function $f : X \to Y$ between topological spaces is called a (θ-)*weak homeomorphism* if both functions f and f^{-1} are (θ-)weakly discontinuous.

We shall need the following proposition describing the continuity properties of compositions of scatteredly continuous, weakly discontinuous and θ-weakly discontinuous functions.

Proposition 1. *Let $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$ be two functions between topological spaces.*

(1) *If f, g are weakly discontinuous, then $g \circ f$ is weakly discontinuous.*
(2) *If f, g are θ-weakly discontinuous, then $g \circ f$ is θ-weakly discontinuous.*
(3) *If f is weakly discontinuous and g is scatteredly continuous, then $g \circ f$ is scatteredly continuous.*
(4) *If f is scatteredly continuous and g is θ-weakly discontinuous, then $g \circ f$ is scatteredly continuous.*

Proof. 1. Assume that f, g are weakly discontinuous. To prove that $g \circ f$ is weakly discontinuous, we need to show that for any non-empty subset $A \subset X$ the set $C(g \circ f|A)$ has non-empty interior in A. By the weak discontinuity of f, the set $C(f|A)$ contains a non-empty open subset $U \subset A$. By the weak discontinuity of g, the set $C(g|f(U))$ contains a non-empty open set $V \subset f(U)$. By the continuity of $f|U$, the set $W = (f|U)^{-1}(V)$ is open in U and hence open in A. Since $f(W) \subset V$, the continuity of the restrictions $f|W$ and $g|V$ implies the continuity of the restriction $g \circ f|W$. So, $W \subset C(g \circ f|A)$.

2. Assume that f, g are θ-weakly discontinuous. To prove that $g \circ f$ is θ-weakly discontinuous, we need to show that for any non-empty subset $A \subset X$ the set $C(g \circ f|A)$ contains a non-empty θ-open subset $W \subset A$. By the θ-weak discontinuity of f, the set $C(f|A)$ contains a non-empty θ-open subset $U \subset A$. By the θ-weak discontinuity of g, the set $C(g|f(U))$ contains a non-empty θ-open set $V \subset f(U)$. By the continuity of $f|U$, the set $W = (f|U)^{-1}(V)$ is θ-open in U and hence θ-open in A, by Lemma 1. Since $f(W) \subset V$, the continuity of the restrictions $f|W$ and $g|V$ implies the continuity of the restriction $g \circ f|W$. Now we see that the set $C(g \circ f|A)$ contains the non-empty θ-open subset W of A, witnessing that $g \circ f$ is θ-weakly discontinuous.

3. Assume that f is weakly discontinuous and g is scatteredly continuous. To prove that $g \circ f$ is scatteredly continuous, we need to show that for any non-empty subset

$A \subset X$ the function $g \circ f|A$ has a continuity point. By the weak discontinuity of f, the set $C(f|A)$ contains a non-empty open subset $U \subset A$. By the scattered continuity of g, the function $g|f(U)$ has a continuity point y. Then any point $x \in U \cap f^{-1}(y)$ is a continuity point of the restriction $g \circ f|A$.

4. Assume that f is scatteredly continuous and g is θ-weakly discontinuous. Given a non-empty subset $A \subset X$, we need to show that the restriction $g \circ f|A$ has a continuity point. Let $A_0 := A$ and $A_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta \setminus C(f|A_\beta)$ for any non-zero ordinal α. In particular, $A_{\alpha+1} = A_\alpha \setminus C(f|A_\alpha)$ for any ordinal α.

Let δ be the smallest ordinal such that A_δ is not dense in A and let $W = A \setminus \overline{A}_\delta$. It follows that $W = \bigcup_{\alpha<\delta} W \cap C(f|A_\alpha)$ and each set $W \cap C(f|A_\alpha)$ is dense in W (by the scattered continuity of f).

Since the function g is θ-weakly discontinuous, the set $C(g|f(W))$ contains a non-empty θ-open subset $V \subset f(W)$. Since $W = \bigcup_{\alpha<\delta} W \cap C(f|A_\alpha)$, we can choose the smallest ordinal $\gamma < \delta$ such that $W \cap C(f|A_\gamma) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Choose a point $x \in W \cap C(f|A_\gamma) \cap f^{-1}(V)$. Since the set V is θ-open in $f(W)$, the point $f(x) \in V$ has a closed neighborhood $\bar{O}_{f(x)} \subset f(W)$ such that $\bar{O}_{f(x)} \subset V$. By the continuity of the map $f|A_\gamma$ at x, there exists an open neighborhood $O_x \subset W$ of x such that $f(O_x \cap A_\gamma) \subset \bar{O}_{f(x)} \subset V$.

We claim that $\gamma = 0$. To derive a contradiction, assume that $\gamma > 0$. In this case $W \cap C(f|A_0) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ and hence $x \notin C(f|A_0) = C(f|A)$. By the density of $C(f|A)$ in A, there exists a point $z \in O_x \cap C(f|A)$. It follows that $f(z) \in W \setminus V \subset W \setminus \bar{O}_{f(x)}$. By the continuity of $f|W$ at z, there exists an open neighborhood $O_z \subset O_x$ such that $f(O_z) \subset f(W) \setminus \bar{O}_{f(x)}$. Then

$$f(O_z \cap A_\gamma) = f(O_z \cap O_x \cap A_\gamma) \subset f(O_z) \cap f(O_x \cap A_\gamma) \subset (f(W) \setminus \bar{O}_{f(x)}) \cap \bar{O}_{f(x)} = \emptyset$$

and hence $O_z \cap A_\gamma = \emptyset$, which contradicts the density of A_γ in A. This contradiction shows that $\gamma = 0$ and hence $x \in C(f|A_\gamma) = C(f|A)$ is a continuity point of $f|A$ with $f(O_x) \subset V$. The continuity of the restriction $g|V$ implies that $g \circ f|A$ is continuous at x. So, $g \circ f|A$ has a continuity point. □

Theorem 4. *A topological space X is sw-regular if there exists a θ-weakly discontinuous bijective function $h : X \to Y$ to an sw-regular space Y such that h^{-1} is weakly discontinuous.*

Proof. To show that X is sw-regular, we need to show that each scatteredly continuous function $f : Z \to X$ is weakly discontinuous. By Proposition 1(4), the composition $h \circ f : Z \to Y$ is scatteredly continuous. Since Y is sw-regular, the function $h \circ f$ is weakly discontinuous. By Proposition 1(1), the composition $h^{-1} \circ h \circ f = f$ is weakly discontinuous. □

Theorem 5. *A topological space X is $w\theta$-regular if there exists a θ-weakly discontinuous bijective function $h : X \to Y$ to a $w\theta$-regular space Y such that h^{-1} is weakly discontinuous.*

Proof. To see that X is $w\theta$-regular, we need to show that each weakly discontinuous function $f : X \to Z$ is θ-weakly discontinuous. By Proposition 1(1), the composition $f \circ h^{-1} : Y \to Z$ is weakly discontinuous. Since Y is $w\theta$-regular, the function $f \circ h^{-1}$ is

θ-weakly discontinuous. By Proposition 1(2), the composition $f \circ h^{-1} \circ h = f$ is θ-weakly discontinuous. □

Corollary 1. *The classes of sw-regular and $w\theta$-regular spaces are preserved by θ-weak homeomorphisms.*

Definition 4. A topological space X is called (θ-)*weakly regular* if it is (θ-)weakly homeomorphic to a regular topological space.

Example 1. Consider the real line $\mathbb{R}$ endowed with the second-countable topology τ generated by the subbase

$$\{\mathbb{Q}\} \cup \{(-\infty, a), (a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

It can be shown that the topological space $X = (\mathbb{R}, \tau)$ is weakly regular. The identity map $\mathbb{R} \to X$ is scatteredly continuous but not weakly discontinuous, which implies that the space X is not sw-regular. On the other hand, the function $\chi : X \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ defined by

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

is weakly discontinuous but not θ-weakly discontinuous, witnessing that the space X is not $w\theta$-regular. Theorem 6 implies that the space X is not θ-weakly regular.

Theorem 1, 2 and Corollary 1 imply:

Theorem 6. *Each θ-weakly regular space is sw-regular and $w\theta$-regular.*

Theorem 7. *A topological space X is θ-weakly regular if and only if each non-empty (closed) subspace $A \subset X$ contains a non-empty θ-open regular subspace.*

Proof. First assume that X is θ-weakly regular and fix any θ-weak homeomorphism $h : X \to Y$ to a regular topological space Y.

Given any subspace $A \subset X$, we need to find a non-empty θ-open regular subspace $W \subset A$. Since the map h is θ-weakly discontinuous, there exists a non-empty θ-open subset $U \subset A$ such that $h|U$ is continuous. Since h^{-1} is θ-weakly discontinuous, the non-empty subspace $h(U)$ of Y contains a non-empty θ-open subspace V such that $h^{-1}|V$ is continuous. The continuity of the map $h|U$ implies that the set $W := (h|U)^{-1}(V)$ is θ-open in U and hence θ-open in A (by Lemma 1). The continuity of maps $h|W$ and $h^{-1}|h(W)$ implies that $h|W : W \to h(W)$ is a homeomorphism. The regularity of the topological space Y implies the regularity of its subspace $h(W)$ and the regularity of the topological copy W of $h(W)$. Therefore, W is a required non-empty θ-open regular subspace of A.

Now assume that each non-empty closed subspace $A \subset X$ contains a non-empty θ-open regular subspace. Let A^θ be the union of all θ-open regular subspaces of A. It is clear that the subspace A^θ is θ-open in A and regular. Let $X_0 := X$ and $X_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta \setminus X_\beta^\theta$ for each ordinal α. It follows that for any ordinal α with $X_\alpha \neq \emptyset$ the set $X_{\alpha+1} = X_\alpha \setminus X_\alpha^\theta$ is closed in X_α and has non-empty complement $X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha = X_\alpha^\theta$. Consequently, $X_\gamma = \emptyset$ for some γ and hence $X = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\gamma^\theta$.

Let $Y := \bigoplus_{\alpha<\gamma} X^\theta_\alpha$ be the topological sum of the regular spaces X^θ_α for $\alpha < \gamma$. It is clear that the space Y is regular and the identity map $i : Y \to X$ is continuous. We claim that the identity map $i^{-1} : X \to Y$ is θ-weakly discontinuous. Given any non-empty subset $A \subset X$, find the smallest ordinal $\beta \le \gamma$ such that $A \not\subset X_\beta$. Then $A \subset X_\alpha$ for all $\alpha < \beta$, which implies that β is a successor ordinal. Write $\beta = \alpha + 1$ for some α and observe that $U = A \cap X^\theta_\alpha = A \cap (X_\alpha \setminus X_{\alpha+1})$ is a non-empty θ-open subspace of A such that $i^{-1}|U$ is continuous. This means that i^{-1} is θ-weakly discontinuous and $i : X \to Y$ is a θ-weak homeomorphism of X onto the regular space Y. □

By analogy we can prove a characterization of weakly regular spaces.

Theorem 8. *A topological space X is weakly regular if and only if each (closed) subspace $A \subset X$ contains a non-empty open regular subspace.*

A topological space X is called

- *quasi-regular* if each non-empty open subset of X contains the closure of some non-empty open set in X;
- *hereditarily quesi-regular* if each subspace of X is quesi-regular.

Theorem 3 implies

Corollary 2. *Each $w\theta$-regular space is hereditarily quasi-regular.*

Theorems 7 and 6 imply:

Corollary 3. *Each scattered T_1-space is θ-weakly regular and hence is sw-regular and $w\theta$-regular.*

The T_1-requirement in Corollary 3 is essential as shown by the following example.

Example 2. Consider the connected doubleton $D = \{0, 1\}$ endowed with the topology $\{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$. It is clear that D is a scattered space. The function $f : \mathbb{R} \to D$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

is scatteredly continuous but not weakly discontinuous as $C(f) = \mathbb{Q}$ has empty interior in $\mathbb{R}$. Consequently, D is not sw-regular and hence not θ-weakly regular.

The identity map $i : D \to \{0, 1\}$ to the discrete doubleton is weakly discontinuous but not θ-weakly discontinuous. This means that D is not $w\theta$-regular.

Definition 5. A topological space X is *locally regular* if X admits an open cover by regular subspaces.

Theorem 8 implies that each locally regular space is weakly regular.

Theorem 9. *Each locally regular topological space Y is sw-regular.*

Proof. Given a scatteredly continuous map $f : X \to Y$ and a non-empty subset $A \subset X$, we should show that the set $C(f|A)$ has non-empty interior in A.

By the scattered continuity of f, the map $f|A$ has a continuity point $a \in A$. By our assumption, the point $f(a)$ is contained in an open regular subspace $U \subset Y$. By the continuity of f at a, there exists an open neighborhood $O_a \subset A$ of a such that

$f(O_a) \subset U$. Since U is regular, the set $C(f|O_a)$ has non-empty interior in O_a and then the set $C(f) \supset C(f|O_a)$ has non-empty interior in A. □

Example 3. On the real line $\mathbb{R}$ consider the Euclidean topology τ_E and the topology τ generated by the subbase

$$\tau_E \cup \{W_n : n \in \omega\} \text{ where } W_n = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2^k 3^m} : m \in \omega,\ k \geq n\right\}.$$

It can be shown that the space $X = (\mathbb{R}, \tau)$ is θ-weakly regular but not locally regular.

A topological space X is called *regular at a point* $x \in X$ if any neighborhoodof x in X contains a closed neighborhood of x in X. A topological space X is called *nowhere regular* if X is not regular at each point $x \in X$.

Example 4. Let τ_E be the Euclidean topology of the real line and τ be the topology generated by the subbase

$$\{(U \cap \mathbb{Q}) \cup \{x\} : x \in U \in \tau_E\}.$$

The space $(\mathbb{R}, \tau)$ is locally regular and hence sw-regular. On the other hand, it is nowhere regular, not quasi-regular and not $w\theta$-regular.

Now, we describe the smallest non-regular first-countable Hausdorff space, which is called the Gutik hedgehog. The *Gutik hedgehog* is the space $\mathbb{N}^{\leq 2} = \mathbb{N}^0 \cup \mathbb{N}^1 \cup \mathbb{N}^2$ endowed with the topology generated by the base

$$\big\{\{x\} : x \in \mathbb{N}^2\big\} \cup \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{U_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

where

$$U_n = \{\emptyset\} \cup \big\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i \geq n\big\} \text{ and } U_{n,m} = \{(n)\} \cup \big\{(n,j) : j \geq m\big\} \subset \mathbb{N}^1 \cup \mathbb{N}^2$$

for $n, m \in \omega$. Here $\emptyset$ is the unique element of the set $\mathbb{N}^0$. For the first time, the Gutik hedgehog has appeared in the paper [9] of Gutik and Pavlyk.

The following properties of the Gutik hedgehog can be derived from its definition.

Lemma 2. *The Gutik hedgehog is first-countable, scattered and locally regular, but not regular.*

Moreover, the following theorem shows that the Gutik hedgehog is the smallest space among non-regular first-countable spaces.

Theorem 10. *A first-countable Hausdorff space X is not regular if and only if X contains a topological copy of the Gutik hedgehog.*

Proof. The “if” part follows from the non-regularity of the Gutik hedgehog.

To prove the “only if” part, assume that a first-countable Hausdorff space X is not regular at some point x. Then we can find a neighborhood $U_0 \subset X$ of x that does not contain the closure of any neighborhood V of x. Fix a neighborhood base $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ at x such that $U_n \subset U_{n-1}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Let $k_1 = 0$, choose any point $x_1 \in \overline{U}_{k_1} \setminus U_0$, and using the Hausdorff property of X, find a neighborhood V_1 of x_1 such that $V_1 \cap U_{k_2} = \emptyset$ for some number $k_2 > k_1$.

Proceeding by induction, we can choose an increasing number sequence $(k_n)_{n\in\omega}$ and a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of points in X such that for every $n \in \mathbb{N}$, the point x_n belongs to

$\overline{U}_{k_n} \setminus U_0$ and has an open neighborhood V_n, disjoint with the neighborhood $U_{k_{n+1}}$ of x. Observe that for every $i < n$, we have

$$x_n \in \overline{U}_{k_n} \subset \overline{U}_{k_i} \subset X \setminus V_i \subset X \setminus \{x_i\},$$

which implies that $x_n \notin \overline{\{x_i\}}_{i<n}$. Replacing V_n by a smaller neighborhood of x_n, we can assume that its closure $\overline{V}_n$ does not contain the points $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Since X is first-countable, for every $n \in \mathbb{N}$ we can choose a sequence $\{x_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ of pairwise distinct points in $V_n \cap U_{k_n}$ that converges to x_n. Observe that for any $n < m$ the sets $\overline{U}_{k_{n+1}} \supset \overline{U}_{k_m} \supset \{x_{m,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ and $V_n \supset \{x_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ are disjoint, which implies that the points $x_{n,i}$, $n, i \in \mathbb{N}$, are pairwise disjoint. Consider the subspace $\tilde{H} := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}\}$ and observe that the map $h : H \to \tilde{H}$, defined by $h(\emptyset) = x$, $h(n) = x_n$ and $h(n,m) = x_{n,m}$ for $n, m \in \mathbb{N}$, is a homeomorphism. $\square$

Finally let us draw a diagram of all provable implications between various regularity properties.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{regular} \arrow[d, Rightarrow] & \\
sw\text{-regular} & \theta\text{-weakly regular} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & w\theta\text{-regular} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{locally regular} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{weakly regular} & \begin{array}{c}\text{hereditarily}\\ \text{quasi-regular}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Examples 1, 3 and 4 show that none of the implications

$$\text{weakly regular} \Rightarrow sw\text{-regular},$$
$$\theta\text{-weakly regular} \Rightarrow \text{locally regular},$$
$$\text{locally regular} \Rightarrow w\theta\text{-regular}$$

holds in general.

Problem 2. *Is each sw-regular space weakly regular? quasi-regular?*

Problem 3. *Which properties in the diagram are preserved by products?*

Acknowledgements

The authors express their sincere thanks to Alex Ravsky for careful reading the paper and many valuable suggestions improving the presentation.

References

1. А. В. Архангельский, Б. М. Бокало, *Касание топологий и тангенциальные свойства топологических пространств*, Тр. ММО, **54**, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1992, 160–185; **English version**: A. V. Arkhangelskii and B. M. Bokalo, *Tangency of topologies and tangential properties of topological spaces*, Trans. Mosk. Math. Soc. **1993** (1993), 139–163.

2. R. Baire, *Sur les fonctions de variables reelles*, Annali di Mat. (3) **3** (1899), no. 1, 1–123. DOI: 10.1007/BF02419243
3. T. Banakh and B. Bokalo, *On scatteredly continuous maps between topological spaces*, Topology Appl. **157** (2010), no. 1, 108–122. DOI: 10.1016/j.topol.2009.04.043
4. T. Banakh and B. Bokalo, *Weakly discontinuous and resolvable functions between topological spaces*, Hacet. J. Math. Stat. **46** (2017), no. 1, 103–110. DOI: 10.15672/HJMS.2016.399
5. T. Banakh, B. Bokalo, and N. Kolos, *Topological properties preserved by weakly discontinuous maps and weak homeomorphisms*, Topology Appl. **221** (2017), 91–106. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.036
6. B. M. Bokalo and N. M. Kolos, *On operations on some classes of discontinuous functions*, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no. 2, 36–48.
7. B. Bokalo and N. Kolos, *When does $SC_p(X) = \mathbb{R}^X$ hold?*, Topology **48** (2009), no. 2–4, 178–181. DOI: 10.1016/j.top.2009.11.016
8. Б. М. Бокало, О. П. Маланюк, *Про майже неперервні відображення*, Mat. Stud. **9** (1995), no. 1, 90–93.
9. O. Gutik and K. Pavlyk, *On pseudocompact topological Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids*, Topol. Algebra Appl. **1** (2013), 60–79. DOI: 10.2478/taa-2013-0007
10. L. Holá and Z. Piotrowski, *Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces*, Tatra Mt. Math. Publ. **42** (2009), 149–160.
11. B. Kirchheim, *Baire one star functions*, Real Anal. Exchange **18** (1992/93), no. 2, 385–389.
12. V. A. Vinokurov, *Strong regularizability of discontinuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **281** (1985), no. 2, 265–269 (Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 28.01.2019
доопрацьована 16.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

ДЕЯКІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ РЕГУЛЯРНОСТІ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

Тарас БАНАХ, Богдан БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Університетська 1, 79000, Львів, Україна
e-mail: t.o.banakh@gmail.com, b.m.bokalo@gmail.com

На основі вивчення точок неперервності функцій між регулярними просторами, означено і досліджено деякі узагальнення регулярних топологічних просторів. Зокрема, доведено, що гаусдорфовий простір з першою аксіомою зліченності є регулярним тоді і лише тоді, коли він не містить топологічної копії їжачка Гутіка.

Ключові слова: регулярний простір, квазірегулярний простір, sw-регулярний простір, $w\theta$-регулярний простір, θ-слабко регулярний простір, слабко регулярний простір, локально регулярний простір, їжачок Гутіка.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 125–133
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 125–133
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.125-133

УДК 515.12

A FUNCTIONAL REPRESENTATION OF THE CAPACITY MULTIPLICATION MONAD

Dedicated to the 60th birthday of M. M. Zarichnyi

Taras RADUL

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
Casimirus the Great University of Bydgoszcz, Poland
e-mail: tarasradul@yahoo.co.uk

Functional representations of the capacity monad based on the max and min operations were considered in [10] and [7]. Nykyforchyn considered in [8] some alternative monad structure for the possibility capacity functor based on the max and usual multiplication operations. We show that such a capacity monad (which we call the capacity multiplication monad) has a functional representation, i.e. the space of capacities on a compactum X can be naturally embedded (with preservation of the monad structure) in some space of functionals on $C(X,I)$. We also describe this space of functionals in terms of properties of functionals.

Key words: Banach space, locally convex space, approximation, Schrödinger operator

1. Introduction

Functional representations of monads (i.e. natural embeddings into $\mathbb{R}^{C(X,S)}$ which preserves a monad structure where S is a subset of $\mathbb{R}$) were considered in [11] and [12]. Some functional representations of hyperspace monad were constructed in [13] and [14].

Capacities (non-additive measures, fuzzy measures) were introduced by Choquet in [1] as a natural generalization of additive measures. They found numerous applications (see for example [2],[4],[16]). Categorical and topological properties of spaces of upper-semicontinuous capacities on compact Hausdorff spaces were investigated in [9].

2010 Mathematics Subject Classification: 18B30, 18C15, 28E10, 54B30

In particular, the capacity functor was constructed. This functor is a functorial part of a capacity monad $\mathbb{M}$ based on the max and min operations.

The space of capacities MX can be naturally embedded in $\mathbb{R}^{C(X)}$ by means of the Choquet integral. In other words, the Choquet integral provides some functional representation of the functor M. However, this representation does not preserve the monad structure. Nykyforchyn using the Sugeno integral provided a functional representation of capacities as functionals on the space $C(X,I)$ which preserves the monad structure [7]. Some modification of the Sugeno integral yields a functional representation of capacities as functionals on the space $C(X)$ [10].

Let us remark that the min operation is a triangular norm on the unit interval I. Another important triangular norm is the multiplication operation. Nykyforchyn constructed a capacity monad based on the max and multiplication operations [8]. (Let us remark that recently Zarichnyi proposed to use triangular norms to construct monads [20]). The main aim of this paper is to find a representation of the monad from [8]. We use a fuzzy integral based on the max and multiplication operations for this purpose.

2. Capacities and monads

By Comp we denote the category of compact Hausdorff spaces (compacta) and continuous maps. For each compactum X we denote by $C(X)$ the Banach space of all continuous functions $\phi : X \to \mathbb{R}$ with the usual sup-norm: $\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| \mid x \in X\}$. We also consider on $C(X)$ the natural partial order.

In what follows, all spaces and maps are assumed to be in Comp except for $\mathbb{R}$, the spaces $C(X)$ and functionals defined on $C(X)$ with X compact Hausdorff.

We recall some categorical notions (see [15] and [17] for more details). We define them only for the category Comp. The central notion is the notion of monad (or triple) in the sense of S.Eilenberg and J.Moore.

A *monad* [3] $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ in the category Comp consists of an endofunctor $T : \mathsf{Comp} \to \mathsf{Comp}$ and natural transformations $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Comp}} \to T$ (unity), $\mu : T^2 \to T$ (multiplication) satisfying the relations $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = \mathbf{1}_T$ and $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$. (By $\mathrm{Id}_{\mathsf{Comp}}$ we denote the identity functor on the category Comp and T^2 is the superposition $T \circ T$ of T.)

Let $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ be a monad in the category Comp. The pair (X, ξ) where $\xi : TX \to X$ is a map is called a $\mathbb{T}$-*algebra* if $\xi \circ \eta X = id_X$ and $\xi \circ \mu X = \xi \circ T\xi$. Let (X, ξ), (Y, ξ') be two $\mathbb{T}$-algebras. A map $f : X \to Y$ is called a morphism of $\mathbb{T}$-algebras if $\xi' \circ Tf = f \circ \xi$.

A natural transformation $\psi : T \to T'$ is called a *morphism* from a monad $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ into a monad $\mathbb{T}' = (T', \eta', \mu')$ if $\psi \circ \eta = \eta'$ and $\psi \circ \mu = \mu' \circ \eta T' \circ T\psi$. If all of the components of ψ are monomorphisms then the monad $\mathbb{T}$ is called a *submonad* of $\mathbb{T}'$ and ψ is called a *monad embedding*.

Let A be a subset of X. By $\mathcal{F}(X)$ we denote the family of all closed subsets of X. Put $I = [0, 1]$.

We follow a terminology from [9]. A function $\nu : \mathcal{F}(X) \to I$ is called an *upper-semicontinuous capacity* on X if the following three properties hold for each closed subsets F and G of X:

(1) $\nu(X) = 1$, $\nu(\emptyset) = 0$,
(2) if $F \subset G$, then $\nu(F) \le \nu(G)$,

(3) if $\nu(F) < a$, then there exists an open set $O \supset F$ such that $\nu(B) < a$ for each compactum $B \subset O$.

A capacity ν is extended in [9] to all open subsets $U \subset X$ by the formula

$$\nu(U) = \sup\{\nu(K) \mid K \text{ is a closed subset of } X \text{ such that } K \subset U\}.$$

It was proved in [9] that the space MX of all upper-semicontinuous capacities on a compactum X is a compactum as well, if a topology on MX is defined by a subbase that consists of all sets of the form $O_-(F,a) = \{c \in MX \mid c(F) < a\}$, where F is a closed subset of X, $a \in [0,1]$, and $O_+(U,a) = \{c \in MX \mid c(U) > a\}$, where U is an open subset of X, $a \in [0,1]$. Since all capacities under consideration here are upper-semicontinuous, in the following we call the elements of MX simply capacities.

A capacity $\nu \in MX$ for a compactum X is called a necessity (possibility) capacity if for each family $\{A_t\}_{t\in T}$ of closed subsets of X (such that $\bigcup_{t\in T} A_t$ is a closed subset of X) we have $\nu(\bigcap_{t\in T} A_t) = \inf_{t\in T} \nu(A_t)$ ($\nu(\bigcup_{t\in T} A_t) = \sup_{t\in T} \nu(A_t)$). (See [19] for more details.) We denote by $M_\cap X$ ($M_\cup X$) the subspace of MX consisting of all necessity (possibility) capacities. Since X is compact and ν is upper-semicontinuous, $\nu \in M_\cap X$ if and only if ν satisfies the simpler requirement that $\nu(A \cap B) = \min\{\nu(A), \nu(B)\}$.

If ν is a capacity on a compactum X, then the function $\kappa X(\nu)$ defined on the family $\mathcal{F}(X)$ by the formula $\kappa X(\nu)(F) = 1 - \nu(X \setminus F)$, is a capacity as well. It is called the dual capacity (or conjugate capacity) to ν. The mapping $\kappa X : MX \to MX$ is a homeomorphism and an involution [9]. Moreover, ν is a necessity capacity if and only if $\kappa X(\nu)$ is a possibility capacity. This implies in particular that $\nu \in M_\cup X$ if and only if ν satisfies the simpler requirement that $\nu(A \cup B) = \max\{\nu(A), \nu(B)\}$. It is easy to check that $M_\cap X$ and $M_\cup X$ are closed subsets of MX.

The assignment M extends to the capacity functor M in the category of compacta, if the map $Mf : MX \to MY$ for a continuous map of compacta $f : X \to Y$ is defined by the formula $Mf(c)(F) = c(f^{-1}(F))$ where $c \in MX$ and F is a closed subset of X. This functor was completed to the monad $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ [9], where the components of the natural transformations are defined as follows: $\eta X(x)(F) = 1$ if $x \in F$ and $\eta X(x)(F) = 0$ if $x \notin F$;

$$\mu X(\mathcal{C})(F) = \sup\{t \in [0,1] \mid \mathcal{C}(\{c \in MX \mid c(F) \geq t\}) \geq t\},$$

where $x \in X$, F is a closed subset of X and $\mathcal{C} \in M^2(X)$ (see [9] for more details).

It was shown in [5] that $M_\cup$ and $M_\cap$ are subfunctors of M and if we take the corresponding restrictions of the functions μX, we obtain submonads $\mathbb{M}_\cup$ and $\mathbb{M}_\cap$ of the monad $\mathbb{M}$.

The semicontinuity of capacities yields that we can change sup for max in the definition of the map μX. More precisely, existing of max follows from Lemma 3.7 [9]. For a closed set $F \subset X$ and for $t \in I$ put $F_t = \{c \in MX \mid c(F) \geq t\}$. We can rewrite the definition of the map μX as follows

$$\mu X(\mathcal{C})(F) = \max\{\mathcal{C}(F_t) \wedge t \mid t \in (0,1]\}.$$

Let us remark that the operation $\wedge$ is a triangular norm. It seems natural to consider another triangular norm instead of $\wedge$. Define the map $\mu^\bullet X : M^2 X \to MX$ by the formula

$$\mu^\bullet X(\mathcal{C})(F) = \max\{\mathcal{C}(F_t) \cdot t \mid t \in (0,1]\}.$$

(Existence of max also follows from Lemma 3.7 [9].)

Proposition 1. *The natural transformation $\mu^\bullet$ does not satisfy the property $\mu^\bullet \circ \mu^\bullet M = \mu^\bullet \circ M\mu^\bullet$.*

Proof. Consider $X = \{a, b\}$, where $\{a, b\}$ is a two-point discrete space. Define $\mathcal{A}_1 \in M^2X$ as follows $\mathcal{A}_1(\alpha) = 1$ if and only if $\alpha \supset \{a\}_{\frac{1}{2}}$ and $\mathcal{A}_1(\alpha) = 0$ otherwise for $\alpha \in \mathcal{F}(MX)$. Define $\mathcal{A}_2 \in M^2X$ as follows $\mathcal{A}_2(\alpha) = 1$ if and only if $\alpha = MX$, $\mathcal{A}_2(\alpha) = \frac{1}{2}$ if and only if $\alpha \supset \{a\}_1$ and $\mathcal{A}_1(\alpha) = 0$ otherwise for $\alpha \in \mathcal{F}(MX)$. Now, define $\beth \in M^3(X)$ by the formula

$$\beth(\Lambda) = \frac{1}{2}\eta M^2X(\mathcal{A}_1)(\Lambda) + \frac{1}{2}\eta M^2X(\mathcal{A}_2)(\Lambda)$$

for $\Lambda \in \mathcal{F}(M^2X)$.

We have

$$\mu^\bullet X \circ M(\mu^\bullet X)(\beth)(\{a\}) = \max\{\beth((\mu^\bullet X)^{-1}(\{a\}_t)) \cdot t \mid t \in (0, 1]\}.$$

It is easy to see that $\mu^\bullet X(\mathcal{A}_1)(\{a\}) = \mu^\bullet X(\mathcal{A}_2)(\{a\}) = \frac{1}{2}$. Then $\beth((\mu^\bullet X)^{-1}(\{a\}_{\frac{1}{2}})) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Hence we obtain $\mu^\bullet X \circ \mu^\bullet MX(\beth)(\{a\}) \geq \frac{1}{2}$.

On the other hand

$$\begin{aligned}\mu^\bullet X \circ \mu^\bullet MX(\beth)(\{a\}) &= \max\{\mu^\bullet MX(\beth)(\{a\}_t)) \cdot t \mid t \in (0, 1]\} = \\ &= \max\{\max\{\beth((\{a\}_t)_s) \cdot s \mid s \in (0, 1]\} \cdot t \mid t \in (0, 1]\}.\end{aligned}$$

The function $\delta(s, t) = \beth((\{a\}_t)_s)$ is nonincreasing on both variables. We have $\delta(s, t) = 0$ for each (s, t) such that $s > \frac{1}{2}$ and $t > \frac{1}{2}$. Moreover $\delta(1, \frac{1}{2}) = \delta(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$. Hence

$$\mu^\bullet X \circ \mu^\bullet MX(\beth)(\{a\}) = \max\{\max\{\beth((\{a\}_t)_s) \cdot s \mid s \in (0, 1]\} \cdot t \mid t \in (0, 1]\} = \frac{1}{4}.$$

□

Remark 1. Since the triple $\mathbb{M}^\bullet = (M, \eta, \mu^\bullet)$ does not form a monad, the problem of uniqueness of the monad $\mathbb{M}$ stated in [9] is still open.

But things may turn out differently if we restrict the map $\mu^\bullet X$ to the set $M_\cup(M_\cup X) \subset M(MX)$. It is easy to see that for such restriction we can consider the sets A_t in the definition of the map $\mu^\bullet X$ as subsets of $M_\cup X$. It was deduced from some general facts that the triple $\mathbb{M}^\bullet_\cup = (M_\cup, \eta, \mu^\bullet)$ is a monad [8]. For the sake of completeness we give here a direct proof.

Lemma 1. *We have $\mu^\bullet X(M_\cup(M_\cup X)) \subset M_\cup X$ for each compactum X.*

Proof. Consider any $\mathcal{A} \in M_\cup(M_\cup X)$ and B, $C \in \mathcal{F}(X)$. Since B_t and C_t are subsets of $M_\cup X$, we have $(C \cup B)_t = C_t \cup B_t$. Then

$$\begin{aligned}\mu^\bullet X(\mathcal{A})(B \cup C) &= \max\{\mathcal{A}((C \cup B)_t) \cdot t \mid t \in (0, 1]\} = \\ &= \max\{\mathcal{A}(C_t \cup B_t) \cdot t \mid t \in (0, 1]\} = \\ &= \max\{\max\{\mathcal{A}(C_t) \cdot t \mid t \in (0, 1]\}, \max\{\mathcal{A}(B_t) \cdot t \mid t \in (0, 1]\} = \\ &= \max\{\mu^\bullet X(\mathcal{A})(B), \mu^\bullet X(\mathcal{A})(C)\}.\end{aligned}$$

□

We will use the notation $\mu^\bullet X$ also for the restriction $\mu^\bullet X|_{M^2_\cup X}$.

Theorem 1. *The triple* $\mathbb{M}_\cup^\bullet = (M_\cup, \eta, \mu^\bullet)$ *is a monad.*

Proof. It is easy to check that η and $\mu^\bullet$ are well-defined natural transformations of the corresponding functors. Let us check two monad properties.

Take any compactum X, $\nu \in M_\cup X$ and $A \in \mathcal{F}(X)$. Then we have

$$\begin{aligned}\mu^\bullet X \circ \eta M_\cup X(\nu)(A) &= \max\{\eta \mathbb{M}_\cup X(\nu)(A_t) \cdot t \mid t \in (0,1]\} = \\ &= \nu(A) \text{ and } \mu^\bullet X \circ M_\cup(\eta X)(\nu)(A) = \\ &= \max\{M_\cup(\eta X)(\nu)(A_t) \cdot t \mid t \in (0,1]\} = \\ &= \max\{\nu((\eta X)^{-1}(A_t)) \cdot t \mid t \in (0,1]\} = \\ &= \max\{\nu(A) \cdot t \mid t \in (0,1]\} = \nu(A).\end{aligned}$$

We obtain the equality $\mu^\bullet \circ M_\cup \eta = \mu^\bullet \circ \eta M_\cup = \mathbf{1}_{M_\cup}$.

Now, consider any $\daleth \in M_\cup^3(X)$ and $A \in \mathcal{F}(X)$. Put

$$a = \mu^\bullet X \circ M_\cup(\mu^\bullet X)(\daleth)(A) = \max\{\daleth((\mu^\bullet X)^{-1}(A_t)) \cdot t \mid t \in (0,1]\}$$

and

$$\begin{aligned}b &= \mu^\bullet X \circ \mu^\bullet M_\cup X(\daleth)(\{a\}) = \\ &= \max\{\mu^\bullet M_\cup X(\daleth)(A_t)) \cdot t \mid t \in (0,1]\} = \\ &= \max\{\max\{\daleth((A_t)_s) \cdot s \mid s \in (0,1]\} \cdot t \mid t \in (0,1]\}.\end{aligned}$$

There exists $t_0 \in (0,1]$ such that $a = \daleth((\mu^\bullet X)^{-1}(A_{t_0})) \cdot t_0$. We have

$$\begin{aligned}(\mu^\bullet X)^{-1}(A_{t_0}) &= \left\{\mathcal{A} \in M_\cup^2(X) \mid \mu^\bullet X(\mathcal{A}) \ge t_0\right\} = \\ &= \left\{\mathcal{A} \in M_\cup^2(X) \mid \text{ there exists } c \in (0,1] \text{ such that } \mathcal{A}(A_c) \cdot c \ge t_0\right\} = \\ &= \left\{\mathcal{A} \in M_\cup^2(X) \mid \text{ there exists } c \in (0,1] \text{ such that } \mathcal{A}(A_c) \ge \frac{t_0}{c}\right\}.\end{aligned}$$

Since $\daleth$ is a possibility capacity, there exists $\mathcal{A}_0 \in M_\cup^2(X)$ and $c_0 \in (0,1]$ such that $\mathcal{A}_0(A_{c_0}) \ge \frac{t_0}{c_0}$ and $\daleth((\mu^\bullet X)^{-1}(A_{t_0})) = \daleth(\{\mathcal{A}_0\})$. But then we have

$$a \le \daleth((A_{c_0})_{\frac{t_0}{c_0}}) \cdot t_0 = \daleth((A_{c_0})_{\frac{t_0}{c_0}}) \cdot \frac{t_0}{c_0} \cdot c_0 \le b.$$

On the other hand choose p_0, $z_0 \in (0,1]$ such that $b = \daleth((A_{p_0})_{z_0}) \cdot p_0 \cdot z_0$. Since $\daleth$ is a possibility capacity, there exists $\mathcal{B}_0 \in (A_{p_0})_{z_0}$ such that $\daleth((A_{p_0})_{z_0}) = \daleth(\{\mathcal{B}_0\})$. We have $\mathcal{B}_0(A_{p_0}) \ge z_0$, hence $\mu^\bullet X(\mathcal{B}_0)(A) \ge z_0 \cdot p_0$. Then we obtain

$$b = \daleth(\{\mathcal{B}_0\}) \cdot p_0 \cdot z_0 \le \daleth((\mu^\bullet X)^{-1}(A_{p_0 \cdot z_0})) \cdot p_0 \cdot z_0 \le a.$$

□

3. Functional representation of the monad $\mathbb{M}_\cup^\bullet$

A monad $\mathcal{F} = (F, \eta, \mu)$ is called an *IL-monad* if there exists a map $\xi : FI \to I$ such that the pair (I, ξ) is an $\mathcal{F}$-algebra and for each $X \in \mathsf{Comp}$ there exists a point-separating family of F-algebras morphisms $\{f_\alpha : (FX, \mu X) \to (I, \xi) \mid \alpha \in A\}$ [12].

There was defined a monad $\mathbb{V}_I$ in [12], which is universal in the class of IL-monads. By $V_I X$ we denote the power $I^{C(X,I)}$. For a map $\phi \in C(X, I)$ we denote by π_ϕ or $\pi(\phi)$

the corresponding projection $\pi_\phi : V_I X \to I$. For each map $f : X \to Y$ we define the map $V_I f : V_I X \to V_I Y$ by the formula $\pi_\phi \circ V_I f = \pi_{\phi \circ f}$ for $\phi \in C(Y, I)$. For a compactum X, we define components hX and mX of natural transformations by $\pi_\phi \circ hX = \phi$ and $\pi_\phi \circ mX = \pi(\pi_\phi)$ for all $\phi \in C(X, I))$. The triple $\mathbb{V}_I = (V_I, h, m)$ forms a monad in the category Comp and for each monad $\mathcal{F}$ there exists a monad embedding $l : \mathcal{F} \to \mathbb{V}_I$ if and only if $\mathcal{F}$ is IL-monad [12]. Moreover, for a compactum X the map $lX : FX \to V_I X$ is defined by the conditions $\pi_\phi \circ lX = \xi \circ F\phi$ for each $\psi \in C(X, I)$.

Theorem 2. *The monad $\mathbb{M}_\cup^\bullet$ is an IL-monad.*

Proof. Define the map $\xi : M_\cup I \to I$ by the formula $\xi(\nu) = \max\{\nu([t, 1] \cdot t \mid t \in (0, 1]\}$. We can check that the pair (I, ξ) is an $\mathbb{M}_\cup^\bullet$-algebra by the same but simpler arguments as in the proof of Theorem 1.

Consider any compactum X and two distinct capacities ν, $\beta \in M_\cup X$. Then there exists $A \in \mathcal{F}(X)$ such that $\nu(A) \neq \beta(A)$. We can suppose that $\nu(A) < \beta(A)$. Since ν and β are possibility capacities, there exist a, $b \in A$ such that $\nu(\{a\}) = \nu(A)$ and $\beta(\{b\}) = \beta(A)$. Choose a point $t \in (\nu(A), \beta(A))$. Put $B = \{x \in X \mid \nu(\{x\}) \geq t\}$. Since ν is a possibility capacity and $\nu(X) = 1$, B is not empty. Since ν is upper semicontinuous, B is closed. Evidently, $B \cap A = \emptyset$. Choose a function $\varphi \in C(X, I)$ such that $\varphi(B) \subset \{0\}$ and $\varphi(A) \subset \{1\}$. Then

$$\begin{aligned}\pi_\varphi \circ lX(\nu) &= \xi \circ M_\cup\varphi(\nu) = \\ &= \max\{M_\cup\varphi(\nu)([s, 1] \cdot s \mid s \in (0, 1]\} = \\ &= \max\{\nu(\varphi^{-1}[s, 1]) \cdot s \mid s \in (0, 1]\} \leq \\ &\leq t < \beta(A) \leq \beta(\varphi^{-1}\{1\}) \cdot 1 \leq \\ &\leq \pi_\varphi \circ lX(\beta)\end{aligned}$$

It is easy to check that

$$\pi_\phi \circ lX = \xi \circ \mathbb{M}_\cup\phi : \mathbb{M}_\cup X \to I$$

is a morphism of $\mathbb{M}_\cup^\bullet$-algebras . □

Hence we obtain a monad embedding $l : \mathbb{M}_\cup^\bullet \to \mathbb{V}_I$ such that

$$\pi_\varphi \circ lX(\nu) = \max\{\nu(\varphi^{-1}[s, 1]) \cdot s \mid s \in (0, 1]\}$$

for each compactum X, $\nu \in M_\cup X$ and $\varphi \in C(X, I)$.

Let X be any compactum. For any $c \in I$ we will denote by c_X the constant function on X taking the value c. Following the notations of idempotent mathematics (see e.g., [6]) we use the notation $\oplus$ in I and $C(X, I)$ as an alternative for max. We will use the notation $\nu(\varphi) = \pi_\varphi \circ lX(\nu)$ for $\nu \in V_I X$ and $\varphi \in C(X, I)$.

Consider the subset $SX \subset V_I X$ consisting of all functionals ν satisfying the following conditions

(1) $\nu(1_X) = 1$;
(2) $\nu(\lambda \cdot \varphi) = \lambda \cdot \nu(\varphi)$ for each $\lambda \in I$ and $\varphi \in C(X, I)$;
(3) $\nu(\psi \oplus \varphi) = \nu(\psi) \oplus \nu(\varphi)$ for each ψ, $\varphi \in C(X, I)$.

Let us remark that properties 1 and 2 yield that $\nu(c_X) = c$ for each $\nu \in SX$ and $c \in I$.

Theorem 3. $lX(M_\cup X) = SX$.

Proof. Consider any $\nu \in M_\cup X$. Put $\upsilon = lX(\nu)$. Then we have

$$\upsilon(1_X) = \max\{\nu((1_X)^{-1}[s,1]) \cdot s \mid s \in (0,1]\} = \max\{\nu(X) \cdot s \mid s \in (0,1]\} = 1.$$

Take any $c \in I$ and $\varphi \in C(X,I)$. For $c = 0$, Property 2 is trivial. For $c > 0$ we have

$$\begin{aligned}\upsilon(c\varphi) &= \max\left\{\nu((c\varphi)^{-1}[s,1]) \cdot s \mid s \in (0,1]\right\} = \\ &= \max\left\{\nu(\varphi^{-1}\left[\tfrac{s}{c},1\right]) \cdot \tfrac{s}{c} \mid s \in (0,1]\right\} \cdot c = \\ &= c \cdot \upsilon(\varphi).\end{aligned}$$

Consider any ψ and $\varphi \in C(X,I)$. We have

$$\begin{aligned}\upsilon(\psi \oplus \varphi) &= \max\left\{\nu((\psi \oplus \varphi)^{-1}[s,1]) \cdot s \mid s \in (0,1]\right\} = \\ &= \max\left\{\nu(\psi^{-1}[s,1] \cup \varphi^{-1}[s,1]) \cdot s \mid s \in (0,1]\right\} = \\ &= \max\left\{(\nu(\psi^{-1}[s,1]) \oplus \nu(\varphi^{-1}[s,1])) \cdot s \mid s \in (0,1]\right\} = \\ &= \upsilon(\psi) \oplus \upsilon(\varphi).\end{aligned}$$

We obtained $lX(M_\cup X) \subset SX$.

Take any $\upsilon \in SX$. For $A \in \mathcal{F}(X)$ put

$$\Upsilon_A = \{\varphi \in C(X,I) \mid \varphi(a) = 1 \text{ for each } a \in A\}.$$

Define $\nu : \mathcal{F}(X) \to I$ as follows $\nu(A) = \inf\{\upsilon(\varphi) \mid \varphi \in \Upsilon_A\}$ if $A \neq \emptyset$ and $\nu(\emptyset) = 0$. It is easy to see that ν satisfies Conditions 1 and 2 from the definition of capacity.

Let $\nu(A) < \eta$ for some $\eta \in I$ and $A \in \mathcal{F}(X)$. Then there exists $\varphi \in \Upsilon_A$ such that $\upsilon(\varphi) = \chi < \eta$. Choose $\varepsilon > 0$ such that $(1+\varepsilon)\chi < \eta$. Put $\delta = \frac{1}{1+\varepsilon}$ and $\psi = \min\{\delta_X, \varphi\}$. Then $\upsilon(\psi) \leq \upsilon(\varphi) = \chi$ and $\upsilon((1+\varepsilon)\psi) \leq (1+\varepsilon)\chi < \eta$. Put $U = \varphi^{-1}(\delta, 1]$. Evidently, U is an open set and $U \supset A$. But for each compact $K \subset U$ we have $(1+\varepsilon)\psi \in \Upsilon_K$. Hence $\nu(K) < \eta$.

Finally take any A, $B \in \mathcal{F}(X)$. Evidently, $\nu(A \cup B) \geq \nu(A) \oplus \nu(B)$. Suppose that $\nu(A \cup B) > \nu(A) \oplus \nu(B)$. Then there exists $\varphi \in \Upsilon_A$ and $\psi \in \Upsilon_B$ such that $\nu(A \cup B) > \upsilon(\varphi) \oplus \upsilon(\psi) = \upsilon(\varphi \oplus \psi)$. However, $\varphi \oplus \psi \in \Upsilon_{A \cup B}$ and we obtain a contradiction. Hence $\nu \in M_\cup X$.

Let us show that $lX(\nu) = \upsilon$. Take any $\varphi \in C(X,I)$. Denote $\varphi_t = \varphi^{-1}[t,1]$. Then

$$\begin{aligned}lX(\nu)(\varphi) &= \max\left\{\inf\{\upsilon(\chi) \mid \chi \in \Upsilon_{\varphi_t}\} \cdot t \mid t \in (0,1]\right\} = \\ &= \max\left\{\inf\{\upsilon(t\chi) \mid \chi \in \Upsilon_{\varphi_t}\} \mid t \in (0,1]\right\}.\end{aligned}$$

For each $t \in (0,1]$ put $\chi_t = \min\{\frac{1}{t}\varphi, 1_X\} \in \Upsilon_{\varphi_t}$. We have $t\chi \leq \varphi$, hence $\upsilon(t\chi) \leq \upsilon(\varphi)$. Then we have $\inf\{\upsilon(t\chi) \mid \chi \in \Upsilon_{\varphi_t}\} \leq \upsilon(\varphi)$ for each $t \in (0,1]$, hence $lX(\nu)(\varphi) \leq \upsilon(\varphi)$.

Suppose that $lX(\nu)(\varphi) < \upsilon(\varphi)$. Choose any $a \in (lX(\nu)(\varphi), \upsilon(\varphi))$. Then for each $t \in (0,1]$ there exists $\chi_t \in \Upsilon_{\varphi_t}$ such that $\upsilon(t\chi_t) < a$. Choose $\varepsilon > 0$ such that $(1+\varepsilon)a < \upsilon(\varphi)$. Put $\delta = \frac{1}{1+\varepsilon}$. Choose $n \in \mathbb{N}$ such that $\delta^n < \upsilon(\varphi)$. Put $\psi_{n+1} = \delta^n_X$ and $\psi_i = \delta^{i-1}\chi_{\delta^i}$ for $i \in \{1, \ldots, n\}$. We have $\upsilon(\psi_i) < \upsilon(\varphi)$ for each $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Put $\psi = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \psi_i$. Then $\upsilon(\psi) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \upsilon(\psi_i) < \upsilon(\varphi)$. On the other hand $\varphi \leq \psi$ and we obtain a contradiction. $\square$

Hence we obtain, in fact, that the monad $\mathbb{M}^{\bullet}_{\cup}$ is isomorphic to a submonad of $\mathbb{V}_I$ with functorial part acting on compactum X as SX. Let us remark that this monad is one of monads generated by t-norms considered by Zarichnyi [20]. Thus the following question seems to be natural: can we generalize the results of this paper to any continuous t-norms?

References

1. G. Choquet, *Theory of capacity,* Ann. Inst. Fourier **5** (1954), 13–295. DOI: 10.5802/aif.53
2. J. Eichberger and D. Kelsey, *Non-additive beliefs and strategic equilibria*, Games Econ. Behav. **30** (2000), no. 2, 183–215. DOI: 10.1006/game.1998.0724
3. S. Eilenberg and J. C. Moore, *Adjoint functors and triples*, Ill. J. Math. **9** (1965), no. 3, 381–389. DOI: 10.1215/ijm/1256068141
4. I. Gilboa, *Expected utility with purely subjective non-additive probabilities*, J. Math. Econ **16** (1987), no. 1, 65–88. DOI: 10.1016/0304-4068(87)90022-X
5. I. D. Hlushak and O. R. Nykyforchyn, *Submonads of the capacity monad*, Carpathian J. Math. **24** (2008), no. 24, 56–67.
6. V. P. Maslov and S. N. Samborskii, *Idempotent Analysis*, Adv. Soviet Math., **13**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
7. O. R. Nykyforchyn, *The Sugeno integral and functional representation of the monad of lattice-valued capacities*, Topology **48** (2009), no. 2–4, 137–148. DOI: 10.1016/j.top.2009.11.012
8. O. R. Nykyforchyn and D. Repovš, *L-Convexity and Lattice-Valued Capacities*, J. Convex Anal. **21** (2014), no. 1, 29–52.
9. М. М. Заричный, О. Р. Никифорчин, *Функтор емкостей в категории компактов*, Матем. сб. **199** (2008), no. 2, 3–26. DOI: 10.4213/sm1504; **English version:** M. M. Zarichnyi and O. R. Nykyforchyn, *Capacity functor in the category of compacta*, Sb. Math. **199** (2008), no. 2, 159–184. DOI: 10.1070/SM2008v199n02ABEH003914
10. T. Radul, *A functional representation of capacity monad*, Topology **48** (2009), no. 2–4, 100–104. DOI: 10.1016/j.top.2009.11.007
11. T. Radul, *On functional representations of Lawson monads*, Appl. Categ. Struct. **9** (2001), no. 5, 457–463. DOI: 10.1023/A:1012052928198
12. T. Radul, *On strongly Lawson and I-Lawson monads*, Bol. Mat. (N. S.) **6** (1999), no. 2, 69–75.
13. T. Radul, *A functional representation of the hyperspace monad*, Commentat. Math. Univ. Carol. **38** (1997), no. 1, 165–168.
14. T. Radul, *Hyperspace as intersection of inclusion hyperspaces and idempotent measures*, Mat. Stud., **31** (2009), no. 2, 207–210.
15. М. М. Заричный, Т. Н. Радул, *Монады в категории компактов*, УМН **50** (1995), no. 3(303), 83–108; **English version:** M. M. Zarichnyi and T. N. Radul, *Monads in the category of compacta*, Russian Math. Surveys **50** (1995), no. 3, 549–574. DOI: 10.1070/RM1995v050n03ABEH002563
16. D. Schmeidler, *Subjective probability and expected utility without additivity*, Econometrica **57** (1989), no. 3, 571–587. DOI: 10.2307/1911053
17. A. Teleiko and M. Zarichnyi, *Categorical topology of compact Hausdorff spaces*, VNTL Publishers, Lviv, 1999.
18. M. Sugeno, *Fuzzy measures and fuzzy integrals – A survey*, Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems, Edited by: Didier Dubois, Henri Prade and Ronald R. Yager 1993, pp. 251-257 DOI: 10.1016/B978-1-4832-1450-4.50027-4

19. W. Zhenyuan and G. Klir *Generalized measure theory*, Springer, New York, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-76852-6
20. M. M. Zarichnyi, *Triangular norms, nonlinear functionals and convexity theories*, Emerging Trends in Applied Mathematics and Mechanics,2018, Krakow, June 18–22, 2018, p. 170.

Стаття: надійшла до редколегії 01.03.2019
доопрацьована 11.03.2019
прийнята до друку 13.03.2019

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ МОНАДИ ЄМНОСТЕЙ НА ОСНОВІ МНОЖЕННЯ

Тарас РАДУЛ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, Львів
and Casimirus the Great University of Bydgoszcz, Poland
e-mail: tarasradul@yahoo.co.uk

Функціональне зображення монади ємностей розглядалось в [10] і [7]. Никифорчин розглянув в [8] альтернативну структуру монади для певного підфунктора функтора ємностей, базовану на операціях максимуму та звиклого множення. Ми показуємо, що ця монада має функціональне зображення, тобто простір ємностей на компакті X може бути природно вкладеним (зі збереженням структури монади) в деякий простір функціоналів на $C(X,I)$. Ми також описуємо цей простір функціоналів в термінах властивостей функціоналів.

Ключові слова: монада, ємність, нечіткий інтеграл, трикутна норма.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 134–139
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 134–139
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.134-139

УДК 517.982.22

APPROXIMATING POINTS OF A BANACH SPACE BY POINTS OF AN OPERATOR IMAGE

Dedicated to the 60th birthday of M. M. Zarichnyi
and 70th birthday of A. M. Plichko

Taras BANAKH, Yuriy GOLOVATY

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: tbanakh@yahoo.com, yuriy.golovaty@lnu.edu.ua

Answering one problem that has its origins in quantum mechanics, we prove that for any sequence $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of convex nowhere dense sets in a Banach space X and any sequence $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ of positive real numbers with $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, the set $A = \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists a \in A_n\ \ \|x-a\| < \varepsilon_n\}$ is nowhere dense in X.

Key words: Banach space, locally convex space, approximation, Schrödinger operator

The question that is considered in the article arose in a problem of quantum mechanics. In the last two decades the Hamiltonians with singular potentials supported on submanifolds of the configuration space $\mathbb{R}^d$ of a lower dimension, also known as pseudo-Hamiltonians, have attracted considerable attention both in the physical and mathematical literature. The potentials that are distributions with supports on curves, surfaces, and more complicated sets composed of them, often used in simulation of quantum systems, because the corresponding Schrödinger equations are generally easier to solve. These so-called exactly solvable models allow us to calculate explicitly numerical characteristics of systems such as eigenvalues, eigenfunctions or scattering data, the original differential equation being reduced to the analysis of an algebraic or functional problem. Very often the pseudo-Hamiltonians reveal an unquestioned effectiveness whenever the exact solvability together with non trivial qualitative description of the actual quantum dynamics is required. In spite of all advantages of the exactly solvable models they give rise to many mathematical difficulties. One of the main difficulties deals with the multiplication of distributions. To get round the problem of multiplication of distributions, we can regularize

---

2010 Mathematics Subject Classification: 46B28, 46B70, 47N50, 81Q10 pseudo-potential $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ by a sequence of smooth enough potentials V^ε such that $V^\varepsilon \to V$ as $\varepsilon \to 0$ in the sense of distributions, and then investigate the convergence of Hamiltonians $H_\varepsilon = -\Delta + V^\varepsilon$ in a suitable operator topology [1]–[3]. The main goal is to find the limit self-adjoint operator H_0 and thereby to assign for the quantum system a mathematically correct solvable model that describes the real quantum evolution with adequate accuracy.

Let M be a smooth compact manifold embedded in $\mathbb{R}^d$. Assume that $V_M \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ and $\operatorname{supp} V_M \subset M$. We choose a sequence $\{V^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ of smooth functions with compact supports shrinking to the manifold M as $\varepsilon \to 0$. Also, this sequence converges to the distribution V_M in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Let us introduce the sesquilinear form

$$a_\varepsilon(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\nabla u \nabla \bar{v} + V^\varepsilon(x) u \bar{v}\right) dx$$

in the Sobolev space $W_2^1(\mathbb{R}^d)$. We can realize the Hamiltonian as the operator A_ε associated with form a_ε, i.e., $a_\varepsilon(u,v) = (A_\varepsilon u, v)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$. Two cases arise depending on the order of the distribution V_M. For example, if V_M is a δ_M-measure with density μ, that is to say

$$V_M(\phi) = \int_M \mu\phi \, dM, \qquad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

then the forms a_ε are bounded from below uniformly with respect to ε and there exists the limit form

$$a_0(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \bar{v} \, dx + \int_M \mu u \bar{v} \, dM.$$

with the same domain $W_2^1(\mathbb{R}^d)$. From the convergence of the forms we readily deduce the convergence $A_\varepsilon \to A_0$ in the strong resolvent topology, where A_0 is an operator associated with a_0. In the case when the distribution V_M is more singular, the forms a_ε are not uniformly bounded from below and the presupposed "limit form" a_0 has generally the domain which does not coincide with the domain of a_ε. For instance, when trying to prove the operator convergence in the problem with $V_M = \partial_\nu \delta_M$, where ∂_ν is a normal derivative on M, we were confronted with

Question 1. *Is it true that for any positive real number s there exist positive real numbers C, α, β such that for any function $v \in W_2^{-s}(M)$ there exists a sequence $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset W_2^s(M)$ such that*

$$\|v - v_n\|_{W_2^{-s}(M)} \leqslant C \cdot n^{-\alpha} \qquad \text{and} \qquad \|v_n\|_{W_2^s(M)} \leqslant C \cdot n^\beta$$

for all $n \in \mathbb{N}$?

It turns out that the answer to this question is negative. This negative answer will be derived (in Corollary 2) from the following theorems.

Theorem 1. *For any sequence $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of convex nowhere dense sets in a normed space X and any sequence $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of positive real numbers with $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ the set*

$$A = \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N} \ \exists a \in A_n \quad \|x - a\| < \varepsilon_n\}$$

is convex and nowhere dense in X.

Proof. Let $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ be the open unit ball in the normed space X and observe that

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n + \varepsilon_n B),$$

which implies that the set A is convex (as the intersection of convex sets $A_n + \varepsilon_n B$).

It remains to prove that the set A is nowhere dense. In the opposite case its closure $\bar{A}$ contains an ε-ball $c + \varepsilon B$ for some small $\varepsilon > 0$. Since $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\varepsilon_n < \frac{1}{8}\varepsilon$. It follows that

$$c + \varepsilon B \subset \bar{A} \subset \overline{A_n + \varepsilon_n B} \subset A_n + 2\varepsilon_n B.$$

Then $\varepsilon B \subset (A_n - c) + 2\varepsilon_n B$. Since the convex set $A_n - c$ is nowhere dense in X, there exists a point $b \in \frac{1}{4}\varepsilon B \setminus \overline{A_n - c}$. By the Hahn-Banach Separation Theorem, there exists an $\mathbb{R}$-linear functional $x^* : X \to \mathbb{R}$ of norm $\|x^*\| = 1$ such that

$$\sup x^*(A_n - c) < x^*(b) \le \|x^*\| \cdot \|b\| < \tfrac{1}{4}\varepsilon.$$

By the definition of the norm $\|x^*\|$ of the functional x^*, there exists a point $x \in B$ such that $x^*(x) > \frac{1}{2}$. Since $\varepsilon x \in \varepsilon B \subset (A_n - c) + 2\varepsilon_n B$, there exist points $a \in A_n$ and $z \in B$ such that $\varepsilon x = a - c + 2\varepsilon_n z$. Then

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \cdot x^*(x) = x^*(\varepsilon x) = x^*(a - c + 2\varepsilon_n x) = x^*(a - c) + 2\varepsilon_n \cdot x^*(z) \le$$
$$\le \sup x^*(A_n - c) + 2\varepsilon_n \cdot \|x^*\| \cdot \|z\| \le x^*(b) + 2\varepsilon_n < \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{4}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

which is a contradiction that completes the proof of the theorem. □

It is interesting that Theorem 1 does not generalize to locally convex linear metric spaces. Moreover, the property described in Theorem 1 can be used to characterize normable spaces among metrizable locally convex spaces.

By a *locally convex space* we understand a locally convex linear topological space over the field of real numbers. A locally convex space is *normable* if its topology is generated by a norm. By Proposition 4.12 in [4], a locally convex space is normable if and only if it contains a bounded neighborhood of zero.

A subset B of a linear topological space X is *bounded* if for any neighborhood U of zero in X there exists a positive real number r such that $B \subset r{\cdot}U$.

Theorem 2. *Let X be a locally convex space and $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a base of neighborhoods of zero in X. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *X is normable;*
(2) *for any sequence $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of nowhere dense convex sets in X, the intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n + U_n)$ is nowhere dense in X;*
(3) *for any sequence $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of nowhere dense linear subspaces in X the intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(L_n + U_n)$ is not equal to X.*

Доведення. (1) ⇒ (2) Assume that the locally convex space X is normable and let $\|\cdot\|$ be a norm generating the topology of X. Since $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a base of neighborhoods of zero, for every $k \in \mathbb{N}$ there exists $n_k \in \mathbb{N}$ such that $U_{n_k} \subset \{x \in X : \|x\| < \frac{1}{k}\}$.

Let $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of nowhere dense convex sets in X. Applying Theorem 1 to the normed space $(X, \|\cdot\|)$, we conclude that the set

$$A = \{x \in X : \forall k \in \mathbb{N}\ \exists y \in A_{n_k}\ \ \|x - y\| < \tfrac{1}{k}\}$$

is nowhere dense in X. Observing that

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n+U_n)\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(A_{n_k}+U_{n_k})\subset A$$

we conclude that the set $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n+U_n)$ is nowhere dense, too.

The implication (2) $\Rightarrow$ (3) is trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1) Assume that the space X is not normable. By Proposition 4.12 [4], the space contains no bounded neighborhoods of zero. Then for every $n\in\mathbb{N}$ the neighborhood $V_n=U_n\cap(-U_n)$ of zero is unbounded. By Theorem 3.18 in [5], the set V_n is not weakly bounded, which allows us to find a linear continuous functional $f_n:X\to\mathbb{R}$ such that the image $f_n(V_n)$ is unbounded in the real line. Taking into account that V_n is convex and $V_n=-V_n$, we conclude that $f_n(V)=\mathbb{R}$. Then for the nowhere dense linear subspace $L_n=f_n^{-1}(0)$ of X we get $X=L_n+V_n\subset L_n+U_n$, which implies $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(L_n+U_n)=X$. □

In spite of Theorem 2, Theorem 1 does admit a partial generalization to locally convex linear metric spaces.

Theorem 3. *Let X be a locally convex space and d be an invariant metric generating the topology of X. For any sequence $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of nowhere dense bounded convex sets in X and any sequence $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of positive real numbers with $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ the set*

$$B=\{x\in X:\forall n\in\mathbb{N}\ \ \exists y\in B_n\quad d(x,y)<\varepsilon_n\}$$

is nowhere dense in X.

Доведення. The space X being locally convex and metrizable, has a neighborhood base $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ at zero consisting of open convex neighborhoods of zero such that $U_1=X$ and $U_{k+1}\subset U_k=-U_k$ for all $k\in\mathbb{N}$. For every $n\in\mathbb{N}$ let $k_n\in\mathbb{N}$ be the largest number such that $\{x\in X:d(x,0)<\varepsilon_n\}\subset U_{k_n}$. It follows from $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ that $\lim_{n\to\infty}k_n=\infty$.

Observe that $B\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B_n+U_{k_n})$. So, it suffices to prove that the set $C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B_n+U_{k_n})$ is nowhere dense. It is clear that the set C is convex (being the intersection of the convex sets $B_n+U_{k_n}$). Next, we show that the set C is bounded in X. Given any neighborhood $U\subset X$ of zero, find $n\in\mathbb{N}$ such that $U_{k_n}\subset U$. Such number k_n exists as $\lim_{i\to\infty}k_i=\infty$ and $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is a decreasing neighborhood base at zero. Since the set B_n is bounded, there exists a real number r such that $B_n\subset r\cdot U_{k_n}$. The convexity of U_{k_n} ensures that for any $x,y\in U_{k_n}$ we have

$$rx+y=(r+1)\left(\tfrac{r}{r+1}x+\tfrac{1}{r+1}y\right)\in(r+1)\cdot U_{k_n}$$

and hence

$$C\subset B_n+U_{k_n}\subset r\cdot U_{k_n}+U_{k_n}=(r+1)\cdot U_{k_n}\subset(r+1)\cdot U,$$

which means that the set C is bounded.

Assuming that C is not nowhere dense, we conclude that its closure $\bar{C}$ has non-empty interior and then $\bar{C}-\bar{C}:=\left\{x-y:x,y\in\bar{C}\right\}$ is a bounded convex symmetric neighborhood of zero in X. By Proposition 4.12 in [4], the locally convex space X is normable. By the implication (1) $\Rightarrow$ (2) in Theorem 2, the intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B_n+U_{n_k})\supset B$ is nowhere dense in X. □

Now we shall use Theorem 3 to give a negative answer to Question 1.

Corollary 1. *Let $T : X \to Y$ be a non-open bounded operator from a Banach space $(X, \|\cdot\|_X)$ to a locally convex linear metric space $(Y, \|\cdot - \cdot\|_Y)$. For any sequences $(r_n)_{n=1}^\infty$ and $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ of positive real numbers with $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, the set*

$$A = \big\{y \in Y : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in X\ \ \big(\|x\|_X < r_n \text{ and } \|y - Tx\|_Y < \varepsilon_n\big)\big\}$$

is convex and nowhere dense in Y.

Proof. For every $n \in \mathbb{N}$ consider the ε_n-neighborhood $U_n = \{y \in Y : \|y - 0\|_Y < \varepsilon_n\}$ of zero in Y. Since the operator T is not open, the image $T(B_X)$ of the unit ball $B_X = \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$ has empty interior in Y. We claim that $T(B_X)$ is nowhere dense in Y. If the locally convex space Y is not normable, then Y contains no bounded neighborhoods of zero, which implies that the bounded set $T(B_X)$ is nowhere dense in Y. If Y is normable, then the set $T(B_X)$ is nowhere dense in Y by Banach's Lemma 2.23 in [4].

Then for every $n \in \mathbb{N}$ the bounded convex set $A_n := T(r_n B_X)$ is nowhere dense in Y. Applying Theorem 3, we conclude that the set $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n + U_n)$ is convex and nowhere dense in Y. □

Corollary 2. *Let $T : X \to Y$ be a non-open bounded operator from a Banach space $(X, \|\cdot\|_X)$ to a locally convex linear metric space $(Y, \|\cdot - \cdot\|_Y)$. For any positive real constants C, α, β the set*

$$A_{C,\alpha,\beta} = \big\{y \in Y : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in X\ \ \big(\|y - Tx\|_Y < Cn^{-\alpha} \text{ and } \|x\|_X < Cn^{\beta}\big)\big\}$$

is convex and nowhere dense in Y. Consequently, the set

$$A = \bigcup_{C,\alpha,\beta>0} A_{C,\alpha,\beta} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,\frac{1}{k},k}$$

is meager in Y.

Proof. To show that the set $A_{C,\alpha,\beta}$ is convex and nowhere dense, apply Corollary 1 to the sequences $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defined by $r_n = Cn^\beta$ and $\varepsilon_n = Cn^{-\alpha}$ for $n \in \mathbb{N}$.

To see that $\bigcup_{C,\alpha,\beta>0} A_{C,\alpha,\beta} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,\frac{1}{k},k}$, take any positive real numbers C, α, β and choose any number $k \geq \max\{C, \frac{1}{\alpha}, \beta\}$. The choice of k guarantees that $Cn^{-\alpha} \leq \kappa n^{-\frac{1}{k}}$ and $Cn^\beta \leq kn^k$ for every $n \in \mathbb{N}$, which implies the inclusion $A_{C,\alpha,\beta} \subset A_{k,\frac{1}{k},k}$. □

References

1. Yu. D. Golovaty and R. O. Hryniv, *Norm resolvent convergence of singularly scaled Schrödinger operators and δ'-potentials*, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. **143** (2013), no. 4, 791–816. DOI: 10.1017/S0308210512000194
2. Yu. Golovaty, *1D Schrödinger Operators with Short Range Interactions: Two-Scale Regularization of Distributional Potentials*, Integral Equations Oper. Theory **75** (2013), no. 3, 341–362. DOI: 10.1007/s00020-012-2027-z
3. Yu. Golovaty, *Two-parametric δ'-interactions: approximation by Schrödinger operators with localized rank-two perturbations.* J. Phys. A, Math. Theor. **51** (2018), no. 25, Art. ID 255202, pp. 14. DOI: 10.1088/1751-8121/aac110
4. M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, S. Montesinos, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, **8**. Springer-Verlag, New York, 2001.

5. W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

Стаття: надійшла до редколегії 05.11.2018
доопрацьована 27.01.2019
прийнята до друку 18.02.2019

АПРОКСИМАЦІЯ ТОЧОК БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ ТОЧКАМИ З ОБРАЗУ ОПЕРАТОРА

Тарас БАНАХ, Юрій ГОЛОВАТИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, Львів
e-mail: tbanakh@yahoo.com, yuriy.golovaty@lnu.edu.ua

Доведено, що для будь-якої послідовності $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ опуклих ніде не щільних множин у банаховому просторі X і будь-якої послідовності $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ додатних дійсних чисел, таких що $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, множина $A = \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists a \in A_n\ \ \|x - a\| < \varepsilon_n\}$ ніде не щільна в X. Таке питання виникло при розв'язування однієї задачі квантової механіки.

Ключові слова: простір Банаха, локально опуклий простір, апроксимація, оператор Шредингера.

УРОЧИСТА АКАДЕМІЯ, ПРИСВЯЧЕНА 65-ТИ РІЧЧЮ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

3 грудня 2018 року о 15 годині в 216 аудиторії головного корпусу Львівського національного університету імені Івана Франка відбулася Урочиста Академія, присвячена 65-ти річчю механіко-математичного факультету Львівського університету.

Програма

1. **Вступне слово.**
   Ігор Гуран, доцент, в. о. декана механіко-математичного факультету.
2. **“Історія викладання та наукових досліджень математики у Львівському університеті”**
   Ярослав Притула, доцент кафедри математичного та функціонального аналізу.
3. **“Механіка у Львівському університеті”**
   Георгій Сулим, завідувач кафедри механіки.
4. **“Про Математика 21-го століття”**
   Михайло Зарічний, професор кафедри геометрії і топології,

Олег Гутік

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

назву статті, резюме (резюме має передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву), ключові слова, ім'я, прізвище автора, місце роботи, адресу українською та англійською мовами, електронну адресу;

електронний варіант статті та резюме подається на веб-сторінці

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 20 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)" (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2010**.

Номери формул ставити з правого боку і нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).

2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.

3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.

4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.
6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.
7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248
8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.
9. V. Bovdi, *Free subgroups in group rings*, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.
10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.
11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.

Випуск присвячено 60-літтю
з дня народження М. М. Зарічного