ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 88

2019

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 88

Випуск 88

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2019

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка Протокол №86/7 від 03.07.2020 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №528 від 12.05.2015 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-42-18

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Комп'ютерний набір і верстка О. ГУТІК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. ??.?
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

Ольга Мильо, Ярослав Холявка. Сумісні наближення значень еліптичних функцій Якобі в їхніх дійсних періодах 5
Олександра Десятерик. Варіанти напівгрупи Ріса матричного типу 12
Анатолій Савчук. Про гомоморфні ретракти моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ 22
Олег Гутік, Ольга Крохмальна. Моноїд монотонних ін'єктивних часткових перетворень частково впорядкованої множини $(\mathbb{N}^3, \leqslant)$ з коскінченними областями визначення та значень 32
Катерина Максимик. Про локально компактні групи з нулем 51
Назар Пирч. Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 2: спеціальні ізоморфізми 59
Тарас Банах. Про σZ_n-множини в топологічних групах і лінійних метричних просторах 70
Оксана Мулява, Мирослав Шеремета. Про Адамарові композиції цілого ряду Діріхле та ряду Діріхле, абсолютно збіжного у півплощині 83
Юрій Трухан, Мирослав Шеремета. Близькість до опуклості розв'язків одного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку . . 98
Ольга Возняк, Степан Івасишен, Ігор Мединський. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з трьома групами просторових змінних і виродженням на початковій гіперплощині 107
Микола Заболоцький, Тарас Заболоцький. Тестування еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю 128
Орест Райтер. Визначення ресурсу фібробетонних елементів з кульовими порожнинами за довготривалого розтягу 134
Наукова та педагогічна творчість З. О. Мельника (до 85-річчя від дня народження) 142
Світлій пам'яті професора М. І. Іванчова 150
Шотландська книга: минуле, сьогодення, майбутнє 167

CONTENT

Yaroslav Kholyavka, Olga Mylyo. Simultaneous approximation of value of Jacobi elliptic functions in their real periods 5
Oleksandra Desiateryk. Variants of the Rees matrix semigroup 12
Anatolii Savchuk. On homomorphic retracts of the monoid $\mathrm{I}\mathbb{N}_\infty$ 22
Oleg Gutik, Olha Krokhmalna. The monoid of monotone injective partial self-maps of the poset $(\mathbb{N}^3, \leqslant)$ with cofinite domains and images 32
Kateryna Maksymyk. On locally compact groups with zero 51
Nazar Pyrch. On Markov equivalence of the bundles of Tychonoff spaces 2: special isomorphisms 59
Taras Banakh. Detecting σZ_n-sets in topological groups and linear metric spaces 70
Oksana Mulyava, Myroslav Sheremeta. On Hadamard compositions of entire Dirichlet series and Dirichlet series absolutely converging in half-plane . . 83
Yuriy Trukhan, Myroslav Sheremeta. Closeness-to-convexity of solutions of a second order nonhomogeneous differential equation 98
Olga Voznyak, Stepan Ivasyshen, Igor Medynsky. Fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane 107
Mykola Zabolotskyy, Taras Zabolotskyy. Testing of equivalence of portfolios with the maximum Sharpe ratio and the maximum expected utility 128
Orest Raiter. Determination of the resource of fiber concrete elements with ball long term tension caves 134
Z. O. Melnyk scientific and pedagogical creation (to the 85th anniversary of his birth) 142
To the bright memory of Professor M. I. Ivanchov 150
The Scottish book: past, present, future 167

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 5–11
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 5–11
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.005-011

УДК 511.3

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUES OF JACOBI ELLIPTIC FUNCTIONS IN THEIR REAL PERIODS

Yaroslav KHOLYAVKA, Olga MYLYO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: ya_khol@franko.lviv.ua,
olga.mylyo@gmail.com

Let $\operatorname{sn}_i z$ be algebraically independent Jacobi elliptic functions, $(4K_i, 2iK_i')$ be the main periods and $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ be algebraic moduli of $\operatorname{sn}_i z$ $(i = 1, 2)$. We estimate from below the simultaneous approximation of $\operatorname{sn}_1 4K_2$, $\operatorname{sn}_2 4K_1$.

Key words: simultaneous approximation, Jacobi elliptic function.

1. Introduction

Jacobi's elliptic function $\operatorname{sn} z$ satisfies the equation $(\operatorname{sn}' z)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 z)(1-\varkappa^2 \operatorname{sn}^2 z)$ ([1]). The number $\varkappa$ is called the modul $\operatorname{sn} z$, $0 < \varkappa < 1$, the number $\varkappa' = (1-\varkappa^2)^{1/2}$ is called its additional modulus. The pair of main periods of $\operatorname{sn} z$ is $(4K, 2iK')$, where K, K' are the complete elliptic integrals of the first kind that correspond to $\varkappa$, $\varkappa'$ [1].

Denote by $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ two algebraically independent Jacobi elliptic functions determined by algebraic $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ respectively, $0 < \varkappa_1 < 1$, $0 < \varkappa_2 < 1$; $(4K_1, 2iK_1')$, $(4K_2, 2iK_2')$ are pairs of their main periods.

We denote by $d(P)$, $L(P)$ the degree and the length of the polynomial P with integers coefficients, by $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ the degree and length of the algebraic number α [2]; ξ_i, $i = 1, 2$, algebraic numbers, $n_i = d(\xi_i)$ and $L_i = L(\xi_i)$ their degrees and lengths respectively, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.

Theorem 1. *Let*

$$T = n\left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \ln n\right]. \tag{1}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 11J82

If there exists $C > 0$ such that for all $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $|k_1|$, $|k_2| < t$, we have

$$|k_1 K_1 + k_2 K_2| > \exp(Ct^3), \tag{2}$$

and at least one of the numbers $\operatorname{sn}_1 4K_2$, $\operatorname{sn}_2 4K_1$ is transcendent, then for arbitrary algebraic numbers ξ_1, ξ_2,

$$\max\{|\operatorname{sn}_1 4K_2 - \xi_1|, |\operatorname{sn}_2 4K_1 - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda T^2 \ln T\right), \tag{3}$$

where $\Lambda > 0$ is a constant that depends only on $\varkappa_1, \varkappa_2$.

The approximation estimate formulated in Theorem 1 can be used, for example, to study the properties of elliptic Jacobi curves. Similar estimates for other numbers can be found in [3]–[5].

2. Auxiliary statements

We formulate the basic lemmas, which are necessary to prove Theorem 1. Let c_i, for all i, be positive constants, dependent only on $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$.

Lemma 1. *For each integer $m \geqslant 1$, there exist polynomials with the integer coefficients $P_{1,m}$ and $Q_{1,m}$ such that*

$$\operatorname{sn} mz = \frac{P_{1,m}(\operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z)}{Q_{1,m}(\varkappa^2, \operatorname{sn} z)},$$

where $L(P_{1,m}), L(Q_{1,m}) \leqslant \exp(c_1 m^2)$, $\deg P_{1,m}$, $\deg Q_{1,m} \leqslant m^2$, $i = 1, 2$.

Lemma 2. *Let $m \in \mathbb{N}$. Then there are polynomials $P_{s,l} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ such that*

$$(\operatorname{sn}^l z)^{(s)} = \frac{d^s}{d\, w^s}((\operatorname{sn} z)^l) = P_{s,l}(\varkappa^2, \operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z),$$

$\deg_{x_1} P_{s,l} \leq s + l$, $\deg_{x_2} P_{s,l} \leq s + 2l$, $\deg_{x_3} P_{s,l} \leq 1$, $L(P_{s,l}) \leq \exp(c_2 s \log(s + l))$.

Proofs of Lemma 1 and Lemma 2 are similar to the proof of properties of the function $\wp(z)$ [8].

Lemma 3 ([1])**.** *If z, w, $z + w$ are different from the poles $\operatorname{sn} z$, then*

$$\operatorname{sn}(z + w) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn}' w + \operatorname{sn} w \operatorname{sn}' z}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} z^2 \operatorname{sn} w^2}.$$

Lemma 4 ([6])**.** *Let α, β be arbitrary algebraic numbers, $\gamma^2 = (1 - \alpha^2)(1 - \alpha^2\beta^2)$. Then*

$$L(\gamma) < \exp\left(6 \deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \left(\frac{\ln L(\alpha)}{d(\alpha)} + \frac{\ln L(\beta)}{d(\beta)} + 1\right)\right), \quad d(\gamma) \geq \frac{\deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta)}{\min(2d(\alpha), 4d(\beta))}.$$

Lemma 5 ([4])**.** *Let $B, P \in \mathbb{N}$, $Q_{p,b} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $0 \leq b < B$, $0 \leq p < P$, $L(Q_{p,b}) \leq L$, $\deg_{x_i} Q_{p,b} \leq \mathcal{N}_i$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be algebraic numbers, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. If $P > mB$, then the system of linear equations*

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p Q_{p,b}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad 0 \leq b < B,$$

has integer rational solutions $A_0, \ldots, A_{P-1}$ such that

$$0 < \max |A_i| < 1 + (LP)^{\frac{mB}{P-mB}} \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + \mathcal{N}_i) \left(L(\alpha_i)(1 + d(\alpha_i))\right)^{\frac{\mathcal{N}_i}{d(\alpha_i)}}\right)^{\frac{mB}{P-mB}}.$$

Lemma 6 ([2]). *Let $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ be algebraic numbers, $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg_{x_i} P \le \mathcal{N}_i$, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. If $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \not\equiv 0$, then*

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \ge L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-\mathcal{N}_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Denote by $|f(z)|_D = \sup_{|z| \le D} |f(z)|$.

Lemma 7 ([5]). *The functions $\sigma(z)$ and $\sigma(z-\omega)\operatorname{sn} z$ are integer and for $M > 1$ estimates*

$$|\sigma(z-\omega)\operatorname{sn} z|_M, |\sigma(z)|_M \le C_1^{M^2}$$

hold, ω is the corresponding half-life of the Weierstrass function and $\sigma(z)$ be a σ-function of Weierstrass which corresponds to the function $\wp(z)$ associated with $\operatorname{sn}(z)$.

If ε is the distance from the nearest pole of $\operatorname{sn} z$ to z_0 and $|z_0| \le M$, then $|\sigma(z_0)| \ge \varepsilon C_2^{-M^2}$, where C_1, C_2 are constants dependent only on $\varkappa$.

Lemma 8 (the Hermite formula, [2]). *Let $f(\zeta)$ be a regular function in the circle Γ of radius R, $a_1, \dots, a_m \in \Gamma$, $a_i \ne a_j$ if $i \ne j$, $s \in \mathbb{N}_0$. Then for an arbitrary inner point $z \in \Gamma$, other than $a_1, \dots, a_m$, the equality*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z-a_k}{\zeta-a_k}\right)^{s+1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} -$$
$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\tau=1}^{s} \frac{f^{(\tau)}(a_i)}{\tau!} \oint_{|\zeta-a_i|=\rho_i} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z-a_k}{\zeta-a_k}\right)^{s+1} \frac{(\zeta-a_i)^\tau}{\zeta-z} d\zeta$$

holds, where ρ_i is enough small, $\{\zeta : |\zeta - a_i| \le \rho_i\} \subset \Gamma$ and not contain points z i a_k, $k \ne i$.

Lemma 9 ([1], [7]). *Let $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$, be a polynomial of degree at most $\mathcal{D}_1$ by x_1 and $\mathcal{D}_2$ by x_2, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \ge 1$, $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ be algebraically Jacobi independent elliptic functions. Then the number of zeros $P(\operatorname{sn}_1 z, \operatorname{sn}_2 z)$ given with their multiplicities at $|z| < K$ does not exceed $C_3 K^2(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$, where C_3 is some constant that is independent of the polynomial.*

3. Proof of Theorem 1

We will prove Theorem 1 using the second Gelfond method described in [2], [3]. Suppose that (1) does not hold, that is, for sufficiently large $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$\max\{|\operatorname{sn}_1 4K_2 - \xi_1|, |\operatorname{sn}_2 4K_1 - \xi_2|\} < \exp\left(-\lambda^7 T^2 \ln T\right). \tag{4}$$

Let

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T,\ N = \lambda \sqrt{\lambda T}, \tag{5}$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L} \sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2} \operatorname{sn}_1^{l_1} z \ \operatorname{sn}_2^{l_2} z,\ C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\ C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

where ζ_τ are the generic elements of $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.

Denote by $\varphi_{i,1}(z) = \mathrm{sn}_i(z + \frac{K_i}{2})$, $\varphi_{i,2}(w) = \mathrm{sn}_i(w + \frac{3K_i}{2})$, $i = 1, 2$. Then (Lemma 3)

$$\mathrm{sn}_i(z + w) = \frac{\varphi_{i,1}(z)\varphi'_{i,2}(w) + \varphi_{i,2}(w)\varphi'_{i,1}(z)}{1 - \varkappa_i^2\varphi_{i,1}^2(z)\varphi_{i,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{i,1}(z, w)}{\Lambda_{i,2}(z, w)}.$$

Let

$$G_{i,s,k,l}(\varkappa_i, z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{i,1}^k(z, w)\Lambda_{i,2}^l(z, w))|_{w=0}.$$

The so defined polynomials satisfy $\deg G_{i,s,k,l} \le 4(k + l)$, $\ln L(G_{i,s,k,l}) \le s\ln(s(k + l) + c_3(s + k + l))$.

With (3) just like in [7], [8], we get

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_{1,2}^{-L}(z, w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z, w))(F(z + w)\Lambda_{1,2}^{L}(z, w)\Lambda_{2,2}^{L}(z, w)))|_{w=0} =$$
$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z, w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z, w))|_{w=0}F_{s,t}(z),$$

where

$$F_{s,t}(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L}C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(\varkappa_1, z)G_{2,i,l_2,L-l_2}(\varkappa_2, z). \tag{7}$$

Applying Lemma 4 for $\alpha = \xi_1$, $\beta = \varkappa_1$, $\gamma = \xi_3$, we get the estimate $d(\xi_3)$ and $L(\xi_3)$ of the number ξ_3, which approximates $\mathrm{sn}'_1 4K_2$, and in the case of $\alpha = \xi_2$, $\beta = \varkappa_2$, $\gamma = \xi_4$ we get the estimate $d(\xi_4)$ and $L(\xi_4)$ of the number ξ_4, which approximates $\mathrm{sn}'_2 4K_1$. Denote by $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)$ and $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)$ the expressions derived from $F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)$ and $F_{s,t}(4n_1TK_1 + 4n_2K_2)$ by replacing $\mathrm{sn}_1 4K_2$, $\mathrm{sn}_2 4K_1$, $\mathrm{sn}'_1 K_2$, $\mathrm{sn}'_2 K_1$ by $\xi_1, \ldots, \xi_4$ respectively and apply Lemma 5 to $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)$. We will consider $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)$ for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le t \le s \le S$ as N^2S linear forms of nL^2 variables $C_{l_1,l_2,\tau}$. Having used Lemmas 1 – 6 and (3)–(7), we choose not all equal to zero $C_{l_1,l_2,\tau}$ such that for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le t \le s \le S$,

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4) = 0, \tag{8}$$

$$|C_{l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_4\lambda^6 \ln\lambda\, T^2 \ln T). \tag{9}$$

With (4), (3), (9) and Lemmas 1 – 5 we get for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le S$,

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)| < \exp(-\frac{1}{4}\lambda^7T^2 \ln T). \tag{10}$$

From (8), (10) at $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le S$ we get

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\frac{1}{4}\lambda^7T^2 \ln T). \tag{11}$$

We show that (11) also holds for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$.

Let $\wp_i(u)$ and $\sigma_i(u)$ correspond to the functions $\mathrm{sn}_i z$, $i = 1, 2$, $u = z(e_{1,i} - e_{3,i})^{-1/2}$, [1],

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L(u + \omega_{3,1})\sigma_2^L(u + \omega_{3,2}),$$

where $\omega_{j,i}$ is the half-period of $\wp_i(u)$. Choose the least possible integer r such that

$$r > 32(N + 1)(|K_1| + |K_2| + |K'_1| + |K'_2|). \tag{12}$$

Denote by $R = 48r$. Then with Lemmas 1 – 5, Lemma 8 and (1), (3), (3), (9), (12),

$$|G(z)|_R < \exp(-\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \tag{13}$$

From (13) we get for $0 \leq s \leq \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_r < \exp(-\tfrac{1}{2}\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T). \tag{14}$$

For a sufficiently small ε in the ε-neighborhood of the points $4n_1K_1$ the function $\sigma_2(z - \omega_2)$ and in the ε-neighborhood of the points $4n_2K_2$ the function $\sigma_1(z - \omega_1)$ has no zeros, so from (2) and Lemma 7 for $n_1, n_2 \leq 32N$ we obtain

$$|\sigma_i(z - \omega_i)|_{z \in V(\varepsilon, 4n_1K_1 + 4n_2K_2)} > \exp(-c_5\lambda^5 \ln \lambda T^2). \tag{15}$$

From (13)–(15) for $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$ we get

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\tfrac{\lambda^6}{3} \ln \lambda T^2 \ln T). \tag{16}$$

Given (10), for $1 \leq n_1, n_2 \leq N$ and $0 \leq s \leq \lambda S$, from (16) we obtain

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)| < \exp(-\tfrac{\lambda^6}{4} \ln \lambda T^2 \ln T). \tag{17}$$

Considering $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)$ as a value of the corresponding polynomial in algebraic points, from lemma 6, (1), (3) we get for $0 \leq t \leq s \leq \lambda S$, $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4) \neq 0$, we obtain the estimate

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)| > \exp(-\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \tag{18}$$

From (3), (18) we get for $0 \leq s \leq \lambda S$, $1 \leq n_1, n_2 \leq N$

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4)| > \exp(-2\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T). \tag{19}$$

Since (17) and (19) are conflicting, we get for $1 \leq n_1, n_2 \leq N$, $0 \leq s \leq \lambda S$,

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \ldots, \xi_4) = 0. \tag{20}$$

From (20) it follows that the polynomial $F(z)$ has at least $c_6\lambda^7 \ln \lambda T^2$ zeros (with multiplicities). From Lemma 9 we get that the number of zeros may not be more than $c_7\lambda^6 \ln \lambda T^2$, so for sufficiently large λ assumption (4) leads to a contradiction, which proves the theorem.

References

1. D. F. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Springer, Berlin, 1989.
2. N. I. Fel'dman, *Hilbert's seventh problem*, Moskov State Univ., Moskov, 1982 (in Russian).
3. N. I. Fel'dman and Yu. V. Nesterenko, *Transcendental numbers*, Springer, Berlin, 1998.
4. E. Reyssat, *Approximation algébrique de nombres lies aux fonctions elliptiques et exponentielle*, Bull. Soc. Math. Fr. **108** (1980), 47–79. DOI: 10.24033/bsmf.1908
5. D. Masser, *Elliptic functions and transcendence*, Springer, Berlin, 1975.
6. Ya. M. Kholyavka, *On the simultaneous approximation of invariants of the elliptic function by algebraic numbers*, Diophantine Analysis, Mosk. Univ. Press, Moscow, 1986, Part 2, 114–121 (in Russian)
7. Ю. В. Нестеренко, *О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции*, Изв. РАН. Сер. матем. 59 (1995), no. 4, 155–178; **English version:** Yu. V. Nesterenko, *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function,* Izv. Math. **59** (1995), no. 4, 815–838. DOI: 10.1070/IM1995v059n04ABEH000035

8. G. V. Chudnovsky, *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem*, Invent. Math. **61** (1980), 267–290. DOI: 10.1007/BF01390068

Стаття: надійшла до редколегії 11.04.2019
прийнята до друку 03.02.2020

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ В ЇХНІХ ДІЙСНИХ ПЕРІОДАХ

Ярослав ХОЛЯВКА, Ольга МИЛЬО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: ya_khol@franko.lviv.ua,
olga.mylyo@gmail.com

Нехай $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі. Позначимо через $\varkappa_1$, $0<\varkappa_1<1$, еліптичний модуль $\operatorname{sn}_1 z$, а через $\varkappa_2$, $0<\varkappa_2<1$, – еліптичний модуль $\operatorname{sn}_2 z$. Будемо припускати, що $\varkappa_1$ та $\varkappa_2$ алгебричні числа. Також позначимо через $(4K_1,\, 2iK_1')$ пару основних періодів $\operatorname{sn}_1 z$, а через через $(4K_2,\, 2iK_2')$ – пару основних періодів $\operatorname{sn}_2 z$, де K_1, K_2, K_1' та K_2' є дійсними числами.
Еліптична функція Якобі $\operatorname{sn}_1 z$ задовольняє рівняння

$$(\operatorname{sn}_1' z)^2 = (1-\operatorname{sn}_1^2 z)(1-\varkappa_1^2 \operatorname{sn}_1^2 z),$$

а еліптична функція Якобі $\operatorname{sn}_2 z$ задовольняє рівняння

$$(\operatorname{sn}_2' z)^2 = (1-\operatorname{sn}_2^2 z)(1-\varkappa_2^2 \operatorname{sn}_2^2 z).$$

Числа $\varkappa_1' = (1-\varkappa_1^2)^{1/2}$ та $\varkappa_2' = (1-\varkappa_2^2)^{1/2}$ називають додатковими еліптичними модулями еліптичних функцій Якобі $\operatorname{sn}_1 z$ і $\operatorname{sn}_2 z$. Числа K_1, K_2, K_1' та K_2' є повні еліптичні інтеграли першого роду, що відповідають числам $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1'$ та $\varkappa_2'$. Покладемо $I(v) = \int\limits_0^{\pi/2} (1-v^2\sin^2 t)^{-1/2} dt$. Тоді

$$K_1 = I(\varkappa_1),\ K_2 = I(\varkappa_2),\ K_1' = I(\varkappa_1') \text{ та } K_2' = I(\varkappa_2').$$

Число a називають *алгебричним числом*, якщо існує такий многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами, що $P(a)=0$. Многочлен $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ назвемо *основним многочленом* для числа a, якщо він задовольняє такі умови: $P(a)=0$; старший коефіцієнт $P(x)$ додатний; коефіцієнти $P(x)$ взаємно прості цілі числа; $P(x)$ незвідний над $\mathbb{Q}$. Довжиною $P(x)$ назвемо суму модулів його коефіцієнтів. *Степенем числа a* називають степінь його основного многочлена $P(x)$ і позначають $\deg a$, *довжиною числа a* називають довжину його основного многочлена $P(x)$ і позначають $L(a)$.
Нехай ξ_1, ξ_2 — довільні алгебричні числа, $n_1=\deg(\xi_1)$, $n_2=\deg(\xi_2)$,

$L_1 = L(\xi_1)$, $L_2 = L(\xi_2)$ та $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.
У статті отримано оцінку сумісного наближення чисел $\operatorname{sn}_1 4K_2$ та $\operatorname{sn}_2 4K_1$.

Теорема 1. Н*ехай*

$$T = n\left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \ln n\right.$$

Якщо існує така постійна $C > 0$, *що для всіх* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $|k_1,\, |k_2| < t$, *справджується*

$$|k_1K_1 + k_2K_2| > \exp(Ct^3),$$

та хоча б одне з чисел $\operatorname{sn}_1 4K_2$, $\operatorname{sn}_2 4K_1$ *є трансцендентним, то для довільних алгебричних чисел* ξ_1, ξ_2, *справджується оцінка*

$$\max\{|\operatorname{sn}_1 4K_2 - \xi_1|, |\operatorname{sn}_2 4K_1 - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda\, T^2 \ln T\right),$$

де $\Lambda > 0$ *є константа, залежна тільки від* $\varkappa_1, \varkappa_2$.

Зауважимо, що числа, кратні K_2, не є полюсами $\operatorname{sn}_1 z$, а числа, кратні K_1, не є полюсами $\operatorname{sn}_2 z$.
Оцінки наближень, подібні до отриманої в теоремі 1, можна використовувати для вивчення арифметичних властивостей еліптичних кривих Якобі.
Доведення теореми 1 проводиться за допомогою другого методу Гельфонда. Припускаємо, що для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$, виконується

$$\max\{|\operatorname{sn}_1 4K_2 - \xi_1|, |\operatorname{sn}_2 4K_1 - \xi_2|\} < \exp\left(-\lambda^7\, T^2 \ln T\right)$$

і покажемо, що це припущення приводить до протиріччя.
При доведенні вибираємо такі значення параметрів

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T,\ N = \lambda\sqrt{\lambda T},$$

та допоміжну функцію

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2} \operatorname{sn}_1^{l_1} z\ \operatorname{sn}_2^{l_2} z,\ C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\ C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z},$$

де ζ_τ є твірними елементами $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Якобі.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 12–21
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 12–21
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.012-021

УДК 512.53

ВАРІАНТИ НАПІВГРУПИ РІСА МАТРИЧНОГО ТИПУ

Олександра ДЕСЯТЕРИК

Міжнародний Науково Навчальний Центр Інформаційних Технологій
та Систем НАН і МОН України,
просп. Глушкова, 40, 03680, м. Київ
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

Встановлено необхідні та достатні умови регулярності варіанта та ізоморфності двох варіантів для матричної напівгрупи Ріса з сендвіч матрицею над групою з нулем.

Ключові слова: варіант, сендвіч напівгрупа, напівгрупа Ріса, ізоморфізм.

1. Вступ

Нехай $(S,\cdot)$ — напівгрупа. Для фіксованого елемента $a \in S$ визначимо на S нову операцію $*$ за допомогою рівності $x*y = x\cdot a\cdot y$. Операцію $*$ будемо називати *сендвіч-множенням*. Множина S з сендвіч-операцією $*$ знову є напівгрупою. Позначимо цю напівгрупу $(S, *_a)$ і називатимемо її *сендвіч-напівгрупою* чи *варіантом* напівгрупи $(S,\cdot)$.

Одним із перших задачу вивчення варіантів напівгруп поставив Ляпін у монографії [1]. Хоча він формулював цю задачу для напівгрупи перетворень, надалі дослідження варіантів поширилося на різні класи напівгруп (див., наприклад, [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] та главу 13 із [9]). Долінка та Іст вивчали варіанти скінченних напівгруп перетворень у [10] і варіанти напівгруп прямокутних матриць у [11]. У багатьох працях (див., наприклад, [12] та [13]) вивчали інтерасоціативності моноїдів, які тісно пов'язані з варіантами. Ізоморфізми інтерасоціативностей та варіантів фіксованих напівгруп вивчалися в [12, 13, 14].

Мета нашої праці дослідити варіанти напівгрупи Ріса матричного типу з сендвіч-матрицею над групою з нулем.

Нехай $G^0 = G \cup \{0\}$ — група G із приєднаним нулем 0, а I та J — довільні непорожні множини. $I \times J$*-матрицею Ріса над* групою G^0 називається $I\times J$-матриця

2010 Mathematics Subject Classification: 20M30, 20M17, 20M99

над G^0, яка містить не більше одного ненульового елемента. Матрицю Ріса, в якій ненульовий елемент g стоїть на місці kl, позначатимемо $A_{kl}(g)$ або $[g]_{kl}$. Розглянемо також довільну (але фіксовану) $J \times I$-матрицю $P = (p_{ji})_{i\in I,\, j\in J}$, де $p_{ji} \in G^0$. У множині всіх $I \times J$-матриць Ріса над G^0 визначимо множення $\circ$ правилом $A \circ B = A \cdot P \cdot B$. Тоді добуток $A_{kl}(g) \circ A_{uv}(h)$ є нульовою матрицею, якщо $p_{lu} = 0$, і матрицею Ріса $A_{kv}(g \cdot p_{lu} \cdot h)$, якщо $p_{lu} \neq 0$.

Операція $\circ$ є асоціативною, тому множина $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ всіх $I \times J$-матриць Ріса над групою G^0 утворює напівгрупу стосовно цієї операції. Вона називається *напівгрупою Ріса матричного типу* із сендвіч-матрицею P над групою з нулем G^0. Якщо $|I| = n$ та $|J| = m$, то замість $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ пишуть $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$.

2. Допоміжні результати

Напівгрупа S називається *регулярною*, якщо для довільного $a \in S$ існує такий $x \in S$, що $axa = a$. Будемо називати варіант $(S, *_a)$ *регулярним*, якщо $(S, *_a)$ є регулярною напівгрупою.

Лема 1 ([15], лема 3.1). *Напівгрупа Ріса $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ матричного типу з сендвіч-матрицею P над групою з нулем G^0 регулярна тоді і тільки тоді, коли кожний рядок і кожен стовпець матриці P містять ненульовий елемент.*

Лема 2 ([15], лема 3.6). *Дві напівгрупи Ріса $S = \mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ та $S' = \mathcal{M}^0(G; I, J; P')$ над однією і тією ж групою з нулем G^0 ізоморфні, якщо існують такі відображення $\iota \to u_\iota$ множини I у G та $\lambda \to v_\lambda$ множини J у G, що $p'_{\lambda\iota} = v_\lambda p_{\lambda\iota} u_\iota$ для всіх $\iota \in I$ та $\lambda \in J$, де $P = (p_{\lambda\iota})$ та $P' = (p'_{\lambda\iota})$.*

Зауважимо, що ізоморфізмом буде відображення $[g]_{kl} \mapsto [u_k g v_l]_{kl}$ і що $P' = VPU$, де V — діагональна $J \times J$-матриця, U — діагональна $I \times I$-матриця.

Наслідок 1 ([15], стор. 132). *Для довільних $i \in I$ та $j \in J$ напівгрупа Ріса $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ ізоморфна напівгрупі Ріса $\mathcal{M}^0(G; I, J; P')$ з такою сендвіч-матрицею P', в якій в j-му рядку та i-му стовпці трапляються лише нуль та одиниця групи G.*

$I \times J$-матриця U над групою G^0 називається *інвертовною*, якщо кожен рядок і кожен стовпець матриці U містить точно один ненульовий елемент напівгрупи G^0. Якщо $I \times J$-матриця інвертовна, то, очевидно, що $|I| = |J|$. Якщо ω — гомоморфізм групи з нулем G^0 у групу з нулем G_1^0 та $P = (p_{kl})$ — довільна $J \times I$-матриця над G^0, то через $\omega(P)$ позначимо $J \times I$-матрицю $(\omega(p_{kl}))$.

Лема 3 ([15], наслідок 3.12). *Дві регулярні напівгрупи Ріса матричного типу $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ та $\mathcal{M}^0(G'; I', J'; P')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує ізоморфізм ω, який відображає G на G', та такі інвертовні $I \times I'$-матриця U та $J \times J'$-матриця V, що $\omega(P) = VP'U$.*

Далі вважаємо, що множини I та J є скінченними потужностей n та m, відповідно.

Нам знадобиться таке твердження для $(0, 1)$-матриць, тобто матриць, елементами яких є тільки 0 та 1. Через $\mathcal{I}_{m\times n}$ позначимо матрицю порядку $m \times n$, всі елементи якої є одиницями.

Твердження 1. *Нехай P — $(0,1)$-матриця порядку $m \times n$, E_{ij} — матрична одиниця із $M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Перестановками рядків і стовпців матрицю $P \cdot E_{ij} \cdot P$ можна звести до вигляду*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{r\times l} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де r — кількість одиниць у i-му стовпці матриці P, а l — кількість одиниць у j-му рядку матриці P.

Доведення. Нехай $P = (p_{rs})$ і $F = P \cdot E_{ij} \cdot P$. Тоді

$$F = \begin{pmatrix} p_{1i}1_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{1i}1_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{1i}1_{ij}p_{jn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{ti}1_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{ti}1_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{ti}1_{ij}p_{jn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{mi}1_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{mi}1_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{mi}1_{ij}p_{jn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $p_{ti}1_{ij}p_{jk} = 1$, то $p_{ti} = 1$ та $p_{jk} = 1$. Тоді якщо $p_{ti} = 1$, то у t-му рядку матриці F одиниці будуть стояти тільки на тих місцях tx, для яких $p_{jx} = 1$ (тобто там, де стоять одиниці у j-му рядку матриці P). Аналогічно з рівності $p_{jk} = 1$ випливає, що одиниці у k-му стовпці матриці F стоять на тих місцях yk матриці F, для яких, де $p_{yi} = 1$ (тобто там, де стоять одиниці у i-му стовпці матриці P).

Якщо $p_{ti} = 0$, то t-й рядок матриці F є нульовим. Аналогічно, якщо $p_{jk} = 0$, то k-й стовпець матриці F нульовий.

Отож, місця одиниць у матриці F визначаються місцями одиниць у i-тому стовпці матриці та у j-му рядку матриці P, а загальна кількість одиниць у матриці F дорівнює $r \cdot l$. А якщо на якомусь місці в i-му стовпці матриці та у j-му рядку матриці P стоїть нуль, то нульовим буде весь відповідний рядок або стовпець матриці F. Тому перестановкою рядків і стовпців матрицю F зводимо до вигляду

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{r\times l} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут $\mathcal{I}_{r\times l}$ — матриця, всі елементи якої є одиницями, r — кількість одиниць у i-му стовпці матриці P, l — кількість одиниць у j-му рядку матриці P. □

3. Варіанти напівгрупи Ріса над групою з нулем

Нехай A_{ij} — фіксований елемент напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$. Очевидно, що варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ теж є напівгрупою Ріса, але з сендвіч-матрицею $P \cdot A_{ij} \cdot P$. З'ясуємо, який вигляд може мати ця сендвіч-матриця.

Твердження 2. *Якщо у матриці $Q = P \cdot A_{ij} \cdot P$ на місці lk стоїть нуль, то нульовим буде або весь k-й стовпець, або весь l-й рядок, або одночасно k-й стовпець та l-й рядок.*

Доведення. Нехай $P = (p_{ij})$. Безпосередньо перевіряється, що

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ p_{k1} & \cdots & p_{ki} & \cdots & p_{kn} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mi} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \cdot A_{ij} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & \cdots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ p_{j1} & \cdots & p_{jk} & \cdots & p_{jn} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mk} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{1i}a_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{1i}a_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{1i}a_{ij}p_{jn} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ p_{li}a_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{li}a_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{li}a_{ij}p_{jn} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ p_{mi}a_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{mi}a_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{mi}a_{ij}p_{jn} \end{pmatrix}$$

Нехай $p_{li}a_{ij}p_{jk} = 0$. Це можливо, якщо або $p_{jk} = 0$, або $p_{li} = 0$, або одночасно $p_{jk} = 0$ та $p_{li} = 0$. Якщо $p_{jk} = 0$, то в матриці Q нульовим буде весь k-й стовпець. Якщо $p_{li} = 0$, то в матриці Q нульовим буде весь l-й рядок. Якщо ж одночасно $p_{jk} = 0$ та $p_{li} = 0$, то в матриці Q нульовими будуть k-й стовпець та l-й рядок. □

Твердження 3. *Якщо j-й рядок або i-й стовпець матриці P — нульові, то варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{[a]_{ij}})$ є напівгрупою з нульовим множенням.*

Доведення. Справді, для довільних елементів $[x]_{lk}$ і $[y]_{ht}$

$$[x]_{lk} *_{[a]_{ij}} [y]_{ht} = [x \cdot p_{ki} \cdot a \cdot p_{jh} \cdot y]_{kh} = 0,$$

оскільки принаймні один із множників p_{ki} та p_{jh} є нулем. □

Теорема 1. *Варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли j-й рядок та i-й стовпець матриці P не містять нулів.*

Доведення. З леми 1 випливає, що варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли матриця $PA_{ij}P$ не містить нульових рядків чи стовпців.

Із твердження 2 випливає таке: коли в матриці $PA_{ij}P$ є нульовий елемент, то ця матриця містить нульовий рядок або нульовий стовпець. А з доведення цього твердження випливає, що нульовий рядок або нульовий стовпець будуть тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нуль у j-му рядку або i-му стовпці.

Тому для регулярності варіанта $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ необхідно і достатньо, щоб j-й рядок та i-й стовпець матриці P не містили нулів. □

Лема 4. *Нехай $\varphi : S \to S'$, $\varphi([g]_{ij}) = [\widetilde{u}_{ii} g \widetilde{v}_{jj}]_{ij}$ — ізоморфізм напівгруп Ріса $(S, \cdot) = M^0(G; n, m; P)$ і $(S', \circ) = M^0(G; n, m; P')$. Тоді для довільного елемента $[g]_{ij} \in S$ відображення φ є також ізоморфізмом варіанта $(M^0(G; n, m; P), *_{[a]_{ij}})$ на варіант $(M^0(G; n, m; P'), *_{\varphi([a]_{ij})})$.*

Доведення леми 4 випливає з рівностей

$$\begin{aligned}\varphi([x]_{st} *_{[a]_{ij}} [y]_{lr}) &= \varphi([x]_{st} \circ [a]_{ij} \circ [y]_{lr}) = \\ &= \varphi([x]_{st}) \cdot \varphi([a]_{ij}) \cdot \varphi([y]_{lr}) = \\ &= \varphi([x]_{st}) *_{[\widetilde{a}]_{ij}} \varphi([y]_{lr}).\end{aligned}$$

Теорема 2. *Усі регулярні варіанти напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;P)$ попарно ізоморфні*

Доведення. Нехай $S_1 = (M^0(G;n,m;P), *_{[a]_{ij}})$ і $S_2 = (M^0(G;n,m;P), *_{[b]_{kl}})$ — два довільні регулярні варіанти напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;P)$. За лемою 4 існують такі елементи $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in G$ та матриці P', j-й рядок і i-й стовпець якої містять лише нулі й одиниці групи G, і P'' з аналогічними l-м рядком і k-м стовпцем, що

$$\begin{aligned}(M^0(G;n,m;P), *_{[a]_{ij}}) &\simeq (M^0(G;n,m;P'), *_{[\widetilde{a}]_{ij}}), \\ (M^0(G;n,m;P), *_{[b]_{kl}}) &\simeq (M^0(G;n,m;P''), *_{[\widetilde{b}]_{kl}}).\end{aligned}$$

Із регулярності варіантів і теореми 1 випливає, що ці рядки і стовпці насправді містять лише одиниці групи G. Звідси випливає, що сендвіч-матрицею варіанта $(M^0(G;n,m;P'), *_{[\widetilde{a}]_{ij}})$ як напівгрупи Ріса буде матриця $Q' = P'A_{ij}(\widetilde{a})P'$, всі елементи якої дорівнюють $\widetilde{a}$. Аналогічно сендвіч-матрицею варіанта $(M^0(G;n,m;P''), *_{[\widetilde{b}]_{kl}})$ як напівгрупи Ріса буде матриця $Q'' = P''A_{kl}(\widetilde{b})P''$, всі елементи якої дорівнюють $\widetilde{b}$.

Для діагональних матриць $V = \operatorname{diag}(\widetilde{a})$ та $U = \operatorname{diag}(\widetilde{b}^{-1})$ виконується рівність $Q' = VQ''U$. Тому за лемою 3 варіанти

$$(\mathcal{M}^0(G;n,m;P'), *_{[\widetilde{a}]_{ij}}) \qquad \text{та} \qquad (\mathcal{M}^0(G;n,m;P'), *_{[\widetilde{b}]_{kl}})$$

ізоморфні. Звідси випливає, що ізоморфними також є варіанти S_1 та S_2. □

4. Ізоморфність напівгруп Ріса над тривіальною групою з нулем

Далі розглядаються напівгрупи Ріса над тривіальною групою з нулем $G^0 = \{0,1\}$. Їхніми елементами є матричні одиниці та нульова матриця, а сендвіч-матриці таких напівгруп є $(0,1)$-матрицями.

Твердження 4. *Якщо $(0,1)$-матриця P' отримана з матриці P перестановкою двох рядків, то напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;P)$ та $\mathcal{M}^0(G;n,m;P')$ ізоморфні.*

Доведення. Нехай матриця P' отримана з матриці P перестановкою k-го та l-го рядків:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{l1} & p_{l2} & \dots & p_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{l1} & p_{l2} & \dots & p_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & \dots & p'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{k1} & p'_{k2} & \dots & p'_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{l1} & p'_{l2} & \dots & p'_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{m1} & p'_{m2} & \dots & p'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо таблиці множення напівгруп $\mathcal{M}^0(G^0; n, m; P)$ і $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$:

P	$\cdots$	$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[1]_{il}$	$\cdots$
$[1]_{11}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{il}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

P'	$\cdots$	$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[1]_{il}$	$\cdots$
$[1]_{11}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{il}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Бачимо, якщо у таблиці множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ поміняти місцями рядки, що відповідають елементам $[1]_{jk}$ і $[1]_{jl}$, то отримаємо таблицю множення для $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$.

Розглянемо відображення

$$\varphi : \mathcal{M}^0(G; n, m; P) \to \mathcal{M}^0(G; n, m; P'),$$

визначене так: для довільних $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ та $h \neq l, k$ приймемо

$$\varphi([1]_{jk}) = [1]_{jl}, \quad \varphi([1]_{jl}) = [1]_{jk}, \quad \varphi([1]_{jh}) = [1]_{jh}.$$

Доведемо, що φ є ізоморфізмом. Для цього перевіримо, що виконується рівність $\varphi(X \cdot P \cdot Y) = \varphi(X) \cdot P' \cdot \varphi(Y)$ для довільних рісівських матриць $X, Y \in \mathcal{M}^0(G; n, m; P)$. Рівність очевидна, якщо $X = 0$ або $Y = 0$. Тому можна вважати, що $X = [1]_{ij}$, $Y = [1]_{rq}$. Далі розглянемо можливі випадки:

1) якщо $j = q = k$, то

$$\varphi([1]_{ik} \cdot P \cdot [1]_{rk}) = \varphi([p_{kr}]_{ik}) = [p'_{lr}]_{il} = [1]_{il} \cdot P' \cdot [1]_{rl} = \varphi([1]_{ik}) \cdot P' \cdot \varphi([1]_{rk});$$

2) якщо $j = k$, $q = l$, то

$$\varphi([1]_{ik} \cdot P \cdot [1]_{rl}) = \varphi([p_{kr}]_{il}) = [p'_{lr}]_{ik} = [1]_{il} \cdot P' \cdot [1]_{rk} = \varphi([1]_{ik}) \cdot P' \cdot \varphi([1]_{rl});$$

3) якщо $j = k$, $q \notin \{k, l\}$, то

$$\varphi([1]_{ik} \cdot P \cdot [1]_{rq}) = \varphi([p_{kr}]_{iq}) = [p'_{lr}]_{iq} = [1]_{il} \cdot P' \cdot [1]_{rq} = \varphi([1]_{ik}) \cdot P' \cdot \varphi([1]_{rq});$$

4) якщо $j, q \notin \{k, l\}$, то

$$\varphi([1]_{ij} \cdot P \cdot [1]_{rq}) = \varphi([p_{jr}]_{iq}) = [p'_{jr}]_{iq} = [1]_{ij} \cdot P' \cdot [1]_{rq} = \varphi([1]_{ij}) \cdot P' \cdot \varphi([1]_{rq}).$$

Випадки $1'$) $j = q = l$; $2'$) $j = l$, $q = k$; $3'$) $j = l$, $q \notin \{k, l\}$; $3''$) $q = k$, $j \notin \{k, l\}$; $3'''$) $q = l$, $j \notin \{k, l\}$ розглядаються аналогічно.

Подивимось, у яку таблицю перейде таблиця множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$, якщо кожен елемент таблиці замінити його образом при відображенні φ. Цей перехід можна розбити на два етапи. На першому етапі для кожного i переставимо місцями рядки, що відповідають елементам $[1]_{ik}$ та $[1]_{il}$, а потім стовпці, які відповідають цим елементам. Отримаємо таблицю:

	$\cdots$	$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[1]_{il}$	$\cdots$	$[1]_{ik}$	$\cdots$
$[1]_{11}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1k}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1k}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1k}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{il}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{ik}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{ik}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

На другому етапі для кожного елемента таблиці другий індекс k замінимо на l і навпаки, не змінюючи перших індексів та решти других індексів. Безпосередньо перевіряється, що отримана таблиця збігається з таблицею множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$. Тому напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ та $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$ є ізоморфними. □

Якщо від напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ перейти до дуальної напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; m, n; P')$, то з твердження 4 одразу випливає дуальне

Твердження 5. *Якщо $(0, 1)$-матриця P'' отримана з матриці P перестановкою двох стовпців, то напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ та $\mathcal{M}^0(G; n, m; P'')$ ізоморфні.*

Наслідок 2. *Якщо матриця $\widetilde{P}$ отримана з матриці P за допомогою перестановок рядків і стовпців, то напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;P)$ та $\mathcal{M}^0(G;n,m;\widetilde{P})$ ізоморфні.*

5. Варіанти напівгрупи Ріса над тривіальною групою з нулем

Твердження 6. *Якщо варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ напівгрупи Ріса над тривіальною групою з нулем є регулярним, то він ізоморфний напівгрупі*

$$\mathcal{M}^0(G;n,m;\mathcal{I}_{m\times n}).$$

Доведення. Варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ є напівгрупою Ріса $(\mathcal{M}^0(G;n,m;PA_{ij}P)$. Оскільки варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ регулярний, то за теоремою 1 всі елементи j-го рядка та i-го стовпця матриці P є одиницями. Але тоді з твердження 1 випливає, що $PA_{ij}P=\mathcal{I}_{m\times n}$. □

Теорема 3. *Варіанти $S_1=(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ та $S_2=(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{lk}})$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матриці $Q=PA_{ij}P$ та $F=PA_{lk}P$ після викреслення нульових рядків і стовпців збігаються.*

Доведення. Варіанти S_1 і S_1 є напівгрупами Ріса з матрицями Q та F, відповідно. За твердженням 1 перестановками рядків і стовпців матриці Q та F можна звести до вигляду

$$Q'=\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{u\times v} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad F'=\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{k\times t} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

відповідно. Це означає, що після викреслення з матриць Q та F нульових рядків і стовпців ми одержимо матриці $\mathcal{I}_{u\times v}$ та $\mathcal{I}_{k\times t}$, відповідно. Крім того, за наслідком 2 матимемо

$$\mathcal{M}^0(G;n,m;Q)\simeq\mathcal{M}^0(G;n,m;Q'), \qquad \mathcal{M}^0(G;n,m;F)\simeq\mathcal{M}^0(G;n,m;F').$$

Тому достатньо довести, що напівгрупи $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ і $\mathcal{M}^0(G;n,m;F')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{I}_{u\times v}=\mathcal{I}_{k\times t}$.

Достатність умови очевидна, бо тоді $Q'=F'$.

Для доведення необхідності зауважимо, що в напівгрупі $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ добуток $[1]_{rs}\cdot[1]_{xy}=[q'_{sx}]_{ry}$ буде ненульовим тоді і тільки тоді, коли $1\leqslant s\leqslant u$ і $1\leqslant x\leqslant v$. Тому таблиця множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ міститиме nu ненульових рядків, у кожному з яких буде mv одиниць. Аналогічно таблиця множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G;n,m;F')$ буде містити nk ненульових рядків, у кожному з яких буде mt одиниць. Тому з ізоморфності напівгруп $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ і $\mathcal{M}^0(G;n,m;F')$ випливає, що $u=k$ і $v=t$. □

Позначимо через r_i кількість одиниць в i-му рядку матриці P, а через s_j — кількість одиниць у j-му стовпці матриці P.

Наслідок 3. *Якщо для матриці P множина $\{r_i : 0\leqslant i\leqslant m\}\setminus\{0\}$ має k елементів, а множина $\{s_j : 0\leqslant j\leqslant n\}\setminus\{0\}$ — l елементів, то напівгрупа Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;P)$ має точно $k\cdot l+1$ попарно неізоморфних варіантів.*

Доведення. Якщо $r_i \neq 0$ і $s_j \neq 0$, то з твердження 1 та наслідку 2 випливає, що варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P), *_{[1]_{ij}})$ ізоморфний напівгрупі Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q)$ із сендвіч-матрицею $Q = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{s_i \times r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. За теоремою 3 різним парам (s_i, r_j) відповідають неізоморфні варіанти, що дає нам $k \cdot l$ попарно неізоморфних варіантів. Жоден із них не є напівгрупою із нульовим множенням. Крім того, маємо ще варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P), *_0)$, який є напівгрупою із нульовим множенням. $\square$

Список використаної літератури

1. Е. С. Ляпин, *Полугруппы,* Физматгиз, Москва, 1960.
2. J. B. Hickey, *Semigroups under a sandwich operation*, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. **26** (1983), no. 3, 371–382. DOI: 10.1017/S0013091500004442
3. J. B. Hickey. *On variants of a semigroup*, Bull. Austral. Math. Soc. **34** (1986), no. 3, 447–459. DOI: 10.1017/S0004972700010339
4. T. Khan and M. Lawson, *Variants of regular semigroups*, Semigroup Forum **62** (2001), no. 3, 358–374. DOI: 10.1007/s002330010034
5. O. O. Desiateryk, *Variants of commutative bands with zero,* Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2015), no. 4, 15–20.
6. I. Dolinka, I. Đurđev, and J. East, *Sandwich semigroups in diagram categories*, Preprint (arXiv:1910.10286).
7. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories I: Foundations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 75, pp. 35. DOI: 10.1007/s00012-018-0537-5
8. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories II: Transformations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 76, pp. 63. DOI: 10.1007/s00012-018-0539-3
9. O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups, an introduction*, **9** of Algebra and Appl., Springer, London, 2009.
10. I. Dolinka and J. East, *Variants of finite full transformation semigroups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 8, 1187–1222. DOI: 10.1142/S021819671550037X
11. I. Dolinka and J. East, *Semigroups of rectangular matrices under a sandwich operation*, Semigroup Forum **96** (2018), no. 2, 253–300. DOI: 10.1007/s00233-017-9873-6
12. B. N. Givens, A. Rosin, and K. Linton, *Interassociates of the bicyclic semigroup*, Semigroup Forum **94** (2017), no. 1, 104–122. DOI: 10.1007/s00233-016-9794-9
13. М. Хилинський, *Інтерасоціативності поліциклічного моноїда*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **86** (2018), 77-90. DOI: 10.30970/vmm.2018.86.077-090
14. O. Gutik and K. Maksymyk, *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **82** (2016), 98–108.
15. А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Том 1, пер. с англ., Мир, Москва, 1972.

Стаття: надійшла до редколегії 24.09.2019
доопрацьована 23.12.2019
прийнята до друку 03.02.2020

VARIANTS OF THE REES MATRIX SEMIGROUP

Oleksandra DESIATERYK

International Research and Training Center for Information Technologies and Systems of NAS and MES of Ukraine,
Glushov Ave., 40, 03680, Kyiv, Ukraine
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

Let S be a semigroup, and let $a \in S$. Then the *variant* of S with respect to a is the semigroup with underlying set S and multiplication $\circ$ defined by $x \circ y = xay$.
Let S be an arbitrary semigroup, let I and Λ be (index) sets and let $P = (p_{\lambda i})$ be a $(\Lambda \times I)$-matrix over S, i.e. a mapping from the Cartesian product $\Lambda \times I$ into S. The following formula defines an operation on the set $M = I \times S \times \Lambda$:

$$(i, s, \lambda)(j, t, \mu) = (i, sp_{\lambda j}t, \mu).$$

Then M is a semigroup, called a *Rees semigroup of matrix type over* S and denoted by $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$. The matrix P is called the *sandwich matrix* of the semigroup $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$. If S is a semigroup with zero 0, then $Z = \{(i, 0, \lambda) \colon i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ is an ideal in $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ and the Rees quotient semigroup M/Z is denoted by $\mathcal{M}^0(S; I, \Lambda; P)$. In the case when $S = G^0$ is a group G^0 with an adjoined zero, instead of $\mathcal{M}^0(G^0; I, \Lambda; P)$ one writes $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ and calls it a *Rees semi-group of matrix type over the group* G^0 *with an adjoined zero*.
We obtained necessary and sufficiency conditions for regularity and isomorphism of two variants of the Rees matrix semigroup with a sandwich matrix over a trivial group with zero. In particular we show that variants $S_1 = (\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ and $S_2 = (\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{lk}})$ are isomorphic if and only if when the matrices $Q = PA_{ij}P$ and $F = PA_{lk}P$ coincide after deleting of zero-rows and zero-columns.

Key words: variant, sandwich semigroup, Rees semigroup, isomorphism.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 22–31
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 22–31
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.021-030

УДК 512.53

ПРО ГОМОМОРФНІ РЕТРАКТИ МОНОЇДА $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$

Анатолій САВЧУК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: asavchuk1@meta.ua

Досліджено гомоморфні ретракти моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ коскінченних часткових ізометрій множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Зокрема, побудовано клас гомоморфних ретрактів моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, елементи якого містять підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, породжений зсувами множини $\mathbb{N}$, такі, що $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом кожного такого моноїда.

Ключові слова: напівгрупа, ізометрія, часткова бієкція, гомоморфний ретракт, конгруенція, біциклічний моноїд.

Ми користуватимемось термінологією з [8, 16, 17].

Надалі у тексті потужність множини A позначатимемо через $|A|$ і множину натуральних чисел — через $\mathbb{N}$.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно. Часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ називається *ко-скінченним*, якщо множини $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ та $Y \setminus \operatorname{ran}\alpha$ є скінченними.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Нехай $\mathscr{I}_\lambda$ — множина всіх часткових взаємно однозначних перетворень ненульового кардинала λ з визначеною на ній напівгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \text{ якщо } x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha\colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \text{ для } \alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

2010 Mathematics Subject Classification: 20M18, 20M20, 20M30

Напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричним інверсним моноїдом* (*симетричною інверсною напівгрупою*) над кардиналом λ (див. [8]). Симетричний інверсний моноїд введений Вагнером у праці [2] і він відіграє важливу роль у теорії напівгруп.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c, d \in S$. Відношення $(a,b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи a і b є $\mathfrak{K}$-еквівалентними*. На кожній напівгрупі S існують такі конгруенції: *універсальна* $\mathfrak{U}_S = S \times S$ та *одинична* (*діагональ*) $\Delta_S = \{(s,s) \colon s \in S\}$. Такі конгруенції називаються *тривіальними*. Конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *груповою*, якщо фактор-напівгрупа $S/\mathfrak{K}$ є групою. Кожна конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S породжує *природний гомоморфізм* $\mathfrak{K}^\natural \colon S \to S/\mathfrak{K}$, який ставить у відповідність кожному елементові $s \in S$ його клас $\mathfrak{K}$-еквівалентності $[s]_\mathfrak{K}$. Також, кожен напівгруповий гомоморфізм $h \colon S \to T$ породжує конгруенцію $\ker h$ на S

$$(s,t) \in \ker h \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad (s)h = (t)h, \qquad s,t \in S,$$

і в цьому випадку конгруенція $\ker h$ називається *ядром* гомоморфізму h (див. [8]). Перетворення напівгрупи S, яке є гомоморфізмом, називається *ендоморфізмом*.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \preccurlyeq f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S так

$$s \preccurlyeq t \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad s = te,$$

для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [16]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ інверсної напівгрупи S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$. Інверсна напівгрупа S називається *факторизовною*, якщо для кожного елемента $s \in S$ існує елемент g групи одиниць напівгрупи S такий, що $s \preccurlyeq g$ стосовно природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на S.

Часткове перетворення $\alpha \colon (X,d) \rightharpoonup (X,d)$ метричного простору (X,d) називається *ізометричним* або *частковою ізометрією*, якщо $d(x\alpha, y\alpha) = d(x,y)$ для довільних $x, y \in \operatorname{dom}\alpha \subseteq (X,d)$. Очевидно, що композиція двох часткових ізометрій метричного простору (X,d) знову є частковою ізометрією, а також, що обернене часткове відображення до часткової ізометрії є частковою ізометрією. Отож, часткові ізометрії метричного простору (X,d) стосовно операції композиції часткових перетворень є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїда над кардиналом $|X|$.

Напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ усіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ означена в праці Безущак [5], де описано її твірні та доведено, що вона має експоненціальний ріст. Зауважимо, що напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ інверсна і є, очевидно, піднапівгрупою напівгрупи всіх часткових коскінченних біекцій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, а елементи напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ — це саме звуження ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ на коскінченні підмножини в розумінні Лоусона (див. [16, с. 9]. У праці [1] описано відношення Ґріна та головні ідеали напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$. У [3] доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ є F-інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$. Також у [3] досліджувалася топологізація напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ та задача ізоморфного занурення дискретної напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

Нехай $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — множина усіх часткових коскінченних ізометрій множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайною метрикою $d(n,m) = |n-m|$, $n,m \in \mathbb{N}$. Оскільки множина $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ замкнена стосовно операції композиції часткових відображень і взяття оберненого часткового відображення, то $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — інверсний підмоноїд симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_\omega$. Через $\mathbb{I}$ позначатимемо тотожне відображення множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Очевидно, що $\mathbb{I}$ — одиниця моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

У праці [4] досліджено алгебричні властивості напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Зокрема в [4], описано відношення Ґріна на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, її в'язку та доведено, що $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — проста E-унітарна F-інверсна напівгрупа. Також описана найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ на моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ та доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Наведено приклад конгруенції на моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка не є груповою. Також доведено, що конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є груповою тоді і лише тоді, коли її звуження на довільну піднапівгрупу S в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, є груповою конгруенцією на S. Властивості напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ та напівгруп, які її містять, вивчалися в працях [7, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Напівгрупа усіх часткових коскінченних ізометрій n-го степеня множини натуральних чисел з евклідовою метрикою досліджувалася в [15].

Гомоморфною ретракцією називається відображення з напівгрупи S в S, яке є одночасно ретракцією та гомоморфізмом [8]. Образ напівгрупи S при її гомоморфній ретракції називається *гомоморфним ретрактом*. Тобто гомоморфний ретракт напівгрупи S — це така піднапівгрупа T в S, що існує гомоморфізм з S на T, для якого піднапівгрупа T є множиною всіх його нерухомих точок. Очевидно, що кожне тотожне відображення напівгрупи S є її гомоморфною ретракцією, а також, якщо e — ідемпотент в S, то стале відображення $h\colon S \to S$, $x \mapsto e$ є гомоморфною ретракцією напівгрупи S. Такі гомоморфні ретракції напівгрупи S будемо називати *тривіальними*, а образи напівгрупи S стосовно них — *тривіальними* гомоморфними ретрактами.

Добре відомо (див. [8, §1.12]), що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, породженій частковими перетвореннями α та β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, які визначаються наступним чином:

$$\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{N}, \quad \operatorname{ran}\alpha = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \quad (n)\alpha = n+1$$

і

$$\operatorname{dom}\beta = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \quad \operatorname{ran}\beta = \mathbb{N}, \quad (n)\beta = n-1.$$

Очевидно, що $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є підмоноїдом в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. За наслідком 1.32 з [8] усі гомоморфізми біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p,q)$ є, або ізоморфізмами, або ж груповими, і очевидно, що кожен автоморфізм біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p,q)$ є тотожним відображенням.

Звідси випливає, що всі гомоморфні ретракції біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$, а отже і моноїда $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є тривіальними.

Зауважимо, що підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом у моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ ([4, наслідок 13]). Тому природно виникає задача: *описати всі нетривіальні гомоморфні ретракти моноїда* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Це питання поставлено О. Гутіком на семінарі "Теорія полігонів і спектральні простори" у Львівському університеті в 2017 році. Також він уточнив це питання: *чи існують нетривіальні гомоморфні ретракти моноїда* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *відмінні від* $\mathscr{C}_\mathbb{N}$*?*

Ми досліджуємо гомоморфні ретракти моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Зокрема, побудовано клас гомоморфних ретрактів моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, елементи якого містять підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ такі, що $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом кожного такого моноїда.

Нехай β — довільний елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в $\mathbb{N}$ і $(\mathbb{N},\leqslant)$ — цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число $n_\beta^\mathbf{d}\in\operatorname{dom}\beta$ таке, що $n\in\operatorname{dom}\beta$ для всіх натуральних $n\geqslant n_\beta^\mathbf{d}$ та існує найменше натуральне число $n_\beta^\mathbf{r}\in\operatorname{ran}\beta$ таке, що $n\in\operatorname{ran}\beta$ для всіх натуральних $n\geqslant n_\beta^\mathbf{r}$.

Твердження 1. *Нехай S — напівгрупа та $\mathfrak{H}\colon\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\to S$ — негруповий гомоморфізм. Якщо $(\alpha)\mathfrak{H}=(\beta)\mathfrak{H}$ для деяких $\alpha,\beta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, то $n_\alpha^\mathbf{d}=n_\beta^\mathbf{d}$ і $n_\alpha^\mathbf{r}=n_\beta^\mathbf{r}$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли α,β є ідемпотентами моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Припустимо протилежне: існують $\alpha,\beta\in E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)$ такі, що $n_\alpha^\mathbf{d}\neq n_\beta^\mathbf{d}$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $n_\alpha^\mathbf{d}<n_\beta^\mathbf{d}$. Приймемо $n_0=n_\alpha^\mathbf{d}+1$ і нехай ε_0 — тотожне відображення множини $\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_0\}$. Тоді $\varepsilon_0\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, і оскільки $n_\alpha^\mathbf{d}<n_\beta^\mathbf{d}$, то очевидно, що $\varepsilon_0\cdot\alpha\preccurlyeq\varepsilon_0\cdot\beta$, $\varepsilon_0\cdot\alpha\neq\varepsilon_0\cdot\beta$ і $\varepsilon_0\cdot\alpha,\varepsilon_0\cdot\beta\in E(\mathscr{C}_\mathbb{N})$. Тоді за теоремою 22 [4] гомоморфний образ $(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)\mathfrak{H}$ є підгрупою в S, а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає рівність $n_\alpha^\mathbf{d}=n_\beta^\mathbf{d}$.

Нехай α,β — довільні різні елементи моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі, що $(\alpha)\mathfrak{H}=(\beta)\mathfrak{H}$. Оскільки моноїд $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є інверсним, то $(\alpha\alpha^{-1})\mathfrak{H}=(\beta\beta^{-1})\mathfrak{H}$ і $(\alpha^{-1}\alpha)\mathfrak{H}=(\beta^{-1}\beta)\mathfrak{H}$. Також, оскільки $\operatorname{dom}\gamma=\operatorname{dom}(\gamma\gamma^{-1})$ і $\operatorname{ran}\gamma=\operatorname{dom}(\gamma^{-1}\gamma)$ для довільного $\gamma\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, то з означень чисел $n_\gamma^\mathbf{d}$ і $n_\gamma^\mathbf{r}$ випливає, що $n_\gamma^\mathbf{d}=n_{\gamma\gamma^{-1}}^\mathbf{d}$ і $n_\gamma^\mathbf{r}=n_{\gamma^{-1}\gamma}^\mathbf{d}$. Далі, використавши твердження доведене для ідемпотентів, отримуємо рівності $n_\alpha^\mathbf{d}=n_\beta^\mathbf{d}$ і $n_\alpha^\mathbf{r}=n_\beta^\mathbf{r}$. $\square$

Для довільного елемента $\alpha\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ означимо:

- $\vec{\alpha}$ — звуження часткового відображення $\alpha\colon\mathbb{N}\rightharpoonup\mathbb{N}$ на множину $\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_\alpha^\mathbf{d}\}$;
- $\iota_\alpha^\mathbf{d}$ — тотожне відображення множини $\operatorname{dom}\vec{\alpha}=\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_\alpha^\mathbf{d}\}$;
- $\iota_\alpha^\mathbf{r}$ — тотожне відображення множини $\operatorname{ran}\vec{\alpha}=\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_\alpha^\mathbf{r}\}$.

У праці [4] означено ендоморфізм $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}\colon\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\to\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, $\alpha\mapsto\vec{\alpha}$, та доведено, що підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є гомоморфним ретрактом. Твердження 2 описує конгруенцію, яка є ядром цього ендоморфізму.

Твердження 2. *Для елементів $\alpha,\beta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі умови є еквівалентними:*

(*i*) $(\alpha)\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}=(\beta)\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$;
(*ii*) $\iota_\alpha^\mathbf{d}\alpha=\iota_\beta^\mathbf{d}\beta$;

(iii) $\alpha\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha} = \beta\iota^{\mathbf{r}}_{\beta}$;
(iv) $\iota^{\mathbf{d}}_{\alpha}\alpha = \beta\iota^{\mathbf{r}}_{\beta}$;
(v) $\alpha\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha} = \iota^{\mathbf{d}}_{\beta}\beta$.

Доведення. За означеннями часткових відображень $\iota^{\mathbf{d}}_{\alpha}$, $\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha}$ і ендоморфізму $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_{\mathbb{N}}}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty} \to \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ маємо, що $(\alpha)\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_{\mathbb{N}}} = \iota^{\mathbf{d}}_{\alpha}\alpha = \alpha\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha}$ для довільного елемента $\alpha \in \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, звідки випливають еквівалентності тверджень леми. $\square$

Означення 1. Нехай n_0 — довільне натуральне число та p — довільне натуральне число строго більше за 1. Через $\iota^{\langle -p\rangle}_{n_0}$ позначимо тотожне відображення множини

$$A_{n_0} = \begin{cases} \{n \in \mathbb{N}\colon n \geqslant n_0\}, & \text{якщо } n_0 - p \notin \mathbb{N};\\ \{n \in \mathbb{N}\colon n \geqslant n_0\} \cup \{n_0 - p\}, & \text{якщо } n_0 - p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

На моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ означимо відношення $\sim_{\langle -p\rangle}$ так:

$$\alpha \sim_{\langle -p\rangle} \beta \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha = \iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta.$$

Очевидно, що $\sim_{\langle -p\rangle}$ — рефлексивне, симетричне та транзитивне відношення на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

Також з того, що кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ за лемою 1 з [4] є частковим зсувом множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, то виконується перше випловлення леми 1, а її друге висловлення безпосередньо випливає з означення еквівалентності $\sim_{\langle -p\rangle}$.

Лема 1. *Нехай p — довільне натуральне число $\geqslant 2$. Тоді*

(1) $\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha = \alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{r}}_{\alpha}}$ *для кожного $\alpha \in \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$;*
(2) *якщо $\alpha \sim_{\langle -p\rangle} \beta$ для $\alpha, \beta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, то $n^{\mathbf{d}}_{\alpha} = n^{\mathbf{d}}_{\beta}$ і $n^{\mathbf{r}}_{\alpha} = n^{\mathbf{r}}_{\beta}$.*

Твердження 3. *Якщо p — довільне натуральне число $\geqslant 2$, то $\sim_{\langle -p\rangle}$ — конгруенція на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.*

Доведення. Нехай $\alpha \sim_{\langle -p\rangle} \beta$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ і γ — довільний елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то існують цілі числа z_{α}, z_{β} і z_{γ} такі, що

$$(i)\alpha = i + z_{\alpha}, \qquad (j)\beta = j + z_{\beta} \qquad \text{і} \qquad (k)\gamma = k + z_{\gamma}$$

для довільних $i \in \operatorname{dom}\alpha$, $j \in \operatorname{dom}\beta$ і $k \in \operatorname{dom}\gamma$. Також з рівності $\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha = \iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta$ випливає, що $z_{\alpha} = z_{\beta}$, а за лемою 1(2) отримуємо рівності $n^{\mathbf{d}}_{\alpha} = n^{\mathbf{d}}_{\beta}$ і $n^{\mathbf{r}}_{\alpha} = n^{\mathbf{r}}_{\beta}$.

Очевидно, що виконується лише один з таких випадків:

$$(a)\ n^{\mathbf{r}}_{\alpha} < n^{\mathbf{d}}_{\gamma}; \qquad (b)\ n^{\mathbf{r}}_{\alpha} = n^{\mathbf{d}}_{\gamma}; \qquad (c)\ n^{\mathbf{r}}_{\alpha} > n^{\mathbf{d}}_{\gamma}.$$

Зауважимо спочатку, оскільки моноїд $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є підмоноїдом симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathbb{N}}$ над множиною $\mathbb{N}$, то

$$\operatorname{dom}(\alpha\gamma) = (\operatorname{dom}\gamma \cap \operatorname{ran}\alpha)\alpha^{-1}, \qquad \operatorname{ran}(\alpha\gamma) = (\operatorname{dom}\gamma \cap \operatorname{ran}\alpha)\gamma,$$
$$\operatorname{dom}(\beta\gamma) = (\operatorname{dom}\gamma \cap \operatorname{ran}\beta)\beta^{-1}, \qquad \operatorname{ran}(\beta\gamma) = (\operatorname{dom}\gamma \cap \operatorname{ran}\beta)\gamma.$$

Припустимо, що $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} < n_{\gamma}^{\mathbf{d}}$. З того, що кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$ ([4, лема 1]) і з рівностей $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}}$ і $z_{\alpha} = z_{\beta}$ випливає, що

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} = (n_{\gamma}^{\mathbf{d}})\alpha^{-1} = n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}} = (n_{\gamma}^{\mathbf{d}})\beta^{-1} > n_{\alpha}^{\mathbf{d}}.$$

Розглянемо два можливі випадки.

1. Якщо $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} + 1 = n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}$, то $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \notin \operatorname{dom}\alpha$ і $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \notin \operatorname{dom}\beta$, а отже

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \notin \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma) = \operatorname{dom}(\iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma) = \left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}\right\}.$$

   Тоді, очевидно, що $(i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = (i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = i + z_{\alpha} + z_{\gamma}$ для всіх $i \in \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma)$.

2. Якщо $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} + 1 < n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}$, то $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \in \operatorname{dom}\alpha$ і $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \in \operatorname{dom}\beta$, а отже,

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \in \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma) = \operatorname{dom}(\iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma) = \left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}\right\} \cup \left\{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p\right\}.$$

   Очевидно, що

$$(i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = (i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = i + z_{\alpha} + z_{\gamma}$$

   для всіх $i \in \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma)$.

Припустимо, що $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} = n_{\gamma}^{\mathbf{d}}$. Тоді

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} = (n_{\alpha}^{\mathbf{r}})\alpha^{-1} = n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}} = (n_{\beta}^{\mathbf{r}})\beta^{-1} = n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}},$$

оскільки $z_{\alpha} = z_{\beta}$, $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}}$ і $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} = n_{\beta}^{\mathbf{r}}$, а отже, матимемо, що

$$\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = \iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma.$$

Припустимо, що $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} > n_{\gamma}^{\mathbf{d}}$. З того, що кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$ ([4, лема 1]) і з рівностей $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}}$ і $z_{\alpha} = z_{\beta}$ випливає, що $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} = n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}} = n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}$, а отже, маємо, що

$$\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = \iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma.$$

Отож, ми довели, що з рівності $\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta$ випливає рівність $\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma$ для довільного елемента γ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

З рівності $\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta$ та леми 1(1) випливає, що $\alpha\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle} = \beta\iota_{n_{\beta}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}$. Оскільки $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ — інверсна напівгрупа, то

$$\iota_{n_{\alpha^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha^{-1} = \iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\alpha^{-1} = \left(\alpha\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\right)^{-1} = \left(\beta\iota_{n_{\beta}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\right)^{-1} = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\beta^{-1} = \iota_{n_{\beta^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta^{-1}.$$

Тоді з першої частини доведення випливає, що для довільного елемента γ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ справджується рівність

$$\iota_{n_{\alpha^{-1}\gamma^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha^{-1}\gamma^{-1} = \iota_{n_{\beta^{-1}\gamma^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta^{-1}\gamma^{-1}.$$

Далі, скориставшись тим, що $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — інверсна напівгрупа та лемою 1(1), отримуємо

$$\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\gamma\alpha}}\gamma\alpha=\gamma\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{r}}_{\gamma\alpha}}=\gamma\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha^{-1}\gamma^{-1}}}=\gamma\beta\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta^{-1}\gamma^{-1}}}=\gamma\beta\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{r}}_{\gamma\beta}}=\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\gamma\beta}}\gamma\beta.$$

Отже, $\sim_{\langle -p\rangle}$ — конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. □

Теорема 1. *Нехай p — довільне натуральне число $\geqslant 2$. Тоді відображення $\mathfrak{H}^{\langle -p\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, $\alpha\mapsto \iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_\alpha}\alpha$, є ендоморфізмом. Більше того підмоноїд $\mathscr{C}^{\langle -p\rangle}_\mathbb{N}=\left\{\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_\alpha}\alpha\colon \alpha\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\right\}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.*

Доведення. Нехай α і β — довільні елементи напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Спочатку доведемо рівність

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta\right)=\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta\right). \tag{1}$$

Розглянемо два можливі випадки.

1. Нехай $n^{\mathbf{r}}_\alpha\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta$. Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то $n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}=(n^{\mathbf{r}}_\alpha)\alpha^{-1}=n^{\mathbf{d}}_\alpha$. Знову за лемою 1 [4] отримаємо, що

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}\cup\left\{n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\right\}, & \text{якщо } n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\in\operatorname{dom}\alpha\\ & \text{і } (n^{\mathbf{d}}_\alpha-p)\alpha\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}\cup\left\{n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\right\}, & \text{якщо } n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\in\operatorname{dom}\alpha;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

і

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\alpha)\alpha\right\}\cup\left\{(n^{\mathbf{d}}_\alpha-p)\alpha\right\}, & \text{якщо } (n^{\mathbf{d}}_\alpha-p)\alpha\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\alpha)\alpha\right\}, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Отже, якщо $n^{\mathbf{r}}_\alpha\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta$, то виконується рівність (1).

2. Нехай $n^{\mathbf{r}}_\alpha< n^{\mathbf{d}}_\beta$. Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то $n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}=(n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}>n^{\mathbf{d}}_\alpha$. Знову за лемою 1 [4] отримаємо, що

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}\cup & \text{якщо } (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\in\operatorname{dom}\alpha\\ \quad\cup\left\{(n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\right\}, & \text{і } (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}\cup & \text{якщо } (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\in\operatorname{dom}\alpha;\\ \quad\cup\left\{(n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\right\}, & \\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

і

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta\right\}\cup\left\{n^{\mathbf{d}}_\beta-p\right\}, & \text{якщо } n^{\mathbf{d}}_\beta-p\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta\right\}, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Отже, якщо $n^{\mathbf{r}}_{\alpha} < n^{\mathbf{d}}_{\beta}$, то виконується рівність (1).

Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то існують цілі числа z_α і z_β такі, що

$$(i)\alpha = i + z_\alpha \qquad \text{і} \qquad (j)\beta = j + z_\beta,$$

для довільних $i \in \operatorname{dom}\alpha$ і $j \in \operatorname{dom}\beta$, то з означення часткового відображення $\iota^{\langle -p\rangle}_{n_0}$ випливає, що

$$(n)\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta = (n)\alpha\beta = (n+z_\alpha)\beta = n + z_\alpha + z_\beta$$

і

$$(n)\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta = (n)\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta = (n+z_\alpha)\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta = (n+z_\alpha)\beta = n + z_\alpha + z_\beta,$$

для всіх $n \in \operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta\right) = \operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta\right)$. Отож, ми довели, що відображення $\mathfrak{H}^{\langle -p\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} \colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є гомоморфізмом.

Очевидно, що $\mathscr{C}^{\langle -p\rangle}_{\mathbb{N}}$ — підмоноїд моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ і $(\alpha)\mathfrak{H}^{\langle -p\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} = \alpha$ для довільного $\alpha \in \mathscr{C}^{\langle -p\rangle}_{\mathbb{N}}$. $\square$

З означення ендоморфізмів $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} \colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ і $\mathfrak{H}^{\langle -p\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} \colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ випливає

Наслідок 1. *Нехай p_1 і p_2 — довільні різні натуральні числа $\geqslant 2$. Тоді*

$$\mathfrak{H}^{\langle -p_1\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} \circ \mathfrak{H}^{\langle -p_2\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} = \mathfrak{H}^{\langle -p_2\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} \circ \mathfrak{H}^{\langle -p_1\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} = \mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}},$$

а отже, підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом моноїда $\mathscr{C}^{\langle -p\rangle}_{\mathbb{N}}$, для довільного $p \geqslant 2$.

Зауваження 1. Кожна групова конгруенція на моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка відмінна від універсальної, породжує гомоморфізм напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, який не може бути її ендоморфізмом, оскільки всі $\mathscr{H}$-класи в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є тривіальними (див. [4, твердження 1]).

Також, очевидно, що підпростір $\mathbb{N}_{[p]} = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, p\}$ в $\mathbb{N}$ ізометричний самому простору $\mathbb{N}$ для довільного натурального числа p, стосовно відображення $h_{[p]} \colon n \mapsto n + p$. Ця ізометрія породжує ін'єктивний ендоморфізм $\mathscr{H}_{[p]} \colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, який не має жодної нерухомої точки та визначається $\mathscr{H}_{[p]} \colon \alpha \mapsto \alpha_{[p]}$, де $\operatorname{dom}\alpha_{[p]} = \{n \in \mathbb{N} \colon n - p \in \operatorname{dom}\alpha\}$, $\operatorname{ran}\alpha_{[p]} = \{n \in \mathbb{N} \colon n - p \in \operatorname{ran}\alpha\}$ і $(i)\alpha_{[p]} = (i-p)\alpha + p$, для всіх $i \in \operatorname{dom}\alpha_{[p]}$.

Подяка

Автор висловлює подяку науковому керівникові Олегу Гутіку за корисні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. О. О. Безущак, *Відношення Ґріна інверсної напівгрупи частково визначених коскінченних ізометрій дискретної лінійки*, Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. (2008), no. 1, 12–16.
2. В. В. Вагнер, *Обощенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
3. О. Гутік, А. Савчук, *Про напівгрупу* $\mathbf{ID}_\infty$, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **83** (2017), 5–19.

4. О. Гутік, А. Савчук, Напівгрупа часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел, Буковинський математичний журнал **6** (2018), no. 1-2, 42–51. DOI: 10.31861/bmj2018.01.042
5. O. Bezushchak, *On growth of the inverse semigroup of partially defined co–finite automorphisms of integers*, Algebra Discrete Math. (2004), no. 2, 45–55.
6. I. Chuchman and O. Gutik, *Topological monoids of almost monotone, injective cofinite partial selfmaps of positive integers*, Carpathian Math. Publ. **2** (2010), no. 1, 119–132.
7. I. Chuchman and O. Gutik, *On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity*, Demonstr. Math. **44** (2011), no. 4, 699–722. DOI: 10.1515/dema-2013-0340
8. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
9. O. V. Gutik and I. V. Pozdniakova, *Congruences on the monoid of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images*, Мат. методи фіз.-мех. поля **57** (2014), no. 3, 7–15; reprinted version: J. Math. Sci. **217** (2016), no. 2, 139–148. DOI: 10.1007/s10958-016-2962-3
10. O. Gutik and I. Pozdnyakova, *On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with cofinite domains and images*, Algebra Discr. Math. **17** (2014), no. 2, 256–279.
11. O. Gutik and D. Repovš, *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image*, Stud. Sci. Math. Hungar. **48** (2011), no. 3, 342–353. DOI: 10.1556/SScMath.48.2011.3.1176
12. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images*, Georgian Math. J. **19** (2012), no. 3, 511–532. DOI: 10.1515/gmj-2012-0022
13. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial cofinite selfmaps*, Math. Slovaca **65** (2015), no. 5, 981–992. DOI: 10.1515/ms-2015-0067
14. O. V. Gutik and A. S. Savchuk, On inverse submonoids of the monoid of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of positive integers, Carpathian Math. Publ. **11** (2019), no. 2, 296–310. DOI: 10.15330/cmp.11.2.296-310
15. O. Gutik and A. Savchuk, *On the monoid of cofinite partial isometries of $\mathbb{N}^n$ with the usual metric*, Proc. Int. Geom. Center **12** (2019), no. 3, 51–68. DOI: 10.15673/tmgc.v12i3.1553
16. M. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, Singapore: World Scientific, 1998.
17. M. Petrich, *Inverse Semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Стаття: надійшла до редколегії 03.02.2019
доопрацьована 23.05.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ON HOMOMORPHIC RETRACTS OF THE MONOID $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$

Anatolii SAVCHUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: asavchuk1@meta.ua

A *homomorphic retraction* is a map from a semigroup S into S which is both a retraction and a homomorphism. The image of the homomorphic retraction is called a *homomorphic retract*.
A partial transformation $\alpha\colon (X,d) \rightharpoonup (X,d)$ of a metric space (X,d) is called *isometric* or a *partial isometry*, if $d(x\alpha, y\alpha) = d(x,y)$ for all $x, y \in \operatorname{dom}\alpha$. It is obvious that the composition of two partial isometries of a metric space (X,d) is a partial isometry, and the converse partial map to a partial isometry is a partial isometry. Hence the set of partial isometries of a metric space (X,d) with the operation of composition of partial isometries is an inverse submonoid of the symmetric inverse monoid over the set X.
A partial transformation $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ of a set X is called *co-finite* if both sets $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ and $X \setminus \operatorname{ran}\alpha$ are finite.
Let $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ be the set of all partial cofinite isometries of the set of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual metric $d(n,m) = |n-m|$, $n, m \in \mathbb{N}$. Then $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ with the operation of composition of partial isometries is an inverse submonoid of $\mathscr{I}_\omega$.
We study homomorphic retracts of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ of co-finite partial isometries of the set of positive integers $\mathbb{N}$. In particular, we construct a class of homomorphic retracts of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, whose elements contain the submonoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, where $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ is generated by shifts of the set $\mathbb{N}$ such that $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ is a homomorphic retract of any element from this class. This gives a positive answer on Gutik's question: *Do there exist non-trivial homomorphic retracts distinct from $\mathscr{C}_\mathbb{N}$?* This question was posed on the seminar *S-acts Theory and Spectral Spaces* at the Lviv University in 2017.

Key words: semigroup, isometry, partial bijection, homomorphic retract, congruence, bicyclic monoid.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 32–50
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 32–50
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.032-050

УДК 512.534.5

THE MONOID OF MONOTONE INJECTIVE PARTIAL SELFMAPS OF THE POSET $(\mathbb{N}^3, \leqslant)$ WITH COFINITE DOMAINS AND IMAGES

Oleg GUTIK, Olha KROKHMALNA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, Olia709@i.ua

Let n be a positive integer $\geqslant 2$ and $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ be the n-th power of positive integers with the product order of the usual order on $\mathbb{N}$. In the paper we study the semigroup of injective partial monotone selfmaps of $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ with cofinite domains and images. We show that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ is isomorphic to the group $\mathscr{S}_n$ of permutations of an n-element set, and describe the subsemigroup of idempotents of $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$. Also in the case $n = 3$ we describe the property of elements of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ as partial bijections of the poset $\mathbb{N}^3_{\leqslant}$ and Green's relations on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$. In particular we show that $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ in $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$.

Key words: semigroup of partial bijections, monotone partial map, idempotent, Green's relations.

1. Introduction and preliminaries

We shall follow the terminology of [19] and [44].

In this paper we shall denote the cardinality of the set A by $|A|$. We shall identify all sets X with their cardinality $|X|$. For an arbitrary positive integer n by $\mathscr{S}_n$ we denote the group of permutations of an n-elements set. Also, for infinite subsets A and B of an infinite set X we shall write $A \subseteq^* B$ if and only if there exists a finite subset A_0 of A such that $A \setminus A_0 \subseteq B$.

An algebraic semigroup S is called *inverse* if for any element $x \in S$ there exists a unique $x^{-1} \in S$ such that $xx^{-1}x = x$ and $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. The element x^{-1} is called the *inverse of* $x \in S$.

If S is a semigroup, then we shall denote the subset of idempotents in S by $E(S)$. If S is an inverse semigroup then $E(S)$ is closed under multiplication and we shall refer to

2010 Mathematics Subject Classification: 20M20, 20M30

$E(S)$ as a *band* (or the *band of* S). If the band $E(S)$ is a non-empty subset of S then the semigroup operation on S determines the following partial order $\leqslant$ on $E(S)$: $e \leqslant f$ if and only if $ef = fe = e$. This order is called the *natural partial order* on $E(S)$. A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents. A semilattice E is called *linearly ordered* or a *chain* if its natural order is a linear order.

If S is a semigroup, then we shall denote Green's relations on S by $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ and $\mathscr{H}$ (see [22] or [19, Section 2.1]):

$$\begin{aligned} a\mathscr{R}b &\text{ if and only if } aS^1 = bS^1; \\ a\mathscr{L}b &\text{ if and only if } S^1a = S^1b; \\ a\mathscr{J}b &\text{ if and only if } S^1aS^1 = S^1bS^1; \\ \mathscr{D} &= \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L}; \\ \mathscr{H} &= \mathscr{L} \cap \mathscr{R}. \end{aligned}$$

The $\mathscr{R}$-class (resp., $\mathscr{L}$-, $\mathscr{H}$-, $\mathscr{D}$- or $\mathscr{J}$-class) of the semigroup S which contains an element a of S will be denoted by R_a (resp., L_a, H_a, D_a or J_a).

If $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ is a partial map, then by $\operatorname{dom}\alpha$ and $\operatorname{ran}\alpha$ we denote the domain and the range of α, respectively.

Let $\mathscr{I}_\lambda$ denote the set of all partial one-to-one transformations of an infinite set X of cardinality λ together with the following semigroup operation: $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ if $x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}$, for $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda$. The semigroup $\mathscr{I}_\lambda$ is called the *symmetric inverse semigroup* over the set X (see [19, Section 1.9]). The symmetric inverse semigroup was introduced by Wagner [48] and it plays a major role in the semigroup theory. An element $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda$ is called *cofinite*, if the sets $\lambda \setminus \operatorname{dom}\alpha$ and $\lambda \setminus \operatorname{ran}\alpha$ are finite.

If X is a non-empty set and $\leqslant$ is a reflexive, antisymmetric, transitive binary relation on X then $\leqslant$ is called a *partial order* on X and $(X, \leqslant)$ is said to be a *partially ordered set* or shortly a *poset*.

Let $(X, \leqslant)$ be a partially ordered set. A non-empty subset A of $(X, \leqslant)$ is called:

- a *chain* if the induced partial order from $(X, \leqslant)$ onto A is linear, i.e., any two elements from A are comparable in $(X, \leqslant)$;
- an ω-*chain* if A is order isomorphic to the set of negative integers with the usual order $\leq$;
- an *anti-chain* if any two distinct elements from A are incomparable in $(X, \leqslant)$.

For an arbitrary $x \in X$ and non-empty $A \subseteq X$ we denote

$$\uparrow x = \{y \in X \colon x \leqslant y\}, \quad \downarrow x = \{y \in X \colon y \leqslant x\}, \quad \uparrow A = \bigcup_{x\in A} \uparrow x \quad \text{and} \quad \downarrow A = \bigcup_{x \in A} \downarrow x.$$

We shall say that a partial map $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ is *monotone* if $x \leqslant y$ implies $(x)\alpha \leqslant (y)\alpha$ for $x, y \in \operatorname{dom}\alpha$.

Let $\mathbb{N}$ be the set of positive integers with the usual linear order $\leq$ and $n \geqslant 2$ be an arbitrary positive integer. On the Cartesian power $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n\text{-times}}$ we define the product partial order, i.e.,

$$(i_1, \ldots, i_n) \leqslant (j_1, \ldots, j_n) \qquad \text{if and only if} \qquad (i_k \leqslant j_k) \quad \text{for all} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Later the set $\mathbb{N}^n$ with this partial order will be denoted by $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$.

For an arbitrary positive integer $n \geqslant 2$ by $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ we denote the *semigroup of injective partial monotone selfmaps of* $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ *with cofinite domains and images*. Obviously, $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ is a submonoid of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$ and $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ is a countable semigroup.

Furthermore, we shall denote the identity of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ by $\mathbb{I}$ and the group of units of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ by $H(\mathbb{I})$.

The *bicyclic semigroup* (or the *bicyclic monoid*) $\mathscr{C}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q, subject only to the condition $pq = 1$. The bicyclic semigroup is bisimple and every one of its congruences is either trivial or a group congruence. Moreover, every homomorphism h of the bicyclic semigroup is either an isomorphism or the image of $\mathscr{C}(p,q)$ under h is a cyclic group (see [19, Corollary 1.32]). The bicyclic semigroup plays an important role in algebraic theory of semigroups and in the theory of topological semigroups. For example a well-known Andersen's result [1] states that a (0–)simple semigroup with an idempotent is completely (0–)simple if and only if it does not contain an isomorphic copy of the bicyclic semigroup. Semigroup topologizations and shift-continuous topologizations of generalizations of the bicyclic monoid, they embedding into compact-like topological semigroups was studied in [5]–[9], [11, 14, 18, 20, 21], [24]–[28], [34, 35, 43, 46] and [2, 3, 4, 10, 12, 33, 42], respectively.

The bicyclic monoid is isomorphic to the semigroup of all bijections between uppersets of the poset $(\mathbb{N}, \leq)$ (see: see Exercise IV.1.11(ii) in [47]). So, the semigroup of injective isotone partial selfmaps with cofinite domains and images of positive integers is a generalization of the bicyclic semigroup. Hence, it is a natural problem to describe semigroups of injective isotone partial selfmaps with cofinite domains and images of posets with ω-chain.

The semigroups $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ of injective isotone partial selfmaps with cofinite domains and images of positive integers and integers, respectively, are studied in [34] and [35]. It was proved that the semigroups $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ have similar properties to the bicyclic semigroup: they are bisimple and every non-trivial homomorphic image $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ is a group, and moreover the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ has $\mathbb{Z}(+)$ as a maximal group image and $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ has $\mathbb{Z}(+) \times \mathbb{Z}(+)$, respectively.

In the paper [36] algebraic properties of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ of cofinite partial bijections of an infinite cardinal λ are studied. It is shown that $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ is a bisimple inverse semigroup and that for every non-empty chain L in $E(\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}})$ there exists an inverse subsemigroup S of $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ such that S is isomorphic to the bicyclic semigroup and $L \subseteq E(S)$, Green's relations on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ are described and it is proved that every non-trivial congruence on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$ is a group congruence. Also, the structure of the quotient semigroup $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}/\sigma$, where σ is the least group congruence on $\mathscr{I}_\lambda^{\mathrm{cf}}$, is described.

In the paper [32] the semigroup $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ of monotone injective partial selfmaps of the set of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ having cofinite domain and image, where $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ is the lexicographic product of n-elements chain and the set of integers with the usual linear order is studied. Green's relations on $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ are described and it is shown that the semigroup $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ is bisimple and its projective congruences are established. Also, in [32] it is proved that $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ is finitely generated, every automorphism of $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z})$ is inner, and it is shown that in the case $n \geqslant 2$ the semigroup $\mathscr{IO}_\infty(\mathbb{Z}^n_{\mathrm{lex}})$ has non-inner automorphisms. In [32] we proved that for every positive integer n the quotient semigroup $\mathscr{I}\!\mathscr{O}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})/\sigma$, where σ is a least group congruence on $\mathscr{I}\!\mathscr{O}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$, is isomorphic to the direct power $(\mathbb{Z}(+))^{2n}$. The structure of the sublattice of congruences on $\mathscr{I}\!\mathscr{O}_{\infty}(\mathbb{Z}^n_{\operatorname{lex}})$ which are contained in the least group congruence is described in [29].

In the paper [30] algebraic properties of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ are studied. The properties of elements of the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ as monotone partial bijection of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ are described and showed that the group of units of $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is isomorphic to the cyclic group of order two. Also in [30] the subsemigroup of idempotents of $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ and Green's relations on $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ are described. In particular, it is proved that $\mathscr{D}=\mathscr{J}$ in $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. In [31] the natural partial order $\preccurlyeq$ on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is described and it is shown that it coincides with the natural partial order the induced from symmetric inverse monoid over the set $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ onto the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$. Also, it is proved that the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ is isomorphic to the semidirect product $\mathscr{P\!O}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})\rtimes\mathbb{Z}_2$ of the monoid $\mathscr{P\!O}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$ of orientation-preserving monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ with cofinite domains and images by the cyclic group $\mathbb{Z}_2$ of order two. It is described the congruence σ on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$, which is generated by the natural order $\preccurlyeq$ on the semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})$: $\alpha\sigma\beta$ if and only if α and β are comparable in $\big(\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant}),\preccurlyeq\big)$. It is proved that the quotient semigroup $\mathscr{P\!O}^{+}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ is isomorphic to the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_{\omega}$ over an infinite countable set and it is shown that the quotient semigroup $\mathscr{P\!O}_{\infty}(\mathbb{N}^2_{\leqslant})/\sigma$ is isomorphic to the semidirect product of the free commutative monoid $\mathfrak{AM}_{\omega}$ by the group $\mathbb{Z}_2$.

In the paper [38] the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ of all partial co-finite isometries of positive integers is studied. The semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ is some generalization of the bicyclic monoid and it is a submonoid of $\mathscr{I}^{\nearrow}_{\infty}(\mathbb{N})$. Green's relations on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ and its band are described there and it is proved that $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ is a simple E-unitary F-inverse semigroup. Also there is described the least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ on $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ and it is proved that the quotient semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is isomorphic to the additive group of integers. An example of a non-group congruence on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ is presented. Also, it is proved that a congruence on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ is a group congruence if and only if its restriction onto an isomorphic copy of the bicyclic semigroup in $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ is a group congruence.

In the paper [39] submonoids of the monoid $\mathscr{I}^{\,\Rsh\!\nearrow}_{\infty}(\mathbb{N})$ of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of positive integers $\mathbb{N}$ is established. Let $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ be the subsemigroup $\mathscr{I}^{\,\Rsh\!\nearrow}_{\infty}(\mathbb{N})$ which is generated by the partial shift $n\mapsto n+1$ and its inverse partial map. In [39] it was shown that every automorphism of a full inverse subsemigroup of $\mathscr{I}^{\nearrow}_{\infty}(\mathbb{N})$ which contains the semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ is the identity map. Also there is constructed a submonoid $\mathbf{I}\mathbb{N}^{[\underline{1}]}_{\infty}$ of $\mathscr{I}^{\,\Rsh\!\nearrow}_{\infty}(\mathbb{N})$ with the following property: if S is an inverse submonoid of $\mathscr{I}^{\,\Rsh\!\nearrow}_{\infty}(\mathbb{N})$ such that S contains $\mathbf{I}\mathbb{N}^{[\underline{1}]}_{\infty}$ as a submonoid, then every non-identity congruence $\mathfrak{C}$ on S is a group congruence. Also, it is proved that if S is an inverse submonoid of $\mathscr{I}^{\,\Rsh\!\nearrow}_{\infty}(\mathbb{N})$ such that S contains $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ as a submonoid then S is simple and the quotient semigroup $S/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$, where $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is minimum group congruence on S, is isomorphic to the additive group of integers.

We observe that the semigroups of all partial co-finite isometries of integers are studied in [15, 16, 37].

The monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}^{n}$ of cofinite partial isometries of the n-th power of the set of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual metric for a positive integer $n \geqslant 2$ is studied in [40]. The semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}^{n}$ is a submonoid of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ for any positive integer $n \geqslant 2$. In [40] it is proved that for any integer $n \geqslant 2$ the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}^{n}$ is isomorphic to the semidirect product $\mathscr{S}_n \ltimes_{\mathfrak{h}} (\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{N}^n), \cup)$ of the free semilattice with the unit $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{N}^n), \cup)$ by the symmetric group $\mathscr{S}_n$.

Later in this paper we shall assume that n is an arbitrary positive integer $\geqslant 2$.

In this paper we study the semigroup of injective partial monotone selfmaps of the poset $\mathbb{N}_{\leqslant}^{n}$ with cofinite domains and images. We show that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the monoid $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ is isomorphic to the group $\mathscr{S}_n$ and describe the subgroup of idempotents of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$. Also in the case $n = 3$ we describe the property of elements of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ as partial bijections of the poset $\mathbb{N}_{\leqslant}^{n}$ and Green's relations on the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{3})$. In particular we show that $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ in $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{3})$.

2. Properties of elements of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ as monotone partial permutations

In this short section we describe properties of elements of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ as monotone partial transformations of the poset $\mathbb{N}_{\leqslant}^{n}$.

It is obvious that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ consists of exactly all order isomorphisms of the poset $\mathbb{N}_{\leqslant}^{n}$ and hence Theorem 2.8 of [28] implies the following

Theorem 1. *For any positive integer n the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ is isomorphic to the group $\mathscr{S}_n$ of permutations of an n-elements set. Moreover, every element of $H(\mathbb{I})$ permutates coordinates of elements of $\mathbb{N}^n$, and only these permutations are elements of $H(\mathbb{I})$.*

Since every $\alpha \in \mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ is a cofinite monotone partial transformation of the poset $\mathbb{N}_{\leqslant}^{n}$ the following statement holds.

Lemma 1. *If $(1. \ldots, 1) \in \operatorname{dom}\alpha$ for some $\alpha \in \mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}_{\leqslant}^{n})$ then $(1. \ldots, 1)\alpha = (1. \ldots, 1)$.*

For an arbitrary $i = 1, \ldots, n$ define

$$\mathscr{K}_i = \big\{(1, \ldots, \underbrace{m}_{i\text{th}}, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n : m \in \mathbb{N}\big\}$$

and by $\mathfrak{pr}_i \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ denote the projection onto the i-th coordinate, i.e., for every $(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ put

$$(m_1, \ldots, \underbrace{m_i}_{i\text{th}}, \ldots, m_n)\mathfrak{pr}_i = (1, \ldots, \underbrace{m_i}_{i\text{th}}, \ldots, 1).$$

Lemma 2. *Let $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\}$ be a set of points in $\mathbb{N}^n \setminus \{(1, \ldots, 1)\}$, $k \in \mathbb{N}$. Then the set $\mathbb{N}^n \setminus ({\uparrow}\overline{x}_1 \cup \ldots \cup {\uparrow}\overline{x}_k)$ is finite if and only if $k \geqslant n$ and for every $\mathscr{K}_i$, $i = 1, \ldots, n$, there exists $\overline{x}_j \in \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\}$ such that $\overline{x}_j \in \mathscr{K}_i$.*

Proof. $(\Leftarrow)$ Without loss of generality we may assume that $\overline{x}_j \in \mathscr{K}_j$ for every positive integer $j \leqslant n$. Then simple verifications imply that the set $\mathbb{N}^n \setminus ({\uparrow}\overline{x}_1 \cup \ldots \cup {\uparrow}\overline{x}_n)$ is finite, and hence so is the set $\mathbb{N}^n \setminus ({\uparrow}\overline{x}_1 \cup \ldots \cup {\uparrow}\overline{x}_k)$.

($\Rightarrow$) Suppose to the contrary that there exist a subset $\{\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_k\}\subseteq\mathbb{N}^n\setminus\{(1,\dots,1)\}$ and an integer $i\in\{1,\dots,n\}$ such that $\mathbb{N}^n\setminus(\uparrow\overline{x}_1\cup\ldots\cup\uparrow\overline{x}_k)$ is finite and $\overline{x}_j\notin\mathscr{K}_i$ for any $j\in\{1,\dots,k\}$.

The definition of $\mathscr{K}_i$ $(i=1,\dots,n)$ implies that $\mathscr{K}_i$ with the induced partial order from $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ is an ω-chain such that $\downarrow\mathscr{K}_i=\mathscr{K}_i$. Hence, for any $\overline{x}\in\mathbb{N}^n$ we have that either $\mathscr{K}_i\setminus\uparrow\overline{x}$ is finite or $\mathscr{K}_i\cap\uparrow\overline{x}=\varnothing$. Then by our assumption we get that the set $\mathbb{N}^n\setminus(\uparrow\overline{x}_1\cup\ldots\cup\uparrow\overline{x}_n)$ is infinite, a contradiction. The inequality $k\geqslant n$ follows from the above arguments. □

Later for an arbitrary non-empty subset A of $\mathbb{N}^n$ by ε_A we shall denote the identity map of the set $\mathbb{N}^n\setminus A$. It is obvious that the following lemma holds.

Lemma 3. *For an arbitrary non-empty subset A of $\mathbb{N}^n$, ε_A is an element of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$, and hence so are $\varepsilon_A\alpha$, $\alpha\varepsilon_A$, and $\varepsilon_A\alpha\varepsilon_A$ for any $\alpha\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$.*

Proposition 1. *For an arbitrary element α of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ there exists a unique permutation $\mathfrak{s}\colon\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ such that $(\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha)\alpha\subseteq\mathscr{K}_{(i)\mathfrak{s}}$ for any $i=1,\dots,n$.*

Proof. Lemma 3 implies that without loss of generality we may assume that $(1,\dots,1)\notin\operatorname{dom}\alpha$ and $(1,\dots,1)\notin\operatorname{ran}\alpha$.

Since for any $i=1,\dots,n$ the set $\mathscr{K}_i$ with the induced order from the poset $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ is an ω-chain, the set $\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha$ contains the least element $\bar{l}_i^{\alpha}$. By Lemma 2 the set $\mathbb{N}^n\setminus\left(\uparrow\bar{l}_1^{\alpha}\cup\dots\cup\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)$ is finite and hence so is $\operatorname{dom}\alpha\setminus\left(\uparrow\bar{l}_1^{\alpha}\cup\dots\cup\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)$. Since α is a cofinite partial bijection of $\mathbb{N}^n$, we have that

$$\left(\uparrow\bar{l}_1^{\alpha}\cup\dots\cup\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)\alpha=\left(\uparrow\bar{l}_1^{\alpha}\right)\alpha\cup\dots\cup\left(\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)\alpha$$

and the set $\mathbb{N}^n\setminus\left(\left(\uparrow\bar{l}_1^{\alpha}\right)\alpha\cup\dots\cup\left(\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)\alpha\right)$ is finite. Also, since α is a monotone partial bijection of the poset $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ we obtain that $\left(\uparrow\bar{l}_i^{\alpha}\right)\alpha\subseteq\uparrow\left(\bar{l}_i^{\alpha}\right)\alpha$ for all $i=1,\dots,n$. Then by Lemma 2 there exists a permutation $\mathfrak{s}\colon\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ such that $(\bar{l}_i^{\alpha})\alpha\in\mathscr{K}_{(i)\mathfrak{s}}$ for any $i=1,\dots,n$, because

$$\mathbb{N}^n\setminus\left(\uparrow\left(\bar{l}_1^{\alpha}\right)\alpha\cup\dots\cup\left(\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)\alpha\right)\subseteq\mathbb{N}^n\setminus\left(\left(\uparrow\bar{l}_1^{\alpha}\right)\alpha\cup\dots\cup\left(\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)\alpha\right)$$

and the set $\mathbb{N}^n\setminus\left(\uparrow\left(\bar{l}_1^{\alpha}\right)\alpha\cup\dots\cup\left(\uparrow\bar{l}_n^{\alpha}\right)\alpha\right)$ is finite. This implies that $(\overline{x})\alpha\in\mathscr{K}_{(i)\mathfrak{s}}$ for all $\overline{x}\in\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha$ and any $i=1,\dots,n$.

The proof of uniqueness of the permutation $\mathfrak{s}$ for $\alpha\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ is trivial. This completes the proof of the proposition. □

Theorem 1 and Proposition 1 imply the following corollary.

Corollary 1. *For every element α of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ there exists a unique element σ of the group of units $H(\mathbb{I})$ of $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ such that $(\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha)\alpha\sigma\subseteq\mathscr{K}_i$ and $(\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha)\sigma^{-1}\alpha\subseteq\mathscr{K}_i$ for all $i=1,\dots,n$.*

Lemma 4. *There is no a finite family $\{L_1,\dots,L_k\}$ of chains in the poset $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ such that $\mathbb{N}^2=L_1\cup\dots\cup L_k$. Moreover, every co-finite subset in $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ has this property.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists a positive integer k such that $\mathbb{N}^2 = L_1 \cup \cdots \cup L_k$ and L_i is a chain for each $i = 1, \ldots, k$. Then

$$\{(1, k+1), (2, k), \ldots, (k, 2), (k+1, 1)\}$$

is an anti-chain in the poset $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ which contains exactly $k+1$ elements. Without loss of generality we may assume that $L_i \cap L_j = \varnothing$ for $i \neq j$. Since $\mathbb{N}^2 = L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_k$, by the pigeonhole principle (or by the Dirichlet drawer principle, see [13, Section 7.3]) there exists a chain L_i, $i = 1, \ldots, k$, which contains at least two distinct elements of the set $\{(1, k+1), (2, k), \ldots, (k, 2), (k+1, 1)\}$, a contradiction.

Assume that A is a co-finite subset of $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ such that $A = \mathbb{N}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ for some positive integer p. For every $i = 1, \ldots, p$ we put $L_{k+i} = \{x_i\}$. Then for every finite partition $\{L_1, \ldots, L_k\}$ of A such that L_i is a chain for each $i = 1, \ldots, k$ the family $\{L_1, \ldots, L_k, L_{k+1} \ldots, L_{k+p}\}$ is a finite partition of the poset $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ such that L_i is a chain for each $i = 1, \ldots, k+p$. This contradicts the above part of the proof, and hence the second statement of the lemma holds. $\square$

For any distinct $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ we denote

$$\mathscr{K}_{i,j} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \colon x_k = 1 \ \text{ for all } \ k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}\}$$

and

$$\mathscr{K}^{\circ}_{i,j} = \mathscr{K}_{i,j} \setminus (\mathscr{K}_i \cup \mathscr{K}_j)$$

Lemma 5. *Let n be a positive integer $\geqslant 3$. Let $\overline{x}_i$ be an arbitrary element of $\mathscr{K}_i \setminus \{1, \ldots, 1\}$ for $i = 3, \ldots, n$ and $\overline{y}_{1,2}$ be an arbitrary element of $\mathscr{K}^{\circ}_{1,2}$. Then there exists a finite family $\{L_1, \ldots, L_k\}$ of chains in the poset $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ such that*

$$L_1 \cup \cdots \cup L_k = \mathbb{N}^n \setminus \left({\uparrow}\overline{y}_{1,2} \cup {\uparrow}\overline{x}_3 \cup \cdots \cup {\uparrow}\overline{x}_n\right).$$

Proof. Let $\overline{x}_i = (1, 1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i\text{th}}, \ldots, 1)$ for $i = 3, \ldots, n$ and $\overline{y}_{1,2} = (y_1, y_2, 1 \ldots, 1)$. Then for any element $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ of the set $\mathbb{N}^n \setminus \left({\uparrow}\overline{y}_{1,2} \cup {\uparrow}\overline{x}_3 \cup \cdots \cup {\uparrow}\overline{x}_n\right)$ the following conditions hold:

(*i*) $a_i < x_i$ for any $i = 3, \ldots, n$;
(*ii*) if $a_1 \geqslant y_1$ then $a_2 < y_2$;
(*iii*) if $a_2 \geqslant y_2$ then $a_1 < y_1$.

These conditions imply that

$$\mathbb{N}^n \setminus \left({\uparrow}\overline{y}_{1,2} \cup {\uparrow}\overline{x}_3 \cup \cdots \cup {\uparrow}\overline{x}_n\right) = \bigcup \{S(k_3, \ldots, k_n) \colon k_3 < x_3, \ldots, k_n < x_n\},$$

where

$$S(k_3, \ldots, k_n) = \bigcup \{L_i(k_3, \ldots, k_n) \colon i = 1, \ldots y_1 - 1\} \cup \\ \cup \bigcup \{R_j(k_3, \ldots, k_n) \colon j = 1, \ldots y_2 - 1\},$$

with

$$L_i(k_3, \ldots, k_n) = \{(i, p, k_3, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n \colon p \in \mathbb{N}\}$$

and

$$R_j(k_3, \ldots, k_n) = \{(p, j, k_3, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n \colon p \in \mathbb{N}\}.$$

We observe that for arbitrary positive integers i,j, $k_3,\ldots,k_n$ the sets $L_i(k_3,\ldots,k_n)$ and $R_j(k_3,\ldots,k_n)$ are chains in the poset $\mathbb{N}^n_\leqslant$. Since the set $\mathbb{N}^n\setminus\left({\uparrow}\overline{y}_{1,2}\cup{\uparrow}\overline{x}_3\cup\cdots\cup{\uparrow}\overline{x}_n\right)$ is the union of finitely many sets of the form $S(k_3,\ldots,k_n)$ the above arguments imply the required statement of the lemma. □

Proposition 2. *Let α be an element of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$ such that $(\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha)\alpha\subseteq\mathscr{K}_i$ for all $i=1,\ldots,n$. Then $(\mathscr{K}_{i_1,i_2}\cap\operatorname{dom}\alpha)\alpha\subseteq\mathscr{K}_{i_1,i_2}$ for all distinct $i_1,i_2=1,\ldots,n$.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists $\overline{x}\in\mathscr{K}_{i_1,i_2}\cap\operatorname{dom}\alpha$ such that $(\overline{x})\alpha\notin\mathscr{K}_{i_1,i_2}$. By Theorem 1 without loss of generality we may assume that $i_1=1$ and $i_2=2$, i.e., $\overline{x}\in\mathscr{K}_{1,2}$ and $(\overline{x})\alpha\notin\mathscr{K}_{1,2}$. By Lemma 1, $\overline{x}\neq(1,\ldots,1)$.

For every $i=3,\ldots,n$ we let $\overline{x}_i^\alpha=(1,1,\ldots,\underbrace{x_i^\alpha}_{i\text{th}},\ldots,1)\in\operatorname{dom}\alpha$ be the smallest element of $\mathscr{K}_i$ such that $(\overline{x}_i^\alpha)\alpha\neq(1,\ldots,1)$. There exists $x_{1,2}^\alpha=(x_1^\alpha,x_2^\alpha,1,\ldots,1)\in\operatorname{dom}\alpha\cap\mathscr{K}_{1,2}^\circ$ such that $\overline{x}\leqslant\overline{x}_{1,2}^\alpha$. Since $\alpha\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$, $(\overline{x})\alpha\leqslant(\overline{x}_{1,2}^\alpha)\alpha\notin\mathscr{K}_{1,2}$.

Now, the monotonicity of α implies that $\left({\uparrow}\overline{x}_{1,2}^\alpha\right)\alpha\subseteq{\uparrow}\left(\overline{x}_{1,2}^\alpha\right)\alpha$ and $({\uparrow}\overline{x}_i^\alpha)\,\alpha\subseteq{\uparrow}\left(\overline{x}_i^\alpha\right)\alpha$ for any $i=3,\ldots,n$. By our assumption we have that

$$\mathscr{K}_{1,2}\cap\operatorname{ran}\alpha\subseteq\left(\mathbb{N}^n_\leqslant\setminus\left({\uparrow}\overline{x}_{1,2}^\alpha\cup{\uparrow}\overline{x}_3^\alpha\cup\cdots\cup{\uparrow}\overline{x}_n^\alpha\right)\right)\alpha.$$

Since the partial transformation α preserves chains in the poset $\mathbb{N}^n_\leqslant$, Lemma 5 implies that the set $\mathscr{K}_{1,2}\cap\operatorname{ran}\alpha$ is a union of finitely many chains, which contradicts Lemma 4. The obtained contradiction implies the assertion of the proposition. □

Theorem 2. *Let α be an element of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha)\alpha\subseteq\mathscr{K}_i$ for all $i=1,2,3$. Then the following assertions hold:*

- (i) *if $(x_1,x_2,x_3)\in\operatorname{dom}\alpha$ and $(x_1,x_2,x_3)\alpha=(x_1^\alpha,x_2^\alpha,x_3^\alpha)$ then $x_1^\alpha\leq x_1$, $x_2^\alpha\leq x_2$ and $x_3^\alpha\leq x_3$ and hence $(\overline{x})\alpha\leqslant\overline{x}$ for any $\overline{x}\in\operatorname{dom}\alpha$;*
- (ii) *there exists a smallest positive integer n_α such that $(x_1,x_2,x_3)\alpha=(x_1,x_2,x_3)$ for all $(x_1,x_2,x_3)\in\operatorname{dom}\alpha\cap{\uparrow}(n_\alpha,n_\alpha,n_\alpha)$.*

Proof. (i) We shall prove the inequality $x_1^\alpha\leq x_1$ by induction. The proofs of the inequalities $x_2^\alpha\leq x_2$ and $x_3^\alpha\leq x_3$ are similar.

By Proposition 2 we have that if $x_1=1$ then $x_1^\alpha=1$, as well.

Next we shall show that the following statement holds:

if for some positive integer $p>1$ the inequality $x_1<p$ implies $x_1^\alpha\leq x_1$ then the equality $x_1=p$ implies $x_1^\alpha\leq x_1$, too.

Suppose to the contrary that there exists $(x_1,x_2,x_3)\in\operatorname{dom}\alpha$ such that

$$x_1=p=(x_1,x_2,x_3)\mathfrak{pr}_1,\quad (x_1,x_2,x_3)\alpha=(x_1^\alpha,x_2^\alpha,x_3^\alpha)\quad\text{and}\quad x_1+1\leqslant x_1^\alpha.$$

We define a partial map $\varpi\colon\mathbb{N}^3\rightharpoonup\mathbb{N}^3$ with $\operatorname{dom}\varpi=\mathbb{N}^3\setminus(\{1\}\times L(x_2)\times L(x_2))$ and $\operatorname{ran}\varpi=\mathbb{N}^3$ by the formula

$$(i_1,i_2,i_3)\varpi=\begin{cases}(i_1-1,i_2,i_3), & \text{if } i_2\in L(x_2) \text{ and } i_3\in L(x_2);\\ (i_1,i_2,i_3), & \text{otherwise,}\end{cases}$$

where $L(x_2)=\{1,\ldots,x_2\}$ and $L(x_3)=\{1,\ldots,x_3\}$. It is obvious that $\varpi\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$, and hence $\gamma\varpi^k\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ for any positive integer k and any $\gamma\in\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$. This observation implies that without loss of generality we may assume that $x_1^\alpha=x_1+1$. Then the assumption of the theorem implies that there exists the smallest element $(i_{\mathrm{m}},1,1)$ of $\mathscr{K}_1$ such that $i_{\mathrm{m}}^{\alpha} > x_1^{\alpha}+1$, where $(i_{\mathrm{m}}^{\alpha},1,1)=(i_{\mathrm{m}},1,1)\alpha$. Since $({\uparrow}(i_{\mathrm{m}},1,1))\alpha \subseteq {\uparrow}(i_{\mathrm{m}}^{\alpha},1,1)$, $({\uparrow}(x_1,x_2,x_3))\alpha \subseteq {\uparrow}(x_1^{\alpha},x_2^{\alpha},x_3^{\alpha})$ and the set $\mathbb{N}^3\setminus\operatorname{ran}\alpha$ is finite, our assumption implies that the set

$$\mathscr{S}_{x_1}(\alpha)=\{(x_1,p_2,p_3)\in\operatorname{dom}\alpha\colon p_2,p_3\in\mathbb{N}\}$$

is a union of finitely many subchains of the poset $(\mathbb{N}^3,\leqslant)$. This contradicts Lemma 4 because the set $\mathscr{S}_{x_1}(\alpha)$ with the induced partial order from $\mathbb{N}^3_{\leqslant}$ is order isomorphic to a cofinite subset of the poset $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$. The obtained contradiction implies the requested inequality $x_1^{\alpha}\leq x_1$ and hence we have that statement (i) holds.

The last assertion of (i) follows from the definition of the poset $\mathbb{N}^3_{\leqslant}$.

(ii) Fix an arbitrary $\alpha\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ such that $(\mathscr{K}_i\cap\operatorname{dom}\alpha)\alpha\subseteq\mathscr{K}_i$ for all $i=1,2,3$. Suppose to the contrary that for any positive integer n there exists

$$(x_1,x_2,x_3)\in\operatorname{dom}\alpha\cap{\uparrow}(n,n,n)$$

such that $(x_1,x_2,x_3)\alpha\neq(x_1,x_2,x_3)$. We put $\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha}=\left|\mathbb{N}^3\setminus\operatorname{dom}\alpha\right|+1$ and

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_{\operatorname{dom}\alpha}=\max\big\{&\{x_1\colon(x_1,x_2,x_3)\notin\operatorname{dom}\alpha\},\{x_2\colon(x_1,x_2,x_3)\notin\operatorname{dom}\alpha\},\\&\{x_3\colon(x_1,x_2,x_3)\notin\operatorname{dom}\alpha\}\big\}+1.\end{aligned}$$

The definition of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ implies that the positive integers $\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha}$ and $\mathsf{M}_{\operatorname{dom}\alpha}$ are well defined. Put $n_0=\max\{\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha},\mathsf{M}_{\operatorname{dom}\alpha}\}$. Then our assumption implies that there exists $(x_1,x_2,x_3)\in\operatorname{dom}\alpha\cap{\uparrow}(n_0,n_0,n_0)$ such that

$$(x_1,x_2,x_3)\alpha=(x_1^{\alpha},x_2^{\alpha},x_3^{\alpha})\neq(x_1,x_2,x_3).$$

By statement (i) we have that $(x_1^{\alpha},x_2^{\alpha},x_3^{\alpha})<(x_1,x_2,x_3)$. We consider the case when $x_1^{\alpha}<x_1$. In the cases when $x_2^{\alpha}<x_2$ or $x_3^{\alpha}<x_3$ the proofs are similar. We assume that $x_1\leqslant x_2$ and $x_1\leqslant x_3$. By statement (i) the partial bijection α maps the set $S=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3\colon x,y,z\leqslant x_1-1\big\}$ into itself. Also, by the definition of the semigroup $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ the partial bijection α maps the set

$$\{(x_1,1,1),\ldots,(x_1,1,x_1),(x_1,2,1),\ldots,(x_1,2,x_1),\ldots,(x_1,x_1,1),\ldots,(x_1,x_1,x_1)\}$$

into S, too. Then our construction implies that

$$|S\setminus\operatorname{dom}\alpha|=\left|\mathbb{N}^3\setminus\operatorname{dom}\alpha\right|=\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha}-1$$

and

$$|\{(x_1,1,1),\ldots,(x_1,1,x_1),(x_1,2,1),\ldots,(x_1,2,x_1),\ldots,(x_1,x_1,1),\ldots,(x_1,x_1,x_1)\}|\geqslant\mathsf{N}_{\operatorname{dom}\alpha},$$

a contradiction. In the case when $x_2\leqslant x_1$ and $x_2\leqslant x_3$ or $x_3\leqslant x_1$ and $x_3\leqslant x_2$ we get contradictions in similar ways. This completes the proof of existence of such a positive integer n_α for any $\alpha\in\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$. The existence of such minimal positive integer n_α follows from the fact that the set of all positive integers with the usual order $\leqslant$ is well-ordered. $\square$

Theorem 2(iii) and Proposition 1 imply the following corollary.

Corollary 2. *For an arbitrary element α of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ there exist elements σ_1, σ_2 of the group of units $H(\mathbb{I})$ of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ and a smallest positive integer n_α such that*

$$(x_1, x_2, x_3)\sigma_1\alpha = (x_1, x_2, x_3)\alpha\sigma_2 = (x_1, x_2, x_3)$$

for each $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{dom}\alpha \cap {\uparrow}(n_\alpha, n_\alpha, n_\alpha)$.

Corollary 2 implies

Corollary 3. $\left|\mathbb{N}^3 \setminus \operatorname{ran}\alpha\right| \leqslant \left|\mathbb{N}^3 \setminus \operatorname{dom}\alpha\right|$ *for an arbitrary $\alpha \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$.*

3. Algebraic properties of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$

Proposition 3. *Let X be a non-empty set and let $\mathscr{PB}(X)$ be a semigroup of partial bijections of X with the usual composition of partial self-maps. Then an element α of $\mathscr{PB}(X)$ is an idempotent if and only if α is an identity partial self-map of X.*

Proof. The implication $(\Leftarrow)$ is trivial.

$(\Rightarrow)$ Let an element α be an idempotent of the semigroup $\mathscr{PB}(X)$. Then for every $x \in \operatorname{dom}\alpha$ we have that $(x)\alpha\alpha = (x)\alpha$ and hence we get that $\operatorname{dom}\alpha^2 = \operatorname{dom}\alpha$ and $\operatorname{ran}\alpha^2 = \operatorname{ran}\alpha$. Also since α is a partial bijective self-map of X we conclude that the previous equalities imply that $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{ran}\alpha$. Fix an arbitrary $x \in \operatorname{dom}\alpha$ and suppose that $(x)\alpha = y$. Then $(x)\alpha = (x)\alpha\alpha = (y)\alpha = y$. Since α is a partial bijective self-map of the set X, we have that the equality $(y)\alpha = y$ implies that the full preimage of y under the partial map α is equal to y. Similarly the equality $(x)\alpha = y$ implies that the full preimage of y under the partial map α is equal to x. Thus we get that $x = y$ and our implication holds. □

Proposition 3 implies the following corollary.

Corollary 4. *An element α of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$ is an idempotent if and only if α is an identity partial self-map of $\mathbb{N}^n_\leqslant$ with the cofinite domain.*

Corollary 4 implies the following proposition.

Proposition 4. *Let n be a positive integer $\geqslant 2$. The subset of idempotents $E(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant))$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$ is a commutative submonoid of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$ and moreover $E(\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant))$ is isomorphic to the free semilattice with unit $(\mathscr{P}^*(\mathbb{N}^n), \cup)$ over the set $\mathbb{N}^n$ under the map $(\varepsilon)\mathfrak{h} = \mathbb{N}^n \setminus \operatorname{dom}\varepsilon$.*

Later we shall need the following technical lemma.

Lemma 6. *Let X be a non-empty set, $\mathscr{PB}(X)$ be the semigroup of partial bejections of X with the usual composition of partial self-maps and $\alpha \in \mathscr{PB}(X)$. Then the following assertions hold:*

(i) *$\alpha = \gamma\alpha$ for some $\gamma \in \mathscr{PB}(X)$ if and only if the restriction $\gamma|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \to X$ is an identity partial map;*
(ii) *$\alpha = \alpha\gamma$ for some $\gamma \in \mathscr{PB}(X)$ if and only if the restriction $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \to X$ is an identity partial map.*

Proof. (i) The implication $(\Leftarrow)$ is trivial.

$(\Rightarrow)$ Suppose that $\alpha = \gamma\alpha$ for some $\gamma \in \mathscr{PB}(X)$. Then $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{dom}\gamma$ and $\operatorname{dom}\alpha \subseteq \operatorname{ran}\gamma$. Since $\gamma\colon X \rightharpoonup X$ is a partial bijection, the above arguments imply that $(x)\gamma = x$ for each $x \in \operatorname{dom}\alpha$. Indeed, if $(x)\gamma = y \neq x$ for some $y \in \operatorname{dom}\alpha$ then since $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ is a partial bijection we have that either

$$(x)\alpha = (x)\gamma\alpha = (y)\alpha \neq (x)\alpha, \qquad \text{if} \quad y \in \operatorname{dom}\alpha,$$

or $(y)\alpha$ is undefined. This completes the proof of the implication.

The proof of (ii) is similar to that of (i). $\square$

Lemma 6 implies the following corollary.

Corollary 5. *Let n be a positive integer $\geqslant 2$ and α be an element of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$. Then the following assertions hold:*

- (i) *$\alpha = \gamma\alpha$ for some $\gamma \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$ if and only if the restriction $\gamma|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \to \mathbb{N}^n$ is an identity partial map;*
- (ii) *$\alpha = \alpha\gamma$ for some $\gamma \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^n_\leqslant)$ if and only if the restriction $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha}\colon \operatorname{ran}\alpha \to \mathbb{N}^n$ is an identity partial map.*

The following theorem describes Green's relations $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ and $\mathscr{D}$ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$.

Theorem 3. *Let α and β be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$. Then the following assertions hold:*

- (i) *$\alpha\mathscr{L}\beta$ if and only if $\alpha = \mu\beta$ for some $\mu \in H(\mathbb{I})$;*
- (ii) *$\alpha\mathscr{R}\beta$ if and only if $\alpha = \beta\nu$ for some $\nu \in H(\mathbb{I})$;*
- (iii) *$\alpha\mathscr{H}\beta$ if and only if $\alpha = \mu\beta = \beta\nu$ for some $\mu, \nu \in H(\mathbb{I})$;*
- (iv) *$\alpha\mathscr{D}\beta$ if and only if $\alpha = \mu\beta\nu$ for some $\mu, \nu \in H(\mathbb{I})$.*

Proof. (i) The implication $(\Leftarrow)$ is trivial.

$(\Rightarrow)$ Suppose that $\alpha\mathscr{L}\beta$ in the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$. Then there exist $\gamma, \delta \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $\alpha = \gamma\beta$ and $\beta = \delta\alpha$. The last equalities imply that $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$.

Next, we consider the following cases:

- (i_1) $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \subseteq \mathscr{K}_i$ and $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\beta \subseteq \mathscr{K}_j$ for all $i, j = 1, 2, 3$;
- (i_2) $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \subseteq \mathscr{K}_i$ for all $i = 1, 2, 3$ and $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\beta \nsubseteq \mathscr{K}_j$ for some $j = 1, 2, 3$;
- (i_3) $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \nsubseteq \mathscr{K}_i$ for some $i = 1, 2, 3$ and $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\beta \subseteq \mathscr{K}_j$ for all $j = 1, 2, 3$;
- (i_4) $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \nsubseteq \mathscr{K}_i$ and $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\beta \nsubseteq \mathscr{K}_j$ for some $i, j = 1, 2, 3$.

Suppose that case (i_1) holds. Then Proposition 1 and the equalities $\alpha = \gamma\beta$ and $\beta = \delta\alpha$ imply that

$$(1) \qquad (\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\gamma)\gamma \subseteq \mathscr{K}_i \qquad \text{and} \qquad (\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\delta)\delta \subseteq \mathscr{K}_j, \quad \text{for all} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

and moreover we have that $\alpha = \gamma\delta\alpha$ and $\beta = \delta\gamma\beta$. Hence by Lemma 6 we have that the restrictions $(\gamma\delta)|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ and $(\delta\gamma)|_{\operatorname{dom}\beta}\colon \operatorname{dom}\beta \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ are identity partial maps. Then by condition (1) we obtain that the restrictions $\gamma|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ and $\delta|_{\operatorname{dom}\beta}\colon \operatorname{dom}\beta \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ are identity partial maps, as well. Indeed, otherwise there exists

$\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$ such that either $(\overline{x})\gamma \nleqslant \overline{x}$ or $(\overline{x})\delta \nleqslant \overline{x}$, which contradicts Theorem 2(ii). Thus, the above arguments imply that in case (i_1) we have the equality $\alpha = \beta$.

Suppose that case (i_2) holds. By Corollary 1 there exists an element μ of the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\mu\beta \subseteq \mathscr{K}_j$ for all $j = 1, 2, 3$, and, since $\alpha\mathscr{L}\beta$, we have that

$$\alpha = \gamma\beta = \gamma\mathbb{I}\beta = \gamma(\mu^{-1}\mu)\beta = (\gamma\mu^{-1})(\mu\beta)$$

and $\mu\beta = (\mu\delta)\alpha$. Hence we get that $\alpha\mathscr{L}(\mu\beta)$, $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \subseteq \mathscr{K}_i$ and $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\mu\beta \subseteq \mathscr{K}_j$ for all $i, j = 1, 2, 3$. Then we apply case (i_1) for the elements α and $\mu\beta$ and obtain the equality $\alpha = \mu\beta$, where μ is the above determined element of the group of units $H(\mathbb{I})$.

In case (i_3) the proof of the equality $\alpha = \mu\beta$ is similar to case (i_2).

Suppose that case (i_4) holds. By Corollary 1 there exist elements μ_α and μ_β of the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\alpha)\mu_\alpha\alpha \subseteq \mathscr{K}_j$ and $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\mu_\beta\beta \subseteq \mathscr{K}_j$ for all $i, j = 1, 2, 3$, and, since $\alpha\mathscr{L}\beta$, we have that

$$\alpha = \gamma\beta = \gamma\mathbb{I}\beta = \gamma(\mu_\beta^{-1}\mu_\beta)\beta = (\gamma\mu_\beta^{-1})(\mu_\beta\beta)$$

and

$$\beta = \delta\alpha = \delta\mathbb{I}\alpha = \delta(\mu_\alpha^{-1}\mu_\alpha)\alpha = (\delta\mu_\alpha^{-1})(\mu_\alpha\alpha).$$

Hence we get that

$$\mu_\alpha\alpha = (\mu_\alpha\gamma\mu_\beta^{-1})(\mu_\beta\beta) \qquad \text{and} \qquad \mu_\beta\beta = (\mu_\beta\delta\mu_\alpha^{-1})(\mu_\alpha\alpha).$$

The last two equalities imply that $(\mu_\beta\beta)\mathscr{L}(\mu_\alpha\alpha)$ and by above part of the proof we have that $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\alpha)\mu_\alpha\alpha \subseteq \mathscr{K}_j$ and $(\mathscr{K}_j \cap \operatorname{dom}\beta)\mu_\beta\beta \subseteq \mathscr{K}_j$ for all $i, j = 1, 2, 3$. Then we apply case (i_1) for the elements $\mu_\alpha\alpha$ and $\mu_\beta\beta$ and obtain the equality $\mu_\alpha\alpha = \mu_\beta\beta$. Hence $\alpha = \mu_\alpha^{-1}\mu_\alpha\alpha = \mu_\alpha^{-1}\mu_\beta\beta$. Since $\mu_\alpha, \mu_\alpha \in H(\mathbb{I})$, $\mu = \mu_\alpha^{-1}\mu_\beta \in H(\mathbb{I})$ as well.

The proof of assertion (ii) is dual to that of (i).

Assertion (iii) follows from (i) and (ii).

(iv) Suppose that $\alpha\mathscr{D}\beta$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$. Then there exists $\gamma \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $\alpha\mathscr{L}\gamma$ and $\gamma\mathscr{R}\beta$. By statements (i) and (ii) there exist $\mu, \nu \in H(\mathbb{I})$ such that $\alpha = \mu\gamma$ and $\gamma = \beta\nu$ and hence $\alpha = \mu\beta\nu$. Converse, suppose that $\alpha = \mu\beta\nu$ for some $\mu, \nu \in H(\mathbb{I})$. Then by (i), (ii), we have that $\alpha\mathscr{L}(\beta\nu)$ and $(\beta\nu)\mathscr{R}\beta$, and hence $\alpha\mathscr{D}\beta$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$. $\square$

Theorem 3 implies Corollary 6 which gives the inner characterization of Green's relations $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, and $\mathscr{H}$ on the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ as partial permutations of the poset $\mathbb{N}^3_\leqslant$.

Corollary 6. *(i) Every $\mathscr{L}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ contains exactly 6 distinct elements.*

(ii) Every $\mathscr{R}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ contains exactly 6 distinct elements.

(iii) Every $\mathscr{H}$-class of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ contains at most 6 distinct elements.

Proof. Statements (i), (ii) and (iii) are trivial and they follow from the corresponding statements of Theorem 3. $\square$

Lemma 7. *Let α, β and γ be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $\alpha = \beta\alpha\gamma$. Then the following statements hold:*

(*i*) *if* $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\beta)\beta \subseteq \mathscr{K}_i$ *for any* $i = 1, 2, 3$, *then the restrictions* $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ *and* $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ *are identity partial maps;*

(*ii*) *if* $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\gamma)\gamma \subseteq \mathscr{K}_i$ *for any* $i = 1, 2, 3$, *then the restrictions* $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ *and* $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ *are identity partial maps;*

(*iii*) *there exist elements* σ_β *and* σ_γ *of the group of units* $H(\mathbb{I})$ *of* $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ *such that* $\alpha = \sigma_\beta \alpha \sigma_\gamma$.

Proof. (*i*) Assume that the inclusion $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\beta)\beta \subseteq \mathscr{K}_i$ holds for any $i = 1, 2, 3$. Then one of the following cases holds:

(1) $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$;

(2) there exists $i \in \{1, 2, 3\}$ such that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \nsubseteq \mathscr{K}_i$.

If case (1) holds then the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$ and Proposition 1 imply that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\gamma)\gamma \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$. Suppose that $(\overline{x})\beta < \overline{x}$ for some $\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$. Then by Theorem 2(*i*) we have that

$$(\overline{x})\alpha = (\overline{x})\beta\alpha\gamma < (\overline{x})\alpha\gamma \leqslant (\overline{x})\alpha,$$

which contradicts the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$. The obtained contradiction implies that the restriction $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map. This and the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$ imply that the restriction $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map too.

Suppose that case (2) holds. Then by Corollary 1 there exists an element σ of the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha\sigma \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$. Now, the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$ implies that

$$\alpha\sigma = \beta\alpha\gamma\sigma = \beta\alpha\mathbb{I}\gamma\sigma = \beta\alpha(\sigma\sigma^{-1})\gamma\sigma = \beta(\alpha\sigma)(\sigma^{-1}\gamma\sigma).$$

By case (1) we have that the restrictions $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map, which implies that $\beta\alpha = \alpha$. Then we have that $\alpha = \beta\alpha\gamma = \alpha\gamma$ and hence by Corollary 5 the restriction $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map, which completes the proof of statement (*i*).

(*ii*) The proof of this statement is dual to (*i*). Indeed, assume that the inclusion $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\gamma)\gamma \subseteq \mathscr{K}_i$ holds for any $i = 1, 2, 3$. Then one of the following cases holds:

(1) $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$;

(2) there exists $i \in \{1, 2, 3\}$ such that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha \nsubseteq \mathscr{K}_i$.

If case (1) holds then the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$ and Proposition 1 imply that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\beta)\beta \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$. Similarly as in the proof of statement (*i*) Theorem 2(*i*) implies that the restrictions $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ and $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ are identity partial maps.

Suppose that case (2) holds. Then by Corollary 1 there exists an element σ of the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\sigma\alpha \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$. Now, the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$ implies that

$$\sigma\alpha = \sigma\beta\alpha\gamma = \sigma\beta\mathbb{I}\alpha\gamma = \sigma\beta(\sigma^{-1}\sigma)\alpha\gamma = (\sigma\beta\sigma^{-1})(\sigma\alpha)\gamma.$$

By case (1) we have that the restriction $\gamma|_{\operatorname{ran}\alpha} \colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map, which implies that $\alpha = \alpha\gamma$. Then we have that $\alpha = \beta\alpha\gamma = \beta\alpha$ and hence by Corollary 5 the restriction $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} \colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map as well, which completes the proof of statement (*ii*).

(iii) Assume that $\alpha = \beta\alpha\gamma$. By the Lagrange Theorem (see: [41, Section 1.5]) for every element σ of the group of permutations $\mathscr{S}_n$ the order of σ divides the order of $\mathscr{S}_n$. This, Proposition 1 and the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$ imply that

$$(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\beta^6)\beta^6 \subseteq \mathscr{K}_i \qquad \text{and} \qquad (\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\gamma^6)\gamma^6 \subseteq \mathscr{K}_i, \qquad \text{for any} \quad i = 1,2,3. \tag{2}$$

Also, the equality $\alpha = \beta\alpha\gamma$ implies that

$$\alpha = \beta\alpha\gamma = \beta(\beta\alpha\gamma)\gamma = \beta^2\alpha\gamma^2 = \ldots = \beta^6\alpha\gamma^6.$$

Then statements (i), (ii) and conditions (2) imply that the restrictions $\beta^6|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ and $\gamma^6|_{\operatorname{ran}\alpha}\colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ are identity partial maps. By Corollary 1 there exist unique elements $\sigma_\beta, \sigma_\gamma \in H(\mathbb{I})$ such that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\beta)\beta\sigma_\beta^{-1} \subseteq \mathscr{K}_i$, $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\beta)\sigma_\beta\beta \subseteq \mathscr{K}_i$, $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\gamma\sigma_\gamma^{-1} \subseteq \mathscr{K}_i$ and $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\gamma)\sigma_\gamma\gamma \subseteq \mathscr{K}_i$ for all $i = 1,2,3$. Then we have that

$$\begin{aligned} \beta^6 &= (\beta\mathbb{I}\beta)(\beta\mathbb{I}\beta)(\beta\mathbb{I}\beta) \\ &= (\beta\sigma_\beta^{-1}\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1}\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1}\sigma_\beta\beta) \\ &= (\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta) \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned} \gamma^6 &= (\gamma\mathbb{I}\gamma)(\gamma\mathbb{I}\gamma)(\gamma\mathbb{I}\gamma) \\ &= (\gamma\sigma_\gamma^{-1}\sigma_\gamma\gamma)(\gamma\sigma_\gamma^{-1}\sigma_\gamma\gamma)(\gamma\sigma_\gamma^{-1}\sigma_\gamma\gamma) \\ &= (\gamma\sigma_\gamma^{-1})(\sigma_\gamma\gamma)(\gamma\sigma_\gamma^{-1})(\sigma_\gamma\gamma)(\gamma\sigma_\gamma^{-1})(\sigma_\gamma\gamma). \end{aligned} \tag{4}$$

We claim that $(\overline{x})(\beta\sigma_\beta^{-1}) = \overline{x}$ for any $\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$. Assume that $(\overline{x})(\beta\sigma_\beta^{-1}) \neq \overline{x}$ for some $\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$. Then the choice of the element $\sigma_\beta \in H(\mathbb{I})$, Theorem 2$(i)$ and (3) imply that

$$\begin{aligned} (\overline{x})\beta^6 &= (\overline{x})(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta) \\ &< (\overline{x})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta) \\ &\leqslant (\overline{x})(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta) \\ &< (\overline{x})(\sigma_\beta\beta)(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta) \\ &\leqslant (\overline{x})(\beta\sigma_\beta^{-1})(\sigma_\beta\beta) \\ &< (\overline{x})(\sigma_\beta\beta) \\ &\leqslant \overline{x}, \end{aligned}$$

which contradicts the fact that the restriction $\beta^6|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map. Hence we have that $(\overline{x})(\beta\sigma_\beta^{-1}) = \overline{x}$ for any $\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$, which implies that the equality $(\overline{x})\beta = (\overline{x})\sigma_\beta$ holds for any $\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$.

Using (4) as in the above we prove the equality $(\overline{x})\gamma = (\overline{x})\sigma_\gamma$ holds for any $\overline{x} \in \operatorname{ran}\alpha$.

The obtained equalities and the definition of the composition of partial maps imply statement (iii). □

Lemma 8. *Let α and β be elements of the semigroup $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ and A be a cofinite subset of $\mathbb{N}^3$. If the restriction $(\alpha\beta)|_A\colon A \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ is an identity partial map then there exists an element σ of the group of units $H(\mathbb{I})$ of $\mathscr{P\!O}_\infty(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ such that $(\overline{x})\alpha = (\overline{x})\sigma$ and $(\overline{y})\beta = (\overline{y})\sigma^{-1}$ for all $\overline{x} \in A$ and $\overline{y} \in (A)\alpha$.*

Proof. We observe that one of the following cases holds:

(1) $(\mathscr{K}_i \cap A)\alpha \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$;
(2) there exists $i \in \{1, 2, 3\}$ such that $(\mathscr{K}_i \cap A)\alpha \nsubseteq \mathscr{K}_i$.

If case (1) holds then the assumption of the lemma and Proposition 1 imply that $(\mathscr{K}_i \cap (A)\alpha)\beta \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$. Suppose that $(\overline{x})\alpha < \overline{x}$ for some $\overline{x} \in A$. Then by Theorem 2(i) we have that

$$(\overline{x})\alpha\beta < (\overline{x})\beta \leqslant \overline{x},$$

which contradicts the assumption of the lemma. Similarly we show that the case $(\overline{y})\beta < \overline{y}$ for some $\overline{y} \in (A)\alpha$ does not hold. The obtained contradiction implies that $(\overline{x})\alpha = \overline{x}$ and $(\overline{x})\beta = \overline{x}$ for all $\overline{x} \in A$.

Suppose that case (2) holds. Then by Corollary 1 there exists an element σ of the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}\alpha)\alpha\sigma \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$. Now, the assumption of the lemma implies that

$$(\overline{x})\alpha\beta = (\overline{x})\alpha\mathbb{I}\beta = (\overline{x})\alpha\sigma\sigma^{-1}\beta = \overline{x},$$

and hence by the above part of the proof we get that $(\overline{x})\alpha\sigma = \overline{x}$ and $(\overline{y})\sigma^{-1}\beta = \overline{x}$ for all $\overline{y} \in (A)\alpha$. The obtained equalities and the definition of the composition of partial maps imply the statement of the lemma. □

Lemma 9. *Let α, β, γ and δ be elements of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $\alpha = \gamma\beta\delta$. Then there exist $\gamma^*, \delta^* \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $\alpha = \gamma^*\beta\delta^*$, $\operatorname{dom}\gamma^* = \operatorname{dom}\alpha$, $\operatorname{ran}\gamma^* = \operatorname{dom}\beta$, $\operatorname{dom}\delta^* = \operatorname{ran}\beta$ and $\operatorname{ran}\delta^* = \operatorname{ran}\alpha$.*

Proof. For a cofinite subset A of $\mathbb{N}^3$ by ι_A we denote the identity map of A. It is obvious that $\iota_A \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ for any cofinite subset A of $\mathbb{N}^3$. This implies that $\alpha = \iota_{\operatorname{dom}\alpha}\alpha\iota_{\operatorname{ran}\alpha}$ and $\beta = \iota_{\operatorname{dom}\beta}\beta\iota_{\operatorname{ran}\beta}$, and hence we have that

$$\alpha = \iota_{\operatorname{dom}\alpha}\alpha\iota_{\operatorname{ran}\alpha} = \iota_{\operatorname{dom}\alpha}\gamma\beta\delta\iota_{\operatorname{ran}\alpha} = \iota_{\operatorname{dom}\alpha}\gamma\iota_{\operatorname{dom}\beta}\beta\iota_{\operatorname{ran}\beta}\delta\iota_{\operatorname{ran}\alpha}.$$

We put $\gamma^* = \iota_{\operatorname{dom}\alpha}\gamma\iota_{\operatorname{dom}\beta}$ and $\delta^* = \iota_{\operatorname{ran}\beta}\delta\iota_{\operatorname{ran}\alpha}$. The above two equalities and the definition of the semigroup operation of $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ imply that $\operatorname{dom}\gamma^* \subseteq \operatorname{dom}\alpha$, $\operatorname{ran}\gamma^* \subseteq \operatorname{dom}\beta$, $\operatorname{dom}\delta^* \subseteq \operatorname{ran}\beta$ and $\operatorname{ran}\delta^* \subseteq \operatorname{ran}\alpha$. Similar arguments and the equality $\alpha = \gamma^*\beta\delta^*$ imply the converse inclusions which implies the statement of the lemma. □

Theorem 4. *$\mathscr{D} = \mathscr{J}$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$.*

Proof. The inclusion $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ is trivial.

Fix any $\alpha, \beta \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $\alpha\mathscr{J}\beta$. Then there exist $\gamma_\alpha, \delta_\alpha, \gamma_\beta, \delta_\beta \in \mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $\alpha = \gamma_\alpha\beta\delta_\alpha$ and $\beta = \gamma_\beta\alpha\delta_\beta$ (see [22] or [23, Section II.1]). By Lemma 9 without loss of generality we may assume that

$$\operatorname{dom}\gamma_\alpha = \operatorname{dom}\alpha, \qquad \operatorname{ran}\gamma_\alpha = \operatorname{dom}\beta, \qquad \operatorname{dom}\delta_\alpha = \operatorname{ran}\beta, \qquad \operatorname{ran}\delta_\alpha = \operatorname{ran}\alpha$$

and

$$\operatorname{dom}\gamma_\beta = \operatorname{dom}\beta, \qquad \operatorname{ran}\gamma_\beta = \operatorname{dom}\alpha, \qquad \operatorname{dom}\delta_\beta = \operatorname{ran}\alpha, \qquad \operatorname{ran}\delta_\beta = \operatorname{ran}\beta.$$

Hence we have that $\alpha = \gamma_\alpha\gamma_\beta\alpha\delta_\beta\delta_\alpha$ and $\beta = \gamma_\beta\gamma_\alpha\beta\delta_\alpha\delta_\beta$. Then only one of the following cases holds:

(1) $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}(\gamma_\alpha\gamma_\beta))\gamma_\alpha\gamma_\beta \subseteq \mathscr{K}_i$ for any $i = 1, 2, 3$;
(2) there exists $i \in \{1, 2, 3\}$ such that $(\mathscr{K}_i \cap \operatorname{dom}(\gamma_\alpha\gamma_\beta))\gamma_\alpha\gamma_\beta \nsubseteq \mathscr{K}_i$.

If case (1) holds then Lemma 7(i) implies that $(\gamma_\alpha\gamma_\beta)\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ and $(\delta_\beta\delta_\alpha)\colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ are identity partial maps. Now by Lemma 8 there exist elements σ_α and σ_β of the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\overline{x})\gamma_\alpha = (\overline{x})\sigma_\alpha$, $(\overline{y})\gamma_\beta = (\overline{y})\sigma_\alpha^{-1}$, $(\overline{u})\delta_\beta = (\overline{u})\sigma_\beta$ and $(\overline{v})\delta_\alpha = (\overline{v})\sigma_\beta^{-1}$, for all $\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$, $\overline{y} \in (\operatorname{dom}\alpha)\gamma_\alpha = \operatorname{ran}\gamma_\alpha = \operatorname{dom}\beta$, $\overline{u} \in \operatorname{ran}\alpha$ and $\overline{v} \in (\operatorname{ran}\alpha)\delta_\beta = \operatorname{ran}\delta_\beta = \operatorname{ran}\beta$. Then the above arguments imply that $\alpha = \sigma_\alpha\beta\sigma_\beta^{-1}$ and hence by Theorem 3(iv) we get that $\alpha\mathscr{D}\beta$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$.

If case (2) holds then we have that

$$\alpha = \gamma_\alpha\gamma_\beta\alpha\delta_\beta\delta_\alpha = (\gamma_\alpha\gamma_\beta)^2\alpha(\delta_\beta\delta_\alpha)^2 = \ldots = (\gamma_\alpha\gamma_\beta)^6\alpha(\delta_\beta\delta_\alpha)^6$$

and

$$\beta = \gamma_\beta\gamma_\alpha\beta\delta_\alpha\delta_\beta = (\gamma_\beta\gamma_\alpha)^2\beta(\delta_\alpha\delta_\beta)^2 = \ldots = (\gamma_\beta\gamma_\alpha)^6\beta(\delta_\alpha\delta_\beta)^6.$$

We put

$$\gamma_\beta^\circ = \gamma_\beta(\gamma_\alpha\gamma_\beta)^5 \qquad \text{and} \qquad \delta_\beta^\circ = \delta_\beta(\delta_\alpha\delta_\beta)^5.$$

Lemma 7(i) implies that $(\gamma_\alpha\gamma_\beta^\circ)\colon \operatorname{dom}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ and $(\delta_\beta^\circ\delta_\alpha)\colon \operatorname{ran}\alpha \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ are identity partial maps. Now by Lemma 8 there exist elements σ_α and σ_β of the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$ such that $(\overline{x})\gamma_\alpha = (\overline{x})\sigma_\alpha$, $(\overline{y})\gamma_\beta^\circ = (\overline{y})\sigma_\alpha^{-1}$, $(\overline{u})\delta_\beta^\circ = (\overline{u})\sigma_\beta$ and $(\overline{v})\delta_\alpha = (\overline{v})\sigma_\beta^{-1}$, for all $\overline{x} \in \operatorname{dom}\alpha$, $\overline{y} \in (\operatorname{dom}\alpha)\gamma_\alpha = \operatorname{ran}\gamma_\alpha = \operatorname{dom}\beta$, $\overline{u} \in \operatorname{ran}\alpha$ and $\overline{v} \in (\operatorname{ran}\alpha)\delta_\beta^\circ = \operatorname{ran}\delta_\beta^\circ = \operatorname{ran}\beta$. Then the above arguments imply that $\alpha = \sigma_\alpha\beta\sigma_\beta^{-1}$ and hence by Theorem 3(iv) we get that $\alpha\mathscr{D}\beta$ in $\mathscr{PO}_\infty(\mathbb{N}^3_\leqslant)$. $\square$

Acknowledgements

We thank the referee for many comments and suggestions.

References

1. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis, Hamburg, 1952.
2. L. W. Anderson, R. P. Hunter, and R. J. Koch, *Some results on stability in semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 521–529. DOI: 10.2307/1994222
3. T. Banakh, S. Dimitrova, and O. Gutik, *The Rees-Suschkiewitsch Theorem for simple topological semigroups*, Mat. Stud. **31** (2009), no. 2, 211–218.
4. T. Banakh, S. Dimitrova, and O. Gutik, *Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups*, Topology Appl. **157** (2010), no. 18, 2803–2814. DOI: 10.1016/j.topol.2010.08.020
5. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **13** (2016), 21–28.
6. S. Bardyla, *On a semitopological α-bicyclic monoid*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **81** (2016), 9–22.
7. S. Bardyla, *On locally compact shift-continuous topologies on the α-bicyclic monoid*, Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 34–42. DOI: 10.1515/taa-2018-0003
8. S. Bardyla, *On locally compact semitopological graph inverse semigroups*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 19–28. DOI: 10.15330/ms.49.1.19-28
9. S. Bardyla, *On locally compact topological graph inverse semigroups*, Topology Appl. **267** (2019), 106873. DOI: 10.1016/j.topol.2019.106873

10. S. Bardyla, *Embedding of graph inverse semigroups into CLP-compact topological semigroups*, Topology Appl. **272** (2020), 107058. DOI: 10.1016/j.topol.2020.107058
11. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
12. S. Bardyla and A. Ravsky, *Closed subsets of compact-like topological spaces*, Preprint arXiv:1907.12129.
13. G. Berman and K. D. Fryer, *Introduction to combinatorics*, New-York, Academic Press, 1972.
14. M. O. Bertman and T. T. West, *Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups*, Proc. Roy. Irish Acad. **A76** (1976), no. 21–23, 219–226.
15. O. Bezushchak, *On growth of the inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers*, Algebra Discrete Math. (2004), no. 2, 45–55.
16. O. Bezushchak, *Green's relations of the inverse semigroup of partially defined co-finite isometries of discrete line*, Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2008), no. 1, 12–16.
17. P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge Univ. Press, London, 1999.
18. I. Chuchman and O. Gutik, *Topological monoids of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of the set of positive integers*, Carpathian Math. Publ. **2** (2010), no. 1, 119–132.
19. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic theory of semigroups*, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
20. C. Eberhart and J. Selden, *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 115–126. DOI: 10.2307/1995273
21. I. R. Fihel and O. V. Gutik, *On the closure of the extended bicyclic semigroup*, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no. 2, 131–157.
22. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. (2) **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
23. P. A. Grillet, *Semigroups. An Iintroduction to the structure theory*, Marcel Dekker, New York, 1995.
24. O. Gutik, *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **80** (2015), 33–41.
25. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups*, Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008
26. O. Gutik and K. Maksymyk, *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **82** (2016), 98–108.
27. O. V. Gutik and K. M. Maksymyk, *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **59** (2016), no. 4, 31–43; **reprinted version**: J. Math. Sci. **238** (2019), no. 1, 32–45 DOI: 10.1007/s10958-019-04216-x
28. O. Gutik and T. Mokrytskyi, *The monoid of order isomorphisms between principal filters of* $\mathbb{N}^n$, Eur. J. Math. **6** (2020), no. 1, 14–36. DOI: 10.1007/s40879-019-00328-5
29. O. V. Gutik and I. V. Pozdniakova, *Congruences on the monoid of monotone injective partial selfmaps of* $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ *with co-finite domains and images*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **57** (2014), no. 2, 7–15; **reprinted version**: J. Math. Sci. **217** (2016), no. 2, 139–148. DOI: 10.1007/s10958-016-2962-3
30. O. Gutik and I. Pozdniakova, *On the monoid of monotone injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ *with cofinite domains and images*, Visn. Lviv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **81** (2016), 101–116.

31. O. Gutik and I. Pozdniakova, *On the monoid of monotone injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}^2_{\leqslant}$ *with cofinite domains and images, II*, Visn. Lviv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **82** (2016), 109–127.
32. O. Gutik and I. Pozdnyakova, On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images, Algebra Discrete Math. **17** (2014), no. 2, 256–279.
33. O. Gutik and D. Repovš, *On countably compact* 0*-simple topological inverse semigroups*, Semigroup Forum **75** (2007), no. 2, 464–469. DOI: 10.1007/s00233-007-0706-x
34. O. Gutik and D. Repovš, *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}$ *having cofinite domain and image*, Stud. Sci. Math. Hungar. **48** (2011), no. 3, 342–353. DOI: 10.1556/SScMath.48.2011.3.1176
35. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images*, Georgian Math. J. **19** (2012), no. 3, 511–532. DOI: 10.1515/gmj-2012-0022
36. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial cofinite selfmaps*, Math. Slovaca **65** (2015), no. 5, 981–992. DOI: 10.1515/ms-2015-0067
37. O. Gutik and A. Savchuk, *On the semigroup* $\mathbf{ID}_\infty$, Visn. Lviv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **83** (2017), 5–19 (in Ukrainian).
38. O. Gutik and A. Savchuk, *The semigroup of partial co-finite isometries of positive integers*, Bukovyn. Mat. Zh. **6** (2018), no. 1–2, 42–51 (in Ukrainian). DOI: 10.31861/bmj2018.01.042
39. O. Gutik and A. Savchuk, *On inverse submonoids of the monoid of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of positive integers*, Carpathian Math. Publ. 11 (2019), no. 2, 296-310. DOI: 10.15330/cmp.11.2.296-310,
40. O. Gutik and A. Savchuk, *On the monoid of cofinite partial isometries of* $\mathbb{N}^n$ *with the usual metric*, Proc. Int. Geom. Cent. 12 (2019), no. 3, 51–68. DOI: 10.15673/tmgc.v12i3.1553
41. M. Hall, *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1963.
42. J. A. Hildebrant and R. J. Koch, *Swelling actions of* Γ*-compact semigroups*, Semigroup Forum **33** (1986), no. 1, 65–85. DOI: 10.1007/BF02573183
43. J. W. Hogan, *The* α*-bicyclic semigroup as a topological semigroup*, Semigroup forum **28** (1984), 265–271. DOI: 10.1007/BF02572488
44. J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, London Math. Monographs, New Ser. **12**, Clarendon Press, Oxford, 1995.
45. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
46. T. Mokrytskyi, *On the dichotomy of a locally compact semitopological monoid of order isomorphisms between principal filters of* $\mathbb{N}^n$ *with adjoined zero*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **87** (2019), 37–45. DOI: 10.30970/vmm.2019.87.037-045
47. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
48. V. V. Wagner, *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **84** (1952), 1119–1122 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 24.09.2018
доопрацьована 23.12.2019
прийнята до друку 03.02.2020

МОНОЇД МОНОТОННИХ ІН'ЄКТИВНИХ ЧАСТКОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ $(\mathbb{N}^3, \leqslant)$ З КОСКІНЧЕННИМИ ОБЛАСТЯМИ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ЗНАЧЕНЬ

Олег ГУТІК, Ольга КРОХМАЛЬНА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, Olia709@i.ua

Нехай n – натуральне число $\geqslant 2$ і $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ — n-ий степінь множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ з частковим порядком добутку звичайного лінійного порядку на $\mathbb{N}$.
Часткове перетворення $\alpha\colon X_{\leqslant} \rightharpoonup X_{\leqslant}$ частково впорядкованої множини $X_{\leqslant}$ називається *монотонним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає нерівність $x\alpha \leqslant y\alpha$, для $x, y \in X_{\leqslant}$.
Досліджено структурні властивості моноїда $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ часткових монотонних перетворень частково впорядкованої множини $\mathbb{N}^n_{\leqslant}$ з коскінченними областями визначення та значень. Доведено, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ напівгрупи $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$ ізоморфна групі $\mathscr{S}_n$ підстановок n-елементної множини та описано піднапівгрупу ідемпотентів напівгрупи $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^n_{\leqslant})$. Також, у випадку $n = 3$ описано властивості елементів напівгрупи $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ як часткових бієкцій частково впорядкованої множини $\mathbb{N}^3_{\leqslant}$, і відношення Ґріна на напівгрупі $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$. Зокрема доведено, шо відношення Ґріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ на моноїді $\mathscr{PO}_{\infty}(\mathbb{N}^3_{\leqslant})$ збігаються.

Ключові слова: напівгрупа часткових бієкцій, монотонне часткове відображення, ідемпотент, відношення Ґріна.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 51–58
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 51–58
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.051-058

УДК 512.536.7+512.543

ПРО ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНІ ГРУПИ З НУЛЕМ

Катерина МАКСИМИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: kate.maksymyk15@gmail.com

Досліджуємо алгебричні умови на групу G, при виконанні яких локально компактна трансляційно неперервна топологія на дискретній групі G з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною.
Введено електорально гнучкі та електорально стійкі групи та вивчаються їхні властивості. Зокрема, доведено, що кожна група, яка містить нескінченну циклічну підгрупу нескінченного індексу та кожна незліченна комутативна група є електорально гнучкими, а також, що кожна зліченна локально скінченна група є електорально стійкою.
Основним результатом праці є таке твердження: якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною. На довільній нескінченній віртуально циклічній групі (а отже, на електорально стійкій групі) з приєднаним нулем G^0 побудовано недискретну некомпактну локально компактну трансляційно неперервну топологію, яка індукує на G дискретну топологію.

Ключові слова: група, нуль, локально компактний, дискретний, компактний, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, електорально гнучкий, електорально стійкий, кінець.

Ми користуватимемося термінологією з [3, 10, 24]. Усі простори вважаються гаусдорфовими, якщо не зазначено інше.

Надалі для групи G через G^0 позначається група G з приєднаним нулем [10]. У комутативній групі G добуток двох елементів a і b позначатимемо через $a + b$, а обернений елемент до $a \in G$ позначатимемо через $-a$.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує єдиний елемент $y \in S$ такий, що $xyx = x$ і $yxy = y$. У цьому випадку кажуть, що y є *інверсним* елементом до x в S, а відображення з S у S, що ставить кожному елементу

2010 Mathematics Subject Classification: 20E34, 20F69, 22M15, 54E45

його інверсний, називається *інверсією* [10]. Очевидно, що група з приєднаним нулем є інверсною напівгрупою.

Напівгрупа S із заданою на ній топологією τ називається (*напів*)*топологічною*, якщо напівгрупова операція в (S,τ) є (нарізно) неперервною, і в цьому випадку кажуть, що τ є *напівгруповою* (*трансляційно неперервною*) топологією на S [9]. Інверсна топологічна напівгрупа (S,τ) з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною напівгрупою*, а топологія τ в цьому випадку називається *інверсною напівгруповою* топологією на S.

Відомо, якщо S — напівтопологічна напівгрупа з нулем 0 така, що $S\setminus\{0\}$ — компактний простір, чи G^0 — група з приєднаним нулем, що є топологічною інверсною напівгрупою, то нуль 0 є ізольованою точкою. В загальному випадку навіть для локально компактних груп з приєднаним нулем, які є топологічними напівгрупами, це не так [9, 18]. Однак нуль в компактній топологічній 0-простій напівгрупі є ізольованою точкою [21]. Проте ці результати на можна поширити на локально компактні цілком 0-прості топологічні напівгрупи [20] і на компактні цілком 0-прості напівтопологічні зліченні напівгрупи [15]. Карл Гофманн у праці [17] описав структуру локально компактної топологічної групи з приєднаним нулем у випадку локально компактних топологічних напівгруп. Приєднання нуля до близьких до компактних (напів)топологічних груп та топологія в нулі для деяких класів локально компактних напівгруп вивчалось в працях [2, 5, 6, 13, 14, 16, 19, 20, 23, 25, 26].

Мета нашої праці — дослідити алгебричні умови на групи, при виконанні яких локально компактна трансляційно неперервна топологія на дискретній групі з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною.

Дослідження цієї праці мотивовані проблемою 7 з [7]: “*яка хороша структура замикання групи в напівтопологічній напівгрупі?*” та наступним простим твердженням.

Твердження 1. *Якщо T_1-напівтопологічна напівгрупа S містить власну щільну дискретну підгрупу G, то $I = S\setminus G$ — двобічний ідеал в S.*

Доведення. За лемою 3 з [1], G — відкритий підпростір в S.

Зафіксуємо довільний елемент $y\in I$. Якщо $xy=z\notin I$ для деякого $x\in G$, то існує відкритий окіл $U(y)$ точки y у просторі S такий, що $\{x\}\cdot U(y)=\{z\}\subset G$. Окіл $U(y)$ містить нескінченну кількість елементів групи G, а це суперечить тому, що в групі зсуви є бієктивними відображеннями. З отриманого протиріччя випливає, що $xy\in I$ для всіх $x\in G$ й $y\in I$. Доведення того, що $yx\in I$ для всіх $x\in G$ і $y\in I$ є аналогічним. З вище наведених міркувань випливає, що I — двобічний ідеал в S. $\square$

Будемо говорити, що нескінченна група G є:

- *електорально гнучкою*, якщо для довільного розбиття $G=A\sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини, існують нескінченна множина $I\subseteq A$ та елемент $x\in G$ такі, що $I\cdot x\subseteq B$;
- *електорально стійкою*, якщо G не є електорально гнучкою.

Електорально гнучкі та електорально стійкі групи введені проф. Т. О. Банахом, і були анонсовані на семінарі “Топологія та її застосування” у Львівському університеті в 2019 році.

Підмножина A групи G називається *трансляційно майже стійкою*, якщо для довільного $x \in G$ симетрична різниця $A\Delta(A \cdot x)$ скінченна. Очевидно, що кожна скінченна підмножина в довільній групі, а також коскінченні підмножини в нескінченних групах трансляційно майже стійкі. Також, в адитивній групі цілих чисел множина натуральних чисел є трансляційно майже стійкою. Виникає природне питання: *у яких нескінченних групах їх трансляційно майже стійкі підмножини вичерпуються скінченними та коскінченними підмножинами?* Це питання також мотивоване наступною дихотомією локально компактних напівтопологічних груп з приєднаним нулем.

Лема 1. *Нехай G — дискретна група така, що кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина в G є коскінченною. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Доведення. Очевидно, що дискретна топологія на G^0 є трансляційно неперервною та локально компактною.

Нехай τ — недискретна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 і U_0 — нескінченний відкритий компактний окіл нуля 0 в просторі (G^0, τ). Оскільки кожен лівий чи правий зсув у (G^0, τ) на елемент групи G є гомеоморфізмом, то симетрична різниця $U_0\Delta(U_0 \cdot x)$ є скінченною для довільного $x \in G$. З припущення теореми випливає, що $U_0 \setminus \{0\}$ — коскінченна підмножина в G. $\square$

Твердження 2. *Нескінченна група G є електорально гнучкою тоді і лише тоді, коли кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина в G є коскінченною.*

Доведення. Припустимо, що існує електорально гнучка нескінченна група G, що містить нескінченну трансляційно майже стійку підмножину A в G з нескінченним доповненням $B = G \setminus A$. Тоді існують нескінченна множина $I \subseteq A$ й елемент $x \in G$ такі, що $I \cdot x \subseteq B$, а це суперечить трансляційній майже стійкості підмножини A в G.

Припустимо, що в групі G кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина є коскінченною, але група G не є електорально гнучкою. Тоді існує розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини таке, що для довільних нескінченної множини $I \subseteq A$ та елемента $x \in G$ такі, що множина $I \cdot x \cap B$ скінченна. Отже, $A \cdot x \cap B = A \cdot x \cap (G \setminus A)$ — скінченна множина, а це суперечить нашому припущенню. $\square$

З леми 1 і твердження 2 випливає така теорема.

Теорема 1. *Нехай G — дискретна електорально гнучка нескінченна група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Наслідок 1. *Нехай G — дискретна електорально гнучка група. Тоді кожна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на G^0 є дискретною.*

Твердження 3. *Нехай G — електорально гнучка нескінченна зліченна група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Доведення. Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0. Оскільки нуль напівгрупи G^0 є замкненою підмножиною в (G^0,τ), то за наслідком 3.3.10 з [11], G — локально компактний простір. Оскільки група G — зліченна, то за теоремою Бера про категорії (див. теорема 3.9.3 з [11]) простір G містить ізольовану в G, а отже, і в (G^0,τ), точку. З того, що всі зсуви в (G^0,τ) на елементи групи G є гомеоморфізмами випливає, що всі точки в G є ізольованими. Далі скористаємося теоремою 1. $\square$

Наслідок 2. *Нехай G — електорально гнучка зліченна група. Тоді кожна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на G^0 є дискретною.*

Наступні два твердження дають достатні умови, при виконанні яких група є електорально гнучкою.

Нагадаємо [3], що *індексом підгрупи H* у групі G називається потужність множини класів суміжності в кожному (правому або лівому) з розкладів групи G за цією підгрупою H.

Твердження 4. *Якщо комутативна група G містить нескінченну циклічну підгрупу $Z \subset G$ нескінченного індексу, то G є електорально гнучкою.*

Доведення. Нехай z — породжуючий елемент групи Z. Розглянемо розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини. Розглянемо множини

$$J_+ = \{a \in A \colon a + z \in B\} \qquad \text{і} \qquad J_- = \{a \in A \colon a - z \in B\}.$$

Якщо одна з цих множин нескінченна, то доведення завершено. Тому ми припустимо що множина $J = J_+ \cup J_-$ — скінченна.

Якщо множини $A \setminus (J+Z)$ і $B \setminus (J+Z)$ непорожні, то ми можемо зафіксувати точки $a \in A \setminus (J+Z)$ і $b \in B \setminus (J+Z)$, і зауважимо, що для нескінченної множини $I = a + Z \subseteq A$ і точки $x = ba^{-1}$ матимемо

$$x + I = b - a + a + Z = b + Z \subseteq B.$$

Отже, можемо припускати, що одна з множин $A \setminus (J+Z)$ або $B \setminus (J+Z)$ є порожньою. Якщо множина $A \setminus (J+Z)$ порожня, то $A \subseteq J + Z$ і за принципом Діріхле (див. [8, підрозділ 3.1]) для деякого елемента $a \in A$ множина $I = A \cap (a+Z)$ є нескінченною. Тоді для довільного елемента $b \in G \setminus (J+Z) \subseteq B$ маємо, що $b - a + I \subseteq b + Z \subseteq B$.

Якщо множина $B \setminus (J+Z)$ порожня, то $B \subseteq J + Z$ і для деякого елемента $b \in B$ множина $B \cap (b+Z)$ нескінченна. Тоді для довільного елемента $a \in G \setminus (J+Z) \subseteq A$ матимемо, що множина

$$I = a - b + (B \cap (b+Z)) \subseteq a + A \subseteq A$$

нескінченна та $b - a + I \subseteq B$. $\square$

Нагадаємо [22], що група G називається *локально скінченною*, якщо кожна її скінченна підмножина міститься в скінченній підгрупі в G.

Твердження 5. *Кожна незліченна комутативна група G є електорально гнучкою.*

Доведення. Нехай $G = A \sqcup B$ — розбиття групи G на дві нескінченні множини. Якщо множина A зліченна, то виберемо довільний елемент $x \in G \setminus A - A$ і стверджуємо, що $(x + A) \cap A = \varnothing$, а отже, $x + A \subseteq B$. Якщо множина B є зліченною, то можемо вибрати елемент $x \in G$ такий, що $I = (x + B) \subseteq A$, а отже, $-x + I \subseteq B$.

Далі припускатимемо, що обидві множини A і B є незліченними. Зафіксуємо довільну нескінченну зліченну підгрупу $Z \subset G$. Якщо для деякого елемента $z \in Z$ множина $(A+z) \cap B$ є нескінченною, то доведення завершене. Отже, припускатимемо, що для кожного елемента $z \in Z$ множина $F_z = (A + z) \cap B$ є скінченною. Тоді множина

$$S = (A + Z) \cap (B + Z) = \bigcup_{z,z' \in Z} (A + z) \cap (B + z')$$

є непорожньою і щонайбільше зліченною. Позаяк множини A і B незліченні, то існують елементи $a \in A \setminus S$ і $b \in B \setminus S$. Тоді для нескінченної множини $I = a + Z \subseteq A$ та елемента $x = b - a$ отримуємо, що $x + I = b + Z \subseteq B$, звідки випливає, що група G електорально гнучка. □

Твердження 6. *Кожна зліченна локально скінченна група G є електорально стійкою.*

Доведення. Зобразимо групу G як об'єднання $\bigcup_{n \in \omega} G_n$ строго зростаючої послідовності скінченних груп. Для довільного $n \in \omega$ зафіксуємо підмножину $A_n \subseteq G_{n+1} \setminus G_n$, яка має одноточковий перетин $A_n \cap (x \cdot G_n)$ з кожним суміжним класом $x \cdot G_n$, де $x \in G_{n+1} \setminus G_n$.

Приймемо

$$A = G_0 \cup \bigcup_{n \in \omega} (A_{2n} \cdot G_{2n}) \quad \text{і} \quad B = \bigcup_{n \in \omega} (A_{2n+1} \cdot G_{2n+1}).$$

Тоді для довільного елемента $x \in G$ множина $(A \cdot x) \cap B$ є скінченною. □

Нагадаємо [12, 27], що група G називається *віртуально циклічною*, якщо G містить циклічну підгрупу скінченного індексу.

З тверджень 4, 5 і 6 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3. *Нетривіальна комутативна група без кручень G електорально стійка тоді і лише тоді, коли G ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}$.*

Наслідок 4. *Комутативна група G є електорально стійкою тоді і лише тоді, коли G є або зліченною та локально скінченною, або є віртуально циклічною.*

Нагадаємо [12, 27], що група G має *більше ніж один кінець*, якщо існує нескінченна підмножина $S \subset G$ з нескінченним у G доповненням така, що симетрична різниця $S \Delta (S \cdot x)$ є скінченною для довільного $x \in G$. Будемо також говорити, що група G має *один кінець*, якщо існує така єдина нескінченна підмножина $S \subset G$ із скінченним доповненням, яка задовольняє вищезгадані умови. Очевидно, що нескінченні електорально гнучкі групи — це саме групи з одним кінцем.

У класичній комбінаторній теорії груп добре відома наступна теорема, яка описує нескінченні групи з двома кінцями.

Теорема 2 ([12, 27])**.** *Для групи G такі умови є еквівалентними:*

(*i*) *G — група з двома кінцями;*

(*ii*) *G — нескінченна віртуально циклічна група.*

Зауваження 1.
1. З теореми 2 випливає, що адитивна група цілих чисел $\mathbb{Z}$, а також її прямий добуток з довільною скінченною групою, має два кінці. Також на адитивній групі цілих чисел з приєднаним нулем $\mathbb{Z}^{\mathbf{0}}$ існує рівно чотири гаусдорфові локально компактні трансляційно неперервні топології (див. твердження 4.5 з [14]), причому три з них є напівгруповими.
2. З твердження 5 випливає, що наступні групи є електорально гнучкими:
   (a) n-а пряма степінь адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}^n$ для $n \geqslant 2$;
   (б) n-а пряма степінь адитивної групи раціональних чисел $\mathbb{Q}^n$ для $n \geqslant 1$;
   (в) n-а пряма степінь адитивної групи дійсних чисел $\mathbb{R}^n$ для $n \geqslant 1$;
   (г) n-а пряма степінь мультиплікативної групи дійсних чисел $(\mathbb{C}^*)^n$ для $n \geqslant 1$ та її підгрупа n-вимірний тор $\mathbb{T}^n$, як n-а пряма степінь одиничного кола $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.
3. З твердження 4 випливає, що вільна (абелева) група F_X над множиною X потужності $\geqslant 2$ є електорально гнучкою.

З наступного прикладу випливає, що на нескінченній віртуально циклічній групі з приєднаним нулем G^0 існують недискретні некомпактні локально компактні трансляційно неперервні топології, які індукують на G дискретну топологію.

Приклад 1. Нехай G — нескінченна віртуально циклічна група та K_1 і K_2 — кінці в групі G. Для $i = 1, 2$ означимо на G^0 топологію τ_i наступним чином:

(1) усі елементи групи G є ізольованими точками в (G^0, τ_i);

(2) сім'я $\mathscr{B}_i(0) = \{g_1 K_i g_2 \cup \{0\} \colon g_1, g_2 \in G\}$ є базою топології τ_i в нулі напівгрупи G^0.

Оскільки K_i — кінець в G, то τ_i — трансляційно неперервна гаусдорфова локально компактна топологія на напівгрупі G^0, яка не є ні дискретною, ні компактною.

Зауважимо, що топології τ_1 і τ_2 у випадку адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}$ є напівгруповими [14].

Подяка

Автор висловлює подяку проф. Т. О. Банаху, О. В. Равському та науковому керівникові О. В. Гутіку за корисні поради, коментарі та зауваження.

Список використаної літератури

1. О. Гутік, А. Савчук, Про напівгрупу ID^{∞}, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **83** (2017), 5–19.
2. В. В. Деменчук, Минимальные топологические полугруппы с замкнутыми главными идеалами, Изв. вузов. Матем. 1986, no. 7(290), 36–39; **English version**: V. V. Demenchuk, *Minimal topological semigroups with closed principal ideals*, Soviet Math. (Iz. VUZ) **30** (1986), no. 7, 48–53.
3. А. Г. Курош, *Теория групп*, 3-е изд., Наука, Москва, 1967, 648 с.

4. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka 13 (2016), 21–28.
5. S. Bardyla, *On locally compact semitopological graph inverse semigroups*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 19–28.
6. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
7. J. F. Berglund, *Problems about semitopological semigroups*, Semigroup Forum **19** (1980), 373–383. DOI: 10.1007/BF02572530
8. R. A. Brualdi, *Introductory combinatorics*, 5th ed., Pearson Education, Inc., Prentice Hall 2009.
9. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983; Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
10. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
11. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
12. D. B. A. Epstein, *Ends*, Topology of 3-manifolds and related topics, Proc. Univ. of Georgia Institute, 1961. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp. 110–117,
13. O. Gutik, *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. **80** (2015), 33–41.
14. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups*, Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008
15. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Topological semigroups of matrix units*, Algebra Discrete Math. (2005), no. 3, 1–17.
16. O. Gutik and O. Ravsky, *On feebly compact inverse primitive (semi)topological semigroups*, Mat. Stud. **44** (2015), no. 1, 3–26.
17. K. H. Hofmann, *Locally compact semigroups in which a subgroup with compact complement is dense*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 19–51.
DOI: 10.1090/S0002-9947-1963-0144319-2
18. R. J. Koch and A. D. Wallace, Notes on inverse semigroups, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **9** (1964), no. 1, 19–24.
19. Z. Mesyan, J. D. Mitchell, M. Morayne, and Y. H. Péresse, *Topological graph inverse semigroups*, Topology Appl. **208** (2016), 106–126. DOI: 10.1016/j.topol.2016.05.012
20. W. S. Owen, *The Rees theorem for locally compact semigroups*, Semigroup Forum **6** (1973), 133–152. DOI: 10.1007/BF02389118
21. A. B. Paalman-de-Miranda, *Topological semigroup*, Math. Centre Tracts **11**. Math. Centrum, Amsterdam, 1964.
22. D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1996.
23. A. I. Roset, *Topologically* 0*-simple semigroups*, Semigroup Forum, **15** (1977), no. 1, 149–157. DOI:10.1007/bf02195745
24. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. DOI: 10.1007/BFb0073675
25. L. B. Šneperman, *The Rees theorem for weakly uniform semigroups*, Semigroup Forum, **23** (1981), no. 1, 261–273. DOI: 10.1007/bf02676650
26. L. B. Šneperman, *Weakly uniform completely O-simple semigroups of matrix type*, Semigroup Forum, **31** (1985), 25–32. DOI: 10.1007/bf02572637

27. C. T. C. Wall, *Poincaré complexes I,* Ann. Math. **86** (1967), no. 2, 213–245. DOI: 10.2307/1970688

Стаття: надійшла до редколегії 03.02.2019
доопрацьована 23.05.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ON LOCALLY COMPACT GROUPS WITH ZERO

Kateryna MAKSYMYK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: kate.maksymyk15@gmail.com

This paper is motivated by Hofmann's results (1963) on the structure of a locally compact topological group with adjoined zero and Berlund's problem (1980): *What is the fine structure of the closure of a group?*
We study algebraic properties on a group G such that if the discrete group G has these properties then every locally compact shift continuous topology on G with adjoined zero is either compact or discrete. We introduce electorally flexible and electorally stable groups and establish their properties. In particular, we prove that every group with an infinite cyclic subgroup of infinite index and every uncountable commutative group are electorally flexible, and show that every countable locally finite group is electorally stable.
The main result of the paper is the following: if G is a discrete electorally flexible group then every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on G with adjoined zero is either compact or discrete. Also, we construct a non-discrete non-compact Hausdorff locally compact shift-continuous topology on any discrete virtually cyclic group (and hence on an electorally stable group) G with adjoined zero.

Key words: group, zero, locally compact, discrete, compact, semitopological semigroup, topological semigroup, electorally flexible, electorally stable, end.

ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 59–69*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 59–69
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.059-069

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 2: СПЕЦІАЛЬНІ ІЗОМОРФІЗМИ

Назар ПИРЧ

Українська Академія Друкарства,
вул. Підголоско, 19, 79020, м. Львів
e-mail: pnazar@ukr.net

Вивчаємо умови існування спеціального ізоморфізму між вільними топологічними групами, що зберігає інваріантність підгруп, а також досліджуються співвідношення між еквівалентністю наборів для різних функторів топологічної алгебри.

Ключові слова: вільна топологічна група, вільна абелева топологічна група, спеціальний ізоморфізм вільних груп, сім'я топологічних просторів, вільне топологічне кільце, вільне абелеве топологічне кільце.

1. Вступ

Ми продовжуємо вивчати еквівалентних за Марковим набори тихоновських просторів, розпочаті в [4]. У другому підрозділі ми вивчаємо умови існування спеціального ізоморфізму між вільними топологічними групами. У третьому підрозділі досліджуємо еквівалентність наборів для різних функторів топологічної алгебри.

Термінологія і позначення взято з [4]. Тут ми лише нагадаємо, що через $F(X)$ позначаємо вільну топологічну групу тихоновського простору X у сенсі Маркова, через $A(X)$ — вільну абелеву топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $L(X)$ — вільний локально-опуклий простір над X. Для підпростору Y простору X позначимо через $G(Y, X)$ (або скорочено $G(Y)$) групову оболонку множини Y у $F(X)$.

Означення 1. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i : i \in I\})$ є M-еквівалентною сім'ї $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, якщо існує топологічний

2010 Mathematics Subject Classification: 22A05

ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(A_i) \subseteq G(B_i)$ і $h^{-1}(B_i) \subseteq G(A_i)$ для всіх $i \in I$. Позначатимемо це так

$$(X, \{X_i \colon i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i \colon i \in I\}).$$

Міняючи в цьому означенні функтор вільної топологічної групи на функтори вільної абелевої топологічного та вільного локально опуклого простору, отримаємо поняття A-еквівалентних і L-еквівалентних наборів.

2. Еквівалентність наборів і спеціальні ізоморфізми

Скажемо, що ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ є *спеціальним*, якщо композиція $e^*_Y \circ i$ є постійним відображенням, де $e^*_Y\colon F(Y) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, який продовжує функцію $e_Y : Y \to \mathbb{Z}$, яка тотожно рівна 1 на Y. Аналогічно означується поняття спеціального ізоморфізму між вільними абелевими топологічними групами. У [2] було встановлено, що для довільних двох M-еквівалентних просторів існує спеціальний ізоморфізм між їхніми вільними топологічними групами. У [3] і [11] цей результат було узагальнено на випадок M-еквівалентних відображень і M-еквівалентних пар.

Будемо говорити, що підпростір A топологічного простору X є *$*$-зв'язним* в X, якщо для довільних двох неперетинних відкрито-замкнених підмножин U та V таких, що $U \cup V = X$ маємо, що для $A \subseteq U$ та $A \subseteq V$.

Узагальнюючи теорему 3.9 з [2] доведемо таке твердження.

Твердження 1. *Якщо* $(X, \{X_s \colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s \colon s \in S\})$, *і простір* $A = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$ *є $*$-зв'язним в X, то звуження кожного топологічного ізоморфізму $i\colon F(X) \to F(Y)$ на підгрупу $G(A)$ є спеціальним ізоморфізмом.*

Доведення. Нехай $e_Y : Y \to \mathbb{Z}$ — функція, яка тотожно рівна 1 на Y, $e^*_Y : F(Y) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, який продовжує функцію e_Y. Доведемо, що $i \circ e^*_Y|_A = \mathrm{const}$. Припустимо протилежне. Нехай $z_1, z_2 \in i \circ e^*_Y(A)$ і $z_1 < z_2$. Тоді $F_1 = (-\infty, z_1]$ та $F_2 = (z_1, +\infty)$ — диз'юнктні відкрито-замкнені, взаємодоповнювані підмножини в $\mathbb{Z}$. Тоді відкрито-замкнені множини $U = (i \circ e^*_Y)^{-1}(F_1)$ та $V = (i \circ e^*_Y)^{-1}(F_2)$ задовольняють такі умови:

$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \cap A \neq \varnothing, \quad V \cap A \neq \varnothing,$$

що суперечить $*$-зв'язності множини A в X. □

Теорема 1 та її доведення є незначною модифікацією теореми 3.1 з [2] та її доведення.

Теорема 1. *Якщо* $(X, \{X_s \colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s \colon s \in S\})$, *і простір* $A = \bigcap\limits_{s\in S} X_s$ *є непорожнім, то існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$.*

Щоб довести це твердження, нам потрібно декілька лем.

Через $\mathbb{Z}$ будемо позначати адитивну групу цілих чисел наділену дискретною топологією.

Нехай $A \subseteq X, \varphi\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ неперервний гомоморфізм такий, що $\varphi(G(A)) = \mathbb{Z}$. Позначимо через

$$\mathrm{ord}_A\varphi = \min\{|\ k\ |: k \in \varphi(A)\backslash\{0\}\}.$$

Лема 1. *Якщо* $\mathrm{ord}_A\varphi > 1$, *то існує топологічний ізоморфізм* $j\colon F(X) \to F(X)$ *такий, що* $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $\mathrm{ord}_A(\varphi \circ j) < \mathrm{ord}_A\varphi$.

Доведення. Нехай $\mathrm{ord}_A\varphi = q > 1$. Тоді існує елемент $a_0 \in A$ такий, що $\varphi(a_0) = s$, $\|s\| = q$. Оскільки $\varphi(A)$ породжує $\mathbb{Z}$, то існує $p \in \varphi(A)$, що не ділиться на q. Поділимо p на q з остачею

$$p = ms + r, \qquad 0 < r < q = \|s\|.$$

Позначимо для кожного $k \in Z$ через $X_k = X \cap \varphi^{-1}(k)$. Тоді X_k — відкрито-замкнений підпростір в X. Означимо відображення $j_0\colon X \to F(X)$ так:

$$j_0(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \notin X_p; \\ a_0^{-m}x, & \text{якщо } x \in X_p. \end{cases}$$

Нехай $j\colon F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, який продовжує відображення $j_0(x)$. Відображення $j_0(x)$ неперервне з огляду на неперервність операції множення в топологічній групі $F(X)$ і відкрито-замкненості множин $X_k, k \in \mathbb{Z}$. Означимо відображення $j_0^*\colon X \to F(X)$ за формулою

$$j_0^*(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \notin X_p; \\ a_0^{m}x, & \text{якщо } x \in X_p. \end{cases}$$

Нехай $j^*\colon F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, який продовжує відображення $j_0^*(x)$. Легко бачити, що j^* — неперервний гомоморфізм, обернений до j. Отже, j — топологічний ізоморфізм. Нехай $a_1 \in X_p \cap A$. Тоді

$$\varphi \circ j(a_1) = \varphi(a_0^{-m}x_1) = -m\varphi(a_0) + \varphi(x_1) = -ms + p = r < q.$$

Очевидно, що $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. □

Понижуючи за допомогою леми 1 порядок ізоморфізму φ, ми за скінченну кількість разів отримаємо таку лему.

Лема 2. *Існує топологічний ізоморфізм* $j\colon F(X) \to F(X)$ *такий, що* $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $ord_A(\varphi \circ j) = 1$.

Отже, існує топологічний ізоморфізм $j\colon F(X) \to F(X)$ такий, що для деякого елемента $a_0 \in A$ виконується одна з умов $\varphi \circ j(a_0) = 1$ або $\varphi \circ j(a_0) = -1$ і $j(G(A)) = G(A)$. У другому випадку розглянемо композицію ізоморфізму j з ізоморфізмом α заданим для елементів простору X за правилом $\alpha(x) = x$, якщо $\varphi \circ j(x) \neq 1$ і $\alpha(x) = x^{-1}$, якщо $\varphi \circ j(x) = -1$. Очевидно α — топологічний ізоморфізм, причому $(\varphi \circ \alpha \circ j)(a_0) = 1$ і $(\varphi \circ \alpha \circ j)(G(X_s)) = G(X_s$ для всіх $s \in S$.

Ми довели таке твердження.

Лема 3. *Для кожного неперервного гомоморфізму* $\varphi\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ *такого, що* $\varphi(G(A)) = \mathbb{Z}$, *існують топологічний ізоморфізм* $j\colon F(X) \to F(X)$ *і елемент* $a_0 \in A$ *такі, що* $j(G(X_s)) = G(X_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $(\varphi \circ j)(a_0) = 1$.

Лема 4. *Для кожного неперервного гомоморфізму* $\varphi\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ *такого, що* $\varphi(G(A)) = \mathbb{Z}$ *існує топологічний ізоморфізм* $u\colon F(X) \to F(X)$ *такий, що* $u(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $(\varphi \circ u)(X) = 1$.

Доведення. Виберемо ізоморфізм $j\colon F(X) \to F(X)$ і елемент $a_0 \in A$ такі як у лемі 3 Позначимо $F_k = X \cap (\varphi \circ j)^{-1}(k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$. Тоді множини $F_k, k \in \mathbb{Z}$ є відкрито-замкнені в X, причому $a_0 \in F_1$. Визначимо відображення $l_0\colon X \to F(X)$ за правилом $l_0(x) = a_0^{-k+1}x$, якщо $x \in F_k, k \in \mathbb{Z}$ і нехай $l\colon F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, що продовжує відображення l_0. Очевидно, відображення l_0 неперервне, а отже, неперервним є гомоморфізм l. Відображення $l_0^*\colon X \to F(X)$ означене як $l_0^*(x) = a_0^{k-1}x$, якщо $x \in F_k, k \in \mathbb{Z}$ є неперервним, а отже, неперервним є гомоморфізм $l^*\colon F(X) \to F(X)$, що його продовжує. Легко бачити, що l^* — гомоморфізм, обернений до l, тому l є топологічним автоморфізмом групи $F(X)$.

Приймемо $u = j \circ l$, тоді $u\colon F(X) \to F(X)$ — топологічний ізоморфізм. Доведемо, що u — потрібний автоморфізм групи $F(X)$. Якщо $x \in X$, то $x \in F_k$ при деякому $k \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$
\begin{aligned}
\varphi(u(x)) &= \varphi(j(l(x))) = \\
&= \varphi(j(a_0^{-k+1}x)) = \\
&= \varphi(j(a_0) \times (-k+1) + \varphi(j(x)) = \\
&= -k + 1 + k = 1.
\end{aligned}
$$

Оскільки $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$ і $l(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$, то $u(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. □

Доведення теореми 1. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. Нехай також $e_Y^*\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, що продовжує функцію e_Y, яка тотожно рівна 1 на просторі Y. Очевидно, що $e_Y^* \circ i(G(X_s)) = e_Y^*(Y_s) = \mathbb{Z}$. Застосовуючи лему 4 до гомоморфізму $\varphi = e_Y^* \circ i$, отримаємо спеціальний ізоморфізм $i^* = i \circ u\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i^*(G(X_s)) = G(Y_s)$. □

Подібно можемо довести твердження аналогічне до теореми 1 для A-еквівалентних наборів. Модифікація аналогічного твердження для L-еквівалентних наборів проводиться аналогічно до відповідної теореми з [2].

Твердження 2. *Нехай* $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$, *простори* $A = \bigcap_{s\in S} X_s$ *і* $B = \bigcap_{s\in S} Y_s$ *непорожні,* $a \in A$, $b \in B$ *— довільні точки. Тоді існує спеціальний топологічний ізоморфізм* $h\colon A(X) \to A(Y)$ *такий, що* $h(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $h(a) = b$.

Доведення. Нехай $(X, A) \overset{A}{\sim} (Y, B)$. За теоремою 1 існує спеціальний топологічний ізоморфізм $j\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $j(G(A)) = G(B)$. Нехай

$$
W = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = j^{-1}(b),
$$

де $a_i \in A$. Оскільки j спеціальний ізоморфізм, то $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Розглянемо відображення $f, g\colon X \to A(X)$ означені за формулами

$$f(x) = x + W - a \qquad \text{і} \qquad g(x) = x - W + a.$$

Нехай $f^*, g^*\colon A(X) \to A(X)$ — їхні гомоморфні продовження. Тоді

$$\begin{aligned} f^* \circ g^*(x) = f^*(x - W + a) = \\ &= (x + W - a) - [\lambda_1(x_1 + W - a) + \lambda_2(x_2 + W - a) + \ldots + \\ &\quad + \lambda_n(x_n + W - a)] + (a + W - a) = \\ &= x + W - a - [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n] - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \times (W - a) + W = \\ &= x + W - a - W - 1 \times (W - a) + W = x. \end{aligned}$$

Отже, $f^* \circ g^* = g^* \circ f^* = 1_{A(X)}$. Отож, f^* спеціальний автоморфізм такий, що $f^*(a) = W$ і $f^*(G(X_s)) = G(X_s)$. Тоді $h = j \circ f^*$ спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що

$$h(G(X_s)) = j \circ f^*(G(X_s)) = j(G(X_s)) = G(Y_s)$$

і $h(a) = j \circ f^*(a) = j(W) = b$. □

Аналогічне твердження правильне також для відношення L-еквівалентності топологічних просторів.

Нехай $\{X_s\colon s \in S\}$ — сім'я замкнених диз'юнктних підпросторів в X. Позначимо через $p\colon X \to X/\{X_s\colon s \in S\}$ — проекцію, яка стягує кожен підпростір X_s у точку. Якщо на просторі $X/\{X_s\colon s \in S\}$ означити найсильнішу цілком регулярну топологію, що робить відображення p неперервним, тоді відображення p буде R-факторним.

Наслідок 1. *Нехай*

$$(X, \{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s\colon s \in S\})$$

і простір $A = \bigcap_{s \in S} X_s$ *замкнений та непорожній. Тоді*

$$(X/A, \{X_s/A\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y/B, \{Y_s/B\colon s \in S\}),$$

де $B = \bigcap_{s \in S} Y_s$ (*тут на* X_s/A *і* Y_s/B *визначено топології індуковані відповідно з* X/A *та* Y/B).

Для топологічного простору X, та відміченої точки $a \in X$ позначимо через $AG(X, a)$ вільну абелеву топологічну групу простору X з одиницею a.

Твердження 3. *Нехай*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{A}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

простори $A = \bigcap_{s\in S} X_s$, $B = \bigcap_{s\in S} Y_s$ *непорожнім,* $a \in A$, $b \in B$ *— довільні точки. Тоді існує топологічний ізоморфізм* $h\colon AG(X,a) \to AG(Y,b)$ *такий, що* $h(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$.

Доведення. За твердженням 2 існує спеціальний топологічний $i\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $i(a) = b$. та $i(G(X_s) = G(Y_s)$ Тотожне відображення $X \to X$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_x\colon A(X) \to AG(X,a)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору X з одиницею в точці a. Аналогічно тотожне відображення $Y \to Y$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_y\colon A(Y) \to AG(Y,b)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору Y з одиницею в точці b. Неперервне відображення $m_x\colon X \to AG(Y,b)$, означене як $m(x) = f_y \circ i|_X$, має ту властивість, що $m_x(a) = b$, а отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $j_x\colon AG(X,a) \to AG(Y,b)$. Аналогічно неперервне відображення $m_y\colon Y \to AG(X,a)$, означене як $m(y) = f_x \circ i^{-1}|_Y$, має ту властивість, що $m_y(b) = a$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $j_y\colon AG(Y,b) \to AG(X,a)$. Отримаємо, що

$$j_y \circ j_x(x) = f_x \circ i \circ i^{-1}(x) = x$$

для всіх $x \in X$. Аналогічно

$$j_x \circ j_y(y) = f_y \circ i^{-1} \circ i(y) = y$$

для всіх $y \in Y$. Отже, j_x — топологічний ізоморфізм вільних абелевих граєвських груп $AG(X,a)$ і $AG(Y,b)$. □

Узагальнюючи теорему 3.9 з [2], доведення залишається аналогічним. Сформулюємо таке твердження.

Твердження 4. *Нехай* X, Y *— тихоновські простори,* $\{X_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* Y, *причому* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є гаусдорфовими. Якщо існує топологічний ізоморфізм* $i\colon F(X) \to F(Y)$ *такий, що* $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$, *а його звуження на підгрупу* $G(A)$, *де* $A = \bigcup_{s\in S} X_s$, *є спеціальним ізоморфізмом, то* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є* M*-еквівалентними.*

Наслідок 2. *Нехай* X, Y *— тихоновські простори,* $\{X_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* Y, *причому* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є гаусдорфовими. Якщо* $(X, \{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s\colon s \in S\})$, *а множина* $A = \bigcup_{s\in S} X_s$ *зв'язна в* X, *то* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є* M*-еквівалентними.*

Доведення. З теореми 1 випливає, що існує топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(G(A)) = G(B)$. З теореми 3.9. роботи Окунєва [9] випливає, що існує топологічний ізоморфізм $j\colon F(X/A) \to F(X/B)$ такий, що $j \circ q_A^* = q_B^* \circ i$, де $q_A^*\colon F(X) \to F(X/A)$, $q_B^*\colon F(Y) \to F(Y/B)$ — гомоморфізми, що продовжують відображення q_A і q_B, відповідно, тобто $q_A \overset{M}{\sim} q_B$. □

3. Еквівалентність наборів і вільні топологічні алгебри

Розвиваємо ідеї, які пов'язані з ізоморфною класифікацією вільних топологічних напівгруп, груп та кілець з роботи [1], а також ідеї пов'язані з ізоморфною класифікацією вільних топологічних напівгруп [7]. Нас цікавитимуть ізоморфізми вільних топологічних алгебр, що залишають інваріантними сім'ї підалгебр. Також досліджуємо умови тополого-алгебричної еквівалентності гомоморфізмів, які продовжують неперервні відображення тихоновських просторів. Для топологічного простору позначимо через $S(X)$ вільну топологічну напівгрупу над простором X, через $S_A(X)$ вілльну абелеву топологічну напівгрупу над простором X, через $R(X)$ — вільне топологічне кільце над простором X, через $R_A(X)$ — вільне абелеве топологічне кільце над простором X. Для вільної топологічної алгебри $F(X)$ над простором X та підпростору $Y \subseteq X$ позначимо через $\langle Y\rangle$ підалгебру в $F(X)$, породжену множиною твірних Y.

Твердження 5. *Нехай $\{X_s\colon s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існує гомеоморфізм $h\colon X \to Y$ такий, що $h(X_s) = Y_s$ для всіх $s \in S$;*
(2) *існує топологічний ізоморфізм вільних топологічних напівгруп $i\colon S(X) \to S(Y)$ такий, що $i(\langle X_s\rangle) \subseteq \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$;*
(3) *існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних напівгруп $j\colon S_A(X) \to S_A(Y)$ такий, що $j(\langle X_s\rangle) \subseteq \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай $i\colon S(X) \to S(Y)$ — гомоморфне продовження відображення $h\colon X \to Y$ до гомоморфізму вільних топологічних напівгруп. За побудовою $i(X_s) = Y_s$, тобто $i(\langle X_s\rangle) \subseteq \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) доводиться аналогічно до твердження 2.10 з [4].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $j\colon S_A(X) \to S_A(Y)$ такий, що $j(\langle X_s\rangle) \subseteq \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$. Нагадаємо, що атомом називається елемент топологічної напівгрупи, який не можна подати у вигляді добутку двох елемнтів, кожен з яких відмінний від нейтрального. Очевидно, що при ізоморфізмі топологічних напівгруп образом множини атомів першої напівгрупи є множина атомів другої напівгрупи. Залишається зауважити, що множиною атомів напівгрупи $S_A(X)$ є X. Тому звуження ізоморфізму $j\colon S_A(X) \to S_A(Y)$ на підпростір X є гомеоморфізмом $h\colon X \to Y$ таким, що $h(X_s) = Y_s$. □

Нижче ми розглядаємо (абелеві) топологічні кільця; означення можна знайти в монографії [6].

Твердження 6. *Нехай $\{X_s\colon s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних груп $h\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $h(X_s) \subseteq \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$;*
(2) *існує топологічний ізоморфізм вільних топологічних кілець $i\colon R(X) \to R(Y)$ такий, що $i(X_s) \subseteq \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$;*

(3) *існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних кілець* $j\colon R_A(X) \to R_A(Y)$ *такий, що* $j(X_s) \subseteq \langle Y_s \rangle$ *для всіх* $s \in S$.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) та (2) $\Rightarrow$ (3) доводяться аналогічно до твердження 2.10 [4].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $j\colon R_A(X) \to R_A(Y)$ — ізоморфізм вільних абелевих топологічних кілець такий, що $j(X_s) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Оскільки кожна абелева топологічна група після введення на ній нульового множення перетворюється на абелеве кільце, то тотожні відображення $id_X\colon X \to X$ та $id_Y\colon Y \to Y$ продовжуються до неперервних гомоморфізмів $p_X\colon R_A(X) \to A(X)$ та $p_Y\colon R_A(Y) \to A(Y)$. Як було встановлено у [1] існує топологічний ізоморфізм $h\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $p_Y \circ j = i \circ p_X$. За побудовою $h(X_s) \subseteq G(Y_s)$, $h^{-1}(Y_s) \subseteq G(X_s)$. □

Твердження 7. *Нехай* $f_1\colon X_1 \to Y_1$, $f_2\colon X_2 \to Y_2$ *— неперервні відображення топологічних просторів. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існують гомеоморфізми* $h_1\colon X_1 \to X_2$ *та* $h_2\colon Y_1 \to Y_2$ *такі, що* $h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$;
(2) *існують топологічні ізоморфізми вільних топологічних напівгруп* $i_1\colon S(X_1) \to S(X_2)$ *та* $i_2\colon S(Y_1) \to S(Y_2)$ *такі, що* $i_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ i_1$, *де* $f_1^*\colon S(X_1) \to S(Y_1)$, $f_2^*\colon S(X_2) \to S(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2;
(3) *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних напівгруп* $j_1\colon S_A(X_1) \to S_A(X_2)$ *та* $j_2\colon S_A(Y_1) \to S_A(Y_2)$ *такі, що* $j_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ j_1$, *де* $f_1^*\colon S_A(X_1) \to S_A(Y_1)$, $f_2^*\colon S_A(X_2) \to S_A(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай $h_1\colon X_1 \to X_2$ та $h_2\colon Y_1 \to Y_2$ — гомеоморфізми такі, що $h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$. Продовження $i_1\colon S(X_1) \to S(X_2)$ та $i_2\colon S(Y_1) \to S(Y_2)$ гомеоморфізмів h_1 та h_2 до неперервних гомоморфізмів є топологічними ізоморфізмами. Оскільки

$$i_2 \circ f_1^*|_{X_1} = h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1 = f_2^* \circ i_1|_{X_1},$$

то $i_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ i_1$.

Імлікація (2) $\Rightarrow$ (3) доводиться аналогічно до твердження 2.2 з [11].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $j_1\colon S_A(X_1) \to S_A(X_2)$ та $j_2\colon S_A(Y_1) \to S_A(Y_2)$ — топологічні ізоморфізми такі, що $j_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ j_1$, де $f_1^*\colon S_A(X_1) \to S_A(Y_1)$, $f_2^*\colon S_A(X_2) \to S_A(Y_2)$ гомоморфізми, що продовжують відображення f_1 та f_2. Як уже зазначалось, у доведенні твердження 5 $j_1(X_1) = X_2$, $j_2(Y_1) = Y_2$. Тому відображення $h_1 = j_1|_{X_1}$, $h_2 = j_2|_{Y_1}$ є гомеоморфізмами такими, що $h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$. □

Твердження 8. *Нехай* $f_1\colon X_1 \to Y_1$, $f_2\colon X_2 \to Y_2$ *— неперервні відображення тихоновських просторів. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних груп* $h_1\colon A(X_1) \to A(X_2)$ *та* $h_2\colon A(Y_1) \to A(Y_2)$ *такі, що* $i_2 \circ Af_1^* = Af_2^* \circ i_1$, *де* $Af_1^*\colon A(X_1) \to A(Y_1)$, $Af_2^*\colon A(X_2) \to A(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2;

(2) *існують топологічні ізоморфізми вільних топологічних кілець* $i_1\colon R(X_1)\to R(X_2)$ *та* $i_2\colon R(Y_1)\to R(Y_2)$ *такі, що* $i_2\circ Rf_1^*=Rf_2^*\circ i_1$*, де* $Rf_1^*\colon R(X_1)\to R(Y_1)$, $Rf_2^*\colon R(X_2)\to R(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2*;*

(3) *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних кілець* $j_1\colon R_A(X_1)\to R_A(X_2)$ *та* $j_2\colon R_A(Y_1)\to R_A(Y_2)$ *такі, що* $j_2\circ f_1^*=f_2^*\circ j_1$*, де* $f_1^*\colon R_A(X_1)\to R_A(Y_1)$, $f_2^*\colon R_A(X_2)\to R_A(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) та (2) $\Rightarrow$ (3) доводяться аналогічно до твердження 2.2 [11].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $p_1\colon R_A(X_1)\to A(X_1)$, $p_2\colon R_A(X_2)\to A(X_2)$, $q_1\colon R_A(Y_1)\to A(Y_1)$, $q_2\colon R_A(Y_2)\to A(Y_2)$ — природні гомоморфізми, описані у твердженні 6. Для ізоморфізму $j_1\colon R_A(X_1)\to R_A(X_2)$ існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних груп $h_1\colon A(X_1)\to A(X_2)$ такий, що $h_1\circ p_1=p_2\circ j_1$. Аналогічно для ізоморфізму $j_2\colon R_A(Y_1)\to R_A(Y_2)$ існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних груп $h_2\colon A(Y_1)\to A(Y_2)$ такий, що $h_2\circ q_1=q_2\circ j_2$. За побудовою $Af_1\circ p_1=q_1\circ f_1^*$ і $Af_2\circ p_2=q_2\circ f_2^*$. Нехай $x\in X_1$, тоді $p_1(x)=x$. Отож,

$$\begin{aligned} h_1\circ Af_2(x) &= j_1\circ q_2\circ Af_2(x)=\\ &= j_1\circ f_2^*\circ q_2(x)=\\ &= f_1^*\circ j_2\circ q_2(x)=\\ &= f_1^*\circ q_1\circ h_2(x)=\\ &= Af_1\circ h_2(x). \end{aligned}$$

□

Твердження 9. *Нехай* $f_1\colon X_1\to Y_1$, $f_2\colon X_2\to Y_2$ *—* A*-еквівалентні відображення. Тоді для довільних* $x_1\in X_1$ *та* $x_2\in X_2$ *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних в сенсі Граєва* $s_1\colon AG(X_1,x_1)\to AG(X_2,x_2)$ *та* $s_2\colon AG(Y_1,f(x_1))\to AG(Y_2,f(x_2))$ *такі, що* $s_2\circ f_1^{**}=f_2^{**}\circ s_1$*, де* $f_1^{**}\colon AG(X_1,x_1)\to AG(Y_1,f(x_1))$ *і* $f_2^{**}\colon AG(X_2,x_2)\to AG(Y_2,f(x_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2.

Доведення. З того, що відображення $f_1\colon X_1\to Y_1$, $f_2\colon X_2\to Y_2$ є A-еквівалентними, за теоремою з [3] випливає, що існують топологічні ізоморфізми $h_1\colon A(X_1)\to A(X_2)$ та $h_2\colon A(Y_1)\to A(Y_2)$ такі, що ${}_2\circ f_1^*=f_2^*\circ i_1$, де $f_1^*\colon A(X_1)\to A(Y_1)$, $f_2^*\colon AG(X_2)\to AG(Y_2)$ гомоморфізми, що продовжують відображення f_1 та f_2. Нехай $p_i\colon A(X_i)\to AG(X_i,x_i)$, $q_i\colon A(Y_i)\to AG(Y_i,f(x_i))$ — гомоморфізми, що продовжують тотожні вкладення $X_i\hookrightarrow X_i$ та $Y_i\hookrightarrow Y_i$. Як було встановлено у [10], якщо для ізоморфізму $h_1\colon A(X_1)\to A(X_2)$ виконується умова $h_1(x_1)=x_2$, то існує топологічний ізоморфізм $s_1\colon AG(X_1,x_1)\to AG(X_2,x_2)$ такий, що $s_1\circ p_1=g_1\circ h_1$. Аналогічно доводиться, що існує топологічний ізоморфізм $s_2\colon AG(Y_1,f(x_1))\to AG(Y_2,f(x_2))$ такий, що $s_2\circ p_2=g_2\circ h_2$. За побудовою $f_1^{**}\circ p_1=q_1\circ f_1^*$ і $f_2^{**}\circ p_2=q_2\circ f_2^*$. Нехай

$x \in X_1$, тоді $p_1(x) = x$. Отож,

$$\begin{aligned} s_1 \circ f_2^{**}(x) &= h_1 \circ q_2 \circ f_2^{**}(x) = \\ &= h_1 \circ f_2^{*} \circ q_2(x) = \\ &= f_1^{*} \circ h_2 \circ q_2(x) = \\ &= f_1^{*} \circ q_1 \circ s_2(x) = \\ &= f_1^{**} \circ s_2(x). \end{aligned}$$

□

Аналогічно доводиться таке твердження

Твердження 10. *Нехай $f_1 \colon X_1 \to Y_1$, $f_2 \colon X_2 \to Y_2$ — L-еквівалентні відображення. Тоді для довільних $x_1 \in X_1$ та $x_2 \in X_2$ існують топологічні ізоморфізми вільних локально опуклих просторів в сенсі Граєва $i_1 \colon LG(X_1, x_1) \to LG(X_2, x_2)$ та $i_2 \colon LG(Y_1, f(x_1)) \to LG(Y_2, f(x_2))$ такі, що $i_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ i_1$, де $f_1^* \colon LG(X_1, x_1) \to LG(Y_1, f(x_1))$ і $f_2^* \colon LG(X_2, x_2) \to LG(Y_2, f(x_2)$ гомоморфізми, що продовжують відображення f_1 та f_2.*

Подяка

Автор висловлює подяку проф. М. Зарічному та рецензентові за корисні поради, коментарі та зауваження.

Список використаної літератури

1. В. И. Арнаутов, *Об изоморфизмах свободных топологических групп, колец и модулей порожденных топологическими пространствами*, Изв. АН Респ. Молдова (1993), no. 2(12), 63–71.
2. О. Г. Окунев, *M-эквивалентность произведений*, Тр. ММО **56** (1995), 192–205; **English version in:** O. G. Okunev, *M-equivalence of products*, Trans. Moscow Math. Soc. (1995), 149–158.
3. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар і відображень*, Мат. методи фіз.-мех. поля. **49** (2006), no. 2, 21–26.
4. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 38–46.
5. A. V. Arhangel'skii and M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781p.
6. V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky, and A. V. Mikhalev, *Introduction to the theory of topological rings and modules*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 197. M. Dekker, New York, 1996. 502 p.
7. T. Banakh, I. Guran, and O. Gutik *Free topological inverse semigroups*, Mat. Stud. **15** (2001), no. 1, 23–43.
8. M. M. Choban, *Algebraic equivalence of topological spaces*, Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. (2001), no. 1 (35), 12–36.
9. O. G. Okunev, *A method for consructing examples of M-equivalent spaces*, Topology Appl. **36** (1990), no. 2, 157–171. DOI: 10.1016/0166-8641(90)90006-N; Correction: Topology Appl. **49** (1993), no. 2, 191–192. DOI: 10.1016/0166-8641(93)90044-E
10. N. M. Pyrch, *Orthogonal retractions and the relation of M-equivalence*, Mat. Stud. **20** (2003), no. 2, 151–161.

11. N. M. Pyrch, *O*n M-equivalence of mappings, Mat. Stud. **24** (2005), no. 1, 21–30.

Стаття: надійшла до редколегії 23.02.2019
доопрацьована 30.04.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF TYCHONOFF SPACES 2: SPECIAL ISOMORPHISMS

Nazar Pyrch

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020 Lviv, Ukraine
e-mail: pnazar@ukr.net

Let X be a Tychonov space. By $F(X)$ we denote the free topological group of X in the sense of Markov. For any subspace Y of X we denote by $G(Y, X)$ (or simply $G(Y)$) the group hull of Y in $F(X)$.
Given families $\{X_i : i \in I\}$, $\{Y_i : i \in I\}$ of subspaces of topological spaces X and Y respectively, we say that $(X, \{X_i : i \in I\})$ is *M-equivalent* to $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, if there exists a topological isomorphism $h: F(X) \to F(Y)$ such that $h(A_i) \subseteq G(B_i)$ and $h^{-1}(B_i) \subseteq G(A_i)$ for all $i \in I$.
An isomorphism $i: F(X) \to F(Y)$ is called special if the composition $e^*_Y \circ i$ is a constant map, where $e^*_Y : F(Y) \to \mathbb{Z}$ is the homomorphism extending the map $e_Y : Y \to \mathbb{Z}$ which is identically 1 on Y. Okunev proved that, for any two M-equivalent space, there exists a special homomorphism between their free topological groups. In his previous papers, the author extended this result over the case of M-equivalent maps and M-equivalent pairs of topological spaces.
Generalizing these results we consider the conditions for existence of special isomorphisms between free topological groups preserving subgroups. Also we consider relations between F-equivalence of bundles of subspaces of topological spaces for some functors of topological algebra (e.g, the functors of free (Abelian) topological group, free (Abelian) topological ring, and free locally convex space.

Key words: free topological group, free Abelian topological group, special isomorphism of the free groups, bundle of topological spaces, free topological ring, free Abelian topological ring.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 70–82
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 70–82
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.070-082

УДК 515.1

DETECTING σZ_n-SETS IN TOPOLOGICAL GROUPS AND LINEAR METRIC SPACES

Taras BANAKH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: t.o.banakh@gmail.com

We prove that if an analytic subset A of a linear metric space X is not contained in a σZ_ω-subset of X then for every Polish convex set K with dense affine hull in X the sum $A+K$ is non-meager in X and the sets $A+A+K$ and $A-A+K$ have non-empty interior in the completion $\bar{X}$ of X. This implies two results:

- an analytic subgroup A of a linear metric space X is a σZ_ω-space if A is not Polish and A contains a Polish convex set K with dense affine hull in X;
- a dense convex analytic subset A of a linear metric space X is a σZ_ω-space if A contains no open Polish subspace and A contains a Polish convex set K with dense affine hull in X.

Key words: Z-set, σZ-space, analytic set, topological group, convex set, linear metric space.

A topological space X is *analytic* if it is a metrizable continuous image of a Polish space. A *Polish space* is a separable topological space homeomorphic to a complete metric space. It is well-known [11, 14.2] that each Borel subset of a Polish space is analytic. By Lusin-Sierpinski Theorem [11, 21.6], each analytic subset A of a Polish space X has the *Baire property*, i.e., $(A\setminus U)\cup(U\setminus A)$ is meager in X for some open set $U\subset X$.

By the classical result of S. Banach [1], each non-complete analytic topological group is meager, i.e., can be represented as the countable union of nowhere dense subsets. This result can be easily derived from the following known fact attributed to Piccard [14] and Pettis [15] (see [11, 9.9]).

Theorem 1 (Piccard-Pettis). *If two analytic subsets A,B of a Polish group X are non-meager in X, then the set AB has non-empty interior and AA^{-1} is a neighborhood of unit in G.*

2010 Mathematics Subject Classification: 57N17, 03E15, 54H05

Meager subsets of a topological space X form a σ-ideal $\mathcal{M}(X) = \sigma\mathcal{Z}_0(X)$ which is the largest ideal among σ-ideals $\sigma\mathcal{Z}_n(X)$ generated by Z_n-sets in X. A subset $A \subset X$ of a topological space X is called a *Z_n-set* in X if A is closed in X and the complement $X \setminus A$ is n-dense in X. A subset $B \subset X$ is called *n-dense* in X if the set $C(\mathbb{I}^n, B)$ of maps $\mathbb{I}^n \to B$ is dense in the space $C(\mathbb{I}^n, X)$ of all continuous functions $f : \mathbb{I}^n \to X$ defined on the n-dimensional cube $\mathbb{I}^n = [0,1]^n$. The function space $C(\mathbb{I}^n, X)$ is endowed with the compact-open topology. Observe that a subset $D \subset X$ is dense if and only if D is 0-dense in X. It is clear that each n-dense set $D \subset X$ is k-dense in X for every $k \le n$.

The following properties of Z_n-sets follow immediately from the definitions:

- a subset $A \subset X$ is a Z_0-set if and only if A is closed and nowhere dense in X;
- for any numbers $0 \le n \le m \le \omega$ every Z_m-set in X is a Z_n-set in X;
- a subset $A \subset X$ is a Z_ω-set in X if and only if A is a Z_n-set in X for every $n \in \mathbb{N}$.

By $\sigma\mathcal{Z}_n(X)$ we shall denote the σ-ideal generated by Z_n-sets in X. It consists of subsets that can be covered by countably many Z_n-sets in X. A topological space X is called a *σZ_n-space* if $X \in \sigma\mathcal{Z}_n(X)$. It follows that $\sigma\mathcal{Z}_m(X) \subset \sigma\mathcal{Z}_n(X)$ for any numbers $0 \le n \le m \le \omega$. So, the σ-ideal $\sigma\mathcal{Z}_\omega(X)$ is the smallest ideal among the σ-ideals $\sigma\mathcal{Z}_n(X)$.

Z_ω-Sets and σZ_ω-spaces play an important role in Infinite-Dimensional Topology, see [6], [7], [8], [12], [13]. In [9, 4.4] Dobrowolski and Mogilski asked the following problem related to the mentioned classical result of Banach [1].

Problem 1 (Dobrowolski, Mogilski, 1990)**.** *Is each non-complete analytic linear metric space a σZ_ω-space?*

This problem was answered in negative by Banakh [3] (see also [6, 5.5.19]) who proved that the linear hull $\mathsf{lin}(E)$ of the Erdős set $E = \ell_2 \cap \mathbb{Q}^\omega$ in the separable Hilbert space ℓ_2 fails to be a σZ_ω-space.

Yet, the following weaker version of Problem 1 still remains open (see [2], [4, 2.2]).

Problem 2 (Banakh, 1997)**.** *Is each non-complete analytic linear metric space a σZ_n-space for every $n \in \mathbb{N}$?*

In this paper we shall give some partial positive answers to Problems 1 and 2, detecting analytic subsets in metrizable topological groups G that belong to the σ-ideals $\sigma\mathcal{Z}_n(G)$ for all $n \le \omega$. In fact, we shall work with the smaller σ-ideals $\sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\mathcal{D}}(G)$ and $\sigma\dot{Z}_n(G)$ defined as follows.

By a *metrizable group* we shall understand a metrizable topological group. It is known that for any metrizable group G there exists a completely-metrizable group $\bar{G}$ containing G as a dense subgroup. The group $\bar{G}$ is unique up to isomorphism and is called *the Raikov completion* of G. The Raikov completion of a separable metrizable group is a Polish group. For two subsets A, B of a group G by $A \cdot B$ or just AB we denote their product $\{ab : a \in A,\ b \in B\}$ in G.

Let G be a topological group and $\bar{G}$ be its Raikov completion. Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets of G. A closed subset $A \subset G$ is called *a $\dot{Z}_{\mathcal{D}}$-set* in X if there exists a set $D \in \mathcal{D}$ such that the set $D \cdot \bar{A}$ has empty interior in $\bar{G}$, where $\bar{A}$ denotes the closure of A in $\bar{G}$. By $\sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\mathcal{D}}(G)$ we denote the σ-ideal generated by $\dot{Z}_{\mathcal{D}}$-sets in G.

Proposition 1. *Let $\mathcal{D}$ be a family of n-dense subsets of a topological group G. Then each $\dot{Z}_{\mathcal{D}}$-set A in G is a Z_n-set in G and hence $\sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(G) \subset \sigma\mathcal{Z}_n(G)$.*

Proof. Assume that A is a $\dot{Z}_{\mathcal{D}}$-set in X. Given a continuous map $f : \mathbb{I}^n \to G$ and a neighborhood $U_0 \subset G$ of the unit 1_G, we need to find a continuous map $f' : \mathbb{I}^n \to G \setminus A$ such that $f'(z) \in f(z) \cdot U_0$ for all $z \in \mathbb{I}^n$. Let $\bar{G}$ be the Raikov completion of the topological group G and $\bar{A}$ be the closure of A in $\bar{G}$.

Find an open neighborhood $\tilde{U}_0 \subset \bar{G}$ of the unit 1_G such that $\tilde{U}_0 \cap G = U_0$ and choose a neighborhood $\tilde{U}_1 \subset \bar{X}$ of 1_G such that $\tilde{U}_1\tilde{U}_1\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}_0$. Since A is a $\dot{Z}_{\mathcal{D}}$-set in G, there exists a set $D \in \mathcal{D}$ such that the set $D \cdot \bar{A}$ has empty interior in $\bar{G}$. The n-density of the set D in G implies the n-density of its inverse $D^{-1} = \{x^{-1} : x \in D\}$. Then there exists a continuous map $f_1 : \mathbb{I}^n \to D^{-1}$ such that $f_1(z) \in f(z) \cdot \tilde{U}_1$ for all $z \in \mathbb{I}^n$.

Since the set $D \cdot \bar{A}$ has empty interior in $\bar{G}$, there is a point $u \in \tilde{U}_1 \setminus D \cdot \bar{A}$. For this point we get $(D^{-1} \cdot u) \cap \bar{A} = \varnothing$. Consider the map $f_2 : \mathbb{I}^n \to \bar{G}$, $f_2 : z \mapsto f_1(z)u$, and observe that $f_2(\mathbb{I}^n) \cap \bar{A}_n \subset (D^{-1} \cdot u) \cap \bar{A}_n = \varnothing$. Since the set $f_2(\mathbb{I}^n)$ is compact, there is a neighborhood $\tilde{U}_2 \subset \tilde{U}_1$ of the unit 1_G such that $(f_2(\mathbb{I}^n) \cdot \tilde{U}_2) \cap \bar{A} = \varnothing$. Using the density of G in $\bar{G}$, choose a point $w \in G \cap (\tilde{U}_2 \cdot u)$. Then the map $f_3 : \mathbb{I}^n \to \bar{G}$ defined by

$$f_3(z) = f_2(z) \cdot u^{-1}w = f_1(z) \cdot uu^{-1}w = f_1(z) \cdot w \in G$$

for $z \in \mathbb{I}^n$ has the properties: $f_3(\mathbb{I}^n) \subset G \setminus \bar{A} = G \setminus A$ and for every $z \in \mathbb{I}^n$

$$f_3(z) = f_1(z)uu^{-1}w \in f_1(z)\tilde{U}_1\tilde{U}_2 \subset f(z)\tilde{U}_1\tilde{U}_1\tilde{U}_2 \subset f(z)\tilde{U}_0,$$

which implies $f(z)^{-1}f_3(z) \in G \cap \tilde{U}_0 = U_0$ and finally $f_3(z) \in f(z)U_0$. The map $f_3 : \mathbb{I}^n \to G \setminus A$ witnesses that A is a Z_n-set in G. $\square$

For a topological group G by $\mathcal{D}_n(G)$ we shall denote the family of all n-dense subsets in G. To simplify notation, $\dot{Z}_{\mathcal{D}_n(G)}$-sets will be called *$\dot{Z}_n$-sets* in G. Also we shall denote the σ-ideal $\sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\mathcal{D}_n(G)}(G)$ by $\sigma\dot{Z}_n(G)$. This σ-ideal is generated by all $\dot{Z}_n$-sets in G. It consists of subsets that can be covered by countably many $\dot{Z}_n$-sets in G. Proposition 1 implies that

$$\sigma\dot{\mathcal{Z}}_n(G) \subset \sigma\mathcal{Z}_n(G)$$

for any topological group G. $\dot{Z}_n$-Sets in separable metrizable groups admit the following convenient characterization.

Proposition 2. *A closed subset A of a separable metrizable group G is a $\dot{Z}_n$-set in G for some $n \le \omega$ if and only if there exists a σ-compact n-dense subset $D \subset G$ such that for every compact set $K \subset D$ the set $K \cdot D$ is nowhere dense in G.*

Proof. Since G is separable and metrizable, the Raikov completion $\bar{G}$ of G is a Polish group. To prove the "if" part, assume that there exists a σ-compact n-dense subset $D \subset G$ such that for every compact set $K \subset D$ the set $K \cdot A$ is nowhere dense in G. Then the set $K \cdot \bar{A} \subset \overline{K \cdot A}$ is nowhere dense in $\bar{G}$ and the set $D \cdot \bar{A}$ is meager in $\bar{G}$. Since $\bar{G}$ is Polish, the set $D \cdot \bar{A}$ has empty interior in $\bar{G}$ and hence A is a $\dot{Z}_n$-set in G.

To prove the "only if" part, assume that A is a $\dot{Z}_n$-set and find an n-dense subset $D' \subset G$ such that the set $D' \cdot \bar{A}$ has empty interior in $\bar{G}$. The the function space $C(\mathbb{I}^n, D')$ is dense in $C(\mathbb{I}^n, G)$. Since the function space $C(\mathbb{I}^n, D')$ is metrizable and separable, we can find a countable dense subset $\{f_k\}_{k\in\omega}$ in $C(\mathbb{I}^n, D')$. Then $D = \bigcup_{k\in\omega} f_k(\mathbb{I}^n)$ is a σ-compact n-dense subset in G. It remains to show that for each compact set $K \subset D$

the set $K \cdot \bar{A}$ is nowhere dense in $\bar{G}$. Consider the multiplication map $\mu : K \times \bar{A} \to \bar{G}$, $\mu : (x, y) \mapsto xy$, and observe that for any compact subset $C \subset \bar{G}$ the preimage

$$\mu^{-1}(C) = \{(x, y) \in K \times \bar{A} : xy \in C\} \subset K \times (K^{-1}C)$$

is compact. By [10, 3.7.18], the map μ is closed, which implies that the set $K\bar{A} = \mu(K \times \bar{A})$ is closed in $\bar{G}$. Since the set $D \times \bar{A}$ has empty interior in $\bar{G}$, the closed subset $K\bar{A} \subset D\bar{A}$ is nowhere dense in $\bar{G}$. Then its subset KA is nowhere dense in G. □

Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets of a topological group G. A subset $T \subset G$ is called *$\mathcal{D}$-thick* if for every non-empty open set $U \subset T$ there exist a set $D \in \mathcal{D}$ and a countable set $C \subset G$ such that $D \subset C \cdot \bar{U}$. A set $T \subset G$ is called *n-thick* in G if it is $\mathcal{D}_n(G)$-thick. The latter means that for every non-empty open set $U \subset T$ there is a countable set $C \subset G$ such that the set $C\bar{U}$ in n-dense in G.

Theorem 2. *Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets in a separable metrizable group G. If an analytic subset A of G does not belong to the σ-ideal $\sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(X)$, then for any $\mathcal{D}$-thick subset $T \subset G$ and any dense Polish subspace $P \subset T$ the set PA is not meager in G, the set $PAPA$ has non-empty interior in the Raikov completion $\bar{G}$ of G, and the set $PAA^{-1}P^{-1}$ is a neighborhood of unit in $\bar{G}$.*

Proof. Assume that $A \notin \sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\mathcal{D}}(G)$ and T is an $\mathcal{D}$-thick set in G. On the Polish group $\bar{G}$ consider the σ-ideal $\mathcal{I}$ generated by the family $\{\bar{A} : A \in \sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(G)\}$ of closed subsets of the Polish group $\bar{G}$. It follows from $A \notin \sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(G)$ that $A \notin \mathcal{I}$. By the Solecki dichotomy [16], the analytic set $A \notin \mathcal{I}$ contains a Polish subspace $B \notin \mathcal{I}$. Replacing B by a smaller closed subset of B, we can assume that each non-empty open subspace $U \subset B$ does not belong to the ideal $\mathcal{I}$.

Given a dense Polish subspace $P \subset T$, we shall show that the set PB is not meager in G. To derive a contradiction, assume that PB is meager in G and find closed nowhere dense subsets $N_k \subset \bar{G}$, $k \in \omega$, such that $PB \subset \bigcup_{k\in\omega} N_k$. By the continuity of the multiplication in G, for every $k \in \omega$ the set

$$M_k = \{(x, y) \in P \times B : xy \in N_k\}$$

is closed in the Polish space $P \times B$. Since $P \times B \subset \bigcup_{k\in\omega} M_k$, we can apply the Baire Theorem and find two non-empty open sets $V \subset P$ and $U \subset B$ such that $V \times U \subset M_k$ for some $k \in \omega$. It follows that the set $\bar{V} \times \bar{U} \subset N_k$ is nowhere dense in $\bar{G}$. Here $\bar{V}$ is the closure of V in G and $\bar{U}$ is the closures of U in $\bar{G}$.

Since the set T is $\mathcal{D}$-thick in G, and the set $\bar{V} \cap T$ has non-empty interior in T, for some countable set $S \subset G$ the set $S \cdot \bar{V}$ contains a set $D \in \mathcal{D}$.

By the choice of P, the non-empty open set $U \subset P$ does not belong to the ideal $\mathcal{I}$ and hence $\bar{U} \cap G$ is not a $\dot{Z}_{\mathcal{D}}$-set in G. Then for the set $D \in \mathcal{D}$ the set $D\bar{U}$ has non-empty interior in $\bar{G}$ and hence is not meager in $\bar{G}$. On the other hand, the set $D\bar{U} \subset S\bar{V}\bar{U} \subset S \cdot N_k$ is meager in $\bar{G}$ being the union of countably many translations of the nowhere dense set N_k. This contradiction shows that the set PB is not meager in G and consequently the analytic set $PA \supset PB$ is not meager in the Polish group $\bar{G}$. By the Piccard-Pettis Theorem 1, the set $PAPA$ has non-empty interior in $\bar{G}$ and the set $PA(PA)^{-1}$ is a neighborhood of the unit in $\bar{G}$. □

A topological space X is called *densely-Polish* if A contains a dense Polish subspace. It is known that an analytic space A is densely-Polish if and only if A is Baire.

Corollary 1. *Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets of a separable metrizable group G. If analytic subsets A, B of G do not belong to the ideal $\sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(G)$, then for any densely-Polish $\mathcal{D}$-thick sets E, F in X the sets EA, FB are not meager in G and the sets $EAFB$ and $EAB^{-1}F^{-1}$ have non-empty interior in the Raikov completion $\bar{G}$ of G.*

Proof. Let $E_* \subset E$ and $F_* \subset F$ be dense Polish subspaces of the densely-Polish spaces E and F, respectively. By Theorem 2, the analytic sets E_*A and F_*B are not meager in the Polish space $\bar{G}$. By the Piccard-Pettis Theorem 1, the sets $E_*AF_*B \subset EAFB$ and $E_*AB^{-1}F_*^{-1} \subset EAB^{-1}F^{-1}$ have non-empty interior in the Polish group $\bar{G}$. □

Corollary 1 implies the next three corollaries.

Corollary 2. *Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets in a separable metrizable group G and A be an analytic subgroup in G. If $A \notin \sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(X)$, then for any densely-Polish $\mathcal{D}$-thick subsets $E, F \subset G$ the set EAF^{-1} have non-empty interior in the completion $\bar{G}$ of G.*

Corollary 3. *Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets of a separable metrizable group G. If G is not Polish and G contains a densely-Polish $\mathcal{D}$-thick subset P, then each analytic subset A of X belongs to the σ-ideal $\sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(X)$.*

Proof. By Corollary 1, for every analytic set $A \notin \sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(G)$ of G the set $PAPA \subset G$ has non-empty interior in the Raikov completion $\bar{G}$ of G. Then G also has non-empty interior in $\bar{G}$ and hence coincides with the Polish group $\bar{G}$, which is a desired contradiction. □

A subset A of an abelian group G is called *additive* if $A + A \subset A$. In particular, each subgroup of G is an additive set. Corollary 1 implies:

Corollary 4. *Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets in an abelian separable metrizable group G and A be an additive set in G. If $A \notin \sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(X)$, then for any densely-Polish $\mathcal{D}$-thick subsets $E, F \subset X$ the set $A + E + F$ has non-empty interior in the Raikov completion $\bar{G}$ of G.*

A similar result holds for convex subsets in linear metric spaces.

Corollary 5. *Let $\mathcal{D}$ be a family of subsets of a separable linear metric space X, and let A be a convex subset of X. If $A \notin \sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(X)$, then for any densely-Polish $\mathcal{D}$-thick subsets $E, F \subset X$ the set $A + E + F$ has non-empty interior in the completion $\bar{X}$ of X.*

Proof. It follows that the homothetic copy $\frac{1}{2}A = \left\{\frac{1}{2}a : a \in A\right\}$ of A does not belong to the ideal $\sigma\dot{Z}_{\mathcal{D}}(X)$. By Corollary 1, the set $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + E + F$ has non-empty interior in $\bar{X}$. The convexity of A guarantees that $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \subset A$ and hence the set

$$A + E + F \supset \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + E + F$$

has non-empty interior in $\bar{X}$, too. □

Applying the above results to the family $\mathcal{D}_n(G)$ of n-dense subsets in a topological group G, we get the following corollaries. In these corollaries we use the obvious fact that a topological group G containing an n-thick separable subset is separable. By Proposition 1,

$$\sigma\dot{\mathcal{Z}}_n(G) := \sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\mathcal{D}_n(G)}(G) \subset \sigma\mathcal{Z}_n(G).$$

By Proposition 2, a closed subset A of a separable metrizable group G is a $\dot{Z}_n$-set in X if and only if there exists a σ-compact n-dense set $D \subset G$ such that for every compact set $K \subset D$ the set $K \cdot A$ is nowhere dense in G.

We recall that a subset T of a topological group G is n-thick if and only if for any non-empty open set $U \subset T$ there is a countable subset $A \subset G$ such that the set $A \cdot U$ is n-dense in G. Observe that each non-empty subset of a separable metrizable group is 0-thick. Because of that the following corollary of Theorem 2 can be considered as a generalization of the Piccard-Pettis Theorem 1.

Corollary 6. *If for some $n \le \omega$ an analytic subset A of a metrizable group G does not belong to the σ-ideal $\sigma\dot{Z}_n(X)$, then for any n-thick subset $T \subset G$ and any dense Polish subspace $P \subset T$ the set PA is not meager in G, the set $PAPA$ has non-empty interior in $\bar{G}$, and the set $PAA^{-1}P^{-1}$ is a neighborhood of unit in $\bar{G}$.*

Corollary 7. *If for some $n \le \omega$ analytic subsets A, B of a metrizable group G do not belong to the ideal $\sigma\dot{Z}_n(G)$, then for any densely-Polish n-thick sets E, F in X the sets EA, FB are not meager in G and the sets $EAFB$ and $EAB^{-1}F^{-1}$ have non-empty interior in the Raikov completion $\bar{G}$ of G.*

Corollary 8. *Let A be an analytic subgroup of a separable metrizable group G. If $A \notin \sigma\dot{Z}_n(X)$ for some $n \in \omega$, then for any densely-Polish n-thick subsets $E, F \subset G$ the set EAF^{-1} has non-empty interior in the completion $\bar{G}$ of G.*

Corollary 9. *If for some $n \le \omega$ a non-complete metrizable topological group G contains a densely-Polish n-thick subset, then each analytic subset of X belongs to the σ-ideal $\sigma\dot{Z}_n(X) \subset \sigma Z_n(X)$.*

Corollary 10. *Let A be an additive subset of an abelian metrizable topological group G. If $A \notin \sigma\dot{Z}_n(X)$ for some $n \le \omega$, then for any densely-Polish n-thick subsets $E, F \subset X$ the set $A + E + F$ has non-empty interior in the completion $\bar{G}$ of G.*

Corollary 11. *Let A be an convex analytic subset of a linear metric space X. If $A \notin \sigma\dot{Z}_n(X)$ for some $n \le \omega$, then for any densely-Polish n-thick subsets $E, F \subset X$ the set $A + E + F$ has non-empty interior in the completion $\bar{X}$ of X.*

In light of the above results, it is important to recognize n-thick sets in topological groups and linear metric spaces. A characterization of n-thick convex sets is quite simple.

Proposition 3. *For a convex subset C in a separable linear metric space X the following conditions are equivalent:*

1. *(1) C is n-thick in X for every $n \le \omega$;*
2. *(2) C is n-thick in X for some $n \ge 1$;*
3. *(3) the linear space $\mathbb{R} \cdot (C - C)$ is dense in X;*
4. *(4) the affine hull of C is dense in X;*

(5) C is $\{L\}$-thick in X for some dense linear subspace L of X.

Proof. We shall prove the implications (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5). The first implications (1) $\Rightarrow$ (2) is trivial.

(2) $\Rightarrow$ (3) Assuming that the convex set C is n-thick in X for some $n \geq 1$, we shall prove that the linear space $L = \mathbb{R} \cdot (C - C)$ is dense in X. Since C is n-thick in X, there is a countable set $S \subset X$ such that the set $S + C$ is n-dense in X. Then the set $S + \bar{L}$ also is n-dense in X. Consider the quotient space $X/\bar{L}$ and the quotient linear operator $q : X \to X/\bar{L}$. Since the set $q(S + \bar{L}) = q(S)$ is countable, for each connected subspace A of $S + \bar{L}$ the image $q(A)$ is a singleton, which means that contained in a single coset $x + \bar{L}$. Now the density of the $C(\mathbb{I}^n, S + \bar{L})$ in $C(\mathbb{I}^n, \bar{L})$ implies that $\bar{L} = X$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Assume that the linear space $L = \mathbb{R} \cdot (C - C)$ is dense in X. Since for any point $c \in C$ the shift $c + L$ coincides with the affine hull $\mathsf{aff}(C)$ of C, the set $\mathsf{aff}(C)$ is dense in X, too.

(4) $\Rightarrow$ (5) Assume that the affine hull $\mathsf{aff}(C)$ of C is dense in X. Replacing C by a suitable shift, we can assume that zero belongs to C and hence the affine hull of C coincides with the linear hull of C. We shall prove that the convex set C is $\{L\}$-thick for any dense linear subspace $L \subset \mathbb{R} \cdot (C - C)$ of countable algebraic dimension. In this case we can find a countable subset $\{x_k\}_{k\in\omega}$ in C such that $x_0 = 0$ and the linear hull of the set $\{x_n\}_{n\in\omega}$ contains the linear space L. For every $n \in \omega$ by Δ_n and L_n denote the convex and liner hulls of the finite set $F_n = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset C$. It is clear $L \subset \bigcup_{n\in\omega} L_n$ and $L_n = S_n + \Delta_n \subset S_n + C$ for some countable set $S_n \subset L_n$. Given a non-empty open subset $U \subset C$, we should find a countable set $S \subset X$ such that $L \subset S + U$. Fix any point $u \in U$ and find a neighborhood $\tilde{U} \subset X$ of zero such that $(u + \tilde{U}) \cap C \subset U$. For every $n \in \mathbb{N}$ find a neighborhood $\tilde{V} \subset X$ of zero such that for any points $v_1, \ldots, v_n \in \tilde{V}$ and real numbers $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ we get $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in \tilde{U}$. Next, find $\varepsilon_n \in (0, 1]$ such that $\varepsilon_n \cdot (F_n - u) \subset \tilde{V}$. The choice of $\tilde{V}$ guarantees that $\varepsilon_n(\Delta_n - u) \subset \tilde{U}$ and hence

$$L_n = (1 - \varepsilon_n)u + \varepsilon_n \cdot L_n = (1 - \varepsilon_n)u + \varepsilon_n(S_n + \Delta_n) = \varepsilon_n S_n + (1 - \varepsilon_n)u + \varepsilon_n \Delta_n =$$
$$= \varepsilon_n S_n + u + \varepsilon_n(\Delta_n - u) \subset \varepsilon_n S_n + (C \cap (u + \tilde{U})) \subset \varepsilon_n S_n + U.$$

Then the countable set $S = \bigcup_{n=1}^\infty \varepsilon_n S_n$ has the required property:

$$L \subset \bigcup_{n=1}^\infty L_n \subset S + U.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) Assume that C is $\{L\}$-thick for some dense linear subspace $L \subset X$. By Lemma 1, L is ω-dense in X, so C is ω-thick and hence n-thick for every $n \leq \omega$. □

Lemma 1. *Let $A \subset B$ be convex sets in a linear metric space X. If A is dense in B, then A is ω-dense in B.*

Proof. It suffices to check that A is n-dense in B for every $n \in \mathbb{N}$ (see [7, V.2.1]). Given a continuous map $f : \mathbb{I}^n \to B$ and a neighborhood $U_0 \subset X$ of zero, we need to find a continuous map $g : \mathbb{I}^n \to A$ such that $g(z) \in f(z) + U_0$ for all $z \in \mathbb{I}^n$. Choose an open neighborhood $W \subset X$ of zero such that for any points $w_0, \ldots, w_n \in W + W - W$ and numbers $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{I} = [0, 1]$ we get $\sum_{i=0}^n \lambda_i w_i \in U_0$. Consider the open cover $\mathcal{W} = \{f^{-1}(x + W) : x \in X\}$ of $\mathbb{I}^n$. Since $\mathbb{I}^n$ is an n-dimensional (para)compact space, there exists an finite open cover $\mathcal{V}$ of $\mathbb{I}^n$ such that for every $z \in \mathbb{I}^n$ the family $\mathcal{V}_z = \{V \in \mathcal{V} : z \in \mathcal{V}\}$ contains at most $n+1$ sets and its union $\bigcup \mathcal{V}_z$ is contained in some set of the cover $\mathcal{W}$. By the paracompactness of $\mathbb{I}^n$, there is a partition of unity $\{\lambda_V : \mathbb{I}^n \to [0,1]\}_{V\in\mathcal{V}}$ subordinated to the cover $\mathcal{V}$. The latter means that $\lambda_V^{-1}\big((0,1]\big) \subset V$ for all $V \in \mathcal{V}$, and $\sum_{V\in\mathcal{V}} \lambda_V \equiv 1$. For every set $V \in \mathcal{V}$ fix a point $z_V \in V$ and by the density of A in B find a point $y_V \in A \cap (f(z_V) + W)$. Consider the map $g : \mathbb{I}^n \to L$ defined by the formula $g(z) = \sum_{V\in\mathcal{V}} \lambda_V(z) y_V$ for $z \in \mathbb{I}^n$. It is clear that $g(\mathbb{I}_n)$ is contained in the convex hull Δ of the finite set $\{y_V\}_{V\in\mathcal{V}} \subset A$. We claim that $g(z) - f(z) \in U_0$ for all $z \in Z$. By the choice of the cover $\mathcal{V}$, the set $\bigcup \mathcal{V}_z$ is contained in some set $f^{-1}(W + x)$, $x \in X$. Then for every $V \in \mathcal{V}_z$ we get $f(z_V) - f(z) \in W - W$ and hence

$$y_V - f(z) \in W + f(z_V) - f(z) \subset W + W - W.$$

Then

$$g(z) - f(z) = \sum_{V\in\mathcal{V}_z} \lambda_V(z)(y_V - f(z)) \in U_0$$

by the choice of the neighborhood W. The map g witnesses that A is n-dense in B. □

A convex subset C of a linear topological space X is called aff-*dense* in X if the affine hull of C is dense in X. By Proposition 3, a convex subset of a separable linear metric space is aff-dense if and only if it is ω-thick in X.

Theorem 3. *If a non-complete linear metric space X contains a densely-Polish* aff-*dense convex set C, then every analytic subset of X belongs to the σ-ideal $\dot{\mathcal{Z}}_{\{L\}}(X)$ for some dense linear subspace L of X.*

Proof. Being densely-Polish, the convex set C is separable and so is its affine hull $\mathsf{aff}(C)$. Since $\mathsf{aff}(C)$ is dense in X, the space X is separable and its completion $\bar{X}$ is a Polish linear metric space. By Proposition 3, the Polish convex set $C \subset X$ is $\{L\}$-thick for some dense linear subspace $L \subset X$. To finish the proof apply Corollary 3 to the family $\mathcal{D} = \{L\}$. □

For a separable linear metric space X by $\mathcal{L}_\infty(X)$ we denote the family of dense linear subspaces in X. To simplify notation, denote the union $\bigcup_{L\in\mathcal{L}_\infty(X)} \sigma\dot{Z}_{\{L\}}(X)$ by $\sigma\dot{\mathcal{Z}}_\infty(X)$. Observe that a set $A \subset X$ belongs to the family $\sigma\dot{\mathcal{Z}}_\infty(X)$ if and only if there exists a dense linear subspace $L \subset X$ (of countable algebraic dimension) in X and a sequence $(A_n)_{n\in\omega}$ of closed subsets of X such that $A \subset \bigcup_{n\in\omega} A_n$ and for every compact subset $K \subset L$ the sets $K + \bar{A}_n$, $n \in \omega$, are nowhere dense in X.

It follows that

$$\sigma\dot{Z}_\infty(X) \subset \sigma\dot{\mathcal{Z}}_\omega(X) \subset \sigma\mathcal{Z}_\omega(X)$$

for every separable linear metric space X.

Theorem 4. *For any analytic subsets $A, B \notin \sigma\dot{\mathcal{Z}}_\infty(X)$ of a linear metric space X and any densely-Polish* aff-*dense convex set C in X the sumset $A + B + C$ has non-empty interior in the completion $\bar{X}$ of X. Moreover, if A is additive or convex, then the sum $A + C$ has non-empty interior in $\bar{X}$.*

Proof. By Proposition 3, the aff-dense convex sets C is $\{L\}$-thick for some dense linear subspace L of X. Then its homothetic copy $\frac{1}{2}C$ also is $\{L\}$-thick. The convexity of C implies that $\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}C\subset C$. Applying Corollary 1 to the family $\mathcal{D}=\{L\}$ and observing that the σ-ideal $\sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\{L\}}(G)\subset\sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\infty}(G)$ does not contain the analytic sets A,B, we conclude that the sets $A+\frac{1}{2}C+B+\frac{1}{2}C\subset A+B+C$ have non-empty interior in the completion $\bar{X}$ of X. By the same reason, the sets

$$A+A+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}C\subset A+A+C$$

and $A+A+C+C$ have non-empty interior in $\bar{X}$.

If A is additive, then $A+A\subset A$ and hence the set $A+C\supset A+A+C$ has non-empty interior in $\bar{X}$. If A is convex in X, then $\frac{1}{2}(A+A)\subset A$ and hence the set

$$A+C\supset\frac{1}{2}(A+A+C+C)$$

has non-empty interior in $\bar{X}$. □

The following two theorems detect analytic groups and analytic convex sets which are σZ_ω-spaces, thus giving partial positive answers to Problems 1 and 2.

Theorem 5. *An analytic subgroup A of a linear metric space X is a σZ_ω-space provided that A is not Polish and A contains a densely-Polish aff-dense convex subset C of X.*

Proof. Since A is a group, the set $\mathbb{N}\cdot(C-C)$ is contained in the group A. The convexity of C implies that $L=\mathbb{N}\cdot(C-C)=\mathbb{R}\cdot(C-C)$ is a linear subspace in X. The aff-density of C implies that the linear space $L\subset A$ is dense in X. By Lemma 1, the dense linear subspace L is ω-dense in X and so is the subgroup $A\supset L$. Since the sum $A+C=A$ has empty interior in $\bar{X}$, the set A belongs to the σ-ideal $\sigma\dot{\mathcal{Z}}_\infty(X)\subset\sigma\mathcal{Z}_\omega(X)$ by Theorem 4. Since A is ω-dense in X, the inclusion $A\in\sigma\mathcal{Z}_\omega(X)$ implies $A\in\sigma\mathcal{Z}_\omega(A)$, which means that A is a σZ_ω-space. □

A similar result holds for convex sets.

Theorem 6. *A dense convex subset A of a linear metric space X is a σZ_ω-space provided that A is analytic, A contains an aff-dense densely-Polish convex subset C of X and A has empty interior in the completion $\bar{X}$ of X.*

Proof. Since the sets $\frac{1}{2}(A+C)\subset A$ has empty interior in $\bar{X}$, we can apply Corollary 11 and conclude that $A\in\sigma\dot{\mathcal{Z}}_\infty(X)\subset\sigma\mathcal{Z}_\omega(X)$. By Lemma 1, the dense convex subset A of X is ω-dense in X, which implies that $A\in\sigma\mathcal{Z}_\omega(A)$. □

Finally, we study properties of analytic linear metric spaces containing aff-dense Polish convex sets.

A linear subspace L of a linear metric space X is called an *operator image* if $L=T(B)$ for some linear continuous operator $T:B\to X$ defined on a Banach space B. The topology of operator images was studied in [5]. We shall prove that each aff-dense Polish convex set in a linear metric space is $\{L\}$-thick for some dense operator image $L\subset X$. For this we need the following known folklore fact.

Proposition 4. *Each Polish convex set A in a linear metric space contains a shift of a compact convex subset $K = -K$ such that the linear space $L = \mathbb{R} \cdot K$ is dense in the linear hull of $A - A$.*

Proof. Replacing the convex set A by a suitable shift of A, we can assume that A contains zero.

Fix an invariant metric d generating the topology of the linear metric space X and let $\bar{X}$ be the completion of the linear metric space (X, d). For a point $x \in X$ and a real number $\varepsilon > 0$ by $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ and $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) \le \varepsilon\}$ we denote the open and closed ε-balls centered at x, respectively. The space A, being Polish, is a G_δ-set in $\bar{X}$. So, we can write it as $A = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ for a descreasing family $(U_n)_{n\in\omega}$ of open sets in $\bar{X}$. Fix a countable dense set $\{a_n\}_{n\in\omega}$ in A.

Construct inductively two sequences of positive real numbers $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ and $(\lambda_n)_{n\in\omega}$ such that for every $n \in \omega$ the following conditions are satisfied:

(1) $\max\{\lambda_n, \varepsilon_n\} < \frac{1}{2^{n+2}}$;
(2) for every point x in the compact set
$$\Delta_n = \{\sum_{k=0}^{n} t_k \lambda_k a_k : t_0, \dots, t_n \in [0, 2]\}\} \subset A$$
we get $\bar{B}(x, \varepsilon_n) \subset U_n$ and $x + [0, 2\lambda_n]a_n \subset B(x, \varepsilon_n)$.

The conditions (1), (2) imply that for every sequence $(t_n)_{n\in\omega} \in [0, 2]^\omega$ the series $\sum_{n\in\omega} t_n \lambda_n a_n$ converges in $\bar{X}$ to some point of the convex set $A = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Put $c = \sum_{n\in\omega} \lambda_n a_n$ and observe that for every sequence $(t_n)_{n\in\omega} \in [-1, 1]^\omega$ the series
$$c + \sum_{n\in\omega} t_n \lambda_n a_n = \sum_{n\in\omega} (1 + t_n) \lambda_n a_n$$
converges to a point of A. It follows that the set
$$K = \left\{ \sum_{n\in\omega} t_n \lambda_n a_n : (t_n)_{n\in\omega} \in [-1, 1]^\omega \right\}$$
is compact, convex, symmetric, and $c + K \subset A$. It is clear that $\mathbb{R} \cdot K \supset \{a_n\}_{n\in\omega}$ is dense in the linear hull $\mathbb{R} \cdot (A - A)$ of the set $A - A$. □

Lemma 2. *If a linear metric space X contains an* aff*-dense Polish convex set P, then X contains an* aff*-dense compact convex set $K = -K$, which is $\{L\}$-thick for some dense operator image $L \subset X$.*

Proof. By Proposition 4, there is a compact convex set $S = -S$ in X such that $p + S \subset P$ for some $p \in P$ and the linear space $\mathbb{R} \cdot S$ is dense in $\mathbb{R} \cdot (P - P)$ and hence is dense in X. Choose a countable dense set $\{x_n\}_{n\in\omega}$ in S and find a sequence of real numbers $(\lambda_n)_{n\in\omega} \in (0, 1]^\omega$ such that the linear operator
$$T : \ell_1 \to X, \quad T : (t_n)_{n\in\omega} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda_n x_n,$$
is well-defined and continuous. Here ℓ_1 is the Banach space of real sequences $t = (t_n)_{n\in\omega}$ with the norm $\|t\| = \sum_{n\in\omega} |t_n| < \infty$. It is clear that the operator image $T(\ell_1)$ is dense in

X. Denote by $B = \{t \in \ell_1 : \|t\| \le 1\}$ the closed unit ball of the Banach space ℓ_1 and let K be the closure of the set $T(B)$ in S. It is clear that K is a compact convex symmetric subset of S and the affine hull $\mathbb{R} \cdot K \supset T(\ell_1)$ is dense in X. We claim that the convex set K is $\{T(\ell_1)\}$-thick. Given a non-empty open set $U \subset K$ we need to find a countable set $A \subset X$ such that $T(\ell_1) \subset A + U$. Since the set $T(B)$ is dense in K, the intersection $U \cap T(B)$ is not empty and hence the preimage $V = T^{-1}(U)$ contains some non-empty open subset of the ball B. The separability of the Banach space ℓ_1 yields a countable set $A_1 \subset \ell_1$ such that $\ell_1 = A_1 + V$. Then the countable set $A = T(A_1)$ has the required property: $T(\ell_1) = T(A_1) + T(V) \subset A + U$. □

For a linear metric space X denote by $\vec{\mathcal{L}}_\infty(X)$ the family of dense operator images in X. To simplify notations, denote the family $\bigcup_{L \in \vec{\mathcal{L}}_\infty(X)} \sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\{L\}}(X)$ by $\sigma\vec{\mathcal{Z}}_\infty(X)$. Since $\vec{\mathcal{L}}_\infty(X) \subset \mathcal{L}_\infty(X)$, we get the inclusions

$$\sigma\vec{\mathcal{Z}}_\infty(X) \subset \sigma\dot{\mathcal{Z}}_\infty(X) \subset \sigma\dot{\mathcal{Z}}_\omega(X) \subset \sigma\mathcal{Z}_\omega(X).$$

Proposition 5. *A subset A of a separable metric linear space X belongs to the family $\sigma\vec{\mathcal{Z}}_\infty(X)$ if and only if there exists a σ-compact dense operator image L in X and a sequence $(A_n)_{n\in\omega}$ of closed subsets of X such that $A \subset \bigcup_{n\in\omega} A_n$ for every $n \in \omega$ and compact subset $K \subset L$ the set $K \cdot A_n$ is nowhere dense in X.*

Proof. The "if" part of this proposition can be proved by analogy with Proposition 2. To prove the "only" if part, assume that $A \in \sigma\vec{\mathcal{Z}}_\infty(X)$. Then $A \in \sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\{L\}}(X)$ for some dense operator image L in X. Write $L = T(B)$ for some linear continuous operator $T : B \to X$ defined on a Banach space B. Since the space L is separable, we can find a separable Banach subspace $B' \subset B$ such that the operator image $L' = T(B')$ is dense in $T(B)$. Choose a bounded sequence $(x_n)_{n\in\omega}$ in B' whose linear hull is dense in B'. It is standard to show that the operator

$$T' : \ell_2 \to B', \quad T' : (t_n)_{n\in\omega} \mapsto \sum_{n\in\omega} \frac{t_n}{2^n} x_n,$$

is well-defined, compact, and has dense image $T'(\ell_2)$ in B'. Then the operator $T' \circ T : \ell_2 \to X$ is compact and has dense image $L' = T' \circ T(\ell_2)$ in X. It follows from $L' \subset L$ that $A \in \sigma\dot{\mathcal{Z}}_L(X) \subset \sigma\dot{\mathcal{Z}}_{L'}(X)$. So, we lose no generality assuming that $B = \ell_2$ and the operator T is compact. By the compactness of the operator T and the reflexivity of ℓ_2, the image $T(B_1)$ of the closed unit ball in B_1 of the Hilbert space ℓ_2 is compact. This implies that the operator image $L = T(\ell_2)$ is σ-compact. Since $A \in \sigma\dot{\mathcal{Z}}_{\{L\}}(X)$, there is a sequence $(A_n)_{n\in\omega}$ of closed subsets A_n of X such that $L + \bar{A}_n$ has empty interior in X. Then for every compact subset $K \subset L$ the closed set $K + \bar{A}_n$ has empty interior and hence is nowhere dense in X. Then the set $K + A_n$ is nowhere dense in X. □

Applying Corollary 1 and Lemma 2 to the family $\vec{\mathcal{L}}_\infty(X)$, we can prove the following corollary (by analogy with Theorem 4).

Theorem 7. *For any analytic subsets $A, B \notin \sigma\vec{\mathcal{Z}}_\infty(X)$ of a linear metric space X and any* aff*-dense convex Polish set C in X, the sumset $A + B + C$ has non-empty interior in the completion $\bar{X}$ of X. Moreover, if A is additive or convex, then the sumset $A + C$ has non-empty interior in $\bar{X}$.*

This theorem has

Corollary 12. *If a non-complete linear metric space X contains a Polish* aff-*dense convex set C, then every analytic subset of X belongs to the σ-ideal $\dot{\mathcal{Z}}_{\{L\}}(X)$ for some dense operator image L in X.*

References

1. S. Banach, Über Metrische Gruppen, Studia Math. **3** (1931), 101–113.
2. T. Banakh, *Some problems in infinite-dimensional topology*, Mat. Stud. **8** (1997), no. 1, 123–125.
3. T. Banakh, *Some properties of the linear hull of the Erdos set in ℓ^2*, Bulletin PAN. **47** (1999), no. 4, 385–392.
4. T. Banakh, R. Cauty, and M. Zarichnyi, *Open problems in infinite-dimensional topology*, in: Open Problems in Topology, II. E. Pearl ed., Elsevier, 2007, p. 601–624.
5. T. Banakh, T. Dobrowolski, and A. Plichko, *Applications of some results of infinite-dimensional topology to the topological classification of operator images and weak unit balls of Banach spaces*, Diss. Math. **387** (2000) 1–81pp. DOI: 10.4064/dm387-0-1
6. T. Banakh, T. Radul, and M. Zarichnyi, *Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds*, (Matem. Studii. Monograph Series. 1), VNTL Publishers, Lviv, 1996. 240 pp.
7. C. Bessaga and A. Pełczynski, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Warsaw, 1975.
8. T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert cube manifolds*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.
9. T. Dobrowolski and J. Mogilski, *Problems on topological classification of incomplete metric spaces*, in: *Open problems in topology*, J. van Mill, G. M. Reed (eds.), Elsevier Sci., B.V., Amsterdam, (1990), 409–429.
10. R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
11. A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer, New York, 1995.
12. J. van Mill, *Infinite-dimension topology. Prerequisites and introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
13. J. van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.
14. S. Piccard, *Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace Euclidien*, Mém. Univ. Neuchâ tel. **13** (1939), 212 pp.
15. B. J. Pettis, *Remarks on a theorem of E. J. McShane*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), no. 1, 166–171. DOI: 10.2307/2032640
16. S. Solecki, *Covering analytic sets by families of closed sets*, J. Symbolic Logic **59** (1994), no. 3, 1022–1031. DOI: 10.2307/2275926

Стаття: надійшла до редколегії 11.04.2019
доопрацьована 29.05.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ПРО σZ_n-МНОЖИНИ В ТОПОЛОГІЧНИХ ГРУПАХ І ЛІНІЙНИХ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

Тарас БАНАХ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: t.o.banakh@gmail.com

Топологічний простір X називається *аналітичним*, якщо він є метризовним неперервним образом польського (тобто повно-метризовного сепарабельного) простору. Добре відомо, що кожна борелівська підмножина польського простору є аналітичним простором. Згідно з класичною теоремою Стефана Банаха від 1931 року, кожна неповна аналітична топологічна група є худою, тобто є об'єднанням зліченної кількості ніде не щільних підмножин. Худі підмножини топологічного простору X утворюють σ-ідеал $\sigma\mathcal{Z}_0(X)$, що є найбільшим серед σ-ідеалів $\sigma\mathcal{Z}_n(X)$, що породжуються Z_n-множинами в X. Замкнена підмножина $A \subset X$ топологічного простору X називається Z_n*-множиною* в X, множина $C([0,1]^n, X \setminus A)$ відображень $[0,1]^n \to B$ всюди щільна у просторі неперервних функцій $C([0,1]^n, X)$, наділеному компактно-відкритою топологією. Топологічний простір X називається σZ_n*-простором*, якщо $X \in \sigma\mathcal{Z}_n(X)$. Легко бачити, що $\sigma\mathcal{Z}_m(X) \subset \sigma\mathcal{Z}_n(X)$ для довільних чисел $0 \le n \le m \le \omega$, звідки випливає, що σ-ідеал $\sigma\mathcal{Z}_\omega(X)$ є найменшим серед σ-ідеалів $\sigma\mathcal{Z}_n(X)$. Відповідаючи на запитання Т.Добровольського та Є.Могільського (1990), автор цієї статті довів у 1999 році, що лінійна оболонка $\mathsf{lin}(E)$ простору Ердеша $E = \ell_2 \cap \mathbb{Q}^\omega$ в сепарабельному гільбертовому просторі ℓ_2 не є σZ_ω-простором. Тим не менше, досі невідомо чи кожен неповний аналітичний лінійний метричний простір є σZ_n-простором для кожного $n \in \mathbb{N}$. У цій статті подано частковий розв'язок цієї проблеми. А саме, доведено, що якщо аналітична підмножина A лінійного метричного простору X не міститься у σZ_ω-підмножині простору X, тоді для кожної польської опуклої підмножини $K \subset X$ з всюди щільною афінною оболонкою в X, сума $A + K$ нехуда в X і множини $A + A + K$ та $A - A + K$ мають непорожню внутрішність в поповненні $\bar{X}$ простору X. Звідси випливає, що

- аналітична підгрупа A лінійного метричного простору X є σZ_ω-простором, якщо A не є польською і A містить польську опуклу підмножину K з всюди щільною афінною оболонкою в X;
- всюди щільна опукла аналітична підмножина A у лінійному метричному просторі X є σZ_ω-простором, якщо A не містить відкритого польського підпростору і A містить польську опуклу підмножину K з всюди щільною афінною оболонкою в X.

Ключові слова: Z-множина, σZ-простір, аналітична множина, топологічна група, опукла множина, лінійний метричний простір.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 83–97
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 83–97
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.083-097

УДК 517.537.72

ON HADAMARD COMPOSITIONS OF ENTIRE DIRICHLET SERIES AND DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGING IN HALF-PLANE

Oksana MULYAVA[1], Myroslav SHEREMETA[2]

[1]*Kyiv National University of Food Technologies*
Volodymyrska Str., 68, 01033, Kyiv
e-mail: oksana.m@bigmir.net
[2]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}$ and a Dirichlet series $G(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$ with finite abscissa of the absolute convergence the Dirichlet series $(F*G)(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}$ is called the *Hadamard composition*. In terms of generalized orders the growth of this composition and their derivatives is investigated. A relation between the behavior of the maximal terms of the Hadamard composition of the derivatives and of the derivative of the Hadamard composition is established.

Key words: Dirichlet series, Hadamard composition, generalized order, maximal term.

1. Introduction

For power series $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ and $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ with the convergence radii $R[f]$ and $R[g]$ the series $(f * g)(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k$ is called the Hadamard composition. It is well known [1, 2] that $R[f * g] \geq R[f]R[g]$. Properties of this composition obtained by

---

2010 Mathematics Subject Classification: 30B50, 30D15

J. Hadamard find applications [2, 3] in the theory of analytic continuation of the functions represented by power series. We remark also that singular points of the Hadamard composition are investigated in the article [4].

For $0 \le r < R[f]$ let $\mu_f(r) = \max\{|f_k|r^k : k \ge 0\}$ be the maximal term of the power expansion of f. Studying [5, 6] a connection between the growth of maximal terms of a derivative of the Hadamard's composition of two entire functions f and g and the Hadamard composition of their derivatives M. Sen [6], in particular proved, that if the function $(f * g)$ has order ϱ and lower order λ then for every $\varepsilon > 0$ and all $r \ge r_0(\varepsilon)$

$$r^{(n+2)\lambda-1-\varepsilon} \le \frac{\mu_{f^{(n+1)}*g^{(n+1)}}(r)}{\mu_{(f*g)^{(n)}}(r)} \le r^{(n+2)\varrho-1+\varepsilon}.$$

Since Dirichlet series with positive increasing to $+\infty$ exponents are direct generalizations of power series, a problem becomes natural on similar results for a Hadamard composition of such series.

So, let $\Lambda = (\lambda_k)$ be an increasing to $+\infty$ sequence of nonnegative numbers ($\lambda_0 = 0$), and $S(\Lambda, A)$ be a class of Dirichlet series

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it \tag{1}$$

with the exponents Λ and the abscissa of absolute convergence $\sigma_a[F] = A$. If $F \in (\Lambda, A_1)$ and $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\} \in (\Lambda, A_2)$ the Dirichlet series

$$(F * G)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\} \tag{2}$$

is called [7] the *Hadamard composition* of F and G.

For a Dirichlet series (1) with $\sigma_a[F] = A[F] = A > -\infty$ and $\sigma < A$ we put $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, and let $\mu(\sigma, F) = \max\{|f_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} : k \ge 0\}$ be the maximal term, $\nu(\sigma, F) = \max\{k : |f_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} = \mu(\sigma, F)\}$ be the central index and $\Lambda(\sigma, F) = \lambda_{\nu(\sigma,F)}$. The following result is proved in [7].

Proposition 1. *Let $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ and $m > n$. If $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$ and $\ln k = o(\lambda_k \ln \lambda_k)$ as $k \to \infty$ then*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m - n)\varrho_R[f * G]$$

and (if $\varrho_R[f * G] < +\infty$)

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m - n)\lambda_R[f * G],$$

where $\varrho_R[f]$ and $\lambda_R[f]$ are respectively the R-order and the lower R-order of entire Dirichlet series (1)*. If $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$ and $\ln k = o(\lambda_k/\ln \lambda_k)$ as $k \to \infty$ then*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m - n)\varrho^{(0)}[f * G]$$

and

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(m-n)\lambda^{(0)}[f*G],$$

where $\varrho^{(0)}[f]$ *and* $\lambda^{(0)}[f]$ *are respectively the order and the lower order of Dirichlet series* (1) *with* $\sigma_a[F]=0$.

Here we will consider the case, when $\sigma_a[F]=+\infty$ and $\sigma_a[G]\in(-\infty+\infty)$.

2. Convergence and growth

We put

$$A[F]=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|f_k|},\quad \overline{A}[F]=\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|f_k|}.$$

It is known ([8],[9]) that $\sigma_a[F]\le A[F]$ and if $\ln k=o(\lambda_k)$ as $k\to\infty$ then $\sigma_a[F]=A[F]$. It is easy to see that if $A[F]>-\infty$ and $A[G]>-\infty$ then $A[F*G]\ge A[F]+A[G]$. Therefore, if $\sigma_a[F]=+\infty$ and $A[G]>-\infty$ then $A[F*G]=+\infty$.

We remark also [7] that if $\sigma_a[F]=+\infty$ and $\sigma_a[G]>-\infty$ then

$$\sigma_a[F*G]\ge\sigma_a[F]+\sigma_a[G]=+\infty.$$

Further, we will also assume that $\sigma_a[G]=A[G]$.

In [7] it is proved that

$$\sigma_a[F*G]=\sigma_a[(F*G)^{(n)}]=\sigma_a[F^{(n)}*G^{(n)}]$$

for every $n\in\mathbb{N}$, whence we get the following statement.

Proposition 2. *If* $\sigma_a[F]=+\infty$ *and* $\sigma_a[G]>-\infty$ *then*

$$\sigma_a[F*G]=\sigma_a[(F*G)^{(n)}]=\sigma_a[F^{(n)}*G^{(n)}]=\sigma_a[F]=+\infty$$

for every $n\in\mathbb{N}$.

By L we denote the class of non-negative continuous on $(-\infty,+\infty)$ functions α such that $\alpha(x)=\alpha(x_0)\ge 0$ for $x\le x_0$ and $\alpha(x)\uparrow+\infty$ as $x_0\le x\to+\infty$. We say that $\alpha\in L^0$, if $\alpha\in L$ and $\alpha((1+o(1))x)=(1+o(1))\alpha(x)$ as $x\to+\infty$. Finally, $\alpha\in L_{si}$, if $\alpha\in L$ and $\alpha(cx)=(1+o(1))\alpha(x)$ as $x\to+\infty$ for each $c\in(0,+\infty)$, i.e. α is a slowly increasing function. Clearly, $L_{si}\subset L^0$.

If $\alpha\in L$, $\beta\in L$ and $F\in(\Lambda,+\infty)$ then the quantities

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F]:=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(\sigma)},\quad \lambda_{\alpha,\beta}[F]:=\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(\sigma)}\tag{3}$$

are called the generalized (α,β)-order and the generalized lower (α,β)-order of F. If in (3) we substitute $\ln\mu(\sigma,F)$ instead of $\ln M(\sigma,F)$ then we obtain quantities, which we denote by $\varrho_{\alpha,\beta}[\ln\mu,F]$ and $\lambda_{\alpha,\beta}[\ln\mu,F]$ respectively. Substituting $\Lambda(\sigma,F)$ instead of $\ln M(\sigma,F)$ by analogy we define $\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda,F]$ and $\lambda_{\alpha,\beta}[\Lambda,F]$. The following lemma is true [9, 10].

Lemma 1. *Let $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L^0$ and $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ as $x \to +\infty$ for each $c \in (0,+\infty)$ and $F \in (\Lambda, +\infty)$. If for each $c \in (0,+\infty)$*

$$\ln k = o(\lambda_k \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k))), \quad k \to \infty, \tag{4}$$

then

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F] = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_k}\ln\dfrac{1}{|f_k|}\right)}. \tag{5}$$

If, moreover, $\alpha(\lambda_{k+1}) \sim \alpha(\lambda_k)$ and $\kappa_k[F] := \dfrac{\ln|f_k| - \ln|f_{k+1}|}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \nearrow +\infty$ as $k_0 \le k \to \infty$ then

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F] = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_k}\ln\dfrac{1}{|f_k|}\right)}. \tag{6}$$

We need also the following lemmas.

Lemma 2. *If $F \in (\Lambda,+\infty)$, $\alpha(e^x) \in L_{si}$, $\beta \in L^0$ and $\alpha(x) = o(\beta(x))$ as $x \to +\infty$ then $\varrho_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F] = \varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda, F]$ and $\lambda_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F] = \lambda_{\alpha,\beta}[\Lambda, F]$.*

Proof. We use the equality (see [8], [9])

$$\ln \mu(\sigma, F) - \ln \mu(0,F) = \int_0^\sigma \Lambda(x)dx, \quad 0 \le \sigma < +\infty. \tag{7}$$

From (7) it follows that for every $\varepsilon > 0$ and all $\sigma \ge 0$

$$\frac{\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon}\Lambda\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\right) \le \ln \mu(\sigma, F) - \ln \mu(0,F) \le \sigma\Lambda(\sigma, F). \tag{8}$$

Hence $\ln \mu(\sigma, F) \ge \Lambda\left(\dfrac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\right)$ for all $\sigma > 0$ large enough and, thus,

$$\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda, F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\Lambda(\sigma,F))}{\beta(\sigma)} \le \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\mu((1+\varepsilon)\sigma, F))}{\beta((1+\varepsilon)\sigma)} \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta((1+\varepsilon)\sigma)}{\beta(\sigma)},$$

$$\lambda_{\alpha,\beta}[\Lambda, F] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\Lambda(\sigma,F))}{\beta(\sigma)} \le \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\mu((1+\varepsilon)\sigma, F))}{\beta((1+\varepsilon)\sigma)} \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\beta((1+\varepsilon)\sigma)}{\beta(\sigma)}.$$

Therefore, $\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda, F] \le \varrho_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F]B(\varepsilon)$ and $\lambda_{\alpha,\beta}[\Lambda, F] \le \lambda_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F]B(\varepsilon)$, where in view of condition $\beta \in L^0$ we get [11] $B(\varepsilon) = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\beta((1+\varepsilon)\sigma)}{\beta(\sigma)} \to 1$ as $\varepsilon \to 0$, and thus, $\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda, F] \le \varrho_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F]$ and $\lambda_{\alpha,\beta}[\Lambda, F] \le \lambda_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F]$.

On the other hand, if on the contrary $\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda, F] < \varrho_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F]$ then for every $\varrho \in (\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda, F], \varrho_{\alpha,\beta}[\ln \mu, F])$ and all $\sigma \ge \sigma_0(\varrho)$ we have $\Lambda(\sigma, F) \le \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$ and, thus, $\ln\,\mu(\sigma,F)\le(1+o(1))\sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$ as $\sigma\to+\infty$, i.e.

$$\begin{aligned}\alpha(\ln\,\mu(\sigma,F))&\le(1+o(1))\alpha(\sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)))=\\&=(1+o(1))\alpha(\exp\{\ln\,\sigma+\ln\,\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))\})\le\\&\le(1+o(1))\alpha(\exp\{2\max\{\ln\,\sigma,\,\ln\,\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))\}\})=\\&=(1+o(1))\alpha(\exp\{\max\{\ln\,\sigma,\,\ln\,\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)\}\})=\\&=(1+o(1))\max\{\alpha(\sigma),\,\varrho\beta(\sigma)\})\le\\&\le(1+o(1))(\alpha(\sigma)+\varrho\beta(\sigma)\})=\\&=(1+o(1))\varrho\beta(\sigma)),\qquad\sigma\to+\infty,\end{aligned}$$

whence $\varrho_{\alpha,\beta}[\ln\,\mu,F]\le\varrho$, which is impossible. Thus, $\varrho_{\alpha,\beta}[\ln\,\mu,F]=\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda,F]$. The proof of the equality $\lambda_{\alpha,\beta}[\ln\,\mu,F]=\lambda_{\alpha,\beta}[\Lambda,F]$ is similar. □

Lemma 3. *If $\alpha\in L^0$ and $\beta\in L^0$ then $\varrho_{\alpha,\beta}[F]=\varrho_{\alpha,\beta}[F']$ and $\lambda_{\alpha,\beta}[F]=\lambda_{\alpha,\beta}[F']$.*

Proof. Since [7] for $\sigma<+\infty$ and $0<\delta(\sigma)<+\infty$

$$M(\sigma,F')\le\frac{M(\sigma+\delta(\sigma),F)}{\delta(\sigma)}\tag{9}$$

and for $\sigma_0<\sigma$

$$M(\sigma,F)\le(\sigma-\sigma_0)M(\sigma,F')+M(\sigma_0,F),\tag{10}$$

using $\delta(\sigma)=1$ and $\sigma_0=0$ we have

$$(1+o(1))\ln\,M(\sigma,F)\le\ln\,M(\sigma,F')\le\ln\,M(\sigma+1,F),\quad\sigma\to+\infty,$$

because for every entire Dirichlet series $\ln\,\sigma=o(\ln\,M(\sigma,F))$ as $\sigma\to+\infty$. Since $\alpha\in L^0$ and $\beta\in L^0$, we get $\varrho_{\alpha,\beta}[\ln\,\mu]=\varrho_{\alpha,\beta}[\Lambda]$ and $\lambda_{\alpha,\beta}[\ln\,\mu]=\lambda_{\alpha,\beta}[\Lambda]$. □

Using Lemma 1 we prove the following statement.

Proposition 3. *Let the functions α, β and the sequence (λ_k) satisfy the conditions of Lemma 1, $A[F]=+\infty$ and $-\infty<A[G]\le\overline{A}[G]<+\infty$. Then $\varrho_{\alpha,\beta}[F*G]=\varrho_{\alpha,\beta}[F]$ and if, moreover, $\alpha(\lambda_{k+1})\sim\alpha(\lambda_k)$, $\kappa_k[F]\nearrow+\infty$ and $\kappa_k[G]\nearrow A[G]$ as $k_0\le k\to\infty$ then $\lambda_{\alpha,\beta}[F*G]=\lambda_{\alpha,\beta}[F]$*

Proof. Clearly, if $A[F]=+\infty$ then $\dfrac{1}{\lambda_k}\ln\,\dfrac{1}{|f_k|}\to+\infty$ as $k\to\infty$. On the other hand, since $-\infty<A[G]\le\overline{A}[G]<+\infty$, we have $\dfrac{1}{\lambda_k}\ln\,\dfrac{1}{|g_k|}=O(1)$ as $k\to\infty$. Therefore,

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\,\frac{1}{|f_k|}+\frac{1}{\lambda_k}\ln\,\frac{1}{|g_k|}\right)&=\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\,\frac{1}{|f_k|}+O(1)\right)=\\&=\beta\left(\frac{1+o(1)}{\lambda_k}\ln\,\frac{1}{|f_k|}\right)=\\&=(1+o(1))\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\,\frac{1}{|f_k|}\right),\qquad k\to\infty,\end{aligned}$$

and by Lemma 1

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F*G]=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_k}\ln\dfrac{1}{|f_kg_k|}\right)}=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\dfrac{1}{\lambda_k}\ln\dfrac{1}{|f_k|}\right)}=\varrho_{\alpha,\beta}[F*G]$$

and similarly $\lambda_{\alpha,\beta}[F*G]=\lambda_{\alpha,\beta}[F]$. □

Lemma 3 implies the following statement.

Proposition 4. *If $\alpha\in L^0$ and $\beta\in L^0$ then*

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F*G]=\varrho_{\alpha,\beta}[(F*G)^{(n)}]=\varrho_{\alpha,\beta}[F^{(n)}*G^{(n)}]$$

and

$$\lambda_{\alpha,\beta}[F*G]=\lambda_{\alpha,\beta}[(F*G)^{(n)}]=\lambda_{\alpha,\beta}[F^{(n)}*G^{(n)}]$$

for each $n\ge 1$.

Indeed, by Lemma 3 we have that

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F*G]=\varrho_{\alpha,\beta}[(F*G)'] \qquad \text{and} \qquad \lambda_{\alpha,\beta}[F*G]=\lambda_{\alpha,\beta}[(F*G)'],$$

that is

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F*G]=\varrho_{\alpha,\beta}[(F*G)^{(n)}] \qquad \text{and} \qquad \lambda_{\alpha,\beta}[F*G]=\lambda_{\alpha,\beta}[(F*G)^{(n)}]$$

for each $n\ge 1$, and since $F^{(n)}*G^{(n)}=(F*G)^{(2n)}$, we have that

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F*G]=\varrho_{\alpha,\beta}[F^{(n)}*G^{(n)}] \qquad \text{and} \qquad \lambda_{\alpha,\beta}[F*G]=\lambda_{\alpha,\beta}[F^{(n)}*G^{(n)}].$$

3. Behavior of the maximal terms of Hadamard compositions

The following is the main result in the section.

Theorem 1. *Let $\alpha(e^x)\in L_{si}$, $\beta\in L^0$, $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x}=O(1)$ as $x\to+\infty$ and (4) holds for each $c\in(0,+\infty)$. If $A[F]=+\infty$ and $-\infty<A[G]\le\overline{A}[G]<+\infty$ then for $n\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$ and $m>n$*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[F]. \tag{11}$$

If, moreover, $\alpha(\lambda_{k+1})\sim\alpha(\lambda_k)$, $\varkappa_k[F]\nearrow+\infty$ and $\varkappa_k[G]\nearrow A[G]$ as $k_0\le k\to\infty$ then

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[F]. \tag{12}$$

Proof. The following inequalities proved in [7] play an important role in the proof of Theorem 1

$$\Lambda^{m-n}(\sigma,(F*G)^{(n)})\le\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\le\Lambda^{m-n}(\sigma,(F*G)^{(m)}) \tag{13}$$

for $\sigma<\sigma_a[F*G]$. Since $\alpha(e^x)\in L_{si}$, we have

$$\begin{aligned}\alpha(\Lambda^{m-n}(\sigma,(F*G)^{(n)}))&=\alpha(\exp\{(m-n)\ln\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)})\})=\\&=(1+o(1))\alpha(\exp\{\ln\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)})\})=\\&=(1+o(1))\alpha(\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)})),\qquad \sigma\to+\infty,\end{aligned}$$

and, therefore, (13) implies

$$\alpha(\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)}))\le(1+o(1))\alpha\left(\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\right)\le\alpha(\Lambda(\sigma,(F*G)^{(m)}))$$

as $\sigma\to+\infty$, whence

$$\begin{aligned}\varrho_{\alpha\beta}[\Lambda,(F*G)^{(n)}]\le\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\right)\le\\ \le\varrho_{\alpha\beta}[\Lambda,(F*G)^{(m)}]\end{aligned}\tag{14}$$

and

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha\beta}[\Lambda,(F*G)^{(n)}]\le\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\right)\le\\ \le\lambda_{\alpha\beta}[\Lambda,(F*G)^{(m)}].\end{aligned}\tag{15}$$

We remark that the condition $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x}=O(1)$ as $x\to+\infty$ for each $c\in(0,+\infty)$ implies the condition $\alpha(x)=o(\beta(x))$ as $x\to+\infty$. Therefore, applying Lemma 2, Lemma 1, Proposition 4 and Proposition 3 consequently, we obtain $\varrho_{\alpha\beta}[\Lambda,(F*G)^{(n)}]=$ $=\varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu,(F*G)^{(n)}]=\varrho_{\alpha\beta}[(F*G)^{(n)}]=\varrho_{\alpha\beta}[F*G]=\varrho_{\alpha\beta}[F]$ and similarly $\lambda_{\alpha\beta}[\Lambda,(F*G)^{(n)}]=\lambda_{\alpha\beta}[F]$. Therefore, from (14) and (15) we get (11) and (12). □

Choosing $m=2n$ we obtain the following corollary.

Corollary 1. *Let the functions α, β and the sequence (λ_k) satisfy the conditions of Theorem 1, $A[F]=+\infty$ and $-\infty<A[G]\le\overline{A}[G]<+\infty$ then for $n\in\mathbb{N}$*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\mu(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\right)=\varrho_{\alpha\beta}[F].$$

If, moreover, $\alpha(\lambda_{k+1})\sim\alpha(\lambda_k)$, $\kappa_k[F]\nearrow+\infty$ and $\kappa_k[G]\nearrow A[G]$ as $k_0\le k\to\infty$ then

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\mu(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\right)=\lambda_{\alpha\beta}[F].$$

4. Hadamard compositions of the finite R-order

If we choose $\alpha(x)=\ln x$ and $\beta(x)=x$ for $x\ge3$ then from (3) we obtain the definition of the R-order

$$\varrho_R[F]:=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}$$

and the lower R-order

$$\lambda_R[F]:=\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}$$

introduced by J. Ritt [12] for a function $F\in S(\Lambda,+\infty)$.

The functions $\alpha(x)=\ln x$ and $\beta(x)=x$ satisfy the conditions of Lemmas 1 and 3 and do not satisfy the condition $\alpha(e^x)\in L_{si}$ of Lemma 2. But it follows from (8) that $\varrho_R[\Lambda,F]=\varrho_R[\ln\mu,F]$ and $\lambda_R[\Lambda,F]=\lambda_R[\ln\mu,F]$. Therefore, as in the proof of

Theorem 1, we have $\varrho_R[\Lambda,(F*G)^{(n)}]=\varrho_R[F]$ and $\lambda_R[\Lambda,(F*G)^{(n)}]=\lambda_R[F]$. On the other hand, from (13) we get

$$(m-n)\ln\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)})\le\ln\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\le \tag{16}$$
$$\le(m-n)\ln\Lambda^{m-n}(\sigma,(F*G)^{(m)})$$

and, thus, the following theorem is true.

Theorem 2. *If* $A[F]=+\infty$, $-\infty<A[G]\le\overline{A}[G]<+\infty$), *and* $\ln k=o(\lambda_k\ln\lambda_k)$ *as* $k\to\infty$. *Then for* $n\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$ *and* $m>n$

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(m-n)\varrho_R[F].$$

If, moreover, $\ln\lambda_{k+1}\sim\ln\lambda_k$, $\varkappa_k[F]\nearrow+\infty$ *and* $\varkappa_k[G]\nearrow A[G]$ *as* $k_0\le k\to\infty$ *then*

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(m-n)\lambda_R[F].$$

If we choose $m=2n+2$ then from Theorem 2 we obtain the following analogue of the above-mentioned result of M.K. Sen.

Corollary 2. $A[F]=+\infty$, $-\infty<A[G]\le\overline{A}[G]<+\infty$, *and* $\ln k=o(\lambda_k\ln\lambda_k)$ *as* $k\to\infty$. *Then for* $n\in\mathbb{Z}_+$

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n+1)}*G^{(n+1)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(n+2)\varrho_R[F].$$

If, moreover, $\ln\lambda_{k+1}\sim\ln\lambda_k$, $\varkappa_k[F]\nearrow+\infty$, *and* $\varkappa_k[G]\nearrow A[G]$ *as* $k_0\le k\to\infty$ *then*

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n+1)}*G^{(n+1)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(n+2)\lambda_R[F].$$

Let now $0<\varrho_R[F]<+\infty$. If we choose $\alpha(x)=x$ and $\beta(x)=\exp\{\varrho_R[F]x\}$ for $x\ge0$ then from (3) we obtain the definition of the R-type,

$$T_R[F]=\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}},$$

and the lover R-type,

$$t_R[F]=\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}}.$$

It is clear that the functions $\alpha(x)=x$ and $\beta(x)=\exp\{\varrho_R[F]x\}$ do not satisfy the conditions of Lemma 1, but the following lemma is true (see for example [10], [12], [13]).

Lemma 4. *If* $F\in(\Lambda,+\infty)$ *and* $\ln k=o(\lambda_k)$ *as* $k\to\infty$ *then*

$$T_R[F]=T_R[\ln\mu,F]=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\lambda_k}{e\varrho_R[F]}|f_k|^{\varrho_R[F]/\lambda_k}.$$

If, moreover, $\lambda_{k+1}\sim\lambda_k$ *and* $\varkappa_k[F]\nearrow+\infty$ *as* $k_0\le k\to\infty$ *then*

$$t_R[F]=t_R[\ln\mu,F]=\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\lambda_k}{e\varrho_R[F]}|f_k|^{\varrho_R[F]/\lambda_k}.$$

The following lemma indicates the connection between the growth of $\ln\,\mu(\sigma,F)$ and $\Lambda(\sigma,F)$ in terms of R-types.

Lemma 5. *Let $F\in(\Lambda,+\infty)$ and $\ln k=o(\lambda_k)$ as $k\to\infty$. Then*

$$\frac{T_R[\Lambda,F]}{e\varrho_R[F]}\le T_R[\ln\,\mu,F]\le\frac{T_R[\Lambda,F]}{\varrho_R[F]}\tag{17}$$

and

$$\frac{t_R[\Lambda,F]}{e\varrho_R[F]}\le t_R[\ln\,\mu,F]\le\frac{T_R[\Lambda,F]}{\varrho_R[F]}\ln\frac{e\varrho_R[F]T_R[\ln\,\mu,F]}{T_R[\Lambda,F]}.\tag{18}$$

Proof. From (7) for $\sigma\ge1/\varrho_R[F]$ we have

$$\ln\,\mu(\sigma,F)-\ln\,\mu(0,F)\ge\int\limits_{\sigma-1/\varrho_R[F]}^{\sigma}\Lambda(x)dx\ge\frac{\Lambda(\sigma-1/\varrho_R[F])}{\varrho_R[F]},$$

i.e.,

$$T_R[\ln\,\mu,F]\ge\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\Lambda(\sigma-1/\varrho_R[F])}{\varrho_R[F]\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}}=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\Lambda(\sigma-1/\varrho_R[F])}{e\varrho_R[F]\exp\{\varrho_R[F](\sigma-1/\varrho_R[F])\}},$$

whence $T_R[\ln\,\mu,F]\ge\dfrac{T_R[\Lambda,F]}{e\varrho_R[F]}$. Similarly, $t_R[\ln\,\mu,F]\ge\dfrac{t_R[\Lambda,F]}{e\varrho_R[F]}$. Thus, the inequalities on the left side in (17) and (18) are proved.

On the other hand, if $T_R[\Lambda,F]<+\infty$ then $\Lambda(\sigma)\le T\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}$ for every $T>T_R[\Lambda.F]$ and all $\sigma\ge\sigma_0(T)$. Therefore,

$$\ln\,\mu(\sigma,F)-\ln\,\mu(\sigma_0(T),F)\le T\int\limits_{\sigma_0(T)}^{\sigma}\exp\{\varrho_R[F]x\}dx=$$
$$=\frac{T}{\varrho_R[F]}(\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}-\exp\{\varrho_R[F]\sigma_0(T)\}),$$

whence $T_R[\ln\,\mu,F]\le T/\varrho_R[F]$, i.e. in view of the arbitrariness of T we get $T_R[\ln\,\mu,F]\le T_R[\Lambda,F]/\varrho_R[F]$.

Finally, suppose that $t_R[\ln\mu,F]>0$ and $T_R[\Lambda,F]>0$. Then for every $t\in(0,\,t_R[\ln\,\mu,F])$ and $T\in(0,\,T_R[\Lambda,F])$ there exists an unbounded set $E\subset[0,+\infty)$ such that $\ln\,\mu(\sigma,F)\ge t\exp\{\varrho[F]\sigma\}$ and $\Lambda(\sigma)\ge T\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}$. Therefore, for $\sigma^*\in E$ and $\sigma>\sigma^*$

$$\ln\,\mu(\sigma,F)=\ln\,\mu(\sigma^*,F)+\int\limits_{\sigma^*}^{\sigma}\Lambda(x,F)dx$$
$$\ge\ln\,\mu(\sigma^*,F)+\Lambda(\sigma^*,F)\int\limits_{\sigma^*}^{\sigma}dx\ge$$
$$\ge t\exp\{\varrho_R[F]\sigma^*\}+(\sigma-\sigma^*)T\exp\{\varrho_R[F]\sigma^*\}.$$

Therefore,

$$\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}} \geq \frac{t + (\sigma - \sigma^*)T}{\exp\{\varrho_R[F](\sigma - \sigma^*)\}}.$$

Since the maximum of the function $\varphi(x) = \dfrac{t + Tx}{\exp\{\varrho_R[F]x\}}$ is reached at the point $x = \dfrac{T - t\varrho_R[F]}{T\varrho_R[F]}$, we obtain $T_R[\ln \mu] \geq \dfrac{T}{e\varrho_R[F]} \exp\left\{\dfrac{\varrho_R[F]t}{T}\right\}$ and in view of the arbitrariness of t and T we get

$$T_R[\ln \mu, F] \geq \frac{T_R[\Lambda, F]}{e\varrho_R[F]} \exp\left\{\frac{\varrho_R[F]t_R[\ln \mu, F]}{T_R[\Lambda, F]}\right\},$$

whence the right side of (18) follows. The proof of Lemma 5 is complete. □

Lemma 6. *For every entire Dirichlet series* (1) $T_R[F] = T_R[F']$ *and* $t_R[F] = t_R[F']$.

Proof. Choosing $\delta(\sigma) = 1/(\sigma + 1)$ for $\sigma \geq 0$ from (9) we obtain

$$\frac{\ln M(\sigma, F')}{\exp\{\sigma\varrho_R[F]\}} \leq \frac{\ln M(\sigma + 1/(\sigma + 1), F') + \ln(\sigma + 1)}{\exp\{\sigma\varrho_R[F]\}} =$$
$$= \frac{\ln M(\sigma + 1/(\sigma + 1), F')}{\exp\{(\sigma + 1/(\sigma + 1))\varrho_R[F]\}} \exp\left\{\frac{\varrho_R[F]}{\sigma + 1}\right\} + \frac{\ln(\sigma + 1)}{\exp\{\sigma\varrho_R[F]\}},$$

whence $T_R[F'] \leq T_R[F]$ and $t_R[F'] \leq t_R[F]$. On the other hand, in view of (10) $\ln M(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \ln M(\sigma, F)$ as $\sigma \to +\infty$, whence $T_R[F] \leq T_R[F']$ and $t_R[F] \leq t_R[F']$. □

Using Lemma 4 we prove the following statement.

Proposition 5. *Let* $A[F] = +\infty$, $-\infty < A[G] \leq \overline{A}[G] < +\infty$ *and* $\ln k = o(\lambda_k)$ *as* $k \to \infty$. *Then*

$$T_R[F] \exp\{-\overline{A}[G]\varrho_R[F]\} \leq T_R[F * G] \leq T_R[F] \exp\{-A[G]\varrho_R[F]\} \tag{19}$$

and if, moreover, $\lambda_{k+1} \sim \lambda_k$, $\kappa_k[F] \nearrow +\infty$ *and* $\kappa_k[G] \nearrow A[G]$ *as* $k_0 \leq k \to \infty$ *then*

$$t_R[F] \exp\{-\overline{A}[G]\varrho_R[F]\} \leq t_R[F * G] \leq t_R[F] \exp\{-A[G]\varrho_R[F]\}. \tag{20}$$

Proof. By Proposition 3 $\varrho_R[F * G] = \varrho_R[F]$. Therefore, by Lemma 4

$$T_R[F * G] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\lambda_k}{e\varrho_R[F * G]}]|f_k g_k|^{\varrho_R[F*G]/\lambda_k} =$$
$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\lambda_k}{e\varrho_R[F]} |f_k|^{\varrho_R[F]/\lambda_k} \exp\left\{-\varrho_R[F] \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|g_k|}\right\},$$

whence

$$T_R[F * G] \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\lambda_k}{e\varrho_R[F]} |f_k|^{\varrho_R[F]/\lambda_k} \overline{\lim_{k\to\infty}} \exp\left\{-\varrho_R[F] \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|g_k|}\right\} =$$
$$= T_R[F] \exp\left\{-\varrho_R[F] \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|g_k|}\right\} =$$
$$= T_R[F] \exp\{-A[G]\varrho_R[F]\}.$$

and

$$T_R[F*G] \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\lambda_k}{e\varrho_R[F]}|f_k|^{\varrho_R[F]/\lambda_k} \underline{\lim_{k\to\infty}} \exp\left\{-\varrho_R[F]\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|g_k|}\right\} =$$
$$= T_R[F]\exp\left\{-\varrho_R[F]\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|g_k|}\right\} =$$
$$= T_R[F]\exp\{-\overline{A}[G]\varrho_R[F]\},$$

i.e. we get (19). The proof of (20) is similar. □

Finally, Lemma 6 implies the following statement.

Proposition 6. *The equalities*

$$T_R[F*G] = T_R[(F*G)^{(n)}] = T_R[F^{(n)}*G^{(n)}]$$

and

$$t_R[F*G] = t_R[(F*G)^{(n)}] = t_R[F^{(n)}*G^{(n)}]$$

are true for each $n \geq 1$.

Therefore, the following theorem is true.

Theorem 3. *Let* $A[F] = +\infty$, $-\infty < A[G] \leq \overline{A}[G] < +\infty$ *and* $\ln k = o(\lambda_k)$ *as* $k \to \infty$. *Then for* $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ *and* $m > n$

$$\frac{\varrho_R[F]T_R[F*G]}{\exp\{\overline{A}[G]\varrho_R[F]\}} \leq \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}}\sqrt[m-n]{\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}} \leq \leq \frac{e\varrho_R[F]T_R[F*G]}{\exp\{A[G]\varrho_R[F]\}}. \tag{21}$$

Proof. From (13) it follows that

$$T_R[\Lambda,(F*G)^{(n)}] \leq \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}}\sqrt[m-n]{\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}}) \leq \leq T_R[\Lambda,(F*G)^{(m)}]. \tag{22}$$

Using Proposition 6, Lemmas 5 and 4 from (22) we get (21). □

Remark 1. Similarly, we can prove that if the conditions of Theorem 3 are satisfied and, moreover, $\lambda_{k+1} \sim \lambda_k$, $\varkappa_k[F] \nearrow +\infty$ and $\varkappa_k[G] \nearrow A[G]$ as $k_0 \leq k \to \infty$ then

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\exp\{\varrho_R[F]\sigma\}}\sqrt[m-n]{\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}} \leq \frac{e\varrho_R[F]t_R[F*G]}{\exp\{A[G]\varrho_R[F]\}}$$

We were not able to obtain a lower estimate for this $\underline{\lim}$, because there is no such an estimate for $t_R(\Lambda)$.

5. Hadamard compositions of the finite logarithmic order

In the theory of entire Dirichlet series, the logarithmic order

$$\varrho_l[F] :== \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\sigma}$$

and lower order

$$\lambda_l[F] := \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\ln\sigma}$$

are also used. We remark that $\lambda_l[F]\ge 1$ for each entire Dirichlet series.

The function $\alpha(x)=\beta(x)=\ln x$ not hold the condition of Lemma 1, but the following statement is true [13].

Lemma 7. *If $F\in(\Lambda,+\infty)$ and*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\ln k}{\ln\lambda_k}<1 \tag{23}$$

then $\varrho_l[F]=\varlimsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln\lambda_k}{\ln\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|f_k|}\right)}+1$. *If, moreover,* $\ln\lambda_{k+1}\sim\ln\lambda_k$ *and* $\varkappa_k[F]\nearrow+\infty$ *as* $k_0\le k\to\infty$ *then* $\lambda_l[F]=\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln\lambda_k}{\ln\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|f_n|}\right)}+1.$

As in the proof of Proposition 3 using Lemma 7 we get the following statement.

Proposition 7. *Let $A[F]=+\infty$, $-\infty<A[G]\le\overline{A}[G]<+\infty$ and (23) holds. Then $\varrho_l[F*G]=\varrho_l[F]$. If, moreover, $\ln\lambda_{k+1}\sim\ln\lambda_k$, $\varkappa_k[F]\nearrow+\infty$ and $\varkappa_k[G]\nearrow A[G]$ as $k_0\le k\to\infty$ then $\lambda_l[F*G]=\lambda_l[F]$.*

From (9) with $\delta(\sigma)=1$ and (10) we obtain $\varrho_l[F']=\varrho_l[F]$ and $\lambda_l[F']=\lambda_l[F]$. From (8) with $\varepsilon=1$ we obtain

$$\frac{\sigma}{2}\Lambda\left(\frac{\sigma}{2},F\right)\le\ln\mu(\sigma,F)-\ln\mu(0,F)\le\sigma\Lambda(\sigma),$$

whence $\varrho_l[\ln\mu,F]-1=\varrho_l[\Lambda,F]$ and $\lambda_l[\ln\mu,F]-1=\lambda_l[\Lambda,F]$. Finally, (16) implies the inequalities

$$\begin{aligned}(m-n)\varrho_l(\Lambda,(F*G)^{(n)})&\le\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\le\\&\le(m-n)\varrho_l(\Lambda,(F*G)^{(m)})\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(m-n)\lambda_l(\Lambda,(F*G)^{(n)})&\le\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\le\\&\le(m-n)\lambda_l(\Lambda,(F*G)^{(m)}).\end{aligned}$$

Therefore, as usual, we arrive at the following theorem.

Theorem 4. *Let $A[F] = +\infty$, $-\infty < A[G] \le \overline{A}[G] < +\infty$ and* (23) *holds. Then for $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ and $m > n$*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\ln \sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m-n)(\varrho_l[F] - 1).$$

If, moreover, $\ln \lambda_{k+1} \sim \ln \lambda_k$, $\kappa_k[F] \nearrow +\infty$ *and* $\kappa_k[G] \nearrow A[G]$ *as* $k_0 \le k \to \infty$ *then*

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\ln \sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F * G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F * G)^{(n)})} = (m-n)(\lambda_l[F] - 1).$$

References

1. J. Hadamard, *Théorème sur les séries entières*, Acta Math. **22** (1899), 55–63. DOI: 10.1007/BF02417870
2. J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Évreux, Impr. de C. Hérissey, 1901.
3. L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Springer, Berlin, 1955.
4. Ю. Ф. Коробейник, Н. Н. Мавроди, *Об особых точках композиции Адамара*, Укр. мат. журн. **42** (1990), no. 12, 1711–1713; **English version**: Yu. F. Korobeinik and N. N. Mavrodi, *Singular points of the Hadamard composition*, Ukr. Math. J. **42** (1990), no. 12, 1545–1547. DOI: 10.1007/BF01060828
5. M. K. Sen, *On some properties of an integral function $f * g$*, Riv. Mat. Univ. Parma, II. Ser. **8** (1967), 317–328.
6. M. K. Sen, *On the maximum term of a class of integral functions and its derivatives*, Ann. Pol. Math. **22** (1970), 291–298. DOI: 10.4064/ap-22-3-291-298
7. O. M. Mulyava and M. M. Sheremeta, *Properties of Hadamard's compositions of derivatives of Dirichlet series*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **77** (2012), 157–166.
8. A. F. Leontev, *Series of exponents*, Nauka, Noscow, 1976 (in Riussian).
9. M. M. Sheremeta, *Entire Dirichlet series*, ISDO, Kyiv, 1993 (in Ukrainian).
10. M. M. Sheremeta, *Asymptotic behaviours of entire functions given by power series and Dirichlet series*, Doct. Diss., Kiev, 1987 (in Russian).
11. M. M. Sheremeta, *On two classes of positive functions and the belonging to them of main characteristics of entire functions*, Mat. Stud. **19** (2003), no. 1, 73–82.
12. J. F. Ritt, *On certain points in the theory of Dirichlet series*, Am. J. Math. **50** (1928), no. 1, 73–86. DOI: 10.2307/2370849
13. A. R. Reddy, *On entire Dirichlet series of zero order*, Tohoku Math. J., II Ser. **18** (1966), no. 2, 144–155. DOI: 10.2748/tmj/1178243445

Стаття: надійшла до редколегії 03.03.2019
доопрацьована 26.04.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ПРО АДАМАРОВІ КОМПОЗИЦІЇ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ТА РЯДУ ДІРІХЛЕ, АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ

Оксана МУЛЯВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Київський національний університет харчових технологій*
вул. Володимирівська, 68, 01033, Київ
e-mail: oksana.m@bigmir.net
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

Для степеневих рядів $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ і $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ із радіусами збіжності $R[f]$ і $R[g]$ ряд $(f * g)(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k$ називається *адамаровою композицією*. Для $0 \le r < R[f]$ нехай $\mu_f(r) = \max\{|f_k| r^k : k \ge 0\}$ – максимальний член степеневого розвинення функції f. Вивчаючи зв'язок між зростанням максимальних членів похідних адамарової композиції двох цілих функцій f та g і адамаровою композицією їх похідних М. Сен зокрема довів, що якщо функція $(f * g)$ має порядок ϱ і нижній порядок λ, то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $r \ge r_0(\varepsilon)$

$$r^{(n+2)\lambda-1-\varepsilon} \le \frac{\mu_{f^{(n+1)} * g^{(n+1)}}(r)}{\mu_{(f*g)^{(n)}}(r)} \le r^{(n+2)\varrho-1+\varepsilon}.$$

Оскільки ряди Діріхле з додатними зростаючими до $+\infty$ показниками є прямим узагальненням степеневих рядів, то природно постає питання про подібні результати для адамарової композиції таких рядів. Отже, нехай $\Lambda = (\lambda_k)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), і $S(\Lambda, A)$ – клас рядів Діріхле $F(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, (s = \sigma + it)$, з показниками Λ і абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a[F] = A$. Якщо $F \in (\Lambda, A_1)$ і $G(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\} \in (\Lambda, A_2)$, то ряд Діріхле

$$(F * G)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}$$

називається *адамаровою композицією* функцій F та G.
Для ряду Діріхле $F(s)$ з $\sigma_a[F] = A[F] = A > -\infty$ для $\sigma < A$ максимальним членом називатимемо $\mu(\sigma, F) = \max\{|f_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} : k \ge 0\}$. Відомо, що для $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ і $m > n$, якщо $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$ і $\ln k = o(\lambda_k \ln \lambda_k)$ при $k \to \infty$, то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F*G)^{(n)})} = (m-n)\varrho_R[f*G]$$

і (якщо $\varrho_R[f*G] < +\infty$)

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma, (F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F*G)^{(n)})} = (m-n)\lambda_R[f*G],$$

де $\varrho_R[f]$ і $\lambda_R[f]$ відповідно R-порядок та нижній R-порядок цілого ряду Діріхле. Якщо $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$ і $\ln k = o(\lambda_k / \ln \lambda_k)$ при $k \to \infty$, то

$$\varlimsup_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, (F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F*G)^{(n)})} = (m-n)\varrho^{(0)}[f*G]$$

і

$$\varliminf_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma, (F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma, (F*G)^{(n)})} = (m-n)\lambda^{(0)}[f*G],$$

де $\varrho^{(0)}[f]$ і $\lambda^{(0)}[f]$ відповідно порядок та нижній порядок ряду Діріхле з $\sigma_a[F] = 0$.
У праці отримано аналогічні результати для випадку $\sigma_a[F] = +\infty$ і $\sigma_a[G] \in (-\infty + \infty)$.

Ключові слова: ряд Діріхле, композиція Адамара, узагальнений порядок, максимальний член.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 98–106
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 98–106
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.098-106

УДК 517.925.4

БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Юрій ТРУХАН, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, м. Львів
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

Розгляуто неоднорідне диференціальне рівняння Шаха
$$z^2w'' + +(\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = A(z),$$
де $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, а радіус збіжності останнього степеневого ряду $R[A] \geqslant 1$. Визначено умови на коефіцієнти a_n степеневого розвинення функції $A(z)$ та на параметри β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2, за яких неоднорідне рівняння Шаха має близькі до опуклих в одиничному крузі розв'язки. Окремо розглянуто випадки $\gamma_2 = 0$ та $\gamma_2 > 0$, кожен із яких теж розпадається на підвипадки.

Ключові слова: неоднорідне диференціальне рівняння, близькість до опуклості.

1. **Вступ і допоміжні леми**

Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \qquad (1)$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0\,(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості f. Функція f називається [2], [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ можна заповнити променями, які виходять з ∂G і повністю лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є

2010 Mathematics Subject Classification: 34M05, 30B10, 30C45.

однолистою в $\mathbb{D}$, і тому $f'(0) \neq 0$. Звідси випливає, що f є близькою до опуклої тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n, \tag{2}$$

де $g_n = f_n/f_1$.

С. Шах [3] вказав умови на дійсні коефіцієнти β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 диференціального рівняння

$$z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z) w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2) w = 0,$$

за яких існує цілий трансцендентний розв'язок f такий, що або всі його похідні, або парні похідні, або непарні похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями. Дослідження С. Шаха продовжено у [4, 5]. Ми розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння Шаха

$$z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z) w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2) w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

з комплексними параметрами, де радіус збіжності ряду $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ дорівнює $R[A] \in (0, +\infty]$.

Найперше зауважимо, що [6] аналітична в деякому околі початку координат функція (1) є розв'язком диференціального рівняння (3) тоді і тільки тоді, коли

$$\gamma_2 f_0 = a_0, \quad (\beta_1 + \gamma_2) f_1 + \gamma_1 f_0 = a_1 \tag{4}$$

і для $n \geq 2$

$$(n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2) f_n + (\beta_0 (n-1) + \gamma_1) f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = a_n. \tag{5}$$

В [6] доведено таку лему.

Лема 1. *Якщо функція* (1) *є розв'язком рівняння* (3) *і* $n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \neq 0$ *для всіх* $n \geq 2$, *то* $R[f] = R[A]$.

Добре відома [7], [8, с. 9] така лема Александера.

Лема 2. *Якщо коефіцієнти аналітичної в* $\mathbb{D}$ *функції* (2) *задовольняють умову*

$$1 \geq 2g_2 \geq 3g_3 \geq \cdots \geq n g_n \geq (n+1) g_{n+1} \geq \cdots > 0 \tag{6}$$

то вона близька до опуклої.

Оскільки для коефіцієнтів розв'язку рівняння (3) правильна рекурентна формула (5), то буде корисною така лема.

Лема 3. *Нехай* $g_0 = 0$, $g_1 = 1$ *і*

$$g_{n+1} = \xi_n g_n + \eta_n g_{n-1} + b_n, \quad n \geq 1, \tag{7}$$

де ξ_n, η_n, b_n *- додатні числа. Припустимо, що:*

1) $2(\xi_1 + b_1) \leq 1$;
2) $(n+1) b_n \leq n b_{n-1}$ *для всіх* $n \geq 2$;

3) $\dfrac{3}{2}\xi_2 + 3\eta_2 \le 2\xi_1$;

4) $\dfrac{n+1}{n}\xi_n \le \dfrac{n}{n-1}\xi_{n-1}$ *і* $\dfrac{n+1}{n-1}\eta_n \le \dfrac{n}{n-2}\eta_{n-1}$ *для всіх* $n \ge 3$.

Тоді правильні нерівності (6).

Доведення. Оскільки $g_2 = \xi_1 + b_1$, то з умови 1) випливає нерівність $1 \ge 2g_2$. Для $n = 2$ маємо $g_3 = \xi_2 g_2 + \eta_2 + b_2$, і отже, з огляду на умову 3) і умову 2) з $n = 2$ отримуємо

$$3g_3 = 3\xi_2 g_2 + 3\eta_2 + 3b_2 \le \frac{3}{2}\xi_2 + 3\eta_2 + 3b_2 \le 2\xi_1 + 2b_1 = 2g_2.$$

Припустимо, що $n \ge 3$ і $1 \ge 2g_2 \ge 3g_3 \ge \cdots \ge ng_n$. Тоді з огляду на умови 2) і 4)

$$\begin{aligned}&(n+1)g_{n+1} - ng_n = (n+1)\xi_n g_n + (n+1)\eta_n g_{n-1} + (n+1)b_n - \\ &- n\xi_{n-1}g_{n-1} - n\eta_{n-1}g_{n-2} - nb_{n-1} = \\ &= \frac{n+1}{n}\xi_n n g_n - \frac{n}{n-1}\xi_{n-1}(n-1)g_{n-1} + \frac{n+1}{n-1}\eta_n(n-1)g_{n-1} - \\ &- \frac{n}{n-2}\eta_{n-1}(n-2)g_{n-2} + (n+1)b_n - nb_{n-1} \le \\ &\le \frac{n}{n-1}\xi_{n-1}(ng_n - (n-1)g_{n-1}) + \frac{n}{n-2}\eta_{n-1}((n-1)g_{n-1} - (n-2)g_{n-2}) \le 0\end{aligned}$$

Лему 3 доведено. □

Вважаючи, що $n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \ne 0$ для всіх $n \ge 2$, рекурентну формулу (5) можемо переписати у вигляді

$$f_n = -\frac{\beta_0(n-1) + \gamma_1}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-1} - \frac{\gamma_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-2} + \frac{a_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}.$$

Для того, щоб використати лему 3 будемо вважати, що $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $\gamma_2 \ge 0$, $\beta_1 \ge -1$ і $a_n \ge 0$ $(n \ge 2)$. Тоді

$$f_n = \frac{|\beta_0|(n-1) + |\gamma_1|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-1} + \frac{|\gamma_0|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-2} + \frac{a_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}. \tag{8}$$

З першої рівності (4) випливає, що вибір f_0 залежить від того, яким є параметр γ_2. Дослідження почнемо з простішого випадку.

2. **Випадок** $\gamma_2 = 0$

З (4) випливає, що $a_0 = 0$, тобто f_0 може бути будь-яким; виберемо $f_0 = 0$. Тоді $\beta_1 f_1 = a_1$. Тому можливі два такі варіанти:

2а) $\beta_1 = a_1 = 0$;

2б) $\beta_1 \ne 0$ і $a_1 \ne 0$.

За умови 2а) f_1 може бути будь-яким; виберемо $f_1 = 1$. Тому розв'язок рівняння (3) шукатимемо у вигляді

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{9}$$

де коефіцієнти f_n, як видно з (8), визначаються рекурентною формулою

$$f_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{n(n+1)} f_n + \frac{|\gamma_0|}{n(n+1)} f_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{n(n+1)}. \tag{10}$$

Формула (10) збігається з формулою (7), якщо $f_n = g_n$ і

$$\xi_n = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{n(n+1)}, \quad \eta_n = \frac{|\gamma_0|}{n(n+1)}, \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{n(n+1)}.$$

Легко перевірити, що умови 1) - 4) леми 3 збігаються, відповідно, з умовами:

1^a) $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \le 1$;

2^a) $\dfrac{a_{n+1}}{n} \le \dfrac{a_n}{n-1}$ для всіх $n \ge 2$;

3^a) $|\gamma_0| \le |\beta_0| + 3|\gamma_1|/2$;

4^a) $\dfrac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{n^2} \le \dfrac{|\beta_0|(n-1) + |\gamma_1|}{(n-1)^2}$ і $\dfrac{|\gamma_0|}{n} \le \dfrac{|\gamma_0|}{n-2}$ для всіх $n \ge 3$.

Оскільки нерівності в умові 4^a) є очевидними, то за лемами 1—3 отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\gamma_2 = a_0 = \beta_1 = a_1 = 0$, $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \le 1$ *і* $|\gamma_0| \le |\beta_0| + 3|\gamma_1|/2$, *а* $R[A] \ge 1$ *і* $0 < \dfrac{a_{n+1}}{n} \le \dfrac{a_n}{n-1}$ *для всіх* $n \ge 2$. *Тоді існує розв'язок* (9) *диференціального рівняння* (3) *з* $R[f] = R[A]$, *який близький до опуклої в* $\mathbb{D}$ *функцією.*

За умови 2б) розв'язок диференціального рівняння (3) набуває вигляду

$$f(z) = \frac{a_1}{\beta_1} z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{11}$$

де коефіцієнти f_n визначаються рекурентною формулою

$$n(n + \beta_1 - 1) f_n + (\beta_0(n-1) + \gamma_1) f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = a_n,$$

з якої за умов $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$ і $n + \beta_1 - 1 \ne 0$ для всіх $n \ge 2$ випливає, що

$$f_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)}. \tag{12}$$

Припустимо, що $a_1/\beta_1 \in (0, +\infty)$. Оскільки для коефіцієнтів відповідної функції (2) виконується $g_n = \beta_1 f_n / a_1$, то з (12) випливає рекурентна формула

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \frac{\beta_1}{a_1} f_{n+1} = \\ &= \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_n \frac{\beta_1}{a_1} + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_{n-1} \frac{\beta_1}{a_1} + \frac{\beta_1}{a_1} \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)} = \\ &= \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)} g_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)} g_{n-1} + \frac{\beta_1}{a_1} \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)}, \end{aligned}$$

яка збігається з формулою (7), якщо

$$\xi_n = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)}, \quad \eta_n = \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)}, \quad b_n = \frac{\beta_1}{a_1} \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)}.$$

Легко перевірити, що умови 1)—4) леми 3 збігаються тепер відповідно з умовами:

1^b) $|\beta_0|+|\gamma_1|+a_2\frac{\beta_1}{a_1}\le(1+\beta_1)$;

2^b) $\dfrac{a_{n+1}}{n+\beta_1}\le\dfrac{a_n}{n-1+\beta_1}$ для всіх $n\ge 2$;

3^b) $|\gamma_0|\le\dfrac{|\beta_0|}{1+\beta_1}+\dfrac{(3+\beta_1)|\gamma_1|}{2(1+\beta_1)}$;

4^b) $\dfrac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{n(n+\beta_1)}\le\dfrac{|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|}{(n-1)(n-1+\beta_1)}$ і $\dfrac{|\gamma_0|}{(n-1)(n+\beta_1)}\le\dfrac{|\gamma_0|}{(n-2)(n-1+\beta_1)}$ для всіх $n\ge 3$.

Оскільки нерівності в умові 4^b) очевидні, то за лемами 1—3 отримуємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай $\gamma_2=a_0=0$, $\beta_1>-1$, $a_1/\beta_1\in(0,+\infty)$, $\beta_0\le 0$, $\gamma_0\le 0$, $\gamma_1\le 0$, $|\beta_0|+|\gamma_1|+a_2\dfrac{\beta_1}{a_1}\le(1+\beta_1)$ і $|\gamma_0|\le\dfrac{|\beta_0|}{1+\beta_1}+\dfrac{(3+\beta_1)|\gamma_1|}{2(1+\beta_1)}$, а $R[A]\ge 1$ і $0<\dfrac{a_{n+1}}{n+\beta_1}\le\dfrac{a_n}{n-1+\beta_1}$ для всіх $n\ge 2$. Тоді існує розв'язок (11) диференціального рівняння (3) з $R[f]=R[A]$, який є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ функцією.*

3. Випадок $\gamma_2>0$

З (4) випливає, що $f_0=a_0/\gamma_2$ і $(\beta_1+\gamma_2)f_1=a_1-\gamma_1 f_0$. Оскільки $f_1\ne 0$, то з огляду на (4) можливі два такі варіанти:

3а) $\beta_1+\gamma_2=a_1-\gamma_1 f_0=0$;

3б) $\beta_1+\gamma_2\ne 0$ і $a_1-\gamma_1 f_0\ne 0$.

Якщо виконується умова 3а), то можна вибрати $f_1=1$, і розв'язок диференціального рівняння (3) матиме вигляд

$$f(z)=\frac{a_0}{\gamma_2}+z+\sum_{n=2}^{\infty}f_n z^n, \tag{13}$$

де коефіцієнти f_n визначаються рекурентною формулою

$$(n-1)(n+\beta_1)f_n+(\beta_0(n-1)+\gamma_1)f_{n-1}+\gamma_0 f_{n-2}=a_n,$$

з якої за умов $\beta_0\le 0$, $\gamma_0\le 0$, $\gamma_1\le 0$, $\beta_1>-2$ і $a_{n+1}\ge 0$ для всіх $n\ge 1$ випливає, що

$$f_{n+1}=\frac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{n(n+1+\beta_1)}f_n+\frac{|\gamma_0|}{n(n+1+\beta_1)}f_{n-1}+\frac{a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)}. \tag{14}$$

Прийнявши $g(z)=f(z)-a_0/\gamma_2$, отримаємо функцію (2) з $g_n=f_n$. Тому формула (14) збігається з формулою (7), якщо

$$\xi_n=\frac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{n(n+1+\beta_1)},\qquad \eta_n=\frac{|\gamma_0|}{n(n+1+\beta_1)},\qquad b_n=\frac{a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)}.$$

Легко перевірити, що умови 1) - 4) леми 3 збігаються тепер, відповідно, з умовами:

1^c) $|\beta_0|+|\gamma_1|+a_2\le\dfrac{2+\beta_1}{2}$;

2^c) $\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)}\le\dfrac{na_n}{(n-1)(n+\beta_1)}$ для всіх $n\ge 2$;

3^c) $|\gamma_0| \le \dfrac{6+\beta_1}{3(2+\beta_1)}|\beta_0| + \dfrac{18+5\beta_1}{6(2+\beta_1)}|\gamma_1|$;

4^c) $\dfrac{(n+1)(|\beta_0|n+|\gamma_1|)}{n^2(n+1+\beta_1)} \le \dfrac{n(|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|)}{(n-1)^2(n+\beta_1)}$ і $\dfrac{(n+1)|\gamma_0|}{n(n-1)(n+1+\beta_1)} \le$ $\le \dfrac{n|\gamma_0|}{(n-2)(n-1)(n+\beta_1)}$ для всіх $n \ge 3$.

Оскільки нерівності в умові 4^c) очевидні, то за лемами 1—3 отримуємо таку теорему.

Теорема 3. *Нехай* $\gamma_2 > 0$, $\beta_1 > -2$, $\beta_1 + \gamma_2 = \gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0 = 0$, $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \le (2+\beta_1)/2$ *і* $|\gamma_0| \le \dfrac{6+\beta_1}{3(2+\beta_1)}|\beta_0| + \dfrac{18+5\beta_1}{6(2+\beta_1)}|\gamma_1|$, *а* $R[A] \ge 1$ *і* $0 < \dfrac{(n+1)a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)} \le \dfrac{na_n}{(n-1)(n+\beta_1)}$ *для всіх* $n \ge 2$. *Тоді існує розв'язок* (13) *диференціального рівняння* (3) *з* $R[f] = R[A]$, *який є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$ *функцією.*

Нехай, нарешті, виконується умова 3б). Тоді з (4) отримуємо $f_0 = a_0/\gamma_2$,

$$f_1 = \frac{a_1 - \gamma_1 f_0}{\beta_1 + \gamma_2} = \frac{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1 + \gamma_2)},$$

і отже, розв'язок набуває вигляду

$$f(z) = \frac{a_0}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{15}$$

де за умов $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $\beta_1 \ge -1$ і $a_{n+1} \ge 0$ для $n \ge 1$ коефіцієнти f_n визначаються рекурентною формулою

$$f_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} f_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} f_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}. \tag{16}$$

Припустимо, що $\dfrac{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} \in (0, +\infty)$. Прийнявши $g(z) = \left(f(z) - \dfrac{a_0}{\gamma_2}\right) q$, де $q = \dfrac{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}$, отримаємо функцію (2) з $g_n = q f_n$, $n \ge 1$. З (16) одержуємо рекурентну формулу

$$g_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} g_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} g_{n-1} + \frac{q a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2},$$

яка збігається з формулою (7), якщо

$$\xi_n = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}, \quad \eta_n = \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}, \quad b_n = q\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}.$$

Легко перевірити, що умови 1) - 4) леми 3 збігаються тепер, відповідно, з умовами:

1^d) $|\beta_0| + |\gamma_1| + q a_2 \le (1+\beta_1) + \gamma_2/2$;

2^d) $\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \dfrac{na_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$ для всіх $n \ge 2$;

3^d) $|\gamma_0| \le \dfrac{(12-2\gamma_2)|\beta_0| + (18+6\beta_1+\gamma_2)|\gamma_1|}{12(1+\beta_1)+6\gamma_2}$;

4^d) $\dfrac{n+1}{n}\dfrac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \dfrac{n}{n-1}\dfrac{|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$ і

$$\frac{n+1}{n-1}\frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \frac{n}{n-2}\frac{|\gamma_0|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$$

для всіх $n \ge 3$.

Друга нерівність в умові 4^d) очевидна. Оскільки $(n+1)/n < n/(n-1)$, то перша нерівність в умові 4^d) правильна, якщо

$$\frac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \frac{|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$$

для всіх $n \ge 3$. Ця нерівність рівносильна нерівності

$$(n^2-n-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(2n+\beta_1) \ge 0$$

для всіх $n \ge 3$. Позаяк функція (x^2-x) є зростаючою на $[3,+\infty)$, то остання нерівність правильна, якщо $(6-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(6+\beta_1) \ge 0$.

Отже, правильна така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\gamma_2 > 0$, $\beta_1 > -1$, $\dfrac{\gamma_2 a_1-\gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} \in (0,+\infty)$, $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $|\beta_0|+|\gamma_1|+a_2\dfrac{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2 a_1-\gamma_1 a_0} \le 1+\beta_1+\dfrac{\gamma_2}{2}$, $|\gamma_0| \le \dfrac{(12-2\gamma_2)|\beta_0|+(18+6\beta_1+\gamma_2)|\gamma_1|}{12(1+\beta_1)+6\gamma_2}$ *і* $(6-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(6+\beta_1) \ge 0$, *а* $R[A] \ge 1$ *і*

$$0 < \frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \frac{na_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$$

для всіх $n \ge 2$. *Тоді існує розв'язок* (15) *диференціального рівняння* (3) *з* $R[f] = R[A]$, *який є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$ *функцією.*

4. Зауваження

1. Умова $(6-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(6+\beta_1) \ge 0$ виконується, якщо $\beta_1+\gamma_2 \le 6$.

2. Якщо $0 < (n+1)a_{n+1} \le na_n$, тобто функція $A(z)$ задовольняє умову леми Александера, то умови на a_n у теоремах 1—4 виконуються.

3. Припустимо, що $\gamma_2 = a_0 = \beta_1 = a_1 = \beta_0 = \gamma_1 = \gamma_0 = 0$, а $A(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ і $R[A] \ge 1$. Тоді рівняння (3) матиме вигляд $w'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}$, а розв'язком цього рівняння буде функція

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n(n-1)} z^n. \tag{17}$$

Якщо $0 < \dfrac{a_{n+1}}{n} \le \dfrac{a_n}{n-1}$ для всіх $n \ge 2$, тобто виконується умова 2^a), то за лемою Александера функція (17) близька до опуклої. Умову 2^a) задовольняє послідовність $a_n = 1/n!$. Тоді $A(z) = e^z - 1 - z$ — ціла функція і функція (17) також є цілою функцією. Умову 2^a) задовольняють також коефіцієнти аналітичної в $\mathbb{D}$ функції

$A(z) = \dfrac{z^2}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)z^n$. У цьому випадку $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{z^n}{n} = \ln\dfrac{1}{1-z}$ є також аналітичною в $\mathbb{D}$ функцією.

Зрозуміло, що коефіцієнти не всіх близьких до опуклих в $\mathbb{D}$ функцій задовольняють умови леми Александера. Наприклад, зіркова, і отже, близька до опуклої функція $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ є розв'язком рівняння

$$z^2w'' + (z^2+z)w' + w = \frac{2z}{(1-z)^3} \qquad (\beta_1 = \beta_0 = \gamma_2 = 1,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 0),$$

але коефіцієнти функції $A(z) = \dfrac{2z}{(1-z)^3}$ не задовольняють умову 2^d).

Список використаної літератури

1. G. M. Golusin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, 1969.
2. W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J. **1** (1952), no. 2, 169–185. DOI: 10.1307/mmj/1028988895
3. S. M. Shah, *Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II*, J. Math. Anal. Appl. **142** (1989), no. 2, 422–430. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90011-5
4. З. М. Шеремета, *Близькість до опуклості цілих розв'язків одного диференціального рівняння*, Мат. методи фіз.-мех. поля. **42** (1999), no. 3, 31—35.
5. З. М. Шеремета, *О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **36** (2000), no. 8, 1045–1050; **English version:** Z. M. Sheremeta, *The properties of entire solutions of one differential equation*, Diff. Equat. **36** (2000), no. 8, 1155–1161. DOI: 10.1007/BF02754183.
6. O. M. Mulyava, M. M. Sheremeta, and Yu. S. Trukhan, *Properties of solutions of a heterogeneous differential equation of the second order*, Carpathian Math. Publ. **11** (2019), no. 2, 379–398. DOI: 10.15330/cmp.11.2.379-398
7. J. F. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Annals of Math. **17** (1915), no. 1, 12–22. DOI: 10.2307/2007212
8. A. W. Goodman, *Univalent function*, Vol. **II**, Mariner Publishing Co., 1983.

Стаття: надійшла до редколегії 26.04.2019
доопрацьована 07.06.2019
прийнята до друку 03.02.2020

CLOSENESS-TO-CONVEXITY OF SOLUTIONS OF A SECOND ORDER NONHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION

Yuriy TRUKHAN, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

An analytic univalent in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ function $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ is said to be convex in $\mathbb{D}$ if $f(\mathbb{D})$ is a convex domain. According to W. Kaplan the function f is said to be close-to-convex in $\mathbb{D}$ if there exists a convex in $\mathbb{D}$ function Φ such that $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. We consider a nonhomogeneous Shah differential equation

$$z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z) w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2) w = A(z),$$

where $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, and radius of convergence of the last power series is $R[A] \geqslant 1$. Conditions on coefficients a_n of power expansion of the function $A(z)$ and on parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 under which a Shah equation has close-to-convex in the unit disc solutions are investigated. We consider two cases: $\gamma_2 = 0$ and $\gamma_2 > 0$. In the case $\gamma_2 = 0$ two subcases are possible: $2a)$ $\beta_1 = a_1 = 0$ and $2b)$ $\beta_1 \neq 0$ and $a_1 \neq 0$. If $\gamma_2 = a_0 = \beta_1 = a_1 = 0$, $\beta_0 \leq 0$, $\gamma_0 \leq 0$, $\gamma_1 \leq 0$, $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \leq 1$ and $|\gamma_0| \leq |\beta_0| + 3|\gamma_1|/2$, $R[A] \geq 1$ and $0 < \dfrac{a_{n+1}}{n} \leq \dfrac{a_n}{n-1}$ for all $n \geq 2$ it is proved that there exists a solution $f(z)$ of the nonhomogeneous Shah differential equation with $R[f] = R[A]$, which is a close-to-convex in $\mathbb{D}$ function. In the case $2b)$ it is proved that if $\gamma_2 = a_0 = 0$, $\beta_1 > -1$, $a_1/\beta_1 \in (0, +\infty)$, $\beta_0 \leq 0$, $\gamma_0 \leq 0$, $\gamma_1 \leq 0$, $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \dfrac{\beta_1}{a_1} \leq (1 + \beta_1)$ and $|\gamma_0| \leq \dfrac{|\beta_0|}{1+\beta_1} + \dfrac{(3+\beta_1)|\gamma_1|}{2(1+\beta_1)}$, $R[A] \geq 1$ and $0 < \dfrac{a_{n+1}}{n+\beta_1} \leq \dfrac{a_n}{n-1+\beta_1}$ for all $n \geq 2$ then there exists a solution $f(z)$ of the nonhomogeneous Shah differential equation with $R[f] = R[A]$, which is close-to-convex in $\mathbb{D}$ function. In the case $\gamma_2 > 0$ possible subcases are 3a) $\beta_1 + \gamma_2 = a_1 - \gamma_1 f_0 = 0$ and 3b) $\beta_1 + \gamma_2 \neq 0$ and $a_1 - \gamma_1 f_0 \neq 0$. In both of this subcases the sufficient conditions on coefficients a_n and on parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 under which a nonhomogeneous Shah equation has close-to-convex in the unit disc solutions are found.

Key words: nonhomogeneous differential equation, close-to-convex function.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 107–127
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 107–127
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.107-127

УДК 517.956.4

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ТРЬОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ І ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Ольга ВОЗНЯК[1], Степан ІВАСИШЕН[2], Ігор МЕДИНСЬКИЙ[3]

[1] *Тернопільський національний економічний університет, вул. Львівська 11, 46000, м. Тернопіль*
[2] *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", пр-т Перемоги 37, 03056, м. Київ*
[3] *Національний університет "Львівська політехніка", вул. Степана Бандери 12, 79013, м. Львів*
e-mails: o.g.voznyak@gmail.com, ivashyshen.sd@gmail.com, i.p.medynsky@gmail.com

Для виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження і виродженням на початковій гіперплощині за допомогою методу Леві побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші. Одержано точні оцінки побудованого розв'язку та його похідних.

Ключові слова: параболічні рівняння з виродженням, фундаментальний розв'язок задачі Коші, виродження на початковій гіперплощині, метод Леві, ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова.

1. Вступ

Для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова, коефіцієнти яких не залежать від змінних виродження і мають ще виродження на початковій гіперплощині в праці [1] побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), а в працях [2, 3] для таких рівнянь з однією групою просторових змінних виродження, побудовано ФРЗК Z, знайдено оцінки Z і похідних від Z, а також оцінки приростів старших похідних від Z за просторовими змінними. Зазначимо, що аналогічні результати

2010 Mathematics Subject Classification: 35A09, 35K10, 35K65, 35K70

для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. які не мають виродження на початковій гіперплощині одержано в [4, 5, 6]. Ці результати отримали з використанням поетапного методу Леві, який запропоновано в працях [7, 8] і розвинутого в [5, 6] для випадку рівнянь без виродження на початковій гіперплощині, та в працях [2, 3] для випадку ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. Ми продовжуємо розпочаті раніше дослідження з реалізації поетапного методу Леві побудови ФРЗК для ультрапараболічних рівнянь з двома групами змінних виродження, які мають ще виродження на початковій гіперплощині.

Нехай n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant 1$ і $n = n_1+n_2+n_3$; $\mathbb{N}_j := \{1, \dots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$, $m_j = j-1/2$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1}, ..., x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}^n_+$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1}, \dots, k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}^{n_j}_+$, $j \in \mathbb{N}_3$. Використовуватимемо такі позначення: $k' := (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^n_+$, якщо $k_j \in \mathbb{Z}^{n_j}_+$, $j \in \{2, 3\}$; $M := m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3$; $M_k := m_1|k_1| + m_2|k_2| + m_3|k_3|$, якщо $k \in \mathbb{Z}^n_+$, де $|k_j| := k_{j1} + \ldots + k_{jn_j}$; $\Pi_H := \{(t, x)|\, t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; α і β – неперервні на відрізку $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0, T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β – монотонно неспадна; $B(t, \tau) := \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$, $0 < \tau < t \leqslant T$.

Через Z_{j-1}, $j \in \mathbb{N}_4$, позначатимемо ФРЗК. Індекс j відповідає етапу побудови ФРЗК. Кількість етапів залежить від кількості груп просторових змінних. Параметрикс на j-му етапі позначатимемо символом G_j, породжуваний ним об'ємний потенціал – символом W_j, а його густину – символом Q_j. Отже, на *початковому (нульовому) етапі* будуємо ФРЗК Z_0 для рівняння, коефіцієнти якого залежать від змінної t і параметра $y \in \mathbb{R}^n$, тобто розглядаємо рівняння

$$L_0 u(t, x) := (S - A(t, y, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t) \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \beta(t) \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}},$$

$$A(t, y, \partial_{x_1}) := \beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, y) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, y).$$

На *першому етапі* ФРЗК для рівняння

$$L_1 u(t, x) := (S - A(t, (x_1, y'), \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{2}$$

шукаємо у вигляді

$$Z_1(t, x; \tau, \xi; y') = G_1(t, x; \tau, \xi; y') + W_1(t, x; \tau, \xi; y'), \tag{3}$$

де

$$W_1(t, x; \tau, \xi; y') := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(t, x; \theta, \lambda; y') Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y') d\lambda, \tag{4}$$

G_1 – параметрикс, а Q_1 – невідома функція, $y' := (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_1(t, x; \tau, \xi; y') := Z_0(t, x; \tau, \xi; (\xi_1, y')),\ 0 < \tau < t \leqslant T,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}. \tag{5}$$

На *другому етапі* рівняння набуває вигляду

$$L_2 u(t, x) := (S - A(t, (x_1, x_2, y_3), \partial_{x_1}))u(t, x) = 0,\ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{6}$$

Згідно з методом Леві ФРЗК шукаємо у вигляді

$$Z_2(t, x; \tau, \xi; y_3) = G_2(t, x; \tau, \xi; y_3) + W_2(t, x; \tau, \xi; y_3). \tag{7}$$

Тут

$$W_2(t, x; \tau, \xi; y_3) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} G_2(t, x; \theta, \lambda; y_3) Q_2(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_3) d\lambda, \tag{8}$$

G_2 – параметрикс, а Q_2 – невідома функція. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_2(t, x; \tau, \xi; y_3) := Z_1(t, x; \tau, \xi; (\xi_2, y_3)),\ 0 < \tau < t \leqslant T,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}. \tag{9}$$

Для випадку двох груп просторових змінних виродження *третій етап* завершує побудову ФРЗК для рівняння, коефіцієнти якого залежать від усіх змінних. Отже, на цьому етапі розглядаємо рівняння вигляду

$$L_3 u(t, x) := (S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0,\ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{10}$$

Аналогічно до попереднього, ФРЗК для рівняння (10) шукаємо у вигляді

$$Z_3(t, x; \tau, \xi) = G_3(t, x; \tau, \xi) + W_3(t, x; \tau, \xi). \tag{11}$$

Тут

$$W_3(t, x; \tau, \xi) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} G_3(t, x; \theta, \lambda) Q_3(\theta, \lambda; \tau, \xi) d\lambda, \tag{12}$$

G_3 – параметрикс, а Q_3 – невідома функція. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_3(t, x; \tau, \xi) := Z_2(t, x; \tau, \xi; \xi_3),\ 0 < \tau < t \leqslant T,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Результатом кожного j -го етапу є твердження про існування відповідного ФРЗК Z_j, $j \in \mathbb{N}_3$, встановлення точних оцінок похідних від ФРЗК, інтегралів від похідних ФРЗК і їхніх приростів (оцінки двох останніх, крім Z_3). Проведення цих досліджень істотно залежить від всебічного вивчення властивостей об'ємних потенціалів (4), (8) і (12). Ядром потенціалу є відповідний параметрикс (5), (9) чи (13), а густиною – відповідна функція Q_j, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} Q_j(t, x; \tau, \xi; p_j(y')) &:= K_j(t, x; \tau, \xi; p_j(y')) + \\ &+ \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} K_j(t, x; \theta, \lambda; p_j(y')) Q_j(\theta, \lambda; \tau, \xi; p_j(y')) d\lambda, \end{aligned} \tag{14}$$

де $j \in \mathbb{N}_3$, $p_1(y') = y'$, $p_2(y') = y_3$ і $p_3(y') = 0$, тобто $p_3(y')$ не залежить від y'.

Для густин Q_j встановлюються певні властивості й оцінки, які гарантують існування похідних від об'ємних потенціалів, їхніх точних оцінок та оцінок приростів таких похідних за просторовими змінними.

У попередніх працях [9, 10] детально розглянуто етапи побудови та дослідження ФРЗК для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з *двома групами* просторових змінних виродження. Тому природним є бажання одержати аналогічні результати для таких рівнянь, які мають ще виродження на початковій гіперплощині.

Стаття складається з семи пунктів. У вступі (**п. 1**) наведено загальну схему поетапного методу Леві. У **п. 2** наведено припущення на коефіцієнти рівняння і допоміжні твердження. В третьому пункті сформульовано основні результати. Вивчення властивостей функції G_1 і ядра K_1 інтегрального рівняння (14) при $j = 1$ — **пп. 4, 5**. В шостому пункті наведено властивості густини G_1 об'ємного потенціалу W_1, а також властивості потенціалу W_1. У **п. 7** завершуємо доведення основних результатів.

2. Припущення та допоміжні твердження

Будемо користуватися такими позначеннями:

$$\Delta_x^z f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,z,\cdot),\ \Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot,x,\cdot),\ s \in \mathbb{N}_3,$$
$$z^{(0)} := x,\ z^{(1)} := (z_1,x_2,x_3),\ z^{(2)} := (x_1,z_2,x_3),\ z^{(3)} := (x_1,x_2,z_3),$$
$$x^{(1)} := (x_1,z_2,z_3),\ x^{(2)} := (x_1,x_2,z_3),\ X(t,\tau) := (X_1(t,\tau),X_2(t,\tau),X_3(t,\tau)),$$
$$X^{(1)}(t,\tau) := (\lambda_1,X_2(t,\tau),X_3(t,\tau)),\ X^{(2)}(t,\tau) := (\lambda_1,\lambda_2,X_3(t,\tau)),$$
$$X_1(t,\tau) := x_1,\ X_2(t,\tau) := x_2 + B(t,\tau)\hat{x}_1,\ X_3(t,\tau) := x_3 + B(t,\tau)x_2' + 2^{-1}(B(t,\tau))^2 x_1',$$
$$\hat{x}_1 := (x_{11},\ldots,x_{1n_2}), x_1' := (x_{11},\ldots,x_{1n_3}),\ x_2' := (x_{21},\ldots,x_{2n_3}),$$
$$Z^{(0)}(t,\tau) := X(t,\tau),\ Z^{(s)}(t,\tau) := X(t,\tau)|_{x_s=z_s},\ s \in \mathbb{N}_3.$$

Аналогічно будуються параметричні точки $Y(t,\tau)$ і $\Lambda(t,\tau)$ за відповідними точками y і λ.

У праці часто однаковими літерами (здебільшого літерами C, c і d), якщо їхні величини нас не цікавлять, позначатимемо різні сталі.

Будемо припускати, що коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 комплекснозначні функції на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

(i) a_{jl}, a_j, a_0 є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re}\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geqslant \delta|\sigma_1|^2;$$

(ii) a_{jl}, a_j, a_0 є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_1 > 0\ \exists\, \gamma_1 \in (0,1)\ \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)| \leqslant H_1|x_1 - z_1|^{\gamma_1}, \tag{15}$$

$$\exists\, H_2 > 0\ \exists\, \gamma_2 \in (1/3,2/3]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \forall h \in [\tau,T] :$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leqslant H_2((B(h,\tau))^{m_2\gamma_2} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma_2}), \tag{16}$$

$$\exists H_3 > 0\ \exists \gamma_3 \in (3/5, 2/3]\ \forall \{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \forall h \in [\tau, T]:$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)| \leqslant H_3((B(h,\tau))^{m_3\gamma_3} + |X_3(h,\tau) - z_3|^{\gamma_3}), \tag{17}$$

(iii) $\exists H_4 > 0\ \forall \{(t,x),(t,\xi^{(1)}),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \forall\, h \in [\tau, T]:$

$$|\Delta_{x_\ell}^{z_\ell} \Delta_{x_s}^{z_s} a_{jl}(t,x)| \leqslant H_4 |x_\ell - z_\ell|^{\gamma_\ell}((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s} + |X_s(h,\tau) - z_s|^{\gamma_s}),$$

$$\ell \in \mathbb{N}_2,\ \ell < s,\ s \in \{2,3\}, \tag{18}$$

де a – будь-який з коефіцієнтів a_{jl}, a_j і a_0. В умові **(iii)** сталі γ_1, γ_2 і γ_3 такі, як в умові **(ii)**.

З умов (6), (17) при $h = \tau$ випливають звичайні умови Гельдера за змінними x_2 і x_3. Достатня умова виконання (16) подана в [2]. Наведемо аналогічну умову для виконання твердження (17), яка доводиться так само, як і умова, описана в лемі 1 з [10].

Лема 1. *Нехай a – неперервна й обмежена функція на $\Pi_{[0,T]}$, яка задовольняє умову*

$$\exists H_5 > 0\ \exists \gamma \in (9/10, 1]\ \forall \{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)| \leqslant H_5((B(T,\tau))^{m_1} + 2^{-1}B(T,\tau)|x_1'| + |x_2'|)^{-\gamma}|x_1 - z_1|^{\gamma}. \tag{19}$$

Тоді справджується нерівність (17) *з* $\gamma_3 = \gamma/m_2$.

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

$$E_c^{(j)}(t,\tau,z_j) := \exp\{-c(B(t,\tau))^{1-2j}|z_j|^2\},\ t > \tau,\ z_j \in \mathbb{R}^{n_j},\ j \in \mathbb{N}_3, \tag{20}$$

$$E_c(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(1)}(t,\tau,X_1(t,\tau) - \xi_1)E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau) - \xi_2)E_c^{(3)}(t,\tau,X_3(t,\tau) - \xi_3),$$

$$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

$$F_c(t,\tau,x,\xi) := \exp\{-c[(4B(t,\tau))^{-1}|x_1 - \xi_1|^2 + 3(B(t,\tau))^{-3}|x_2 + 2^{-1}B(t,\tau)(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1) - \xi_2|^2 +$$
$$+ 180(B(t,\tau))^{-5}|x_3 + 2^{-1}B(t,\tau)(x_2' + \xi_2') + (12)^{-1}(B(t,\tau))^2(x_1' - \xi_1') - \xi_3|^2]\},$$

$$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{22}$$

$$E_c^d(t,\tau,x,\xi) := E_c(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau),\ E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\},\ A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)},$$

$$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R},$$

$$I_0^{sl}(x,\xi) := (B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t,\theta,x,\lambda)E_c(\theta,\tau,\Lambda^{sl}(t,\theta),\xi)d\lambda, \tag{23}$$

$$I_1^{sr}(x_1;\xi) := (B(t,\theta))^{-m_1n_1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^{(1)}(t,\theta,x_1 - \lambda_1)E_c(\theta,\tau,\Lambda^{sr}(t,\theta),\xi)d\lambda_1, \tag{24}$$

$$I_2^{sr}(x_1,x_2;\xi) := (B(t,\theta))^{-m_1n_1 - m_2n_2} \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_{c_0}^{(1)}(t,\theta,x_1 - \lambda_1) \times$$

$$\times E_{c_0}^{(2)}(t,\theta,X_2(t,\theta)-\lambda_2)E_c(\theta,\tau,\Lambda^{sr}(t,\theta),\xi)d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{25}$$

де

$$\Lambda^{s0}(t,\tau):=Z^{(s)}(t,\tau),\quad \Lambda^{s1}(t,\tau):=(\lambda_1,\quad Z_2^{(s)}(t,\tau),Z_3^{(s)}(t,\tau)),$$
$$\Lambda^{s2}(t,\tau):=(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(s)}(t,\tau)),\quad \Lambda^{s3}(t,\tau):=\lambda,$$
$$l\in\mathbb{Z}_2,\quad s\in\mathbb{Z}_3,\quad r\in\{2,3\},\quad 0<\tau<\theta<t\leqslant T,\quad \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Потрібні властивості цих функцій описуються в наступній лемі, яка доводиться аналогічно до леми 2 з [9].

Лема 2. *Правильні такі твердження:*

$$E_c(t,\tau,x,\xi)\leqslant F_{c_1}(t,\tau,x,\xi)\leqslant E_{c_2}(t,\tau,x,\xi),\ t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_2<c_1<c, \tag{26}$$

$$E_c^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)\leqslant E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),$$
$$0<\tau<\theta<t\leqslant T,\ \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}, \tag{27}$$

$$E_c^{(2)}(t,\theta,X_2(t,\theta)-\lambda_2)E_c^{(2)}(\theta,\tau,\Lambda_2(\theta,\tau)-\xi_2)\leqslant E_{-c/2}^{(1)}(t,\theta,x_1-\xi_1)E_{c/4}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2),$$
$$0<\tau<\theta<t\leqslant T,\ \{x_s,\lambda_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_2, \tag{28}$$

$$|X_s(t,\tau)-\xi_s|^{\gamma_s}E_c^{(s)}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s)\leqslant C(B(t,\tau))^{m_s\gamma_s}E_{c_0}^{(s)}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s),$$
$$t>\tau,\{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{29}$$

$$|X_s(t,\tau)-\xi_s|^{\gamma_s}E_c(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s)\leqslant C(B(t,\tau))^{m_s\gamma_s}E_{c_0}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s),$$
$$t>\tau,\{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{30}$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi=C,\ t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{31}$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi_2d\xi_3\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1}E_c^{(1)}(t,x_1-\xi_1),$$
$$t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}, \tag{32}$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi_3\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2}E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)\times$$
$$\times E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2),\ t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_2, \tag{33}$$

$$(B(t,\tau))^{-m_sn_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}}E_c^{(s)}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s)d\xi_s=C,\ t>\tau,\ x_s\in\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{34}$$

$$E_c(t,\tau,y^{(s)},\xi)\leqslant CE_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<\theta<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{35}$$

$$E_c(\theta,\tau,Z^{(l)}(t,\theta),\xi)\leqslant CE_{c/8}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi),$$
$$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t\leqslant T,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ l\in\mathbb{N}_3, \tag{36}$$

$$E_c(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\leqslant E_c(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{37}$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,Z_2^{(l)}(t,\theta),Z_3^{(l)}(t,\theta)),\xi)\leqslant E_{c/4}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta),X_3(t,\theta)),\xi),$$

(38) $$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}, l\in\mathbb{N}_3,$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta),X_3(t,\theta)),\xi)\leqslant E^{(1)}_{-9c/4}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_{c/2}(t-\tau,x,\xi),$$

(39) $$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1},$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(l)}(t,\theta)),\xi)\leqslant CE_{c/2}(\theta,\tau,(\lambda_1,\lambda_2,X_3(t,\theta)),\xi),$$

(40) $$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ j\in\mathbb{N}_2,\ l\in\mathbb{Z}_3,$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,\lambda_2,X_3(t,\theta)),\xi)\leqslant CE_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)E_c^{(2)}(\theta,\tau,\Lambda_2(\theta,\tau)-\xi_2)\times$$
$$\times E^{(1)}_{-c/4}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E^{(2)}_{-c/2}(t,\theta,X_2(t,\theta)-\lambda_2)E^{(3)}_{c/4}(t,\tau,X_3(t,\tau)-\xi_3),$$

(41) $$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ j\in\mathbb{N}_2,$$

$$I_0^{sl}(z^{(r)};\xi)\leqslant C(B(t,\tau))^{-M}E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<t_1\leqslant\theta<t\leqslant T,$$

(42) $$\{x,\xi,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n,\ \{s,l,r\}\subset\mathbb{Z}_3,\ \textit{причому}\ \theta\in(\tau,t)\ \textit{для}\ l=3,$$

$$I_1^{sl}(z_1;\xi)\leqslant CI_1^{sl}(x_1;\xi)\leqslant CE_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,$$

(43) $$\{x_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ l\in\mathbb{Z}_1,\ \{s,r\}\subset\mathbb{Z}_3,$$

$$I_2^{s2}(z_1,z_2;\xi)\leqslant CI_2^{s2}(x_1,z_2;\xi)\leqslant CI_2^{s2}(x_1,x_2;\xi)\leqslant CE_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$

(44) $$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x_r,z_r\}\subset\mathbb{R}^{n_r},\ r\in\mathbb{N}_2,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\mathbb{Z}_3,$$

де C, c і c_0 – додатні сталі, причому $c_0<c$, у формулі (35) *$y^{(s)}$ – точка на відрізку прямої, що сполучає точки x і $z^{(s)}$, $s\in\mathbb{N}_3$, у формулах* (35)–(42) $|x_s-z_s|^{1/m_s}\leqslant B(t,\tau)/4$, *$s\in\mathbb{N}_3$, і t_1 таке, що $B(t,t_1)=B(t_1,\tau)$.*

У лемі 3 подаємо властивості ФРЗК Z_0 для рівняння (1), які встановлюються подібно до результатів з [1, теорема 3.1, властивість 3.2].

Лема 3. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1)*, як функції від t і y, задовольняють умови* **(i)**, **(ii)***, в яких x замінено на y. Тоді існує ФРЗК Z_0, для якого справджуються оцінки*

(45) $$|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)|\leqslant C_{sk}(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$

(46) $$\times\begin{cases}|y_1-z_1|^{\gamma_1}, & \textit{якщо}\ s=1,\\ (B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}, & \textit{якщо}\ s\in\{2,3\},\end{cases}$$

а також рівності

(47) $$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi=0,\ \partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)dx=0,\ k\neq0,$$

(48) $$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2d\xi_3=0,\ k'\neq0,$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_3 = 0,\ k_3 \neq 0, \tag{49}$$

$$\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y) = (-\partial_\xi)^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y), \tag{50}$$

де $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\{k,k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, C_k, C_{ks} *– додатні сталі,* h *і* γ_s *– числа з умов* (15)–(17).

3. Формулювання основних результатів

Результати першого, другого та завершального третього етапів побудови й дослідження ФРЗК для рівняння (10) містяться в таких теоремах.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (2) *виконуються умови* **(i)–(iii)**, *в яких* x *замінено на* (x_1, y'). *Тоді для рівняння* (2) *існує ФРЗК* Z_1 *і правильні такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{51}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (B(t,\tau))^{-M-M_k-m_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s \in \mathbb{N}_3, \tag{52}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$

(53) $$\times((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}),\ s\in\{2,3\},$$

(54) $$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ k\neq 0,$$

(55)
$$\Big|\ \Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}E^d(t,\tau),\ k\neq 0,$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'}Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\ \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\gamma_2}\times$$

(56) $$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k'\neq 0,$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\ \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3|k_3|+m_3\gamma_3}\times$$

(57) $$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0,$$

(58) $$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3=0,\ k'\neq 0,$$

(59) $$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3=0,\ k_3\neq 0,$$

(60) $$\partial_x^{k'}Z_1(t,x;\tau,\xi;y')=(-\partial_\xi)^{k'}Z_1(t,x;\tau,\xi;y'),$$

де $0<\tau<t\leqslant T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1]$, $\{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]$, $\{k,k'\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1|\leqslant 1$, *числа* h *і* γ_s *такі, як вище.*

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови* **(i)–(iii)**, *в яких* x *замінено на* (x_1,x_2,y_3). *Тоді для рівняння* (6) *існує ФРЗК* Z_2 *і справджуються оцінки:*

(61) $$|\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)| \leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-M_k-m_s\gamma_s^0}\times$$

(62) $$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s\in\mathbb{N}_3,$$

$$|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$

(63) $$\times((B(h,\tau))^{m_3\gamma_3}+|Y_3(h,\tau)-z_3|^{\gamma_3}),$$

(64) $$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi\ \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M_k+l_k}E^d(t,\tau),\ k\neq 0,$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi \Big| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M_k + l_k - m_s\gamma_s^0} E^d(t,\tau),\ s \in \mathbb{N}_3,\ k \neq 0, \tag{65}$$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3 \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1 - M_{k'} + m_2\gamma_2} \times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k' \neq 0, \tag{66}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3 \Big| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-m_1n_1 - M_{k'} + m_2\gamma_2 - m_s\gamma_s^0} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k' \neq 0, \tag{67}$$

а також рівності

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0,\ k_3 \neq 0, \tag{68}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3),\ k_3 \neq 0, \tag{69}$$

в яких $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1]$, $\gamma_2^0 \in (0,\gamma_2]$, $\gamma_3^0 \in (0,1]$, $\{k,k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| \leqslant 1$, *числа* h *і* γ_s *такі, як вище,* $l_1 := m_1\gamma_1$ *при* $k_1 \neq 0$, $k' = 0$, $l_2 := m_2\gamma_2$ *при* $k_1 = 0$, $k' \neq 0$.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (10) *виконуються умови* **(i)**–**(iii)**. *Тоді для рівняння* (10) *існує ФРЗК* Z_3*, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_3(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{70}$$

$$|SZ_3(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-1} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{71}$$

де $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \leqslant 1$.

ФРЗК Z_j, $j \in \mathbb{N}_3$, визначаються наведеними у вступі формулами (3), (7) і (11), в яких G_j – параметрикс, а W_j – відповідний об'ємний потенціал з невідомою густиною Q_j. Тому доведення теорем 1–3 зводиться до визначення та дослідження властивостей функцій G_j, Q_j і W_j. Вивчення функції G_1 та ядра K_1 рівняння (14) з $j = 1$ та функцій G_2, G_3, Q_j і W_j, $j \in \mathbb{N}_3$, проведемо в наступних пунктах.

Зауваження 1. На підставі оцінок (26) у нерівностях (51)–(53), (56), (57), (61)–(63), (66), (67), а також (70) і (71), як і в (45), (46), замість оцінюючої функції E_c^d можна брати функцію F_c^d.

4. Параметрикс G_1

Властивості функції G_1 опишемо в такій лемі.

Лема 4. *За умов леми 3 для функції G_1 справджуються такі оцінки*

$$|\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{72}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-M_k-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{73}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}),\ s\in\{2,3\}, \tag{74}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ k\neq 0, \tag{75}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}E^d(t,\tau),\ k\neq 0, \tag{76}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\ \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\gamma_2}\times$$
$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k'\neq 0, \tag{77}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\ \Big| \leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}-m_s\gamma_s+m_2\gamma_2}\times$$
$$\times(E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)+E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,z_1-\xi_1))E^d(t,\tau),\ k'\neq 0, \tag{78}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;(y_2,\xi_3))d\xi_3\ \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$
$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0, \tag{79}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;(y_2,\xi_3))d\xi_3\Big| \leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(|k_3|-\gamma_3)-m_s\gamma_s}\times$$
$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0, \tag{80}$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ k'\neq 0, \tag{81}$$

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0,\ k'\neq 0, \tag{82}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0,\ k_3\neq 0, \tag{83}$$

у яких $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' = (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\{k, k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\gamma_s^0 \in (0,1]$, $s \in \mathbb{N}_3$, h *і* γ_s *– числа з умов* (15)–(17).

Доведення леми 4 проводиться відповідною модифікацією доведень з праць [1, 2], а для рівнянь, у яких відсутні функції α і β – з [4, 5, 8].

5. Ядро K_1

Ядро K_1 інтегрального рівняння (14) з $j = 1$ визначається формулою

$$K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \\ + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big) G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ 0 < \tau < t \leqslant T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

З цієї формули для $k' \in \mathbb{Z}_+^n \backslash \{0\}$ випливають такі рівності:

$$\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \\ + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big) \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{84}$$

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \\ + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big) \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ s \in \{2,3\}, \tag{85}$$

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1}\Delta_{y_s}^{z_s} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \\ + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t,(x_1,y')) - \\ - \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t,(\xi_1,y'))\partial_{x_{1j}} - \Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t,(\xi_1,y')) \Big) \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y') + \\ + \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \\ + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big)\Big|_{y_s=z_s} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ s \in \{2,3\}. \tag{86}$$

За допомогою інтегрування (86) і формул (82), (83) отримаємо ще такі рівності:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \\ + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big)\Big|_{y_s=z_s} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3,\ s \in \{2,3\},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_{x_3}^{k_3} K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big)\Big|_{y_s=z_s} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3,\ k_3 \neq 0,\ s \in \{2,3\}. \tag{87}$$

Використовуючи рівності (84)–(87), оцінки (72)–(74), умови (15)–(18), нерівності (29), (30) і (32), а також рівність (31), отримуємо оцінки

$$|\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{88}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{89}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s} + |Y_s(h,\tau) - z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{90}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 \Big| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s} + |Y_s(h,\tau) - z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-m_1 n_1 - M_{k'} - 1 + m_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau), \tag{91}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 \Big| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s} + |Y_s(h,\tau) - z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-m_1 n_1 - m_2 n_2 - M_{k'} - 1 + m_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau), \tag{92}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi \Big| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s} + |Y_s(h,\tau) - z_s|^{\gamma_s})\times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E^d(t,\tau). \tag{93}$$

В оцінках (88)–(93) $0 < \tau < t \leqslant T$, $h \in (0,T]$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $k' \in \mathbb{Z}_+^n$ (в оцінках (91)–(93) $k' \neq 0$), а числа γ_s^0 і γ_s такі, як вище.

Тепер оцінимо приріст $\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'} K_1$. Достатньо розглянути випадок, коли $|x_1 - z_1|^2 \leqslant B(t,\tau)/4$. З рівності (84) випливає, що

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{z_1}a_0(t,(x_1,y'))\Big)\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_j(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi).$$

За допомогою умови (15), оцінок (72), (73) та нерівності (29) отримуємо

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1}\times$$

$$\times\Big(\,|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{m_1\gamma_1}+|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-m_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}\,\Big)E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{94}$$

де γ_1^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, а γ_1 – число з умови (15). Якщо додатково скористатися нерівністю (75) і рівністю (31), то отримаємо оцінку

$$\Big|\,\Delta_{x_1}^{z_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\,\Big|\leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1}E^d(t,\tau)\times$$

$$\times\Big(\,|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{m_1\gamma_1}+|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-m_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}\Big),\ \gamma_1^0\in(0,1]. \tag{95}$$

З нерівності (94) випливають оцінки

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C\beta(t)E_c^d(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\begin{cases}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1-m_1(\gamma_1^0-\gamma_1)},\ \gamma_1^0<\gamma_1,\\ |x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1},\ \gamma_1^0=\gamma_1.\end{cases} \tag{96}$$

6. Властивості функції Q_1 та об'ємного потенціалу W_1

Оскільки, згідно з результатами **п. 4** і твердженням (26) леми 2, ядро K_1 інтегрального рівняння (14) з $j=1$ задовольняє умови з [1, леми 1.10, с. 44], то функція Q_1 визначається рядом

$$Q_1(t,x;\tau,\xi;y')=\sum_{j=1}^{\infty}K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{97}$$

в якому

$$K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\theta,\lambda;y')K_{1(j-1)}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,\ j>1,$$

$$K_{11}:=K_1,\ 0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

Лема 5. *За умов* **(i)–(iii)** *для функції* Q_1 *справджуються оцінки*

(98) $$|\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}\times$$

(99) $$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s\in\mathbb{N}_3,$$

(100)
$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)H_s(h,\tau)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi),\ s\in\{2,3\},$$

(101) $$\Big|\ \partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

(102) $$\Big|\ \Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C\beta(t)|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+m_1(\gamma_1-\gamma_1^0)},$$

$$\Big|\ \partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\ \Big| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\gamma_2}\times$$

(103) $$\times E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k'\neq 0,$$

$$\Big|\ \partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\ \Big| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-m_1(n_1-\gamma_1)-m_2n_2-m_3(|k_3|-\gamma_3)-1}\times$$

(104) $$\times E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0,$$

де $0<\tau<t\leqslant T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $k':=(0,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\gamma_1^0\in(0,1]$, $\{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]$, $H_s(h,\tau):=(B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}$, $s\in\{2,3\}$, $h\in[\tau,T]$, γ_1, γ_2, γ_3 – *числа з умов* (15)–(17).

Лема 6 стосується властивостей об'ємного потенціалу (4) з першого етапу побудови ФРЗК.

Лема 6. *Нехай коефіцієнти рівняння* (2) *задовольняють умови* ***(i)–(iii)***. *Тоді правильні такі твердження:*

1) *функція* (4) *має неперервні похідні вигляду* $\partial_x^k W_1$, *де мультиіндекс* $k:=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$ *такий, що*

$$||k||:=|k_1|+2(|k_2|+|k_3|)\leqslant 2.$$

Похідні визначаються формулами

(105) $$\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,\ |k_1|=1,$$

$$\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')\Delta_{\lambda}^{X(t,\theta)}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')d\lambda\Big)\,Q_1(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi;y')\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\ |k_1|=2, \tag{106}$$

$$\partial_x^{k'}W_1(t,x;\tau,\xi;y')=\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')\partial_x^{k'}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,\ |k'|\neq 0; \tag{107}$$

2) *справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}+m_1\gamma_1}E_c^d(t,\tau,x,\xi),\ ||k||\leqslant 2, \tag{108}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ ||k||=2,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{109}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_{x_l}W_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant CH_s(h,\tau)(B(t,\tau))^{-M-m_l+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,x,\xi),\ \{s,l\}\subset\{2,3\}, \tag{110}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\,\Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M_{k'}+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ 0<||k||\leqslant 2, \tag{111}$$

$$\Big|\,\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^kW_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\,\Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M_k-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ 0<||k||\leqslant 2,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{112}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^kW_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3\,\Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_k+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ ||k||\leqslant 2, \tag{113}$$

$$\Big|\,\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^kW_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3\,\Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_k-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times(E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)+E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,z_1-\xi_1))E^d(t,\tau),\ ||k||=2,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{114}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_x^kW_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3\,\Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-M_k+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ ||k||\leqslant 2, \tag{115}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 \Big| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-M_k-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma_1} \times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ ||k|| \leqslant 2,\ s \in \mathbb{N}_3, \tag{116}$$

$$\partial_x^{k'} W_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} W_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ k' \neq 0, \tag{117}$$

У формулах (105)–(117) $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $k' := (0,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\gamma_1^0 \in (0,1]$, $\{\gamma_2^0, \gamma_3^0\} \subset (0,1]$, $s \in \{2,3\}$, $h \in [\tau,T]$, $H_s(h,\tau)$ *і числа* γ_1, γ_2, γ_3 *такі, як у лемі 5.*

Доведення лем 5 і 6 проводиться відповідною модифікацією доведень з [4, 6, 9] і [1, 2] для випадку рівнянь без виродження і з виродженням на початковій гіперплощині, відповідно.

Лема 4, а також леми 5 і 6 на підставі формули (3) обґрунтовують твердження теореми 1 про ФРЗК Z_1 і завершують перший етап його побудови.

7. Другий і третій етапи побудови ФРЗК

Дослідження властивостей функцій G_j, K_j, Q_j і W_j, $j \in \{2,3\}$, у другому та третьому етапах проводиться за методикою, використаною в першому етапі. Ці дослідження в принципі повторюють з природними особливостями відповідні дослідження в першому етапі. Коротко зупинимося на цих особливостях.

Властивості параметриксу G_2 є такими, як і сформульовані в теоремі 1 для Z_1 з тією відмінністю, що $\gamma_2^0 \in (0,\gamma_2]$ для Z_2 і $\gamma_2^0 \in (0,1]$ для G_2, тобто Z_2 має, взагалі кажучи, нижчий показник гладкості за змінною x_2, ніж G_2. Це зумовлено тим, що саме таку гладкість має об'ємний потенціал W_2. Причина цього криється у властивостях густини Q_2, яка, загалом, не має похідної за змінною x_2, а є лише неперервною за цією змінною за Гельдером з показником γ_2. Тому для похідної $\partial_{x_2}^{k_2} W_2$, $|k_2| = 1$ треба використати формулу

$$\partial_{x_2}^{k_2} W_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_\tau^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\theta,\lambda;y_3) Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\theta,\lambda;y')d\lambda_2 d\lambda_3 \Big) \times$$

$$\times \Delta_{\Lambda^{01}(t,\theta)}^{X(t,\theta)} Q_2(\theta,\Lambda^{01}(t,\theta);\tau,\xi;y_3)d\lambda_1 + \int\limits_{t_1}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\theta,\lambda;y_3) \times$$

$$\times \Big(\Delta_{\Lambda^{02}(t,\theta)}^{\Lambda^{01}(t,\theta)} Q_2(\theta,\Lambda^{02}(t,\theta);\tau,\xi;y_3) + \Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t,\theta)} Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3) \Big) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^t \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} G_2(t,x;\theta,\lambda;y_3)d\lambda \Big) Q_2(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi;y_3) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}. \tag{118}$$

Оцінивши звичайним способом, подібно до попереднього, інтеграли з (118), отримаємо оцінку

$$|\partial_{x_2}^{k_2} W_2(t,x;\tau,\xi;y_3)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-m_2(1-\gamma_2)} E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_3\in\mathbb{R}^{n_3},\ |k_2|=1.$$

Тут використано те, що

$$-m_2(1-\gamma_2) = -1+(3\gamma_2-1)/2 \qquad \text{і} \qquad 3\gamma_2-1>0,$$

бо згідно з умовою (16) маємо $\gamma_2\in(1/3,2/3]$.

Аналогічна ситуація виникає на третьому етапі. На цьому етапі G_3, Q_3 і W_3 від параметра y вже не залежать. Формули для похідних $\partial_{x_3}^{k_3}W_3$, $|k_3|=1$ набувають вигляду

$$\partial_{x_3}^{k_3} W_3(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_3(t,x;\theta,\lambda)Q_3(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_3(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3\Big)\,\Delta_{\Lambda^{01}(t,\theta)}^{X(t,\theta)}Q_3(\theta,\Lambda^{01}(t,\theta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}G_3(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_3\Big)\,\Delta_{\Lambda^{01}(t,\theta)}^{\Lambda^{02}(t,\theta)}Q_3(\theta,\Lambda^{01}(t,\theta);\tau,\xi)d\lambda_1+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_3(t,x;\theta,\lambda)\Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t,\theta)}Q_3(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_3}^{k_3}G_3(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\Big)\,Q_3(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}.$$

Оцінювання інтегралів із цієї формули приводить до такого результату:

$$|\partial_{x_3}^{k_3} W_3(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-m_3(1-\gamma_3)} E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k_3|=1,$$

де $-m_3(1-\gamma_3)=-1+(5\gamma_3-3)/2$ і $5\gamma_3-3>0$, оскільки за умовою (17) маємо, що $\gamma_3\in(3/5,2/3]$.

З властивостей функцій G_j і W_j, $j\in\{2,3\}$ випливають твердження теореми 2, а також твердження теореми 3 про існування ФРЗК $Z:=Z_3$ та його оцінки (70). Оцінка (71) випливає з оцінок (70) і того, що Z є розв'язком рівняння (10).

Отже, основним результатом дослідження в цій статті є така теорема.

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (10) *виконуються умови* **(i)–(iii)**. *Тоді для рівняння* (10) *існує ФРЗК Z, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau)(t,\tau,x,\xi), \tag{119}$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-1}E_c^d(t,\tau,x,\xi) \tag{120}$$

у яких $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \leqslant 1$, C *і* c *– додатні сталі,* $d \in \mathbb{R}$.

Зауваження 2. У випадку слабкого виродження рівняння (10) в оцінках (119) і (120) можна брати $\tau = 0$ і $d = 0$.

Список використаної літератури

1. О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині*, Буковинський мат. журн. **3** (2015), no. 3–4, 41–51.
2. О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині*, Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка": Збірник наук. праць, серія: Фізико-математичні науки, - Львів: Вид-во Львівської політехніки, (2017), no. 871, 46–64.
3. О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Фундаментальний роз-в'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині*, Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка": Збірник наукових праць, серія: Фізико-математичні науки, - Львів: Вид-во Львівської політехніки, (2018), no. 898, С. 13–21.
4. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження,* Буковинський мат. журн. **2** (2014), no. 2–3, 94–106.
5. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних* , Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Зб. праць Ін-ту математики НАН України **13** (2016), no. 1, 108–155.
6. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних,* Мат. методи та фіз.-мех. поля. **59** (2016), no. 2, 28–42; **English version:** S. D. Ivasyshen and I. P. Medyns'kyi, *On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two qroups of spatial variables*, J. Math. Sci. **231** (2018), no. 4, 507–526. DOI: 10/1007/s10958-018-3830-0
7. S. D. Ivashyshen and I. P. Medynsky, *On applicatios of the Levi method in the theory of parabolic equations*, Mat. Stud. **47** (2017), no. 1, 33–46. DOI: 10.15330/ms.47.1.33-46
8. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова.* Сучасні проблеми механіки і математики: в 3-х т. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, **1** (2013), 36–38.
9. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017, **60** (2017), no. 3, 9–31; **English version:** S. D. Ivasyshen and I. P. Medyns'kyi. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration, I*, J. Math. Sci. **246** (2020), no. 3, 121–151. DOI: 10.1007/s10958-020-04726-z
10. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **60** (2017), no. 4, 7–24; **English**

version: S. D. Ivasyshen and I. P. Medyns'kyi. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration, II*, J. Math. Sci. **247** (2020), no. 1, 1–23. DOI: 10.1007/s10958-020-04786-1

11. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*. Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**, Basel: Birkhäuser, 2004. DOI: 10.1007/978-3-0348-7844-9

Стаття: надійшла до редколегії 06.03.2019
прийнята до друку 03.02.2020

FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH THREE GROUPS OF SPATIAL VARIABLES AND with DEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

Olga VOZNYAK[1], **Stepan IVASYSHEN**[2], **Igor MEDYNSKY**[3]

[1] *Ternopil Natonal Economic University, Lvivska Str., 11, 46020, Ternopil, Ukraine*
[2] *National Technical University of Ukraine*
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Prosp. Peremohy, 37, 03056, Kyiv, Ukraine
[3] *Lviv Polytechnic National University, Bandera Str., 12, 79013, Lviv, Ukraine*
e-mails: o.g.voznyak@gmail.com, ivashyshen.sd@gmail.com, i.p.medynsky@gmail.com

The aim of this paper is to construct the classical fundamental solution of the Cauchy problem (FSCP) for degenerate ultraparabolic equation of Kolmogorov type with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane. In this paper we consider equations with two groups of degeneration. So that in this case the spatial $x \in \mathbb{R}^n$ consist of three groups of variables $x := (x_1, x_2, x_3)$, $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant 1$, $n = n_1 + n_2 + n_3$. We shall say that t and x_1 are basic variables and x_2, x_3 are variables of degeneration. Similarly to the case of non-degenerate parabolic equations it is possible to obtain a complete analytic description of the FSCP, which leads to a very precise results for solutions of the Kolmogorov type equations with constant coefficients or coefficients depending only on time variable. If coefficients of a Kolmogorov type equation depend on all variables, then it is much more complicated to study its FSCP. In additional usual difficulties of the Levi Method, new serious difficulties are caused by degeneracy of the equations. The number of the parameters is equal to the number of the groups of degeneration in the equation. At the next stage of constructing FSCP we choose the above FSCP as the parametrix. The number of stages of the constructing FSCP depend on the quantity of the groups of spatial variables in the equation.
The analysis shows that a solution of the problem of constructing the classical FSCP consists not only in choice of suitable conditions on the coefficients but

also in successful choice of a parametrix for the Levi method. Our approach is based on step-by-step use of the Levi method. On the first stage an FSCP for the equation with coefficients depending on the basic variables and the parameters is constructed. Such an approach is realized in this paper. Its basic results are the following. The classical FSCP for degenerate ultraparabolic equation of Kolmogorov type with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane is constructed. Exact estimations of this solution and its derivatives are obtained.

Key words: parabolic equations with degenerations, fundamental solution of the Cauchy problem, degeneration on the initial hyperplane, Levi method, ultraparabolic equations of the Kolmogorov type.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 128–133
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 128–133
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.128-133

УДК 336.76:519.224.24

ТЕСТУВАННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ПОРТФЕЛІВ З МАКСИМАЛЬНИМ ВІДНОШЕННЯМ ШАРПА ТА З МАКСИМАЛЬНОЮ ОЧІКУВАНОЮ КОРИСНІСТЮ

Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ, Тарас ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, zjabka@yahoo.com

Знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, портфелю з максимальним відношенням Шарпа за умови багатовимірного еліптичного розподілу вектора дохідностей його активів. На його підставі запропоновано метод тестування статистичної еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю.

Ключові слова: багатовимірний еліптичний розподіл, асимптотичний розподіл, вибіркова оцінка, відношення Шарпа, коефіцієнт, який описує ставлення інвестора до ризику.

1. Вступ

Теорія портфеля заснована Марковіцем [1] відіграє важливу роль у фінансовій математиці. Завдяки своїй простоті та результатам, які легко інтерпретувати, вона надзвичайно популярна на практиці. Важливими в теорії портфеля є ефективні портфелі, тобто портфелі для яких неможливо збільшити очікувану дохідність не збільшуючи ризик, та їх об'єднання – ефективна множина [2]. Можна навести декілька методів побудови ефективної множини. Запропонований Марковіцем метод полягає у розв'язуванні задачі максимізації очікуваної дохідності за заданого рівня ризику. Змінюючи рівень ризику від найменшого до $+\infty$ отримаємо ефективну множину. Другий спосіб полягає у максимізації очікуваної корисності при зміні значення коефіцієнта, який описує ставлення інвестора до ризику (надалі, коефіцієнт ризику) від 0 до $+\infty$. Яким би методом не будувалася ефективна множина, ваги та характеристики ефективних портфелів, залежать від параметрів розподілу дохідностей активів. Оскільки на практиці ці параметри невідомі, то усі результати ґрунтуються

2010 Mathematics Subject Classification: 91G10, 62F03, 62F12

на їхніх оцінках, які є випадковими величинами. Отже, випадковими величинами є і ваги та характеристики ефективних портфелів. Статистичні та ймовірнісні властивості характеристик різних портфелів досліджують у багатьох працях. Зокрема в [3] і [4], відповідно, знайдено розподіли ваг та характеристик портфелів з максимальною очікуваною корисністю, тангенсіального та з найменшою дисперсією за припущення нормальної розподіленості дохідностей активів. За цього ж припущення в [5] знайдено точні, а в [6] за слабших припущень на дохідності активів портфеля асимптотичні розподіли характеристик портфелів з найменшим рівнем VaR та CVaR. Окремо серед ефективних портфелів варто відзначити портфель з максимальним відношенням Шарпа. Оскільки відношення Шарпа один з найголовніших показників ефективності управління портфелем, то такий портфель становить інтерес як еталон ефективності управління. Властивості вибіркових оцінок ваг цього портфеля досліджено в [3] та [7] і доведено, що для вибіркових оцінок ваг портфеля не існує математичного сподівання та неможливо для них побудувати незміщену оцінку. З цих результатів випливає відсутність математичного сподівання і для оцінок очікуваної дохідності та дисперсії портфеля, а тому некоректно порівнювати портфелі на підставі цих характеристик. Також доволі важко в цьому випадку інтерпретувати отримані результати.

Знайдено аналітичний вираз для обчислення коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа, досліджено асимптотичні властивості його вибіркової оцінки та побудовано інтервал довіри. На основі цих результатів запропоновано метод тестування статистичної еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю.

2. Означення та формулювання результатів

Нехай P_t ціна активу, $X_t = 100 \ln P_t/P_{t-1}$ його дохідність в момент часу t, $\mathbf{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tk})'$ вектор дохідностей k активів портфеля, $\mathrm{M}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ і $\mathrm{D}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$. Позначимо w_i частку i-го активу в портфелі, а вектор часток $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_k)$ назвемо вектором ваг портфеля або просто портфелем. Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim \mathcal{E}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2, \psi)$, тобто $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний еліптичний розподіл, характеристична функція якого наьуває вигляду

$$\mathrm{M}(\exp(i\mathbf{x}'\mathbf{X}_t)) = \exp(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2, \quad \gamma^2 = -2\psi'(0).$$

Функцію ψ називають характеристичним генератором еліптичного розподілу. До класу багатовимірних еліптичних розподілів належать розподіли, які часто використовують у фінансовій математиці, зокрема, багатовимірні розподіли Стьюдента, Лапласа та нормальний. Детальнішу інформацію стосовно багатовимірних еліптичних розподілів можна знайти у [8]. Якщо $X_{\mathbf{w};t} = \mathbf{w}'\mathbf{X}_t$ дохідність портфеля в момент часу t, то очікувана дохідність $R_{\mathbf{w}}$ та дисперсія $V_{\mathbf{w}}$ портфеля обчислюються за формулами $R_{\mathbf{w}} = \mathrm{M}(X_{\mathbf{w};t}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$ та $V_{\mathbf{w}} = \mathrm{D}(X_{\mathbf{w};t}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Відношення Шарпа $SR_{\mathbf{w}}$ портфеля з вагами $\mathbf{w}$ за відсутності безризикового розміщення коштів визначається як відношення очікуваної дохідності до дисперсії, тобто $SR_{\mathbf{w}} = R_{\mathbf{w}}/V_{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}/\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Ваги портфеля з максимальним відношенням Шарпа $\mathbf{w}_{SR}$ отримують з оптимізаційної задачі $SR_{\mathbf{w}} \to \max$, за умови, що $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$ та дорівнюють [3]

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{1}$$

де $\mathbf{1}$ – k-вимірний вектор, елементами якого є одиниці. Будь-який портфель ефективної множини можна отримати як розв'язок задачі максимізації очікуваної корисності портфеля

$$U_{\mathbf{w}} = R_w - \frac{\beta}{2}V_{\mathbf{w}} \to \max, \quad \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1, \tag{2}$$

за певного значення коефіцієнта ризику β. Оскільки портфель з максимальним відношенням Шарпа належить ефективній множині, то існує таке значення коефіцієнта ризику $\beta = \beta_{SR}$, за якого портфелі з максимальним відношенням Шарпа та максимальною очікуваною корисністю математично еквівалентні. Розв'язок задачі (2) набуває вигляду [3]

$$\mathbf{w}_{EU} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \tag{3}$$

де $\mathbf{R} = \mathbf{\Sigma}^{-1} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$. Перепишемо (1) наступним чином

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{SR} &= \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \\ &+ \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\Big(\frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\Big) = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}.\end{aligned} \tag{4}$$

Прирівнявши (3) і (4), отримаємо

$$\beta_{SR} = \mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}. \tag{5}$$

Оскільки значення коефіцієнта β_{SR} залежить від невідомих параметрів розподілу вектора дохідностей активів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, то використати отриманий результат на практиці неможливо. Для оцінки цих параметрів використовуємо вибірку попередніх значень векторів дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$. Маємо вибіркові оцінки

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\,, \quad \hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})'\,, \tag{6}$$

параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$. Підставивши оцінки (6) у (5), отримаємо вибіркову оцінку параметра β_{SR}, яку позначимо $\hat{\beta}_{SR}$. Вибіркові оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ є випадковими величинами, а тому $\hat{\beta}_{SR}$ теж є випадковою величиною. Для прийняття управлінських рішень необхідно дослідити ймовірнісні властивості $\hat{\beta}_{SR}$.

Теорема 1. *Нехай $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$ незалежні однаково розподілені випадкові k-вимірні вектори та $\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{E}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}/\gamma^2, \psi)$. Тоді*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{SR}), \quad n \to +\infty,$$

де

$$\sigma^2_{SR} = (1 + \lambda\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} + 2\lambda(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2, \tag{7}$$

$\lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2$ *та* $\xrightarrow{d}$ *позначає збіжність за розподілом.*

Доведення. Позначимо $R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ та $V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ відповідно очікувану дохідність і дисперсію портфеля з найменшою дисперсією або, іншими словами, мінімальні значення очікуваної дохідності та ризику для портфелів ефективної множини, $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$ та через $\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s}$ їхні вибіркові оцінки. Ці три введені параметри повністю визначають ефективну множину [4]. Нехай $\mathbf{0}_3$ – 3-вимірний нуль-вектор і

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+\lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s + 2\lambda s^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Оскільки [9]

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_3, \boldsymbol{\Omega}\right), \quad n \to +\infty,$$

та

$$\beta_{SR} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} = R_{GMV}/V_{GMV},$$

то застосовуючи дельта-метод [10, с. 211], отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{g}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{g}), \quad n \to +\infty,$$

де $\mathbf{g} = (\frac{\partial \beta_{SR}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial s})'$. Врахувавши(8) та рівності

$$\frac{\partial \beta_{SR}}{\partial R_{GMV}} = \frac{1}{V_{GMV}}, \ \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial V_{GMV}} = -\frac{R_{GMV}}{V_{GMV}^2}, \ \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial s} = 0,$$

з останнього співвідношення отримаємо твердження теореми 1. □

Зауважимо, що асимптотична дисперсія σ_{SR}^2 (див. (7)) випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR})$ залежить від невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ розподілу $\mathbf{X}_t$. З теореми 1 та теореми 1.14 [11, с. 8] випливає твердження.

Наслідок 1. *Вибіркова оцінка* $\hat{\sigma}_{SR}^2$ *консистентна, тобто*

$$\hat{\sigma}_{SR}^2 \xrightarrow{a.s.} \sigma_{SR}^2, \quad n \to +\infty,$$

де $\xrightarrow{a.s.}$ *позначає збіжність майже напевно.*

Також з теореми 1 випливає, що $(1-\gamma)$-довірчий інтервал для β_{SR} набуває вигляду

$$\left[\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} - \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}, \mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} + \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}\right]. \tag{9}$$

Тут z_γ – γ-квантиль стандартного нормального розподілу.

Наслідок 2. *Усі портфелі з максимальною очікуваною корисністю, для яких значення коефіцієнта ризику належить інтервалу* (9), *статистично еквівалентні портфелю з максимальним відношенням Шарпа.*

3. Висновки

Знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа та побудовано довірчий інтервал для цього коефіцієнта за умови багатовимірного еліптичного розподілу вектора дохідностей його активів. Отриманий результат значно спрощує інтерпретацію результатів отриманих для характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа, оскільки дає можливість замінити його на статистично еквівалентний портфель з максимальною очікуваною корисністю.

Список використаної літератури

1. H. Markowitz, *Portfolio selection*, The Journal of Finance **7** (1952), no. 2, 77–91. DOI: 10.2307/2975974
2. R. C. Merton, *An analytical derivation of the efficient frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis **7** (1972), no. 4, 1851–1872. DOI: 10.2307/2329621
3. Y. Okhrin and W. Schmid, *Distributional properties of optimal portfolio weights*, J. Econom. **134** (2006), no. 1, 235–256. DOI: 10.1016/j.jeconom.2005.06.022
4. R. Kan and D. R. Smith, *The distribution of the sample minimum-variance frontier*, Management Science **54** (2008), no. 7, 1364–1380. DOI: 10.1287/mnsc.1070.0852
5. T. Bodnar, W. Schmid, and T. Zabolotskyy, *Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests*, Stat. Risk. Model. **29** (2012), no. 4, 281–314. DOI: 10.1524/strm.2012.1118
6. T. Bodnar, W. Schmid, and T. Zabolotskyy, *Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data*, Metrica **76** (2013), no. 8, 1105–1134. DOI: 10.1007/s00184-013-0432-1
7. W. Schmid and T. Zabolotskyy, *On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio*, AStA, Adv. Stat. Anal. **92** (2008), no. 1, 29–34. DOI: 10.1007/s10182-008-0054-5
8. Fang, S. Kotz, and K. W. Ng, *Symmetric multivariate and related distributions*, Chapman and Hall, London, 1990, 220 p.
9. T. Bodnar and T. Zabolotskyy, *How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio?* AStA, Adv. Stat. Anal. **101** (2017), 1–28. DOI: 10.1007/s10182-016-0270-3
10. P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time series: theory and methods*, Springer Science+Business Media, New York, 2006, 600p.
11. A. DasGupta, *Asymptotic theory of statistics and probability*, Springer, New York, 2008, 722p.

Стаття: надійшла до редколегії 30.11.2019
доопрацьована 01.02.2020
прийнята до друку 03.02.2020

TESTING OF EQUIVALENCY OF PORTFOLIOS WITH THE MAXIMUM SHARPE RATIO AND THE MAXIMUM EXPECTED UTILITY

Mykola ZABOLOTSKYY, Taras ZABOLOTSKYY

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, zjabka@yahoo.com

In the paper statistical properties of the sample estimator of the risk aversion coefficient of the portfolio with the maximum Sharpe ratio are considered. Because the Sharpe ratio is very popular measure of portfolio management efficiency considered portfolio is often used as a benchmark of management efficiency. From other point of view practical usefulness of this portfolio is questionable. This is due to the fact that mathematical expectations of the sample estimators of its weights, expected return and variance do not exist. Therefore the results obtained based on comparison of characteristics of investor's portfolio with the characteristics of considered portfolio are not reliable. To eliminate this drawback in the paper an analytic expression for the risk aversion coefficient of the portfolio with the maximum Sharpe ratio is presented. Asymptotic distribution of the sample estimator of the investor's risk aversion coefficient of the considered portfolio is found under assumptions that the vector of asset returns follows multivariate elliptical distribution. Based on it a method for testing the statistical equivalence of portfolios with the maximum Sharpe ratio and the maximum expected utility is presented. As a result investor has a possibility to replace portfolio with the maximum Sharpe ratio with a statistically equivalent portfolio with the maximum expected utility for which statistical properties of the sample estimators of weights, expected return and variance are more attractive.

Key words: multivariate elliptical distribution, asymptotic distribution, sample estimator, Sharpe ratio, risk aversion coefficient.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 134–141
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 134–141
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.134-141

УДК 691.328:666.972

ВИЗНАЧЕННЯ РЕСУРСУ ФІБРОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З КУЛЬОВИМИ ПОРОЖНИНАМИ ЗА ДОВГОТРИВАЛОГО РОЗТЯГУ

Орест РАЙТЕР

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАНУ,
вул. Наукова, 79000, 5, м. Львів
e-mail: orest.raiter@gmail.com

Розроблено методику визначення ресурсу фібробетонних елементів конструкцій з кульовими порожнинами за їхнього довготривалого розтягу. В основу цього покладена розроблена раніше автором розрахункова модель для визначення ресурсу будівельних елементів такого типу, де є локальна повзучість фібробетону. На підставі цього, а також відомих у літературі результатів експериментальних досліджень побудови діаграм повзучості фібробетонів проведено розрахунок фібробетонного елемента великого перерізу з кульовим пошкодженням за довготривалого всебічного розтягу.

Ключові слова: ресурс, розрахункова методика, фібробетонний елемент конструкції із сфероїдальною порожниною, діаграма повзучості фібробетону за розтягу.

1. Вступ

Експлуатація відповідальних елементів будівельних конструкцій із фібробетонів потребує створення надійних методів оцінки стану та розрахунку їхньої міцності і довговічності для уникнення непередбаченого руйнування і запобігання можливої катастрофи [1, 2]. Разом з тим не припиняються спроби створити теорії заповільненого руйнування фібробетонів за довготривалого статичного навантаження, коли починає діяти механізм повзучості і сповільнено буде розвиватися пошкодження фібробетону, яке досягне критичного значення й елемент конструкції зруйнується. На підставі раніше розробленої автором розрахункової моделі [3] сформулювано задачі про визначення ресурсу фібробетонних елементів конструкцій великих січень з кульовими дефектами за їхнього розтягу. Розв'язок цієї задачі такий.

2010 Mathematics Subject Classification: 74S15, 65R20, 74K10, 74R10

2. Формулювання задачі та метод її розв'язку

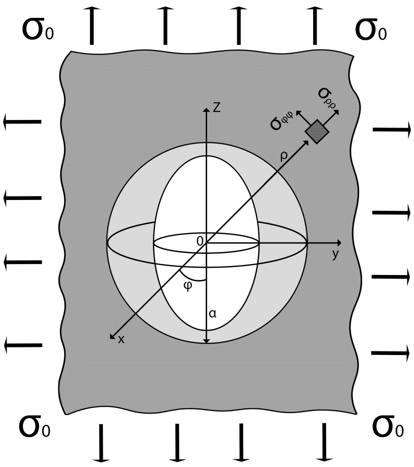

Рис. 1. Схема навантаження тіла з пошкодженням

Розглянемо фібробетонний елемент конструкції великого перерізу з концентратором напружень у вигляді кульової порожнини радіуса ρ_0 за дії довготривалого всебічного статичного розтягу рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності p, прикладеними далеко стосовно концентратора напружень (рис. 1). Задача полягає у визначенні часу $t = t_*$, коли за навантаження p біля кульової порожнини утворилося початкове пошкодження об'ємом q_0, яке в результаті повзучості підросте до критичного розміру q_* і фібробетонний елемент зруйнується. Тут приймаємо, що q — це об'єм матеріалу біля концентратора напружень з підвищеною тріщинуватістю продеформований під час *другої стадії* деформації розтягу [3] в результаті напруження $\sigma > \sigma_b$ (див. далі). Для розв'язку такої задачі насамперед зробимо адаптацію побудованої в [3] математичної моделі, тобто математичні рівняння, які описують цей процес. У цьому випадку будемо вважати, що пошкодження q росте неперервно від початкового розміру $q = q_0$ до кінцевого $q = q_*$. Це припущення коректне, оскільки реально пошкодження росте малими стрибками об'єму розміру Δq_c за досить великі проміжки часу Δt_c. У зв'язку з цим на підставі результатів [3] розв'язок задачі зведеться до такого рівняння з початковими та кінцевими умовами

$$\frac{dq}{dt} = \left[\frac{\partial W_{\text{p}}^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}\right]_{t=\Delta t_c} \Big/ (\gamma_{\text{CC}} - \gamma_t)_{t=0}, \tag{1}$$

$$t = 0,\ q(0) = q_0;\ \ t = t_*,\ \ q(t_*) = q_*.$$

Тут A – робота зовнішніх сил; $W_{\text{p}}^{(2)}(t)$ – частина роботи непружних деформацій у зоні пошкодження q, яка виділяється за постійного його об'єму під час інкубаційного періоду підготовки стрибка його росту на Δq_c, залежить тільки від часу t і генерується самим тілом; γ_{cc} — питома по елементарному об'єму енергія руйнування при рості пошкодження у фібробетоні; γ_t — початкова питома енергія деформування в пошкодженому об'ємі фібробетону за навантаження p, а величина q_* критичного об'єму пошкодження фібробетону визначається з умови досягнення в такому об'ємі нормальною деформацією критичної величини ε_{fbc}, тобто

$$\max(\varepsilon) = \varepsilon_{fbc}. \tag{2}$$

Тут (1) – кінетичне рівняння росту об'єму пошкодження в фібробетонному елементі конструкції за довготривалого статичного навантаження, а також початкові та кінцеві умови росту його об'єму q від початкового q_0 і до критичного q_* значення, коли елемент конструкції зруйнується.

Отож, якщо будуть знайдені функції $W_p^{(2)}$, A, γ_{CC}, γ_t, то визначення залишкового ресурсу $t = t_*$ фібробетонного елемента конструкції задається співвідношеннями (1), (2). Отже, задача звелася до визначення енергетичних складових процесу деформування і руйнування фібробетону, що приводить до визначення реологічних моделей його складових.

3. Визначення ресурсу фібробетонного елемента великого перерізу з кульовим пошкодженням за всебічного розтягу

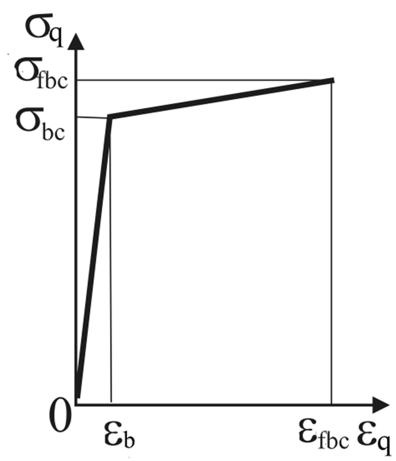

Рис. 2. Схематичне зображення ідеалізованої діаграми розтягу для фібробетону

Розглянемо фібробетонний елемент конструкції великого перерізу з кульовою порожниною. Вважається, що діаметр D великого перерізу елемента конструкції буде втричі більшим діаметра ρ_0 кульової порожнини, тобто $D > 3d_0$. У зв'язку з цим механічною моделлю фібробетонного елемента великого перерізу з кульовою порожниною можна наближено вважати нескінченний простір з аналогічним пошкодженням за всебічного розтягу рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності p. Для розв'язку такої задачі, аналогічно до результатів праці [3], застосуємо сформульовану вище розрахункову модель (1), (2). Надалі для спрощення розв'язку задачі та чіткішої демонстрації застосування запропонованої моделі приймаються такі допущення.

1. Матеріали матриці та фібр – лінійно-пружні, однорідні й ізотропні. Тріщини в бетоні (понад початкових наявних мікротріщин, що є невід'ємним компонентом матеріалу) виникають після досягнення напруженнями величини σ_{bc}.

2. Діаграма розтягу фібробетону приймається кусково лінійною, як на рис. 2. Тут σ_{bc} — значення напружень у фібробетону, коли починається руйнування матриці; ε_b — значення деформацій у цей момент; σ_{fbc}, ε_{fbc} — напруження і деформації у фібробетоні, коли починається течіння фібр напередодні його руйнування, тобто можна сказати, що цим вичерпується роботоздатність фібробетону. Для простоти обчислень ділянку, яка відповідає другій стадії деформування, наближено зображаємо прямолінійним відрізком (рис. 2) між точками (σ_{bc},ε_b) і (σ_{fbc},ε_{fbc}) з модулем пружності E_{fb} [3].

3. Фібри (однакового круглого перетину й однакової довжини) в розглянутому елементі рівно розподілені по всіх напрямах і за обсягом працюють тільки на розтяг.

4. Між фібрами та бетоном існує повне зчеплення, тому деформація фібри дорівнює деформації композиту.

5. Вважається, що навантаження фібробетонного елемента забезпечує умову $\varepsilon_0 > \varepsilon_b$ і буде реалізуватися повна діаграма повзучості до його руйнування (рис. 3). Тут подана діаграма повзучості для фібробетону. Повзучість елементів фібробетону проходить порізно, а сумарно ще більш непередбачувано та сильно залежить від початкового навантаження, зокрема від початкової деформації ε_0, і складності напружено деформованого стану. Для деяких малих значень ε_0 повзучість фібробетону може навіть і не починатися, а для інших може початися і зупинитися не доходячи до руйнування [3]. Тому її експериментально потрібно визначати для кожного складу фібробетону і заданого напруженого стану. Якісно повна діаграма повзучості фібробетону в певній мірі нагадує діаграму для бетону (див. рис 3), з трьома ділянками: неусталена повзучість $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$, усталена повзучість $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$, долом $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_3$. Найбільше часу займає усталена повзучість, яка зазвичай починається за величини деформацій, які відповідають другій стадії деформування фібробетону. Тому часовим проміжком часу $t = t_2 - t_1$ наближено і визначають довговічність фібробетонного елемента за довготривалого статичного навантаження. Як свідчать результати експериментальних досліджень автора праці [2] у якісному відношенні відмінності між кривими повзучості бетону та фібробетону відсутні, якщо не враховувати невеликого прискорення загасання процесу повзучості у разі фібробетону.

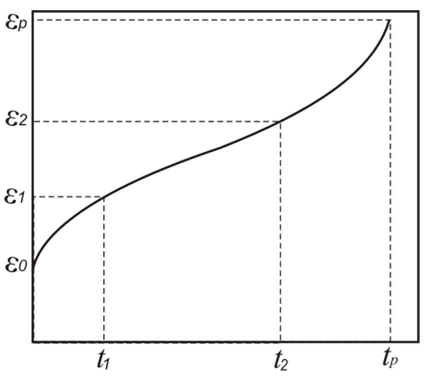

Рис. 3. Схематична діаграма повзучості для фібробетону

Позаяк зовнішні навантаження p прикладені достатньо далеко від кульової порожнини, то їхня робота в процесі повзучості фібробетону біля неї буде змінюватися незначно, тому можна вважати, що

$$\frac{\partial A}{\partial t} \approx 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial q} \approx 0.$$

У зв'язку з цим співвідношення (1), (2) в цьому випадку набудуть такого вигляду:

$$\frac{dq}{dt} = \left[\frac{\partial W_p^{(2)}}{\partial t}\right]_{t=\Delta t_c} \times (\gamma_{\mathrm{CC}} - \gamma_t)^{-1}, \qquad (3)$$

$$t = 0,\ q(0) = q_0;\ t = t_*,\ q(t_*) = q_*.$$

Тут q_0 — вихідний розмір пошкодженого об'єму в результаті початкового навантаження за напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\rho) > \sigma_{bc}$; q_* — критичний розмір пошкодженого об'єму, коли деформація $\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho_0, t_*)$ досягне критичного значення ε_{fbc}. Тут $O\rho\alpha$ — центросиметрична сферична система координат (рис. 1). Тоді на підставі співвідношень (3) для визначення залишкового ресурсу $t = t_*$ нескінченного тіла отримаємо таку формулу:

$$(4)\quad t_* = \int_{q_0}^{q_*} (\gamma_{CC} - \gamma_t)/[\partial W_p^{(2)} \big/ \partial t]_{t=\Delta t_c} dq; t_* = 4\pi \int_{\rho_b}^{\rho_*} (\gamma_{CC} - \gamma_t)/[\partial W_p^{(2)} \big/ \partial t]_{t=\Delta t_c} \rho^2 d\rho.$$

Енергетична складова $W_p^{(2)}$ в згаданій вище системі координат $O\rho\alpha$ буде визначатися так:

$$W_p^{(2)}(\rho,t) = 4\pi \int\limits_{\rho_b}^{\rho} \xi^2\{\sigma_{\rho\rho}(\xi)\varepsilon_{\rho\rho}(\xi,t) + \sigma_{\alpha\alpha}(\xi)\varepsilon_{\alpha\alpha}(\xi,t)\}d\xi. \tag{5}$$

Для визначення величин $\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\rho\rho}, \varepsilon_{\alpha\alpha}$, які входять у співвідношення (5) робимо так. На підставі результатів праці [4] знайдемо, що

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho) = p(1-\rho_0^3\rho^{-3}), \qquad \sigma_{\alpha\alpha}(\rho) = p(1+0,5\rho_0^3\rho^{-3}) \qquad (\rho > \rho_b). \tag{6}$$

Тут при $\rho > \rho_b$ напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\rho) < \sigma_{bc}$. З врахуванням цього радіус $\rho = \rho_b$ знайдемо за такою формулою:

$$\rho_b = \frac{\rho_0}{\sqrt[3]{\sigma_b p^{-1} - 1}}. \tag{7}$$

Отож, пошкоджена зона буде кільцем $\rho_0 < \rho < \rho_b$, в якому напружено-деформований стан відповідатиме реологічній моделі на рис. 2 для зони зміни деформації в межах $\varepsilon_b < \varepsilon < \varepsilon_{fbc}$.

Використовуючи співвідношення (6), (10) і результати праці [5], для визначення величин $\varepsilon_{\rho\rho}, \varepsilon_{\alpha\alpha}$ у пружній зоні при $\rho > \rho_b$ отримаємо такі формули:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho}(\rho) &= pE^{-1}[1-\mu-\rho_0^3\rho^{-3}(1+0,5\mu)], \\ \varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho) &= pE^{-1}[1-\mu+\rho_0^3\rho^{-3}(0,5+\mu)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут μ, E —, відповідно, коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга бетону.

Для області $\rho < \rho_b$, де фібробетон деформований за границею суцільної пружності σ_b формулу (8), для $\varepsilon_{\rho\rho}(\rho)$ можна вважати наближено правильною. Водночас величина $\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho)$ в цій області більша за ε_b та її згідно з рис. 2 і [5] визначатимемо так:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho) = \varepsilon_b + E_{fb}^{-1}[\sigma_{\alpha\alpha}(\rho) - \sigma_b] - \mu E^{-1}p(1-\rho_0^3\rho^{-3}), \tag{9}$$

де модуль пружності E_{fb} пошкодженої зони фібробетону наближено зобразимо формулою

$$E_{fb} = (\sigma_{fbc} - \sigma_b)(\varepsilon_{fbc} - \varepsilon_b)^{-1}. \tag{10}$$

У формулу (9) входить невідома функція розподілу напружень $\sigma_{\alpha\alpha}(\rho)$ у пошкодженій зоні $\rho_0 < \rho < \rho_b$. Для визначення цієї функції необхідно було би розв'язувати відповідну пружно-пластичну задачу, що можливо тільки числово. Проте в нашому випадку потрібна аналітична формула, яку визначатимемо наближено так. Розглянемо окремо пошкоджену кільцеву область $\rho_0 < \rho < \rho_b$, яка згідно зі співвідношеннями (6), (7) навантажена напруженнями $\sigma_{\rho\rho}(\rho_b) = 2p - \sigma_b$ по колу $\rho = \rho_b$. Якби це кільце деформувалося чисто пружно (ділянка O˜ε_b на рис. 2), то згідно з [5] напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\rho)$ визначалося б так:

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\rho) \approx p(1+0,5\rho_0^3\rho^{-3}) \qquad (\rho_0 < \rho < \rho_b). \tag{11}$$

Проте друга ділянка $\varepsilon_b \sim \varepsilon_{fbc}$ на рис. 2 також лінійна, але з меншим значенням модуля пружності E_{fb}, тому для наближеного визначення $\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho)$ скористаємось формулою (9), де подамо $\sigma_{\alpha\alpha}(\rho)$ формулою (11)

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho) \approx \varepsilon_b + E_{fb}^{-1}[p(1+0,5\rho_0^3\rho^{-3}) - \sigma_b] - \mu E^{-1}p(1-\rho_0^3\rho^{-3}) \quad (\rho_b < \rho < \rho_{fbc}). \tag{12}$$

Як випливає зі співвідношень (9), на невеликій відстані від контуру отвору в плиті напруження $\sigma_{\rho\rho}$ будуть малими, тому при визначенні $W_p^{(2)}$ величинами $\sigma_{\rho\rho}(\xi)\varepsilon_{\rho\rho}(\xi)$ і $\sigma_{\rho\rho}(\xi)\varepsilon_{\rho\rho}(\xi,t)$ будемо нехтувати. На підставі цього отримаємо

$$\begin{aligned} &W_p^{(2)}(\rho,t) \approx 4\pi \int_{\rho_b}^{\rho} \xi^2 \sigma_{\alpha\alpha}(\xi)\varepsilon_{\alpha\alpha}(\xi,t)d\xi, \\ &\gamma_{\text{CC}} = \sigma_{fbc}\varepsilon_{fbc}, \\ &\gamma_t = \sigma_{\alpha\alpha}(\rho)\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho,0). \end{aligned} \tag{13}$$

Величину $\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho,t)$ визначаємо наближено на підставі експериментальних даних [2] для відповідного складу фібробетону таким співвідношенням:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho,t) \approx \varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho) + 10^{-5}\beta\sigma_{\alpha\alpha}^{0,84}(\rho)t^{0,5} \ (\beta = 1\cdot(MPa)^{-0,84}(days)^{-0,5}). \tag{14}$$

Варто зауважити, що з допомогою згаданих експериментальних даних [2] знайдені наближено й інші величини, які використовують для обчислення $t = t_*$ залишкового ресурсу плити, зокрема

$$\begin{aligned} E \approx 10^4 MPa \ (\sigma < 23,5MPa);\ E_{fb} \approx 631MPa\,(23,5 < \sigma < 25,2MPa), \\ \mu \approx 0,2, \varepsilon_{fbc} \approx 0,00501, \varepsilon_b = 0,00230, \sigma_b = 23,5MPa, \\ \sigma_{fbc} = 25,2MPa, 15,67 < p < 16,8. \end{aligned} \tag{15}$$

Кінцева мета цього дослідження — це визначення $t = t_*$ ресурсу розглянутої фібробетонного елемента з кульовою порожниною, що і реалізуємо за допомогою формули (4), де функцію $W_p^{(2)}$ обчислюємо на підставі співвідношень (13)–(15). У формулу (4) входить невідома величина Δt_c, яку визначаємо так. Вважається, що на краю пошкодженої зони, що рухається стрибкоподібно в результаті повзучості, величина деформації $\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho,t)$ буде однакова навіть після одного стрибка. На підставі співвідношень (12), (14), (15) і $\Delta t_c = \Delta\rho V^{-1}$ для великих значень Δt_c цю умову можна записати так:

$$\begin{aligned} &E_{fb}^{-1}[p(1+0,5\rho_0^3\rho^{-3}) - \sigma_b] + 10^{-5}\beta\sigma_0^{0,84}(1+0,5a^3\rho^{-3})^{0,84}t^{0,5} = \\ &\quad = E_{fb}^{-1}([p(1+0,5\rho_0^3(\rho+\Delta\rho)^{-3}] - \sigma_b E_{fb}^{-1} \\ &\quad\quad + 10^{-5}\beta\sigma_0^{0,84}[1+0,5a^3(\rho+\Delta\rho)^{-3})^{0,84}(t+\Delta t_c)^{0,5}; \\ &\Delta t_c = \Delta\rho V^{-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Розв'язуючи рівняння (16) відносно Δt_c і нехтуючи малими величинами, отримаємо

$$\Delta t_c \approx 0.8V^{-1}\rho_0^{-3}\rho_b^4(1+0,5\rho_0^3\rho_b^{-3}). \tag{17}$$

Поряд з цим, у формулу (8) входить невідома величина ρ_*, яку будемо визначати так. Критична величина радіусу пошкодженої зони $\rho = \rho_*$ досягається тоді, коли величина деформації на поверхні колового отвору досягне критичного значення $\varepsilon_{\alpha\alpha}(\rho_*, t_*) = \varepsilon_{fbc}$. На підставі цього і використовуючи співвідношення (16), для визначення ρ_* отримаємо наближену формулу

$$\rho_* \approx \rho_0 \sqrt[3]{\frac{E_{fc}(\varepsilon_{fbc} - \varepsilon_b) + \sigma_b}{3\sigma_b - 2[E_{fc}(\varepsilon_{fbc} - \varepsilon_b) + \sigma_b]}} \qquad (18)$$

Підставляючи (11), (15), (18),(19) в співвідношення (17), отримаємо значення $W_p^{(2)}$, яке враховуємо в формулі (8) для визначення $t = t_*$. Разом з тим тут також необхідно підставити формули (18), (19). На підставі цього формула (8) набуде такого вигляду:

$$t_* \approx 1{,}4281 \cdot 10^{10} \cdot p^{-3{,}68}(1 - 0{,}0283p^2 + 0{,}4152p)^2 \text{ днів.} \qquad (19)$$

На підставі цієї формули на рис. 4 побудована залежність $t_* \sim p$ довговічності фібробетонної плити від параметра навантаження p. Як видно з рисунка, невелике збільшення навантаження різко зменшує довговічність плити. Це треба враховувати при прогнозуванні фібробетонних елементів конструкцій.

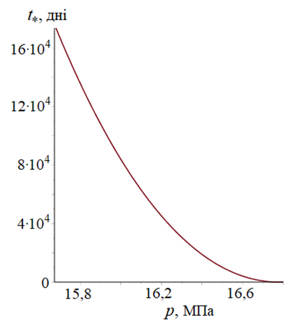

Рис. 4. Залежність довговічності t_* фібробетонного елемента від параметра навантаження p

4. **ВИСНОВКИ**

Розроблена розрахункова модель для визначення довговічності фібробетонних елементів конструкцій з кульовими порожнинами за їхнього довготривалого розтягу. В основу цього покладено сформульований раніше автором енергетичний підхід і ідеалізована діаграма розтягу фібробетону. Застосування цієї моделі продемонстровано на задачі з конкретними експлуатаційними параметрами фібробетону та діаграмою його повзучості. Доведено, що невелике збільшення навантаження різко зменшує довговічність фібробетонного елемента.

Список використаної літератури

1. О. Є. Андрейків, В. Р. Скальський, І. Я. Долінська, О. К. Райтер, *Методи оцінювання міцності і довговічності фібробетонів*, Фіз.-хім. механіка матеріалів (2018), no. 3, 19–36.
2. С. Ф. Нєутов, М. М. Сидорчук, М. Г. Сурьянинов, *Исследование ползучести сталефибробетона*, Міжвузівський зб. "Науковы нотатки" (Луцьк) **60** (2017), 181–186.
3. О. Є. Андрейків, І. Я. Долінська, О. К. Райтер, *Континуальна модель для оцінки залишкової довговічності фібробетонних конструкцій за локальної повзучості*, Фіз.-хім. механіка матеріалів (2020), no. 3, 62–68.
4. А. И. Лурье, *Теория упругости*, Наука, Москва, 1970, 940 с.
5. В. В. Панасюк, О. Є. Андрейкив, В. З. Партон, *Основы механики разрушения*, Наукова думка, Київ, 1988, 488 с.

Стаття: надійшла до редколегії 13.03.2019
доопрацьована 01.05.2019
прийнята до друку 03.02.2020

DETERMINATION OF THE RESOURCE OF FIBER CONCRETE ELEMENTS WITH BALL LONG TERM TENSION CAVES

Orest RAITER

Karpenko Physico-Mechanical Institute of NAS of Ukraine,
Naukova Str., 5, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: orest.raiter@gmail.com

In this paper we investigate the developed method of determining the life of fibro-concrete elements of structures with spherical cavities under their long-term tension. This is based on the calculation model developed earlier by the author to determine the life of building elements of this type, where there is a local creep of fiber concrete using the previously calculated by the author energy approach and idealized tensile diagram of fiber concrete. Based on this, as well as the results of experimental studies of the construction of creep diagrams of fibro-concretes known in the literature, the calculation of a fibro-concrete element of large cross section with spherical damage during long-term comprehensive stretching was performed. The application of this model is demonstrated on problems with specific operational parameters of fiber concrete and its creep diagram. It is shown that a small increase in load dramatically reduces the durability of the fiber concrete element. The tensile behavior after cracking of fiberglass in places of fiber is modeled using the above model, which takes into account the fiberglass fracture properties, the interaction of the fiber in the cracks of concrete and the behavior of the fiber. The model is tested by comparing the calculated total key and local values known in the literature of the results of experimental studies of the construction of creep diagrams of fiber concrete. A wide comparison of numerical and experimental results revealed that the reliable and computational efficiency of the model well captures key aspects of the reaction, such as softening of fibrous concrete tension, tension-curvature effect and favorable effect of fibers in the residual reaction. The results of this study reveal a favorable effect of fiber on the behavior of long-term tensile strength, crack resistance in the area of the ball cavity, and residual stress after cracking for the previously calculated by the author energy approach and idealized tensile diagram of fiber concrete.

Key words: resource, computational technique, fibro-concrete structural element with spheroidal cavity, diagram of creep of fiber-reinforced concrete by tensile.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 142–149
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 142–149
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.142-149

НАУКОВА ТА ПЕДАГОГІЧНА ТВОРЧІСТЬ З. О. МЕЛЬНИКА
(до 85-річчя від дня народження)

Зіновій Остапович Мельник
(1935-1983)

У лютому 2020 року минає 85 років з дня народження відомого вченого, чудового педагога і великого організатора науки Зіновія Остаповича Мельника, який майже тридцять років працював на механіко-математичному факультеті Львівського державного університету ім. І. Франка. У цій статті хочемо згадати основні віхи життя та науково-педагогічної діяльності цієї харизматичної особистості, Людини та Вчителя.

З. О. Мельник народився 10 лютого 1935 року в с. Раденичі Мостиського району Львівської області в сім'ї селян. До 7-го класу навчався в с. Раденичі, а у 8 – 10-их класах – в Мостиській середній школі. У 1951 році вступив до Львівського державного університете імені Івана Франка (далі – Університет) на механіко-математичний факультет, який з відзнакою закінчив у 1956 році. Цього ж року 1 листопада став аспірантом кафедри диференціальних рівнянь. Його науковим керівником був видатний вчений проф. Я.-Ю. Б. Лопатинський, який тоді завідував кафедрою диференціальних рівнянь. Навчаючись в аспірантурі (1956–1959), Зіновій

Остапович почергово працював на півставки асистентом кафедр вищої математики, диференціальних рівнянь, теорії функцій, старшим науковим співробітником кафедри механіки Університету.

З вересня 1959 року основним місцем праці З. О. Мельника була кафедра диференціальних рівнянь, на якій він працював спочатку асистентом, потім – старшим викладачем, а пізніше – доцентом, одночасно працюючи старшим науковим співробітником з госпдоговірної тематики в обчислювальному центрі Університету. Зіновій Остапович читав нормативні та спеціальні курси: "Диференціальні рівняння", "Рівняння математичної фізики", "Інтегральні рівняння", "Операційне числення"„ "Задача Коші для гіперболічних рівнянь", а також курс вищої математики для студентів фізичного факультету.

З. О. Мельник активно займався науковою роботою. Найперше його цікавили мішані задачі для гіперболічних рівнянь і систем. Одним із перших його наукових результатів було обґрунтування можливості застосування методу відображень для дослідження загальних гіперболічних рівнянь другого порядку. Використовуючи метод інтегралів енергії, він довів існування розв'язків мішаних задач для деяких гіперболічних рівнянь і систем вищих порядків. Свої наукові результати доповідав на наукових конференціях, міських математичних семінарах, наукових семінарах кафедри.

Кандидатську дисертацію "Мішані задачі для деяких гіперболічних рівнянь і систем" З. О. Мельник захистив 21 жовтня 1963 року на спеціалізованій вченій раді Університету. Опонентами дисертації були доктор фіз.-мат. наук проф. М. П. Шереметьєв і канд. фіз.-мат. наук І. М. Ковальчик. Зазначимо, що тоді експертиза дисертацій тривала дуже довго, тому диплом кандидата фізико-математичних наук Зіновію Остаповичу видали 29 грудня 1965 року, тобто через 2 роки після захисту дисертації. У лютому 1968 р. З. О. Мельник отримав диплом доцента кафедри диференціальних рівнянь.

У серпня 1966 року З. О. Мельника направили на курси французької мови, а у вересня 1967 року відрядили в республіку Гвінея терміном на два роки для викладацької роботи. У Гвінейському Політехнічному інституті Зіновій Остапович читав французькою мовою лекції та проводив семінари з математичної фізики, теорії груп Лі, топологічних методів у теорії диференціальних рівнянь, програмування, математичного аналізу, диференціальної геометрії, варіаційного числення тощо. На підставі своїх лекцій видав підручник "Методи математичної фізики" обсягом 385 сторінок. Вів науковий семінар, був членом комісії з розробки навчальних планів інституту, керував дипломними проектами студентів, керував кафедрою, виконував обов'язки декана факультету наук.

З 26 вересня 1969 року З. О. Мельник направили до республіки Туніс (Африка). Спочатку він працював в Туніському університеті (жовтень 1969 — вересень 1970), пізніше — в Туніському національному інженерному інституті (вересень 1970 — серпень 1972). У Туніському університеті читав спеціальний курс "Теорія груп Лі та її застосування до диференціальних рівнянь", і курс "Диференціальне числення у векторних нормованих просторах" (також видано курс лекцій і збірники задач). Був членом Вченої ради факультету наук. У Туніському національному інженерному інституті читав "Курс математики" (також видано курс лекцій і збірник. Був членом ради інституту з підготовки планів і програм та контролю за методичною роботою.

З 11 жовтня 1973 року Зіновія Остаповича призначили в. о., а з 31 серпня 1974 року – завідувачем кафедрою оптимальних процесів Університету; 28 вересня 1979 року Зіновій Остапович став завідувачем кафедри диференціальних рівнянь Університету і на цій посаді перебував до останніх днів життя.

Зіновій Остапович читав лекційні курси "Диференціальні рівняння", "Рівняння математичної фізики", "Методи розв'язування крайових задач для гіперболічних рівнянь", "Функціональні методи в теорії оптимізації", "Основи наукових досліджень". Керував курсовими та дипломними роботами студентів, працював над госпдоговірною темою "Варіаційні методи розрахунку деяких відхиляючих магнітних систем".

Поряд з педагогічною роботою З. О. Мельник успішно займався науковими дослідженнями в теорії рівнянь з частинними похідними. Тематику наукових досліджень З. О. Мельника можна визначити з його публікацій. На формування його наукового світогляду значний вплив мали Я.-Ю. Б. Лопатинський та середовище науковців, яке згрупувалось навколо цього видатного вченого, в тім числі О. І. Бобик, Г. С. Гупало, І. І. Данилюк, В. Г. Костенко, В. Е. Лянце, А. І. Марковський, М. Д. Мартиненко, Є. М. Парасюк, Б. Й. Пташник, М. Л. Расулов, В. Я. Скоробогатько, І. В. Скрипник, а пізніше – О. А. Ладиженська, А. Д. Мишкіс, О. А. Олійник та ін.

З. О. Мельник отримав дуже важливі наукові результати, серед яких:

- побудова теорії мішаних задач для гіперболічних рівнянь і систем загального виду з двома незалежними змінними як у випадку гладких, так і негладких вихідних даних;
- доведення існування розв'язків мішаних задач для багатовимірних гіперболічних рівнянь у випадку аналітичних і кусково-аналітичних вихідних даних;
- встановлення умов розв'язності мішаних задач для двовимірних гіперболічних рівнянь з кратними характеристиками.

Зіновій Остапович започаткував на кафедрі диференціальних рівнянь три нові наукові напрями теорії рівнянь з частинними похідними, які активно розвивалися і розвиваються члени кафедри та їхні учі:

- крайові задачі з малим параметром (В. М. Цимбал, В. М. Флюд, В. В. Волошин, П. П. Бабак, О. В. Терещук);
- задачі в областях з невідомими межами або, іншими словами, гіперболічні задачі Стефана (Т. О. Мельник, В. М. Кирилич, Г. І. Берегова, Р. В. Андрусяк, Н. О. Бурдейна);
- задачі з нелокальними (нерозділеними та інтегральними) крайовими умовами (В. М. Кирилич, Г. І. Берегова, Р. В. Андрусяк, О. З. Слюсарчук, М. О. Оліскевич, О. В. Пелюшкевич, Л. Зaремба, Т. О. Дерев'янко).

З 16 червня 1974 року до 21 травня 1980 року З. О. Мельник був деканом механіко-математичного факультету. На цій посаді він, зокрема, сприяв розвитку наукових напрямів на факультеті. З його ініціативи та підтримки заступника декана

Я. Г. Притули кращих студентів старших курсів факультету, серед яких Ю. Д. Головатий, Р. В. Ардан, І. С. Кузь, І. Я. Підстригач, А. С. Юрчишин, було скеровано на навчання до Московського державного університету ім. М. В. Ломоносова, а кращих випускників факультету, серед яких І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, М. М. Бокало, Б. М. Бокало, Т. А. Мельник, Я. М. Холявка, Г. Є. Грабчак, — в аспірантуру цього університету. Більшість з названих підготували та захистили дисертації у Московському державному університеті ім. М. В. Ломоносова, повернулись на факультет і успішно продовжують наукові дослідження з обраної спеціальності: І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, Б. М. Бокало — в топології, М. М. Бокало, Ю. Д. Головатий — в диференціальних рівняннях, Я. М. Холявка — в теорії чисел, І. С. Кузь — у механіці. Вони серйозно підсилили науковий рівень математичних досліджень на нашому факультеті. Також для запровадження і розвитку на механіко-математичному факультеті Університету спеціальності "Теорія ймовірностей та математична статистика", за сприяння З. О. Мельника до інституту математики АН України були скеровані в аспірантуру випускники факультету Я. І. Єлейко, Б. І. Копитко, О. М. Кінаш, Б. І. Каплан, І. Б. Киричинська, М. П. Онисько. Вони досі активно й успішно провадять науково-педагогічну діяльність на факультеті.

Зіновій Остапович безпосередньо займався підготовкою наукових кадрів. Під його керівництвом В. М. Цимбал у 1979 році захистив кандидатську дисертацію, а В. М. Кирилич з грудня 1981 року ставпочав працювати над дисертацією.

З. О. Мельник активно працював над докторською дисертацією з теорії гіперболічних рівнянь (її основні результати він отримав), готував монографію спільно з А. Д. Мишкісом з теорії гіперболічних задач. На жаль, ці плани не судилось втілити. Життя Зіновія Остаповича Мельника трагічно обірвалося на початку 1983 року.

Наукові дослідження З. О. Мельника продовжили його учні В. М. Цимбал і В. М. Кирилич та їхні учні, а також С. П. Лавренюк, який очолив кафедру диференціальних рівнянь.

Зауважимо, що в сім'ї З. О. Мельника, можна так сказати, був культ математики, оскільки його дружина – Тетяна Омелянівна — викладала математичні дисципліни на факультеті, а дочка – Ольга (О. З. Слюсарчук) – закінчила факультет, захистила кандидатську дисертацію та працює на посаді доцента в Національному університеті "Львівська політехніка".

Колегам, учням і студентам Зіновія Остаповича пощастило працювати і спілкуватися з інтелігентною, демократичною, відкритою, чуйною Людиною та Вчителем. Зіновій Остапович Мельник торував дорогу для багатьох, тому їхні перші кроки на цій дорозі були легкими …

Список наукових праць Мельника Зіновія Остаповича

1. Мельник З. О. Змішана задача для деяких рівнянь гіперболічного типу // Зб. робіт аспірантів ЛДУ. – 1960.
2. Мельник З. О. Одне зауваження до методу відображень для гіперболічних рівнянь // Зб. робіт аспірантів ЛДУ. – 1961.
3. Мельник З. О. Про один метод розв'язування змішаної задачі для гіперболічних рівнянь // Ювілейна наук. сесія ЛДУ: тези доп. – Львів, 1961.
4. Мельник З. О. Змішана задача для загальних гіперболічних рівнянь третього і четвертого порядків на площині // ДАН УРСР. – 1963. – № 9.
5. Мельник З. О. Змішана задача для деяких гіперболічних систем // ДАН УРСР. – 1964. – № 3.
6. Мельник З. О. Про одну спеціальну змішану задачу // ДАН УРСР. – 1964. – № 5.
7. Мельник З. О. Про періодичні розв'язки загального гіперболічного рівняння другого порядку на площині // Ювілейна наук. конф. ЛДУ: тези доп. – Львів, 1964.
8. Мельник З. О. Об одной общей смешанной задаче // ДАН СССР. – 1964. – Т. 157, № 5. – С. 1039–1042.
9. Мельник З. О. Общая смешанная задача для общего двумерного гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Первая Респ. научн. конф. молодых исслед: тез. докл. – Киев, 1964.
10. Мельник З. О. Змішана задача для загального гіперболічного рівняння другого порядку на площині // ДАН УРСР. – 1965. – № 4.
11. Мельник З. О. Загальна змішана задача для однієї системи інтегро-диференційних рівнянь // ДАН УРСР. – 1965. – № 6.
12. Мельник З. О., Мышкис А. Д. Смешанная задача для двумерной гиперболической системы первого порядка с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1965. – Т. 68, № 4. – С. 632–638.
13. Мельник З. О. О разрешимости общих смешанных задач в прямом цилиндре для аналитических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 163, № 5. – С. 1065-–1068
14. Мельник З. О. Общая смешанная задача для общего двумерного гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Тр. I-й Респ. научн. конф. молодых исслед. – Киев, 1965. – С. 512–517.
15. Мельник З. О. Про змішану задачу для одного класу гіперболічних систем в прямому циліндрі // Друга Респ. конф. молодих математиків: тези доп. – Київ, 1965.
16. Мельник З. О. Об одном способе решения смешанной задачи для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1966. – № 4. – С. 560–570.
17. Мельник З. О. Общие смешанные задачи для общих гиперболических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 1966. – № 7. – С. 958–966.
18. Мельник З. О. Об одном интегро-дифференциальном уравнении в составной области // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т. 7, № 3. – С. 577–590.

19. Мельник З. О. Про змішану задачу для одного класу гіперболічних систем в прямому циліндрі // Праці II респ. конф. молодих математиків України. – Київ: Наук. думка, 1966.
20. Мельник З. О. О многомерных гиперболических уравнениях любого порядка с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 5. – С. 974-–977.
21. Melnik Z. Méthodes Mathématiques de la Physique (фр.). – Conacry, 1968. (Ротопринт Гвінейського Політехнічного інституту, Конакрі, 1968).
22. Melnik Z. Calcul Différentiel dans les espaces vectoriels (фр.). – Tunis, 1968 (Ротопринт Туніського Університету, Туніс, 1970).
23. Melnik Z. Calcul Différentiel Problémes et exercies (фр.). – Tunis, 1970 (Ротопринт Туніського Університету, Туніс, 1970).
24. Melnik Z. Cours de Mathématiques de CP_2A, t 1 (фр.). – Tunis, 1972 (Ротопринт Туніського Національного Іженерного Інституту, Туніс, 1972).
25. Melnik Z. Cours de Mathématiques de CP_2A, t 2 (фр.). – Tunis, 1972 (Ротопринт Туніського Національного Іженерного Інституту, Туніс, 1972).
26. Melnik Z. de Mathématiques de CP_2A, Problémes et exercices (фр.). – Tunis, 1972 (Ротопринт Туніського Національного Іженерного Інституту, Туніс, 1972).
27. Мельник З. О. Об одном методе решения обратной задачи теории логарифмического потенциала (соавт.) // Изв. АН СССР. Сер. Физика земли. – 1972. – № 11.
28. Мельник З. О. Об гиперболических уравнениях с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 8. – С. 1530–1532.
29. Мельник З. О. Пример неклассической граничной задачи для уравнения колебания струны // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 5. – С. 671–673.
30. Мельник З. О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 6. – С. 1096–1104.
31. Мельник З. О. Граничная задача без начальных условий для гиперболической системы второго порядка // Граничные задачи матем. физики: сб. науч. тр. – Киев: Наукова думка, 1981. – С. 81–82.
32. Кирилич В. М., Мельник З. О. Задача без начальных условий для общего двумерного гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Третий Респ. симпоз. по дифференц. и интегр. уравн.: тез. докл., 1-3 июня 1982 г., Одесса, 1982. – С. 110–111.
33. Кирилич В. М., Мельник З. О. Задача без начальных условий для двумерного гиперболического уравнения произвольного порядка // Успехи мат. наук. – 1982. – Т. 37, № 3. – С. 112.
34. Мельник З. О. Задача с интегральными ограничениями для гиперболического уравнения второго порядка // В кн. "Общая теория граничных задач": сб. науч. тр. – Киев: Наукова думка, 1983. – С. 281–282.
35. Кирилич В. М., Мельник З. О. Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, № 6. – С. 722–727.

Дисертації з теорії гіперболічних рівнянь і систем, виконані на кафедрі диференціальних рівнянь

1. Цимбал В. М. *Деякі крайові задачі для диференціальних рівнянь гіперболічного типу з малим параметром*, Мінськ, 1979 р. (наук. кер. З. О. Мельник);
2. Кирилич В. М. *Нелокальні задачі типу Дарбу для гіперболічних рівнянь і систем з двома незалежними змінними*, Донецьк, 1984 р. (наук. керівники Мельник З. О., Мишкіс А. Д.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Нахушев А. М., к.ф.-м.н., ст.н.сп. Пташник Б. Й.);
   Задачі з вільними межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку, Київ, 2010 р. (наук. консультант Мишкіс А. Д.; опоненти д.ф.-м.н., чл.-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., д.ф.-м.н., проф. Базалій Б. В., д.ф.-м.н., проф. Братусь О. С.);
3. Флюд В. М. *Деякі граничні задачі для сингулярно збурених гіперболічних систем*, Донецьк, 1987 р. (наук. кер. Цимбал В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Васільєва А. Б., к.ф.-м.н., ст.н.сп. Коломієць В. Г.);
4. Волошин В. В. *Деякі задачі для сингулярно збурених гіперболічних систем*, Львів, 1996 р. (наук. кер. Цимбал В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Хома Г. П., к.ф.-м.н., доц. Бомба А. Д.);
5. Кміть І. Я. *Нелокальні задачі для гіперболічних систем першого порядку*, Львів, 1992 р. (наук. кер. Лавренюк С. П.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Романко В. К., д.ф.-м.н., проф. Хома Г. П.);
   Нелокальні крайові задачі для гіперболічних систем рівнянь із сингулярностями, Київ, 2012 р. (наук. консультант чл.-кор. Нан України, д.ф.-м.н., проф. Пташник Б. Й.; опоненти д.ф.-м.н. Кирилич В. М., д.ф.-м.н., пр.н.сп. Ткаченко В. І., д.ф.-м.н., проф. Філімонов А. М.);
6. Бабак П. П. *Задачі для різнокомпонентних систем дифузії та побудова асимптотики за малим параметром*, Львів, 1998 р. (наук. кер. Цимбал В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Хома Г. П., к.ф.-м.н., ст.н.сп. Коломієць В. Г.);
7. Берегова Г. І. *Задачі з невідомими границями для гіперболічних рівнянь та систем з двома незалежними змінними*, Львів, 1998 р. (наук. кер. к.ф.-м.н., доц. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Хома Г. П., к.ф.-м.н., доц. Ільків В. С.);
8. Андрусяк Р. В. *Задача Стефана для одновимірних гіперболічних систем*, Львів, 2006 р. (наук. кер. к.ф.-м.н., доц. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Філімонов А. М., к.ф.-м.н., ст.н.сп. Кміть І. Я.);
9. Прохоренко М. В. *Задачі з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу для систем звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними*, Львів, 2010 р. (наук. кер. к.ф.-м.н., доц. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Євтухов В. М., к.ф.-м.н., доц. Головатий Ю. Д.);
10. Бурдейна Н. О. *Задачі з рухомими межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь*, Львів, 2011 р. (наук. кер. д.ф.-м.н., доц. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Притула М. М., к.ф.-м.н., доц. Буряченко К. О.);
11. Пелюшкевич О. В. *Задачі для вироджених гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними*, Львів, 2013 р. (наук. кер.

д.ф.-м.н., проф. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Король І. І., к.ф.-м.н., доц. Нитребич З. М.);

12. Терещук (Флюд) О. В. *Мішані задачі для сингулярно збурених гіперболічних систем рівнянь першого порядку*, Львів, 2016 р. (наук. кер. д.ф.-м.н., проф. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Ільків В. С., д.ф.-м.н., с.н.сп. Самойленко Ю. І.);
13. Фірман Т. І. *Задачі для зліченних гіперболічних систем рівнянь першого порядку*, Львів, 2017 р. (наук. кер. д.ф.-м.н., проф. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Бігун Я. Й., к.ф.-м.н., с.н.сп. Симотюк М. М.);
14. Дерев'янко Т. О. *Задачі оптимального керування гіперболічними системами*, Львів, 2017 р. (наук. кер. д.ф.-м.н., проф. Кирилич В. М.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Капустян О. В., к.ф.-м.н., доц. Мединський І. П.);
15. Оліскевич М. О. *Стійкість розв'язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь і систем*, Львів, 1998 р. (наук. кер. д.ф.-м.н., проф. Лавренюк С. П.; опоненти д.ф.-м.н., проф. Копитко Б. І., к.ф.-м.н., доц. Клевчук І. І.);
16. Заремба Л. В. *Задачі для гіперболічних систем рівнянь першого порядку*, Краків, 2000 р. (наук. кер. д.ф.-м.н., проф. Лавренюк С. П.);
17. Гузіль Н. І. *Задачі для гіперболічних систем першого порядку та ультрапараболічних систем у необмежених областях*, Львів, 2005 р. (наук. кер. д.ф.-м.н., проф. Лавренюк С. П.).

Микола Бокало, Володимир Кирилич, Тетяна Мельник,
Ярослав Притула, Ольга Слюсарчук

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 150–166
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 150–166
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.150-166

СВІТЛІЙ ПАМ'ЯТІ ПРОФЕСОРА М. І. ІВАНЧОВА

(1943-2019)

Восьмого липня 2019 року на 76 році життя пішов у вічність відомий український математик, професор, доктор фізико-математичних наук, заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка — Микола Іванович Іванчов.

М. І. Іванчов народився 5 грудня 1943 року в м. Іршава Закарпатської області. Його батько — Іван Михайлович — керував обласною адвокатською колегією міста Мукачево, мати – Марія Георгіївна — працювала вчителькою молодших класів у школі. Микола Іванович — друга дитина в сім'ї. Крім нього, в батьків було ще трої синів.

У 1950 році М. І. Іванчов вступив до середньої школи №1 міста Мукачево, яку закінчив в 1960 році із золотою медаллю. В цьому ж році Микола Іванович вступив до Львівського державного університету імені Івана Франка (далі — Університет) на механіко-математичний факультет. За відмінні успіхи у навчанні він отримував підвищену стипендію. Брав активну участь у громадському житті факультету — був старостою групи, членом комітету комсомолу університету, членом університетської баскетбольної команди. У грудні 1965 року Микола Іванович з дипломом з відзнакою закінчив Університет за спеціалізацією "Диференціальні рівняння", зокрема, з оцінкою "відмінно" склав державний іспит з англійської мови, захистив дипломну роботу на тему "Існування періодичних розв'язків деяких рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу". Того ж року він зарахований до заочної аспірантури на кафедрі диференціальних рівнянь Університету.

З травня 1966 року М. І. Іванчова призначили на посаду інженера відділу прикладної кібернетики Львівського відділу Інституту економіки АН УРСР. В кінці 1966 року призвали до армії. Після армії повернувся на попереднє місце роботи на посаду старшого інженера. З березня 1967 року Микола Іванович став аспірантом очної аспірантури механіко-математичного факультету Університету за спеціальністю "Математичний аналіз". Його науковим керівником був доц. В. Г. Костенко. У 1970 році М. І. Іванчов захистив кандидатську дисертацію "Дослідження деяких крайових задач для еліптичних рівнянь у необмежених областях".

З 1969 року Микола Іванович працював на кафедрі диференціальних рівнянь Університету асистентом, а з 1972 року – доцентом.

У 1973 році М. І. Іванчов закінчив курси французької мови у Київському державному університеті ім. Т. Г. Шевченка і у 1973-1976 роках працював в Інституті математики університету м. Константіни (Алжир) на посаді метр-асистента, що відповідало посаді старшого викладача у навчальних закладах СРСР. Читав курс "Диференціальне числення і диференціальні рівняння", брав активну участь у роботі наукового семінару "Застосування топології в теорії рівнянь з частинними похідними" департаменту вищої математики університету м. Константіни.

Після повернення Микола Іванович працював на кафедрі диференціальних рівнянь Університету – з 1977 року на посаді доцента, а з 1999 року – професора та завідувача кафедри. У 1998 році захистив докторську дисертацію "Обернені задачі для лінійних параболічних рівнянь другого порядку". Вчене звання професора отримав у 2002 році, а в 2010 році присудили почесне звання "Заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка".

За період викладання на механіко-математичному факультеті Львівського національного університету імені Івана Франка. М. І. Іванчов читав нормативні та спеціальні курси з диференціальних рівнянь і рівнянь математичної фізики. Його лекції вирізнялися чіткістю, логічною послідовністю, вмінням донести до слухача головні ідеї та принципи навчальних дисциплін.

М. І. Іванчов був головою спеціалізованої вченої ради з захисту докторських дисертацій у рідному Університеті, членом спеціалізованої вченої ради з захисту кандидатських дисертацій в університеті м. Чернівці, брав участь у роботі й очолював оргкомітети міжнародних наукових конференцій. Багато років Микола Іванович присвятив науковому журналу "Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична", відповідальним секретарем якого він був.

М. І. Іванчов активно співпрацював не тільки з провідними вченими України, а й підтримував тісні наукові контакти з вченими Азербайджану, Великобританії, Естонії, Італії та ін.

Професор Іванчов М.І. — автор близько 140 праць, серед яких одна монографія та сім навчальних посібників і підручників. Під його керівництвом захищено 8 кандидатських дисертацій.

Ми глибоко сумуємо з приводу смерті професора Іванчова М. І., відомого вченого, великого педагога, надійного товариша та наставника. Світлу пам'ять про нього збережемо в своїх серцях.

НАУКОВА СПАДЩИНА М. І. ІВАНЧОВА

Науковий шлях Миколи Івановича Іванчова розпочався (див. [1]-[7]) з дослідження квазілінійних еліптичних систем вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\, u^{\ell}_{x_i x_j} + a^{\ell}(x,u,\nabla u) = 0, \quad \ell = 1,\dots,N, \tag{1}$$

де $N \in \mathbb{N}$, $u = (u^1,\dots,u^N)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, ∇u – градієнт u.

Узагальнюючи результати однієї з праць А. П. Осколкова, М. І. Іванчов у науковій статті [2] встановив апріорну оцінку виразу

$$\sum_{\ell=1}^{N} \max_x |x|^{1+\beta} |\nabla u^{\ell}(x)|,$$

де u — класичний розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для системи (1) з певною поведінкою на нескінченності, $\beta > -1$ — деяке число. Існування розв'язків зовнішньої задачі Діріхле для систем типу (1) з певною поведінкою розв'язку на нескінченності доведено у [6].

Наступний етап наукового зростання М. І. Іванчова — дослідження розв'язків нелінійних параболічних рівнянь (див. [8]-[12]). Зокрема, у праці [9] розглянуто подвійно нелінійне рівняння теплопровідності

$$c_v(T)\,\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\Big(\lambda(T)\nabla T\Big), \quad (x,y,z,t) \in \Omega. \tag{2}$$

Тут $\Omega = \{(x,y,z,t) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in (0,h),\ t > 0\}$, $c_v(T)$ — коефіцієнт теплоємності, $\lambda(T)$ — коефіцієнт теплопровідності. Для рівняння (2) вивчається мішана задача і за допомогою функції Гріна та методу малого параметра знаходять чисельні значення температури T.

У праці [13] М. І. Іванчов вивчав задачу спряження двох параболічних систем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \lambda_i\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{2}\Big(a_{ij}\,\frac{\partial u_i}{\partial x} + b_{ij}\,u_j\Big) + f_i, \quad (x,t) \in \Omega_1, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \mu_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{2}\Big(c_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x} + d_{ij}\, u_j\Big) + g_i, \quad (x,t) \in \Omega_1, \quad i = 1,2, \tag{4}$$

де $\Omega_1 = \{(x,t) \mid x > 0,\ 0 < t < T\}$, $\Omega_2 = \{(x,t) \mid x < 0,\ 0 < t < T\}$. Систему доповнено нульовими початковими умовами й умовами спряження при $x = 0$. Використовуючи метод функції Гріна, розглядувану задачу зведено до системи інтегродиференціальних рівнянь, яку розв'язано методом послідовних наближень.

Подальші дослідження М. І. Іванчова головно пов'язані з коефіцієнтними оберненими задачами для рівнянь параболічного типу. Перш ніж розглядати результати цих досліджень наведемо типовий приклад таких задач і схему їх вивчення, яку в здебільшого використовували Микола Іванович та його учні.

Нехай $h > 0$, $T_* > 0$ — довільно задані числа і треба знайти число $T \in (0, T_*]$ і пару функцій $\{a, u\}$, де $a \in C([0,T])$, $u \in C^{2,1}((0,h) \times (0,T]) \cap C^1([0,h] \times [0,T])$, таких, що

$$u_t - a(t)u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in (0,h) \times (0,T], \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{6}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T], \tag{7}$$

$$a(t)\, u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in (0,T], \tag{8}$$

де $f \in C((0,h) \times (0,T_*])$, $\varphi \in C([0,h])$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in C((0,T_*])$ — задані.

Як легко бачити, співвідношення (5) — (7) при відомій функції a задають першу мішану задачу для рівняння теплопровідності, а тому їх називають прямою задачею, тоді як умову (8) — умовою перевизначення, яка використовується для знаходження коефіцієнта при старшій похідній невідомої функції в одновимірному рівнянні теплопровідності. Тому задачу (5) — (8) називають *коефіцієнтною оберненою задачею* або, просто, *оберненою задачею* для параболічного рівняння. Зауважимо, що пряму задачу (5) – (7) і умову перевизначення (8) можна, відповідно, записати у вигляді операторних рівнянь

$$\mathcal{L}_T(a,u) = (f, \varphi, \mu_1, \mu_2)|_T, \tag{9}$$

$$\mathcal{M}_T(a,u) = \mu_3|_T, \tag{10}$$

де символ $|_T$ означає звуження функцій, які стоять зліва від нього і залежать від змінної t, на проміжок $(0,T]$ за цією змінною.

Вважаючи функцію a відомою і використовуючи функцію Гріна першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності, за певних додаткових умов на вихідні дані рівняння (9) можна розв'язати відносно u:

$$u = \mathcal{G}_T(a; f, \varphi, \mu_1, \mu_2). \tag{11}$$

Підставляючи отриманий вираз u (через a і вихідні дані задачі) у рівняння (10), після відповідних перетворень здобуваємо рівняння для знаходження функції a

$$a = \mathcal{P}_T(a; f, \varphi, \mu_1, \mu_2, \mu_3). \tag{12}$$

Далі функцію a трактують як нерухому точку оператора $\mathcal{P}_T(\circ; f, \varphi, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ для заданих $(f, \varphi, \mu_1, \mu_2, \mu_3)|_T$. Для доведення її існування використовують теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього за рахунок вибору $T, f, \varphi, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ встановлюють існування чисел a_1, a_2 таких, що $0 < a_1 < a_2$, і оператор $\mathcal{P}_T(\circ; f, \varphi, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ переводить множину

$$N(T, a_1, a_2) := \{v \in C[0,T] \,|\, a_1 \leqslant v(t) \leqslant a_2 \ \forall t \in [0,T]\}$$

в себе. Далі, використовуючи теорему Арцела-Асколі, доводять, що оператор $\mathcal{P}_T(\circ; f, \varphi, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ цілком неперервний (можливо, за додаткових умов на вихідні дані), і тим самим завершують доведення існування функції a. Тоді за формулою (11) знаходять u і, довівши еквівалентність систем рівнянь (9), (10) та (11), (12), отримують розв'язок вихідної задачі.

Тепер перейдемо безпосередньо до огляду основних результатів М. І. Іванчова та його учнів, що стосуються обернених задач для параболічних рівнянь.

Спершу досліджувались **обернені задачі для рівняння теплопровідності з нелокальними умовами**, типовий приклад яких має вигляд: знайти пару функцій $\{a, u\}$ таку, що

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \tag{13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le h, \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \gamma_{ik}(t)u_k(t) = \varkappa_i(t), \quad 0 \le t \le T, \quad i \in \{1,2,3\}, \tag{15}$$

де

$$u_1(t) := u(0,t), \quad u_2(t) := u(h,t), \quad u_3(t) := u_x(0,t), \quad u_4(t) := u_x(h,t).$$

Умови (15) розпадаються на трійки з двох локальних і однієї нелокальної умови, наприклад, на такі умови:

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \ u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{16}$$

$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)u(h,t) = \mu_3(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{17}$$

Використовуючи функцію Гріна

$$G(x,t,\xi,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\{\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big) + \exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Big\},$$

де

$$\theta(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau,$$

задачі (13), (14), (16), згаданою вище методикою отримують еквівалентне вихідній задачі інтегральне рівняння для знаходження функції a. Результати дослідження задач типу (13)-(15) зібрано у монографії [69].

У працях Миколи Івановича та його учнів І. Б. Березницької, А. Й. Дребота та Ю. П. Макара доведено, що в умову (15) можна включити і нелокальний інтегральний член, тобто можна замінити умову (15) на таку умову:

$$\sum_{k=1}^{5} \gamma_{ik}(t)u_k(t) = \varkappa_i(t), \quad 0 \le t \le T, \quad i \in \{1,2,3\}, \tag{18}$$

де $u_5(t) := \int_0^h u(x,t)\,dx,\ 0 \le t \le T$ (див., наприклад, [38]).

Далі досліджувалися **обернені задачі для загальних параболічних рівнянь**, прикладом яких є задача відшукання пари функцій $\{a, u\}$:

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \tag{19}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{20}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{21}$$

$$a(t)\, u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{22}$$

Припускаючи відомою функцію $a(t) > 0,\ t \in [0,T]$, задачу (19)—(21) зводять до системи рівнянь

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{23}$$

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_\xi(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{24}$$

де G – функція Гріна рівняння теплопровідності з умовами (20), (21). Тоді з умови (22) одержимо

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)}, \quad t \in [0,T]. \tag{25}$$

Отож, обернена задача (19)—(22) звелася до еквівалентної системи рівнянь (23)-(25). Такі задачі, а також обернені задачі для рівняння (19) з нелокальними умовами (15) досліджував М. І. Іванчов, зокрема, з І. Б. Березницькою.

Задачі визначення кількох коефіцієнтів параболічного рівняння розглядалися, зокрема, спільно з Н. В. Пабирівською. У прямокутнику

$$\{(x,t) \mid 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$$

досліджували задачі для рівнянь

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \tag{26}$$

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t), \tag{27}$$

$$u_t = (a_0(t) + a_1(t)x)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \tag{28}$$

з невідомими коефіцієнтами $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$ та $\{a_0,\ a_1\}$, відповідно (див. [52]). Широко використовувалися умови перевизначення типу інтегральних моментів.

Обернені задачі для рівняння

$$c(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \tag{29}$$

з невідомим коефіцієнтом $c = c(t) > 0,\ t \in [0,T]$, вивчалися, зокрема, спільно з О. Гуль та У. Дороговець (Федусь). Було запропоновано метод використання функції Гріна загального параболічного рівняння, яку не можна записати в явному вигляді. Також були розглянуті обернені задачі для квазілінійних рівнянь

$$c(t)u_t = a(x,t,u,u_x)u_{xx} + b(x,t,u,u_x), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T. \tag{30}$$

Наступний етап наукових досліджень М. І. Іванчова — вивчення **обернених задач для вироджених параболічних рівнянь** типу

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \tag{31}$$

з умовами (20)-(22) у випадках *слабкого* ($0 < \beta < 1$) та *сильного* ($\beta \geq 1$) виродження. Якщо рівняння має слабке виродження, то методи його дослідження мало відрізняються від методів дослідження невиродженого рівняння. Проте при $\beta \geq 1$ похідна $u_x(0,t)$ має сингулярність при $t \to +0$ і тому методи дослідження треба було модифікувати. Розв'язанню цих проблем присвячено праці М.І. Іванчова спільно з Н.В. Салдіною та професором з Мілану А. Лоренці (див., наприклад, [74], [78], [79], [82], [89]).

Досліджувалися також і **обернені задачі для багатовимірних параболічних рівнянь**. Е працях Миколи Івановича та Р. В. Сагайдака розглянуто обернену задачу для двовимірного параболічного рівняння

$$u_t = a(t)\Delta u + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u + f(x,y,t), \tag{32}$$

в області $\{(x,y,t) \mid 0 < x < h,\ 0 < y < l,\ 0 < t < T\}$. Задача полягає в знаходженні пари функцій $\{a,\ u\}$, які задовольняють такі умови:

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad 0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq l, \tag{33}$$

$$u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{34}$$

$$u(x,0,t) = \nu_1(x,t), \quad u(x,l,t) = \nu_2(x,t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{35}$$

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \varkappa_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < y_0 < l. \tag{36}$$

Поряд з (32) досліджували також випадок анізотропного рівняння

$$u_t = a_1(t)u_{xx} + a_2(t)u_{yy} + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u + f(x,y,t), \tag{37}$$

$0 < x < h$, $0 < y < l$, $0 < t < T$, з двома невідомими коефіцієнтами a_1 та a_2 (див. [50], [73]). Випадок вироджуваних двовимірних параболічних рівнянь М.І. Іванчов досліджував, зокрема, з В. А. Власовим. Вони вивчали (див. [92], [129], [131], [132], [133], [134]) задачі для рівняння

$$u_t = a(t)t^\beta \Delta u + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u + f(x,y,t), \tag{38}$$

$0 < x < h$, $0 < y < l$, $0 < t < T$, у випадку слабкого та сильного виродження ($0 < \beta < 1$ та $\beta \geq 1$ відповідно).

М. І. Іванчов приділяв також значну увагу **оберненим задачам для параболічних рівнянь в областях з вільними межами**. Разом з І. Є. Баранською, зокрема, досліджував обернену задачу відшукання трійки функцій $\{a,\ h,\ u\}$, які задовольняють такі умови:

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < h(t), \quad 0 < t < T, \tag{39}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h(0)], \tag{40}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{41}$$

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{42}$$

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{43}$$

Заміною змінних $y = x/h(t)$, $t = t$ задачу (39)-(43) зводять до оберненої задачі в області з фіксованими межами

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \; 0<y<1, \; 0<t<T, \tag{44}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0,1], \tag{45}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{46}$$

$$a(t)v_y(0,t) = h(t)\mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{47}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{48}$$

де $v(y,t) := u(yh(t),t)$, яку потім і досліджують.

Схожий підхід застосовано і до оберненої задачі для одновимірних параболічних рівнянь у випадку області з двома вільними межами $h_1(t)$ та $h_1(t)$: $\{(x,t) \mid h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T\}$.

У випадку двовимірних параболічних рівнянь

$$u_t = a(t)\Delta u + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u + f(x,y,t), \tag{49}$$

$$u_t = a_1(t)u_{xx} + a_2(t)u_{yy} + b(x,y,t)u_x + c(x,y,t)u_y + d(x,y,t)u + f(x,y,t) \tag{50}$$

з невідомими коефіцієнтами a, a_1, a_2, відповідно, розглянуто задачі в таких областях з вільними межами: 1) $0 < x < h(t)$, $0 < y < l(t)$, $0 < t < T$; 2) $h_1(t) < x < h_2(t)$, $l_1(t) < y < l_2(t)$, $0 < t < T$ (див., наприклад, [83]).

У працях М. І. Іванчова та Н. М. Гринців вивчалися обернені задачі для вироджених параболічних рівнянь в областях з вільними межами. Зокрема, розглянуто задачу

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad h_1(t) < x < h_2(t), \quad 0 < t < T, \tag{51}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [h_1(0), h_2(0)], \tag{52}$$

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t), \quad u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{53}$$

$$a(t)t^\beta u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T] \tag{54}$$

$$\int_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{55}$$

$$\int_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x,t)dx = \mu_5(t), \quad t \in [0,T], \tag{56}$$

$$h_1(0) = h_{1,0}, \tag{57}$$

де функції $\{a,\ h_1,\ h_2,\ u\}$ є невідомими. Розглянуто випадки слабкого та сильного виродження (див., наприклад, [86], [87], [91]).

Задачі ідентифікації молодших коефіцієнтів параболічних рівнянь в областях з вільними межами досліджували М. І. Іванчов і Г. А. Снітко. Було розглянуто задачі для таких рівнянь:

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \tag{58}$$

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t), \tag{59}$$

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + f(x,t) \tag{60}$$

з вільними межами $h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T$. Як і в працях У. М. Федусь у цих дослідженнях використовувалася функція Гріна для загального параболічного рівняння.

У працях М. І. Іванчова та Т. М. Савіцької виродження стає присутнім вже в рухомій межі (див. [93], [96], [97], [100], [102]). Зокрема, в області $\{(x,t) \mid 0 < x < t^{\beta}h(t),\ 0 < t < T\}$ досліджували обернену задачу для рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{61}$$

з невідомими функціями $\{h,\ a,\ u\}$.

М. І. Іванчов і Н. Є. Кінаш, зокрема, вивчали задачу відшукання трійки функцій $\{a,\ b,\ u\}$

$$u_t = a(y,t)u_{xx} + b(x,t)u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in (0,h) \times (0,l) \times (0,T). \tag{62}$$

Останні роки життя Микола Іванович тісно співпрацював з професором Д. Лесніком і його колегами з університету м. Лідса, Велика Британія. У спільних із закордонними колегами працях подано не лише теоретичні результати, які стосуються наведених вище класів обернених задач для параболічних рівнянь, а й наведені чисельні методи для їхньої реалізації (див. [114]–[116], [118], [122], [137]).

За роки наукової діяльності професор М. І. Іванчов з учнями та колегами дослідили широкий спектр прямих і обернених задач для рівнянь параболічного типу. Результати їхніх досліджень є важливим внеском у розвиток теорії рівнянь з частинними похідними.

Р. В. Андрусяк, М. М. Бокало, О. М. Бугрій, Ю. Д. Головатий, Н. М. Гузик, П. І. Каленюк, В. М. Кирилич, Г. П. Лопушанська, Н. В. Пабирівська.

СПИСОК КАНДИДАТСЬКИХ ДИСЕРТАЦІЙ, ЗАХИЩЕНИХ ПІД КЕРІВНИЦТВОМ М. І. ІВАНЧОВА

1. *Ковальчук Сергій Миколайович.* Обернені задачі для рівнянь і систем параболічного типу. Львів, 1999.
2. *Пабирівська Неля Віталіївна.* Багатопараметричні коефіцієнтні обернені задачі для рівнянь параболічного типу. Львів, 2000.
3. *Симовоник (Березницька) Ірина Борисівна.* Обернені задачі для параболічних рівнянь з нелокальними та інтегральними умовами. Львів, 2004.

4. *Салдіна Наталія Володимирівна.* Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням. Львів, 2007.
5. *Гринців Надія Миколаївна.* Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням в областях з вільними межами. Львів, 2008.
6. *Снітко Галина Анатоліївна.* Коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з вільними межами. Львів, 2009.
7. *Федусь Уляна Михайлівна.* Коефіцієнтні обернені задачі для лінійних та квазілінійних параболічних рівнянь. Львів, 2009.
8. *Баранська Ірина Євстахіївна.* Обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з вільною межею. Львів, 2010.

СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ М. І. ІВАНЧОВА

1. *О внешней задаче Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка.* Материалы Республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям. Одесса, 1968. С. 113-114.
2. *Деякі апріорні оцінки розв'язків квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 4. – 1969. – С. 46-51.
3. *Про існування обмежених розв'язків задачі Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь в необмежених областях.* Матеріали п'ятої наукової конференції молодих математиків України. Київ. – 1970. – С. 118.
4. *Про задачу Діріхле для еліптичних рівнянь в необмежених областях.* Доповіді АН УРСР. – № 8. – 1970. – С. 681-684.
5. *Про задачу Діріхле в необмежених областях.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 6. – 1971. – С. 80-82
6. *О разрешимости задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений в классах функций, имеющих заданное поведение на бесконечности.* Известия ВУЗов. Математика. – № 11. – 1971. – С. 72-77.
7. *Про фундаментальний розв'язок одного рівняння еліптичного типу.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 9. – 1974. – С. 37-40. (Співавтор: Макаренко Л.М.)
8. *К решению краевых задач нелинейной теплопроводности.* Материалы республиканской конференции "Нелинейные проблемы математической физики". Донецк. – 1979. – С. 49 (Співавтори: Костенко В.Г., Губаль Л.Е., Коркуна М.Д.)
9. *Про одну задачу нелінійної теплопровідності.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 18. – 1981. – С. 34-38 (Співавтор: Губаль Л.О.)
10. *Применение метода малого параметра к решению нелинейной задачи теплопроводности с движущимся источником тепла.* Общая теория граничных задач. К.: Наукова думка, 1983. – С. 263-264 (Співавтор: Губаль Л.Е.)
11. *О нагреве полуограниченной пластины движущимся источником тепла.* Материалы третьей республ. конф. "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". – Киев, 1982. – С. 44-45 (Співавтор: Губаль Л.Е.)
12. *Об одной задаче теплопроводности с движущимся источником тепла.* Мат. методы и физ.-мех. поля. – Вып. 17. – 1983. – С. 71-73 (Співавтор: Коркуна М.Д.)
13. *Про спряження двох параболічних систем.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 28. – 1987. – С. 10-14.
14. *Про обернену задачу визначення коефіцієнта температуропровідності.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 30. – 1988. – С. 13-16.

15. *Обратные задачи теплопроводности с интегральным условием переопределения.* Вторая всесоюзная конф. “Новые подходы к решению дифференциальных уравнений”. – М., 1989. – С. 74.
16. *Обратная задача с сопряжением для уравнения теплопроводности.* Всесоюзная конф. “Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики”. – Тернополь, 1989. – С. 165-166.
17. *Деякі обернені задачі теплопровідності з інтегральним перевизначенням.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 34. – 1990. – С. 3-7 (Співавтори: Бадзо М.І., Васильєва Н.В.)
18. *Про одну обернену задачу знаходження коефіцієнтів параболічного рівняння.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 34. – 1990. – С. 7-10 (Співавтор: Лучко І.Я.)
19. *Об обратной задаче определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости.* Третья всесоюзная конф. “Новые подходы к решению дифференциальных уравнений”. –М., 1991. – С. 53.
20. *Обратная задача теплопроводности в двухкомпонентной среде.* Дифференц. уравнения. – Т. 28, № 4. – 1992. – С. 666-672.
21. *Нелокальні крайові умови в обернених задачах теплопровідності.* Матеріали міжнародної конф., присвяченої пам’яті акад. М.П. Кравчука. – Київ, 1992. – С. 77.
22. *Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями.* Укр. мат. журнал. – Т. 45, № 8. – 1993. – С. 1066-1071.
23. *Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости.* Сиб. мат. журнал. – Т. 35, № 3. – 1994. – С. 612-621.
24. *Про обернену задачу знаходження коефіцієнта теплообміну.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Вип. 37. – 1994. – С. 45-50.
25. *Про деякі обернені задачі з нелокальними крайовими умовами.* Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К., 1994. – С. 84.
26. *Про одну обернену задачу для рівняння теплопровідності в багатошаровому середовищі.* Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К., 1994. – С. 84-85 (Співавтор: Ковальчук С.М.)
27. *Про визначення невідомого джерела в рівнянні теплопровідності з нелокальними крайовими умовами.* Укр. мат. журнал. – Т. 47, № 10. – 1995. – С. 1440-1443.
28. *Про одну обернену задачу теплопровідності з нелокальною умовою перевизначення.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 40. – 1994. – С. 12-15.
29. *Inverse problem for parabolic equation with general boundary conditions.* International conference “Nonlinear differential equations”. – Kyiv, 1995. – P. 59.
30. *Про одну обернену задачу для рівняння теплопровідності.* Тези Всеукраїнської наукової конф. “Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях”. – Львів, 1995. – С. 27-28.
31. *Обернені задачі для рівняння теплопровідності в неоднорідному середовищі.* Тези Всеукраїнської наукової конф. “Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування”. – Київ, 1996. – С. 71.
32. *Some inverse problems for parabolic equations.* Тезисы международной конф. “Обратные и некорректно поставленные задачи”. – М., 1996. – С. 83.
33. *Coefficient inverse problems for parabolic equations.* International conference “Nonlinear partial differential equations”. – Donetsk, 1997. – P. 78-79.
34. *Обернена задача визначення потужності джерел тепла для параболічного рівняння при довільних крайових умовах.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Вип. 40, № 1. – 1997. – С. 125-129.

35. *Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами.* Доповіді НАН України. – № 5. – 1997. – С. 15-21.
36. *Про одну обернену задачу для параболічного рівняння.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех. – Вип. 47. – 1997. – С. 63-71.
37. *Inverse problem for finding a major coefficient in a parabolic equation.* Мат. студії. – Т.8, № 2. – 1997. – С. 212-220.
38. *Обернена задача для рівняння теплопровідності з інтегральним перевизначенням.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 48. – 1997. – С. 71-80 (Співавтори: Дребот А.Й., Макар Ю.П., Березницька І.Б.)
39. *Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболичесом уравнении.* Сиб. мат. журн. – Т.39, № 3. – 1998. – С. 539-550. ун-ту
40. *Про обернені задачі для рівняння теплопровідності у складеній області.* Мат. студії. – Т. 9, № 4. – 1998. – С. 53-69 (Співавтор: Ковальчук С.М.) ун-ту
41. *Simultanee determination de deux coefficients aux variables diverses dans une equation parabolique.* Мат. студії. – Т.10, № 2. – 1998. – С. 173-187.
42. *Inverse problem for finding a time-dependent coefficient in a parabolic equation.* Нелінійні граничні задачі. – Вип. 8. – 1998. – P. 121-126.
43. *Об одновременном определении двух коэффициентов в параболическом уравнении.* Тезисы международной конф. "Обратные и некорректно поставленные задачи". – Москва, 1998. – С. 34.
44. *Обернена задача для параболічного рівняння з двома невідомими коефіцієнтами.* Матеріали міжнародної конф. "Сучасні проблеми математики". — Чернівці, 1998. — С. 229–232.
45. *Обратная задача определения двух коэффициентов в параболическом уравнении в случае нелокальных и интегральных условий.* Тезисы межд. конф. "Обратные и некорректно поставленные задачи". – М., 1999. – С. 30 (Співавтор: Пабыривска Н.В.)
46. *Boundary value problems for parabolic equations with integral boundary conditions.* International conf. "Nonlinear partial differential equations". – Lviv, 1999. – P. 87.
47. *Об определении старших коэффициентов в параболических уравнениях.* Тезисы межд. конф. "Обратные и некорректно поставленные задачи". – М., 2000. – С. 29.
48. *Обернена задача одночасного визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні.* Укр. мат. журнал. – Т. 52, № 3. – 2000. – С. 319-325.
49. *Обернена задача для рівняння теплопровідності з невідомим вільним членом.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.- мат. – Вип. 56. – 2000. – С. 94-98.
50. *Обернена задача теплопровідності в анізотропному тілі.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Т. 43, № 1. – 2000. – С. 45-50.
51. *Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболичесом уравнении.* Тези міжнародної конф. "Диференціальні та інтегральні рівняння". – Одеса, 2000. – С. 114 (Співавтор: Пабирівська Н.В.)
52. *Одночасне визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні у випадку нелокальних та інтегральних умов.* Укр. мат. жур. – Т. 53, № 5. – 2001. – С. 589-596 (Співавтор: Пабирівська Н.В.)
53. *Розвиток теорії диференціальних рівнянь у Львівському університеті.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 58. – 2000. – С. 88-96. ун-ту
54. *Inverse problem of heat conduction with free boundary.* International conference "Nonlinear partial differential equations". – Kyiv, 2001. – P. 56.
55. *Обернена задача теплопровідності з вільною межею.* Тези міжнародної конф. "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь". Дрогобич, 2001. – С. 63.

56. *Inverse problem for multidimensional heat equation with an unknown source function.* Мат. студії. – Т. 16, № 1. – 2001. – С. 93-98.
57. *Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении.* Сиб. мат. журн. – Т. 43, № 2. – 2002. – С. 406–413 (Співавтор: Пабирівська Н.В.)
58. *Free boundary problem for two-dimensional diffusion equation.* Book of abstracts of International conf. on functional analysis and its applications. – Lviv, 2002. – P. 90–91.
59. *Free boundary problem for nonlinear diffusion equation.* Book of abstracts of International conference "Ill-posed and inverse problems". – Novosibirsk, 2002. – P. 78.
60. *Редукція задачі з вільною межею для параболічного рівняння до оберненої задачі.* Нелинейные граничные задачи. – Вип. 12. – 2002. – С. 73-83.
61. *Обратная задача теплопроводности со свободной границей.* Обратные задачи и информ. технологии. – Т. 1, № 2. – 2002. – С. 69-81.
62. *Задача з вільною межею для рівняння дифузії у прямокутнику.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Т. 45, № 4. – 2002. – С. 67-75.
63. *Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності.* Укр. мат. журнал. – Т. 55, № 7. – 2003. – С. 901-910.
64. *Free boundary problem for quasilinear heat equation.* Book of abstracts of International conference "Nonlinear partial differential equations". – Donetsk, 2003. – P. 90.
65. *Обернена задача визначення коеіцієнта температуропровідності.* Тези наукової конф. "Математичні проблеми неоднорідних тіл". – Львів, 2003. – С. 201-202.
66. *Determination of the major coefficient in a parabolic equation.* Тези міжнародної конф. "Шості Боголюбовські читання". – Чернівці, 2003. – С. 234.
67. *Free boundary problem for nonlinear diffusion equation.* Мат. студії. – Т. 19, № 2. – 2003. – С. 156-164.
68. *Inverse problems for parabolic equations.* Book of abstracts of Third meeting on inverse and direct problems and applications. – Gargnano, 2003. – P. 14.
69. *Inverse problems for parabolic equations.* – VNTL Publishers. – 2003. – 238 p.
70. *Обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 62. – 2003. — С. 27–37 (Співавтори: Гуль О., Дороховець У.)
71. *Одночасне визначення двох невідомих параметрів у старшому коефіцієнті параболічного рівняння.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 62. – 2003. – С. 48-59 (Співавтор: Пабирівська Н.)
72. *Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями.* Дифф. уравнения. – Т. 40, № 4. – 2004. – С. 547-564.
73. *Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Вип. 47, № 1. – 2004. – С. 7-16 (Співавтор: Сагайдак Р.В.)
74. *Обернена задача з виродженням для рівняння теплопровідності.* Тези Міжнародної конф., присвяченої Г.Хану. – Чернівці, 2004 (Співавтор: Салдіна Н.В.)
75. *Задача з вільною межею для двовимірного рівняння теплопровідності.* Тези Міжнародної конф. ім. В.Я. Скоробогатька. – Дрогобич, 2004. – С. 85.
76. *Задача з вільною межею для напівлінійного рівняння дифузії.* Нелинейные граничные задачи. – Вип. 15. – 2005. – С. 141-148.
77. *Two-dimensional free boundary problem for parabolic equation.* Book of abstracts of International Conf. "Nonlinear Partial Differential Equations". – Donetsk, 2005. – P. 45.
78. *Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням.* Укр. мат. журн. – Т. 57, № 11. – 2005. – С. 1563-1570 (Співавтор: Салдіна Н.В.)

79. *An inverse problem for strongly degenerate heat equation.* J. Inv. Ill-Posed Problems. – Vol. 14, № 4. – 2006. – P. 465-480 (Співавтор: Saldina N.)
80. *Inverse and free boundary problems for parabolic equations.* Book of abstracts of International Conf. dedicated to 100th anniversary of Ya. Lopatynsky. – Lviv, 2006. – P. 103.
81. *Задача дифузії з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу.* Тези Міжнародної конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Чернівці, 2006. – С. 51.
82. *Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням.* Укр. мат. журн. – Т. 58, № 11. – 2006. – С. 1487-1500 (Співавтор: Салдіна Н.В.)
83. *Обернена задача для рівняння теплопровідності в області з вільними межами.* Укр. мат. вісн. – Т. 4, № 4. – 2007. – С. 457-484 (Співавтор: Баранська І.)
84. *Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Т. 50, № 3. – 2007. – С. 82-87.
85. *Inverse and free boundary problems for the strongly degenerate parabolic equation.* Book of abstracts of "Direct, Inverse and Control Problems for PDE's". – Rome, 2007. – P. 7-8.
86. *Обернена задача для сильно виродженого рівняння теплопровідності в області з вільною межею.* Тези доповідей Міжнародної математичної конференції ім. В.Я. Скоробогатька. – Дрогобич, 2007. – С. 79 (Співавтор: Гринців Н.М.)
87. *Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням в області з вільною межею.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Т. 51, № 4. – 2008. – С. 27-36 (Співавтор: Гринців Н.М.)
88. *Inverse problem for semilinear parabolic equation.* Математичні студії. – Т. 29, № 2. – 2008. – С. 181-191.
89. *Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space.* J. Inv.-Ill-Posed Problems. – Vol. 16, № 4. – 2008. – P. 397-415 (Співавтори: Lorenzi A., Saldina N.)
90. *An inverse problem for the heat equation in a degenerate free boundary domain.* Book of abstracts of the Conference "Direct, Inverse and Control Problems for PDE's". – Cortona, 2008. – P. 11-12.
91. *Обернена задача для сильно виродженого рівняння теплопровідності в області з вільною межею.* Укр. мат. журн. — Т. 61, № 1. — 2009. — С. 28–43 (Співавтор: Гринців Н.М.)
92. *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням.* Вісник Львів ун-ту. Сер. мех.-мат. — Вип. 70. — 2009. — С. 91–102 (Співавтор: Власов В.)
93. *An inverse problem for a partial differential equation of parabolic type in a degenerate free boundary domain.* Book of abstracts of Int. Conference "Nonlinear Partial Differential Equations". – Donetsk 2010. – P. 27 (Співавтор: Savitska T.M.)
94. *Обернені задачі та задачі з вільними межами для параболічних рівнянь.* Book of abstracts of Third International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and applications Dedicated to Yaroslav Lopatynsky. – Donetsk, 2010. — С. 58–59.
95. *Обернена задача для одновимірного параболічного рівняння загального вигляду.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 72. – 2010. – С. 149-157.
96. *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу.* Тези доповідей Міжнародної математичної конф. ім. В.Я.Скоробагатька, – Дрогобич, 2011. – С. 82 (Співавтор: Савіцька Т.)

97. *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу.* Укр. мат. вісник. – Т. 8, № 3. – 2011. – С. 356-378 (Співавтор: Савіцька Т.М.)
98. *Задача з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння.* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Т. 54, № 1. – 2011. – С. 27-35.
99. *Обернені задачі та задачі з вільними межами для параболічних рівнянь.* Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Серія: математика. – Т. 1, № 1-2. – 2011. – С. 57-63.
100. *Визначення залежних від часу коефіцієнтів параболічного рівняння в області з вільною межею.* Нелинейные граничные задачи. – Т. 20. – 2011. – С. 28-44 (Співавтор: Снітко Г.А.)
101. *A problem with free boundary for the two-dimensional parabolic equation.* J. Math. Sciences. – Vol. 171, Is. 1. – 2011. – P. 17-28.
102. *An inverse problem for a parabolic equation in a free-boundary domain degenerating at the initial time moment.* J. Math. Sciences. – Vol. 181, Is. 1. – 2012. – P. 47-64 (Співавтор: Savitska T.)
103. *A non-local inverse problem for the diffusion equation.* Abstracts of reports of International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. – Lviv, 2012. – P. 198.
104. *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею.* Тези доповідей Міжнародної конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Ужгород, 2012.
105. *Про нелокальну обернену задачу для рівняння дифузії.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 77. – 2012. – С. 103-108.
106. *Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions.* J. Applied Math. and Computing. — Vol. 41, № 1-2. — 2013. — P. 301–320 (Співавтори: Lesnic D., Yousefi S.A.)
107. *Обернена задача для двовимірного рівняння дифузії в області з вільною межею.* Укр. мат. журн. – Т. 65, № 7. – 2013. – С. 918-928 (Співавтор: Пабирівська Н.В.)
108. *An inverse problem for the two-dimensional diffusion equation in a free boundary domain.* Book of abstracts of International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations". – Donetsk, 2013. – P. 27 (Співавтор: Pabyrivska N.V.)
109. *Free boundary determination in nonlinear diffusion.* East Asian Journal on Applied Mathematics. – Vol. 3, № 4. – 2013. – P. 295-310 (Співавтори: Hussein M.S., Lesnic D.)
110. *Нелокальна обернена задача для рівняння дифузії в області з вільною межею.* Буковинський мат. журн. – Т. 1, № 3-4. – 2013. – С. 49-55 (Співавтор: Снітко Г.А.)
111. *Determination of a source in the heat equation from integral observations.* J. Computational and Applied Math. — Vol. 264. — 2014. — P. 82–98 (Співавтори: Hao D.N., Tranh P.X., Lesnic D.)
112. *Simultaneous determinaion of time-dependent coefficients in the heat equation.* Computers and Mathematics with Applications. — Vol. 67. — 2014. — P. 1065–1091 (Співавтори: Hussein M.S., Lesnic D.)
113. *Нелокальні обернені задачі для параболічних рівнянь.* Тези доповідей IV Міжнародної конференції, присвяченої 135 річниці Ганса Гана. – Чернівці, 2014. – С. 59–60.
114. *Determination of the time-dependent perfusion coefficient in the bio-heat equation.* Applied Mathematics Letters. – Vol. 39. – 2015. – P. 96-100 (Співавтор: Lesnic D.)
115. *An inverse problem for a 2D parabolic equation.* Abstracts of International V. Skorobahatko Mathematical Conference. – Drohobych, 2015. – P. 64 (Співавтор: Lesnic D.)

116. *Multiple time-dependent coefficient identification thermal problems with a free boundary.* Applied Numerical Mathematics. – Vol. 99. – 2016. – P. 24-50 (Співавтори: Hussein M.S., Lesnic D., Snitko H.A.)
117. *Обернена задача для рівняння теплопровідності в прямокутній області.* Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Ужгород, 2016. – С. 71 (Співавтор: Кінаш Н.Є.)
118. *Retrieving the time-dependent thermal conductivity of an orthotropic rectangular conductor.* Applicable Analysis. – Vol. 96. – 2017. – P. 2604-2618 (Співавтори: Hussein M.S., Kinash N., Lesnic D.)
119. *Inverse problems for parabolic equations in 2D domains.* Book of abstracts of International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky. – Lviv, 2016. – P. 73.
120. *Обернена задача теплопровідності в області з вільною межею з виродженням.* Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування". – Чернівці, 2016. – С. 21 (Співавтор: Балик К.)
121. *Обернена задача теплопровідності в області з вільною межею з виродженням.* Буковинський мат. журн. – Т. 4, № 3-4. – 2016. – С. 15-21 (Співавтор: Балик К.)
122. *Identification of a heterogeneous orthotropic conductivity in a rectangular domain.* International Journal of Novel Ideas: Mathematics. – Vol. 1. – 2017. – P. 1-11. (Співавтор: Hussein M.S., Lesnic D.)
123. *An inverse problem for a strongly degenerate heat equation in a rectangular domain.* Book of abstracts of International Conference on Theoretical and Applied Problems of Mathematics. – Sumgayit, 2017. – P. 16.
124. *Inverse problem for 2D heat equation.* Proceedings of the Fourth Conf. of Math. Society of the Republic of Moldova. – Chisinau, 2017. – P. 293-296 (Співавтор: Kinash N.)
125. *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності з невідомими коефіцієнтами, залежними від часової та просторових змінних.* Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь. Збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Б.Й.Пташника. – Львів, 2017. – С. 54-67 (Співавтор: Кінаш Н.)
126. *Обернена задача для рівняння теплопровідності у прямокутній області.* Укр. мат. журн. – Т. 69, № 12. – 2017. – С. 1605-1614 (Співавтор: Кінаш Н.Є.)
127. *Inverse problem for the heat-conduction problem in a rectangular domain.* Ukrainian Mathematical J. – Vol. 69, № 12. – 2018. – P. 1865-1876 (Співавтор: Kinash N.)
128. *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності з двома невідомими коефіцієнтами.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Вип. 84. – 2018. – С. 114-120.
129. *Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation.* Electron. J. Differential Equations. – Vol. 2018, № 77. – P. 1-17 (Співавтор: Vlasov V.)
130. *Inverse problem for the heat equation in a rectangular domain.* Abstracts of Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference. – Baku, 2018. – P. 114-116 (Співавтор: Kinash N.)
131. *Inverse problem for a 2D strongly degenerate heat equation.* Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. Матеріали міжн. наук. конф., присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича – С. 26 (Співавтор: Vlasov V.)
132. *Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation.* Book of abstracts of CAIM-2018. – Chisinau, 2018. – P. 18 (Співавтор: Vlasov V.)
133. *Єдиність розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з сильним виродженням.* Вісник Львів. університету. Сер. мех.-мат. – Вип. 85. – 2018. – С. 120-131 (Співавтор: Власов В.)

134. *Inverse problem for strongly degenerate heat equation.* Abstracts of 24th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis. – Tallinn, 2019. – P. 29 (Співавтор: Vlasov V.)
135. *Inverse problem for a 2D degenerate heat equation.* Abstracts of International Conference "Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE-2019)". – Chisinau, 2019. – P. 36-37.
136. *Competitive Adsorption and Diffusion of Gases in a Microporous Solid.* In the book "Zeolites – New Challenges". IntecOpen London, UK. – 2019. – P. 1-23. (Співавтори: Petryk M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J.)
137. *Reconstruction of an orthotropic thermal conductivity from non-local heat flux measurements.* International Journal of Math. Modelling and Numerical Optimisation. – Vol. 10, № 1. – 2020. – P. 102-122 (Співавтори: Huntul M.J., Hussein M.S., Lesnic D., Kinash N.)

СПИСОК НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИХ ПРАЦЬ М. І. ІВАНЧОВА

1. *Індивідуальні завдання з курсу рівнянь математичної фізики та методика їх виконання.* Вид-во Львів. ун-ту., 1978: 27 с. (Співавтори: Костенко В.Г., Мельник З.О., Лопушанська Г.П.)
2. *Методичні вказівки до лабораторного практикуму з рівнянь математичної фізики.* Вид-во Львів. ун-ту., 1987: 15 с. (Співавтори: Бугрій М.І., Кирилич В.М.)
3. *Робоча програма з курсу рівнянь математичної фізики для студентів математичного факультету.* Вид-во Львів. ун-ту., 1987: 8 с.
4. *Методичні вказівки до контрольних робіт з рівнянь математичної фізики.* Вид-во Львів. ун-ту., 1987: 40 с.
5. *Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами.* Київ: ІСДО, 1995: 84 с.
6. *Вступ до теорії рівнянь у частинних похідних.* Текст лекцій Львів: Тріада плюс, 2004: 178 с.
7. *Збірник задач з рівнянь у частинних похідних.* Вид-во Львів. ун-ту., 2011: 240 с. (Співавтори: Гринців Н.М., Пабирівська Н.В.)

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 167
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 167
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.167

ШОТЛАНДСЬКА КРИГА: МИНУЛЕ, СЬОГОДЕННЯ, МАЙБУТНЄ

Дев'ятнадцятого листопада 2019 року о 15 годині в ауд. імені Стефана Банаха (ауд. 377) головного корпусу Львівського національного університету імені Івана Франка відбулися науково популярні лекції присвячені легендарній Шотландській книзі.

1. **Вступне слово та анонс лекцій.**
2. **"Львівська математична школа та Шотландська книга"**
   Ярослав Притула, доцент кафедри математичного та функціонального аналізу.
3. **"Задачі з Шотландської книги та математики, що їх роз'вязали"**
   Михайло Зарічний, професор кафедри геометрії і топології.
4. **"Нова Львівська Шотландська книга та її вплив на сучасну математику"**
   Тарас Банах, завідувач кафедри геометрії і топології.

Олег Гутік

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

електронний варіант статті та резюме на веб-сторінку

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 20 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)" (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2020**.

Номери формул ставити з правого боку та нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).
2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.
3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.
4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.

6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248

8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.

9. V. Bovdi, *Free subgroups in group rings*, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.

10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.

11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.