ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 89

2020

V I S N Y K	В І С Н И К
OF THE LVIV	ЛЬВІВСЬКОГО
UNIVERSITY	УНІВЕРСИТЕТУ
Series Mechanics and Mathematics	**Серія механіко-математична**
Issue 89	**Випуск 89**
Scientific journal	Збірник наукових праць
Published 1-2 issues per year	Виходить 1-2 рази на рік
Published since 1965	Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv	Львівський національний університет імені Івана Франка

2020

ЗАСНОВНИК: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка Протокол №7/3 від 31.03.2020 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №1188 від 24.09.2020 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-42-18

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Комп'ютерний набір і верстка О. ГУТІК

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ, ВИДАВЦЯ І ВИГОТОВЛЮВАЧА:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
СВІДОЦТВО про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 10.2
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 5–10
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 5–10
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.005-010

УДК 510.3

BRENDLE'S PROOF OF THE CONSISTENCY OF $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, WITHOUT RANKS, GAMES, AND COHEN REALS

Lyubomyr ZDOMSKYY

Institute of Mathematics, Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic
University of Vienna, Währinger Straße 25, A-1090 Wien, Austria
e-mails: lzdomsky@gmail.com

We present a simplified version of the proof of one of the main results of [3].

Key words: Mad family, filter, Mathias forcing.

1. Introduction

Our goal is to give a proof of the following result. We remind the reader of the definitions of notions involved in it at the beginning of the next section.

Theorem 1 (Brendle 98)**.** (GCH) *Let κ be an uncountable regular cardinal. Then there exists a ccc poset $\mathbb{P}$ which forces $\mathfrak{b} = \kappa < \mathfrak{a} = \kappa^+ = \mathfrak{c}$.*

We will follow the same strategy as in [3], the main technical ingredient thereof being simplified. More precisely, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\kappa^+}$ comes from a finite support iteration $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ of ccc posets. The poset $\mathbb{Q}_0$ forces $\mathfrak{b} = \kappa = 2^\omega$ (e.g., one can take as $\mathbb{Q}_0$ the poset adding κ-many Hechler reals over V). Fix a dominating family $B = \{b_\xi : \xi < \kappa\} \subset \omega^{\uparrow\omega} \cap V^{\mathbb{Q}_0}$ such that $b_\xi \leqslant^* b_\eta$ for all $\xi < \eta$. If α has cofinality $< \kappa$, then $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ is a name for a *partial* Hechler forcing producing a $\leqslant^*$-bound for certain $X_\alpha \subset \omega^{\uparrow\omega} \cap V^{\mathbb{P}_\alpha}$ of size $|X_\alpha| < \kappa$, supplied by a bookkeeping function fixed in advance. The purpose of these $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$'s is to make sure that $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \kappa$ holds in $V^{\mathbb{P}_\gamma}$ for any γ of cofinality κ. Moreover, since the partial Hechler posets $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ have size $< \kappa$, they preserve the unboundedness of B (it is well-known and easy to check that no poset of size $< \kappa$ can force B to be bounded), provided that $\mathbb{P}_\alpha$ did so, and the latter will be arranged with the help of Propositions 2 and 1 below. At stage γ of cofinality κ our bookkeeping function gives us a ($\mathbb{P}_\gamma$-name for an) almost disjoint family $\mathcal{A}_\gamma$. The poset $\dot{\mathbb{Q}}_\gamma$ forces $\mathcal{A}_\gamma$ to be non-maximal and preserves the unboundedness of B.

2020 Mathematics Subject Classification: 03E17, 03E40, 03E05

In order to prove Theorem 1 it is enough to accomplish the natural scenario discussed above. Propositions 2 and 1 along with a standard bookkeeping allow us to do this.

Proposition 2 is analogous to [3, 3.1. Theorem]. However, unlike in the proof of the latter result, in our proof of Proposition 2 we use neither auxiliary Cohen reals, nor tricky arguments involving ranks, which hopefully makes our proof somewhat more straightforward.

The proof given in [3] has inspired yet another construction of a model of $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, see [6]. Their proof is rather different from the one we present in this note: They use countably closed non-ccc iterands which "forces" them to use countable supports and hence gives $\mathfrak{c} = \omega_2$, as well as they use some variants of games on filters considered in [8, 9].

There have been more attempts to simplify or to modify Brendle's proof from [3], see, e.g., [4]. Also, O. Guzmán has informed us in private communication that he knows how to eliminate Cohen reals. Moreover, Guzmán and Kalajdzievski have recently proved in [7] the consistency of $\omega_1 = \mathfrak{u} < \mathfrak{a} = \omega_2$. This yields $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ since $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{u}$ in ZFC and their posets do not add Cohen reals as these destroy ground model basis of ultrafilters. Nonetheless we believe that our approach might be still of some interest.

We thank the anonymous referee for careful reading and making very helpful comments.

2. Proofs

As usually, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ denotes the set of natural numbers and $\omega^{\uparrow\omega}$ stands for non-decreasing elements of ω^ω. A family $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ is called *almost disjoint* if $A_0 \cap A_1$ is finite for any distinct $A_0, A_1 \in \mathcal{A}$. An infinite almost disjoint family $\mathcal{A}$ is called a *mad family* if $\mathcal{A} \cup \{X\}$ fails to be almost disjoint for any $X \in [\omega]^\omega \setminus \mathcal{A}$. The minimal cardinality of a mad family is denoted by $\mathfrak{a}$.

For $x, y \in \omega^\omega$ notation $x \leqslant^* y$ means that the set $\{n \in \omega : x(n) > y(n)\}$ is finite. $\mathfrak{b}$ denotes the minimal cardinality of $B \subset \omega^\omega$ which is unbounded with respect to $\leqslant^*$. It is known that $\omega_1 \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, see [2, 10] for the information about $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, and other combinatorial cardinal characteristics of the reals.

In what follows D denotes an unbounded subset of $\omega^{\uparrow\omega}$ which is σ-directed, i.e., for every $D_0 \in [D]^\omega$ there exists $g \in D$ such that $d \leqslant^* g$ for all $d \in D_0$. For instance, the dominating set B of Hechler generic reals mentioned above is like this.

The following fact follows from [1, Lemma 6.5.7].

Proposition 1. *Let δ be a limit ordinal and $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ be a finite support iteration of ccc posets such that $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$"$D$ is unbounded" for all $\alpha < \delta$. Then $\Vdash_{\mathbb{P}_\delta}$"$D$ is unbounded".*

A subset $\mathcal{F}$ of $[\omega]^\omega$ is called a *filter* if $\mathcal{F}$ contains all co-finite sets, is closed under finite intersections of its elements, and under taking supersets. Every filter $\mathcal{F}$ gives rise to a natural forcing notion $\mathbb{M}_\mathcal{F}$ introducing a generic subset $X \in [\omega]^\omega$ such that $X \subset^* F$ for all $F \in \mathcal{F}$ as follows: $\mathbb{M}_\mathcal{F}$ consists of pairs $\langle s, F \rangle$ such that $s \in [\omega]^{<\omega}$, $F \in \mathcal{F}$, and $\max s < \min F$. A condition $\langle s, F \rangle$ is stronger than $\langle t, G \rangle$ if $F \subset G$, s is an end-extension of t, and $s \setminus t \subset G$. $\mathbb{M}_\mathcal{F}$ is usually called *Mathias forcing associated with $\mathcal{F}$*.

Every almost disjoint family $\mathcal{A}$ generates a filter

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \left\{ F \subset \omega \colon \exists \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega} \left(\omega \setminus \bigcup \mathcal{B} \subset^* F \right) \right\}.$$

It is clear that any forcing producing an infinite pseudointersection of $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ (or any other bigger filter) ruins the maximality of $\mathcal{A}$.

The next proposition yields the poset used at stages of iteration with cofinality κ.

Proposition 2. *($\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \kappa$.) Let $\mathcal{A}$ be an almost disjoint family. Then there exists a filter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}(\mathcal{A})$ such that $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ preserves D unbounded.*

We shall need several auxiliary results. First of all, we shall assume in the sequel that $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ is not contained in any filter $\mathcal{U}$ which is a union of $< \kappa$ many compacts, as otherwise $\mathcal{U}$ is as required: Any union of $< \mathfrak{b}$ many compacts has all of its continuous images under maps into $\omega^{\uparrow\omega}$ bounded, and $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ preserves all ground model unbounded sets for any filters like that, see [5, Theorem 1.4].

For $\mathcal{X} \subset [\omega]^{\omega}$ and $Z \subset \omega$ we denote by $\mathcal{X} \upharpoonright Z$ the family $\{X \cap Z : X \in \mathcal{X}\}$. Also, $\mathcal{X}^+$ standardly stands for $\{Y \subset \omega : \forall X \in \mathcal{X}\ (|X \cap Y| = \omega)\}$.

Lemma 1. *$\mathcal{A} \cap \mathcal{U}^+$ is infinite for every filter $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}(\mathcal{A})^+$ which is a union of $< \kappa$ many compacts.*

Proof. Suppose on the contrary that $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \mathcal{U}^+$ is finite and set $F = \omega \setminus \cup\mathcal{A}' \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$. Then $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \upharpoonright F \subset \mathcal{U} \upharpoonright F$. Indeed, $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \upharpoonright F$ is the filter on F generated by $\{(\omega \setminus A) \cap F : A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'\}$ and $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$ for every $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Thus $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ is contained in a filter on ω which is a union of $< \kappa$ many compacts (namely $\{X : \exists U \in \mathcal{U}(F \cap U \subset^* X)\}$), which contradicts our assumption on $\mathcal{A}$. $\square$

In what follows the family of filters $\mathcal{U}$ on ω which are unions of $< \kappa$ many compacts will be denoted by $\mathcal{C}_\kappa$. Let us denote by $\mathcal{E}$ the family of all subsets E of $\textsc{fin} := [\omega]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$ such that for every $n \in \omega$ there exists $e \in E$ with $\min e > n$. For any $A \subset \textsc{fin}$ we denote by $\mathcal{K}(A)$ the family $\{X \subset \omega : X \cap a \neq \varnothing$ for all $a \in A\}$. It is clear that $\mathcal{K}(A)$ is compact for all A as above, and $\mathcal{K}(E) \subset [\omega]^{\omega}$ if $E \in \mathcal{E}$. We shall call $E \in \mathcal{E}$ *centered* if so is $\mathcal{K}(E)$, where a family $\mathcal{X} \subset [\omega]^{\omega}$ is called centered if $\cap\mathcal{X}' \in [\omega]^{\omega}$ for all $\mathcal{X}' \in [\mathcal{X}]^{<\omega}$.

For a filter $\mathcal{F}$ on ω we denote by $\mathcal{F}^{<\omega}$ the filter on $\textsc{fin}$ generated by $\{\mathcal{P}(F) \cap \textsc{fin} : F \in \mathcal{F}\}$ as a base. Note that this notation is unusual since $\mathcal{F}^{<\omega}$ "should" denote the family of all finite sequences of elements of $\mathcal{F}$, which is not the object we have defined in the previous sentence. However, we shall use this notation since it is standard in the current literature.

Observation 1. *Let $E \in \mathcal{E}$. Then $X \in \mathcal{K}(E)^+$ iff for every $n \in \omega$ there exists $e \in E$, $\min e \geqslant n$, such that $e \subset X$.*

In particular, for a filter $\mathcal{F}$ on ω, $\{\uparrow e : e \in E\}$ covers $\mathcal{F}$ iff $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}(E)^+$ iff $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{F}^+$ iff $E \in (\mathcal{F}^{<\omega})^+$. (Here $\uparrow X = \{Y \subset \omega : X \subset Y\}$ for any $X \subset \omega$.)

Proof. The "if" part is obvious. For the "only if" one, assume to the contrary that $X \not\supset e$ for any $e \in E$ with $\min e \geqslant n$. For every $e \in E$ select $n_e \in e$ as follows: if $e \cap n \neq \varnothing$, pick $n_e \in e \cap n$, and otherwise pick $n_e \in e \setminus X$. Then $Y = \{n_e : e \in E\} \in \mathcal{K}(E)$ and $Y \cap X \subset n$ thus contradicting our assumption that $X \in \mathcal{K}(E)^+$. $\square$

Lemma 2. *Let $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_\kappa$ be such that $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}$ is centered. Suppose that $\langle E_n : n \in \omega\rangle \in \mathcal{E}^{\omega}$ is a decreasing sequence such that $E_n \subset \mathcal{P}(\omega \setminus n)$ and $\mathcal{K}(E_n) \subset \langle \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}\rangle^+$ for all n. Then one of the following two options holds:*

(*i*) *There exists* $n \in \omega$ *and* $X \in \mathcal{K}(E_n)$ *such that* $\{\omega \setminus X\} \cup \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}$ *is centered. In particular, for any filter* $\mathcal{U}$ *containing the latter union,* $E_n \notin (\mathcal{U}^{<\omega})^+$.

(*ii*) *There exists* $g \in D$ *such that letting* $H' = \bigcup_{n\in\omega} E_n \cap \mathcal{P}(g(n))$, *we have that* $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{K}(H')$ *is centered. In particular, for any filter* $\mathcal{U}$ *containing the latter union,* $H' \in (\mathcal{U}^{<\omega})^+$, *i.e., for every* $U \in \mathcal{U}$ *there exists* $e \in H'$ *such that* $e \subset U$.

Proof. Suppose that (*i*) fails. It follows that

$$\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{K}(E_n) \cup \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R} \text{ is centered.} \tag{1}$$

Indeed, otherwise there exists $n \in \omega$ such that $\mathcal{K}(E_n) \cup \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}$ is not centered because the sequence $\langle E_n : n \in \omega \rangle \in \mathcal{E}^\omega$ is decreasing. Since $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}$ is centered by our assumption, there are $F \in \langle \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R} \rangle$ and $\{X_0, \ldots, X_m\} \in \mathcal{K}(E_n)$ such that $\bigcap_{i\leqslant m} X_i \cap F = \varnothing$. Thus $F \subset \bigcup_{i\leqslant m}(\omega \setminus X_i)$, which implies $\omega \setminus X_i \in \langle \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R} \rangle^+$ for some $i \leqslant m$, i.e., (*i*) takes place, which contradicts our assumption. Thus Equation (1) is true.

Applying now Lemma 1 and Observation 1 to $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{K}(E_n) \cup \mathcal{R}$, we can find mutually distinct $\{A_i : i \in \omega\} \subset \mathcal{A}$ such that for every $n, i \in \omega$, $X \in \mathcal{R}$, and $\vec{Y} = \langle Y_j : j < n \rangle \in \mathcal{K}(E_n)^n$ there exists $e \in E_n$ such that $e \subset X \cap \bigcap_{j<n} Y_j \cap A_i$. Since $\mathcal{K}(E_n)$ is compact, there exists $k \in \omega$ such that for every $\vec{Y} \in \mathcal{K}(E_n)^n$ and $i \leqslant n$ there exists $e \in E_n$ such that $e \subset X \cap \bigcap_{j<n} Y_j \cap A_i \cap k$. Let $k_{X,n}$ be the minimal k with this property.

Claim 1. *Let* $X \in \mathcal{R}$ *and* $n \in \omega$. *Then for every* $\vec{Z} \in \mathcal{K}(E_n \cap \mathcal{P}(k_{X,n}))^n$ *and* $i \leqslant n$ *there exists* $e \in E_n$ *such that* $e \subset X \cap \bigcap_{j<n} Z_j \cap A_i \cap k_{X,n}$.

Proof. Suppose that the claim is wrong and pick $i < n$ and $\vec{Z} \in \mathcal{K}(E_n \cap \mathcal{P}(k_{X,n}))^n$ witnessing its failure. For every $e \in E_n \setminus \mathcal{P}(k_{X,n})$ select $n_e \in e \setminus k_{X,n}$ and set $Y_j = Z_j \cup \{n_e : e \in E_n \setminus \mathcal{P}(k_{X,n})\}$. It follows that $Y_j \in \mathcal{K}(E_n)$ for all $j < n$ and there is no $e \in E_n$ such that $e \subset X \cap \bigcap_{j<n} Y_j \cap A_i \cap k_{X,n}$, a contradiction to our choice of $k_{X,n}$. □

Observe that the map $\mathcal{R} \ni X \mapsto \langle k_{X,n} : n \in \omega \rangle$ is continuous, and consequently there exists $f \in \omega^\omega$ such that for all X and all but finitely many $n \in \omega$ we have $k_{X,n} < f(n)$, because $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_\kappa$ and $\kappa = \mathfrak{b}$.

Claim 2. $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{K}(H_I)$ *is centered for any* $I \in [\omega]^\omega$, *where* $H_I = \bigcup_{n\in I} E_n \cap \mathcal{P}(f(n))$.

Proof. Let us fix $\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, $n \in \omega$, $I \in [\omega]^\omega$, $X \in \mathcal{R}$, and $\langle Y_j : j < n \rangle \in \mathcal{K}(H_I)^n$. It suffices to prove that $(\omega \setminus \cup\mathcal{A}') \cap X \cap \bigcap_{j<n} Y_j \setminus n \neq \varnothing$. Let us fix $i \in \omega$ such that $A_i \notin \mathcal{A}'$ and let $m \in I \setminus \max\{i, n\}$ be such that $A_i \cap (\cup\mathcal{A}') \subset m$, and $k_{X,m} < f(m)$. Note that all but finitely many $m \in I$ are as above. By Claim 1 there exists $e \in E_m$ such that

$$e \subset X \cap \bigcap_{j<n} Y_j \cap A_i \cap f(m),$$

and hence also $e \subset \omega \setminus \cup\mathcal{A}'$ because $\omega \setminus \cup\mathcal{A}' \supset A_i \setminus m$ by our choice of m and $\min e \geqslant m$ for all $e \in E_m$. □

Now let $g \in D$ be such that $[f < g] := \{n \in \omega : f(n) < g(n)\}$ is infinite. It suffices to note that H' defined in item (*ii*) of the formulation contains $H_{[f<g]}$ and hence $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{K}(H')$ is centered because so is $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{K}(H_{[f<g]})$ by Claim 2. □

We shall also need the following result proved in [6] (it is Proposition 1 there, stated in a slightly different terminology) which allows us to work in the proof of Proposition 2 directly with a filter instead of working with the Mathias forcing associated to it.

Теорема 1 (Guzmán–Hrušák–Martínez, 2014)**.** *Let $\mathcal{F}$ be a filter and $D \subset \omega^{\uparrow\omega}$ be unbounded and σ-directed. Then $\mathbb{M}_{\mathcal{F}}$ preserves the unboundedness of D iff for every decreasing sequence $\langle E_n : n \in \omega\rangle$ of elements of $(\mathcal{F}^{<\omega})^+$ there exists $g \in D$ such that $\bigcup_{n\in\omega}(E_n \cap \mathcal{P}(g(n))) \in (\mathcal{F}^{<\omega})^+$. Moreover, in this characterization we may assume that $E_n \subset \mathcal{P}(\omega \setminus n)$ for all $n \in \omega$.*

We are in a position now to present the

Proof of Proposition 2. Let $\{\langle E^\alpha_n : n \in \omega\rangle : \alpha \in \kappa\}$ be an enumeration of all decreasing sequences $\langle E_n : n \in \omega\rangle \in \mathcal{E}^\omega$ such that $E_n \subset \mathcal{P}(\omega \setminus n)$ for all n. Set $\mathcal{R}^0 = \{\omega\}$ and assume that for some $\alpha \in \kappa$ we have already constructed $\mathcal{R}^\alpha \in \mathcal{C}_\kappa$ such that $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}^\alpha$ is centered. Now consider the sequence $\langle E^\alpha_n : n \in \omega\rangle$. Three cases are possible.

1. There exists $n_\alpha \in \omega$ such that $\mathcal{K}(E^\alpha_{n_\alpha}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}^\alpha$ is not centered. Given any ultrafilter $\mathcal{G}$ containing $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}^\alpha$, we can find $X_\alpha \in \mathcal{K}(E^\alpha_{n_\alpha})$ such that $X_\alpha \notin \mathcal{G}$, and therefore $\{\omega \setminus X_\alpha\} \cup \mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}^\alpha$ is centered being a subset of $\mathcal{G}$. Now we set $\mathcal{R}^{\alpha+1} = \langle \mathcal{R}^\alpha \cup \{\omega \setminus X_\alpha\}\rangle$.

2. For $\mathcal{R} := \mathcal{R}^\alpha$ and $\langle E_n : n \in \omega\rangle := \langle E^\alpha_n : n \in \omega\rangle$, item (i) from Lemma 2 takes place. This means that there exist $n_\alpha \in \omega$ and $X_\alpha \in \mathcal{K}(E^\alpha_{n_\alpha})$ such that $\{\omega\setminus X_\alpha\}\cup\mathcal{F}(\mathcal{A})\cup \mathcal{R}^\alpha$ is centered. As in item 1 we set $\mathcal{R}^{\alpha+1} = \langle \mathcal{R}^\alpha \cup \{\omega \setminus X_\alpha\}\rangle$.

3. For $\mathcal{R} := \mathcal{R}^\alpha$ and $\langle E_n : n \in \omega\rangle := \langle E^\alpha_n : n \in \omega\rangle$, item (ii) from Lemma 2 takes place. Then there exists $g_\alpha \in D$ such that letting $H_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} E^\alpha_n \cap \mathcal{P}(g_\alpha(n))$, we have that $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{R}^\alpha \cup \mathcal{K}(H_\alpha)$ is centered. In this case we set $\mathcal{R}^{\alpha+1} = \langle \mathcal{R}^\alpha \cup \mathcal{K}(H_\alpha)\rangle$.

This completes our inductive construction of the sequence $\langle \mathcal{R}^\alpha : \alpha < \kappa\rangle$. Set $\mathcal{R}^\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{R}^\alpha$ and let $\mathcal{U}$ be the filter generated by $\mathcal{F}(\mathcal{A})\cup\mathcal{R}^\kappa$. We claim that $\mathcal{U}$ is as required. Indeed, consider any $\langle E^\alpha_n : n \in \omega\rangle$. If in the construction of $\mathcal{R}^{\alpha+1}$ one of the first two alternatives took place, we know that $E^\alpha_{n_\alpha} \notin (\mathcal{U}^{<\omega})^+$ as witnessed by $\omega\setminus X_\alpha \in \mathcal{U}$. So let us assume that the third alternative took place. Then $H_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} E^\alpha_n \cap \mathcal{P}(g_\alpha(n)) \in (\mathcal{U}^{<\omega})^+$ by the definition of $\mathcal{U}$. It remains to use Theorem 1. □

Acknowledgements

The author would like to thank the Austrian Science Fund FWF (Grants I 2374-N35 and I 3709-N35) for generous support for this research.

References

1. T. Bartoszyński and H. Judah, *Set theory: On the structure of the real line,* A. K. Peters, Massachusetts, 1995.
2. A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, in: *Handbook of Set Theory* (M. Foreman, A. Kanamori, and M. Magidor, eds.), Springer, 2010, pp. 395–491. DOI: 10.1007/978-1-4020-5764-9_7
3. J. Brendle, *Mob families and mad families*, Arch. Math. Logic **37** (1998), no. 3, 183–197. DOI: 10.1007/s001530050091

4. J. Brendle and A. D. Brooke-Taylor, *A variant proof of* $\mathrm{Con}(\mathfrak{b} < \mathfrak{a})$, Proceedings of the 2014 RIMS meeting on Reflection principles and set theory of large cardinals, Kyoto, 2014, pp. 16–25.
5. D. Chodounsky, D. Repovš, and L. Zdomskyy, *Mathias forcing and combinatorial covering properties of filters,* J. Symb. Log. **80** (2015), no. 4, 1398–1410. DOI: 10.1017/jsl.2014.73
6. O. Guzmán, M. Hrušák, and A. A. Martínez, *Canjar filters II,* Proceedings of the 2014 RIMS meeting on Reflection principles and set theory of large cardinals, Kyoto, 2014, pp. 59–67. `https://www.matmor.unam.mx/~michael/preprints_files/GuzmanHrusakMartinezII.pdf`
7. O. Guzmán and D. Kalajdzievski, *The ultrafilter and almost disjointness numbers,* arXiv: 2012.02306, 2012, preprint.
8. C. Laflamme, *Forcing with filters and complete combinatorics,* Ann. Pure Appl. Logic **42** (1989), no. 2, 125–163. DOI: 10.1016/0168-0072(89)90052-3
9. C. Laflamme and C. C. Leary, *Filter games on ω and the dual ideal,* Fund. Math. **173** (2002), no. 2, 159–173. DOI: 10.4064/fm173-2-4
10. J. Vaughan, *Small uncountable cardinals and topology*, in: *Open problems in topology* (J. van Mill, G.M. Reed, Eds.), Elsevier Sci. Publ., Amsterdam, 1990, pp. 195–218.

Стаття: надійшла до редколегії 24.12.2020
доопрацьована 09.01.2021
прийнята до друку 23.03.2021

ДОВЕДЕННЯ БРЕНДЛА НЕСУПЕРЕЧНОСТІ $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, ЯКЕ НЕ ВИКОРИСТОВУЄ РАНГІВ, ІГОР І ЧИСЕЛ КОЕНА

Любомир ЗДОМСЬКИЙ

Institute of Mathematics, Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic
University of Vienna, Währinger Straße 25, A-1090 Wien, Austria
e-mails: lzdomsky@gmail.com

Наведено спрощене доведення головного результату статті [3]. На відміну від оригінального доведення, ми не використовуємо рангів і допоміжних чисел Коена. Також не використовуються ігри на ідеалах, які фігурують у інших відомих автору спрощеннях доведення вищезгаданого результату Брендла.

Ключові слова: максимальна майже диз'юнктна сім'я, фільтр, форсінг Матіаса.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 11–16
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 11–16
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.011-016

УДК 512.53

ВАРІАНТИ ПРЯМОКУТНИХ В'ЯЗОК

Олександра ДЕСЯТЕРИК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
просп. Академіка Глушкова, 4е, 03127, м. Київ
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

Доведено, що всі варіанти прямокутної в'язки попарно ізоморфні. Досліджено варіанти прямокутної в'язки з приєднаною одиницею та з приєднаним нулем.

Ключові слова: варіант, сендвіч напівгрупа, прямокутна в'язка.

Для кожної напівгрупи $(S, \cdot)$ та довільного фіксованого елемента $a \in S$ можна задати нову бінарну асоціативну операцію $*_a$ на множині S

$$x *_a y = x \cdot a \cdot y$$

для довільних $x, y \in S$. Операцію $*_a$ називають *сендвіч-множенням*, а напівгрупу $(S, *_a)$ — *сендвіч-напівгрупою* чи *варіантом.*

Варіанти напівгруп вивчають різні автори ще з 60-х років двадцятого століття. В [11] розглядаються варіанти напівгруп перетворень, які й надалі досліджувалися, наприклад, у [3]. Дослідження варіантів охоплює різні класи напівгруп (див., наприклад, [7], та главу 13 із [5]). Варіанти напівгруп прямокутних матриць розглянуті у [4]. У багатьох працях (див., наприклад, [6] та [12]) вивчали інтерасоціативності моноїдів, які тісно пов'язані з варіантами. Варіанти регулярних напівгруп досліджували у [9] та [10]. Для комутативних в'язок з нулем у [2] встановлено критерій ізоморфності двох варіантів і класифіковано варіанти деяких конкретних в'язок.

В'язкою називається напівгрупа, всі елементи якої є ідемпотентами. Будемо називати напівгрупу S *прямокутною в'язкою*, якщо $xyx = x$ для довільних $x, y \in S$. Очевидно, що така напівгрупа є регулярною.

Ми досліджуємо варіанти прямокутних в'язок і прямокутних в'язок з приєднаною одиницею та нулем.

З теореми 1.1.3 [8] випливає, що для довільної прямокутної в'язки S існують непорожні множини X і Y такі, що напівгрупа S ізоморфна напівгрупі, визначеній

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10

на множині $X \times Y$ з бінарною операцією

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1, y_2), \tag{1}$$

і для довільних непорожніх множин X і Y множина $X \times Y$ з бінарною операцією (1) є прямокутною в'язкою.

Надалі будемо вважати, що S – прямокутна в'язка $X \times Y$ з бінарною операцією (1). Для початку розглянемо варіанти прямокутної в'язки S.

Твердження 1. *Довільний варіант $(S, *_{(x_a, y_b)})$, де $(x_a, y_b) \in S$ ізоморфний початковій прямокутній в'язці S.*

Доведення. Запишемо як діє множення у варіанті $(S, *_{(x_a, y_b)})$. Для довільних (x_i, y_j), $(x_k, y_l) \in S$ результат множення цих елементів на варіанті $(S, *_{(x_a, y_b)})$ визначається так:

$$\begin{aligned}
(x_i, y_j) *_{(x_a, y_b)} (x_k, y_l) &= (x_i, y_j) \cdot (x_a, y_b) \cdot (x_k, y_l) = \\
&= ((x_i, y_j) \cdot (x_a, y_b)) \cdot (x_k, y_l) = \\
&= (x_i, y_b) \cdot (x_k, y_l) = \\
&= (x_i, y_l).
\end{aligned}$$

Тоді очевидно, що множення $*_{(x_a, y_b)}$ у варіанті діє як множення $\cdot$ у прямокутній зв'язці S, тобто

$$(x_i, y_j) *_{(x_a, y_b)} (x_k, y_l) = (x_i, y_l) = (x_i, y_j) \cdot (x_k, y_l).$$

Тобто довільний варіант $(S, *_{(x_a, y_b)})$ ізоморфний початковій прямокутній в'язці S, причому ізоморфізмом є тотожне відображення. □

З твердження 1 напряму випливає теорема 1.

Теорема 1. *Усі варіанти $(S, *_{(x_i, y_j)})$ прямокутної в'язки S попарно ізоморфні та ізоморфні початковій прямокутній в'язці S.*

Прямокутна в'язка S не має одиниці. Розглянемо прямокутну в'язку з приєднаною одиницею. Приймемо

$$1 \cdot (x_i, y_j) = (x_i, y_j) \cdot 1 = (x_i, y_j)$$

для всіх $(x_i, y_j) \in S$ та $1 \cdot 1 = 1$. Тоді позначимо через S^1 прямокутну в'язку S з приєднаною одиницею 1.

Нехай S – прямокутна в'язка, яка ізоморфна напівгрупі $A \times B$. Тоді елементи напівгрупи S можна подати у вигляді (a_i, b_j).

Якщо $(S^1, *_{(a_q, b_r)})$ та $(S^1, *_{(a_f, b_h)})$ – варіанти напівгрупи S^1, будова якої наведена вище. То далі ми з'ясуємо, за яких умов два варіанти прямокутної в'язки з приєднаною одиницею S^1 будуть попарно ізоморфними.

Розглянемо два варіанти, які породжені елементами (a_i, b_k) та (a_i, b_v), у яких перші координати є однаковими.

Твердження 2. *Нехай a_i — довільний, але фіксований елемент множини A, та $b_k, b_v \in B$ — довільні елементи. Тоді варіанти $(S^1, *_{(a_i, b_k)})$ і $(S^1, *_{(a_i, b_v)})$ сендвіч-елементом відмінним від 1, ізоморфні.*

Доведення. Розглянемо відображення $\varphi\colon (S^1, *_{(a_i,b_k)}) \to (S^1, *_{(a_i,b_v)})$ таке, що $\varphi((a_l, b_k)) = (a_l, b_v)$ та $\varphi((a_l, b_v)) = (a_l, b_k)$ для довільного $a_l \in A$ та фіксованих $b_k, b_v \in B$, а на всіх інших елементах φ діє як тотожне відображення. Доведемо, що φ є ізоморфізм варіантів.

Щоб довести, що відображення φ є ізоморфізмом, необхідно довести виконання такої рівності:

$$\varphi(c *_{(a_i,b_k)} d) = \varphi(c) *_{(a_i,b_v)} \varphi(d), \tag{2}$$

для довільних $c, d \in S^1$.

Розглянемо множення у варіантах і дію φ на нього. Зауважимо, що за означенням множення у варіанті $(S, *_{(a_i,a_i)})$, якщо ми множимо не одиничні елементи, то маємо $(\boldsymbol{a}_r, b_f) *_{(a_i,b_i)} (a_l, \boldsymbol{b}_g) = (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_g)$. Тобто на результат множення впливають тільки перша координата першого множника a_r та друга координата останнього множника b_g. Якщо хоча б один з елементів є 1, то множення відбувається за правилом наведеним для приєднаної одиниці. Зважаючи, що φ не змінює першу координату, то маємо такі умови. Необхідно і достатньо розглянути ті випадки, коли у пар множників відрізняється друга координата останнього множника. Оскільки ми розглядаємо варіанти напівгрупи з приєднаною одиницею, ще випадки, коли один з множників є одиницею.

Отож, щоб довести виконання рівності (2), розглянемо наступні шість випадків. Для кожного з цих випадків випишемо окремо ліву і праву частини (2), перетворимо їх так, щоб вони були рівними.

i. Для довільних $a_x, a_z \in A$, $b_y \in B$ та $B \ni b_t \neq b_k, b_v$ маємо, що

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_t)) = \varphi(a_x, b_t) = (a_x, b_t)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_t)) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)(a_z, b_t) = (a_x, b_t).$$

ii. Для довільних $a_x, a_z \in A$, $b_y \in B$ та фіксованого $b_k \in B$ виконуються рівності

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_k)) = \varphi(a_x, b_k) = (a_x, b_v)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_k)) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)(a_z, b_v) = (a_x, b_v).$$

iii. Для довільних $a_x, a_z \in A$, $b_y \in B$ та фіксованого $b_v \in B$ отримуємо, що

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_v)) = \varphi(a_x, b_v) = (a_x, b_k)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_v)) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)(a_z, b_k) = (a_x, b_k).$$

iv. У випадку множення на одиницю справа маємо

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} 1) = \varphi(a_x, b_k) = (a_x, b_v)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi(1) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)1 = (a_x, b_v).$$

v. У випадку множення на одиницю зліва розглянемо три випадки. Оскільки φ змінює другу координату, то залежно від того, чи друга координата множника дорівнює якійсь з координат елемента, який породжує варіант чи ні, ми перевіримо виконання необхідних рівностей. У першому випадку маємо

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_y)) = \varphi(a_i, b_y) = (a_i, b_y)$$

та

$$\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_y)) = 1(a_i, b_v)(a_z, b_y) = (a_i, b_y).$$

Тобто,

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_y)) = \varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_y)).$$

У другому випадку отримуємо, що

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_k)) = \varphi(a_i, b_k) = (a_i, b_v)$$

та

$$\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_k)) = 1(a_i, b_v)(a_z, b_v) = (a_i, b_v)$$

Тобто,

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_k)) = \varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_k)).$$

І нарешті, у третьому впиадку маємо, що

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_v)) = \varphi(a_i, b_v) = (a_i, b_k)$$

і

$$\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_v)) = 1(a_i, b_v)(a_z, b_k) = (a_i, b_k).$$

vi. У результаті перемноження двох одиниць у варіанті отримуємо такі рівності: $\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} 1) = \varphi(a_i, b_k) = (a_i, b_v)$ і $\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi(1) = 1(a_i, b_v)1 = (a_i, b_v)$.

Отож, ми довели, що для довільних $a_x, a_z \in A$ та $b_y, b_t \in B$ виконується рівність

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_t)) = \varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_t)),$$

тобто відображення $\varphi : (S^1, *_{(a_i,b_k)}) \to (S^1, *_{(a_i,b_v)})$ є напівгруповим ізоморфізмом, оскільки воно є бієктивним. □

Далі розглянемо два варіанти, які породжені елементами (a_k, b_i) та (a_v, b_i), тобто такими, в яких другі координати є однаковими.

Твердження 3. *Нехай b_i – довільний, але фіксований елемент з B, та $a_k, a_v \in A$ – довільні елементи. Тоді варіанти $(S^1, *_{(a_k,b_i)})$ та $(S^1, *_{(a_v,b_i)})$ ізоморфні.*

Доведення. Розглянемо відображення $\psi\colon (S^1, *_{(a_k,b_i)}) \to (S^1, *_{(a_v,b_i)})$ таке, що $\psi((a_k, b_l)) = (a_v, b_l)$ та $\psi((a_v, b_l)) = (a_k, b_l)$ для фіксованих $a_k, a_v \in A$ та довільного $b_l \in B$, на всіх інших елементах ψ діє як тотожне відображення. Далі доведення аналогічне до доведення твердження 2. □

Отож, твердження 3 і 2 можна узагальнити у теорему 2.

Теорема 2. *Всі варіанти прямокутної в'язки з приєднаною одиницею S^1, сендвіч елементом яких не є одиниця, попарно ізоморфні. Варіанти, сендвіч елементом яких є одиниця, не ізоморфні жодному з інших варіантів.*

Доведення. Нехай $(S^1, *_{(a_x,b_y)})$ та $(S^1, *_{(a_t,b_p)})$ — довільні варіанти напівгрупи S^1. Тоді за твердженнями 2 і 3 існують ізоморфізми варіантів φ та ψ такі, що

$$(S^1, *_{(a_x,b_y)}) \overset{\varphi}{\cong} (S^1, *_{(a_x,b_p)}) \overset{\psi}{\cong} (S^1, *_{(a_t,b_p)}).$$

Тобто існує відображення $\omega = \psi\varphi$ таке, що $\omega : (S^1, *_{(a_x,b_y)}) \to (S^1, *_{(a_t,b_p)})$, яке є ізоморфізмом варіантів. Варіанти, сендвіч елементом яких є одиниця, не ізоморфні жодному з інших варіантів $(S^1, *_{(a_x,b_y)})$, оскільки варіант $(S^1, *_1)$ містить одиницю, то варіанти типу $(S^1, *_{(a_x,b_y)})$ не містять одиниці. □

Розглянемо напівгрупу S^0, тобто напівгрупу S з приєднаним нулем 0 таку, що

$$0 \cdot (x_i, y_j) = (x_i, y_j) \cdot 0 = 0$$

для всіх $(x_i, y_j) \in S$ та $0 \cdot 0 = 0$.

Теорема 3. *Варіанти $(S^0, *_{(a_x,b_y)})$, сандвіч елемент яких є не нульовим, ізоморфні напівгрупі S^0. Варіант $(S^0, *_0)$ ізоморфний напівгрупі з нульовим множенням.*

Доведення. Очевидно, що у варіанті $(S^0, *_{(a_x,b_y)})$ добутки $c *_{(a_x,b_y)} d = 0$, які містять множник 0 справа ($d = 0$) або зліва ($c = 0$), будуть нульовими. Всі інші добутки є не нульовими, причому збігається з відповідними добутками для варіанта $(S, *_{(a_x,b_y)})$. Тому за твердженням 1 варіанти $(S^0, *_{(a_x,b_y)})$, сандвіч елемент яких є не нульовим, ізоморфні S^0.

Друге твердження очевидне, оскільки добуток довільних двох елементів $(S^0, *_0)$ дорівнюватиме 0. □

Список використаної літератури

1. A. Clifford and G. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups,* Volume 1, American Mathematical Society, Providence, 1961 (1977).
2. O. Desiateryk, *Variants of commutative bands with zero,* Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки (2015), no. 4, 15–20.
3. I. Dolinka and J. East, *Variants of finite full transformation semigroups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 8, 1187–1222. DOI: 10.1142/S021819671550037X
4. I. Dolinka and J. East, *Semigroups of rectangular matrices under a sandwich operation*, Semigroup Forum **96** (2018), no. 2, 253–300. DOI: 10.1007/s00233-017-9873-6
5. O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups. An introduction.* Algebra and Applications, **9**, Springer–Verlag, London, 2009.
6. B. N. Givens, A. Rosini, and K. Linton, *Interassociates of the bicyclic semigroup*, Semigroup Forum **94** (2017), no. 1, 104–122. DOI: 10.1007/s00233-016-9794-9
7. J. Hickey, *Semigroups under a sandwich operation,* Proc. Edinburg Math. Soc. (2), **26** (1983), no. 3, 371–382. DOI: 10.1017/S0013091500004442
8. J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, Oxford Science Publications. Oxford University Press, New York, 1995.
9. T. A. Khan and M. V. Lawson, *Variants of regular semigroups*, Semigroup Forum **62** (2001), no. 3, 358–374. DOI: 10.1007/s002330010034
10. О. Десятерик, *Варіанти напівгрупи Ріса матричного типу*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **88** (2019), 12–21. DOI: 10.30970/vmm.2019.88.012-021

11. Е. С. Ляпин, *Полугруппы*, Физматгиз, Москва, 1960.
12. М. Хилинський, *Інтерасоціативності поліциклічного моноїда*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **86** (2018), 77–90. DOI: 10.30970/vmm.2018.86.077-090

Стаття: надійшла до редколегії 12.07.2020
доопрацьована 21.12.2020
прийнята до друку 23.12.2020

VARIANTS OF RECTANGULAR BANDS

Oleksandra DESIATERYK

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Hlushkova Avenue, 4e, 03127 Kyiv, Ukraine
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

We prove that all variants of the rectangular band are isomorphic. Variants of the rectangular band with adjoined identity and zero are studied.

Key words: variant, sandwich semigroup, rectangular band.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 17–30
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 17–30
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.017-030

УДК 512.534.5

ON THE MONOID OF COFINITE PARTIAL ISOMETRIES OF $\mathbb{N}$ WITH THE USUAL METRIC

Oleg GUTIK, Anatolii SAVCHUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, asavchuk3333@gmail.com

In the paper we show that the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ of all partial cofinite isometries of positive integers does not embed isomorphically into the monoid $\mathbf{ID}_\infty$ of all partial cofinite isometries of integers. Moreover, every non-annihilating homomorphism $\mathfrak{h}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{ID}_\infty$ has the following property: the image $(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)\mathfrak{h}$ is isomorphic either to the two-element cyclic group $\mathbb{Z}_2$ or to the additive group of integers $\mathbb{Z}(+)$. Also we prove that the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is not finitely generated, and, moreover, monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ does not contain a minimal generating set.

Key words: partial isometry, inverse semigroup, partial bijection, bicyclic monoid, isomorphic embedding, group congruence, generator, minimal generating set.

1. Introduction and preliminaries

In this paper we shall follow the terminology of [4, 13]. We shall denote the first infinite cardinal by ω and the cardinality of a set A by $|A|$. For any positive integer n by $\mathscr{S}_n$ we denote the group of permutations of the set $\{1, \ldots, n\}$.

We shall say that a non-empty subset A of a semigroup S *generates* S, or A is a *set of generators* of S, or A is a *generating set* of S, if for any $s \in S$ there exist $a_1, \ldots, a_k \in A$ such that $s = a_1 \cdots a_k$. For any non-empty subset A of a semigroup S by $\langle A\rangle$ we denote a subsemigroup of S which is generated by A. A generating set A of a semigroup S is called *minimal generating*, if A does not properly contain any generating set of S. It is obvious that every finite generation set of a semigroup has a minimal generating set.

A semigroup S is called *inverse* if for any element $x \in S$ there exists a unique $x^{-1} \in S$ such that $xx^{-1}x = x$ and $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. The element x^{-1} is called the *inverse of* $x \in S$. If S is an inverse semigroup, then the function $\mathrm{inv}\colon S \to S$ which assigns to every element x of S its inverse element x^{-1} is called the *inversion*.

2020 Mathematics Subject Classification: 20M20, 20M30

If S is a semigroup, then we shall denote the subset of all idempotents in S by $E(S)$. If S is an inverse semigroup, then $E(S)$ is closed under multiplication and we shall refer to $E(S)$ as a *band* (or the *band of* S). Then the semigroup operation on S determines the following partial order $\preccurlyeq$ on $E(S)$: $e \preccurlyeq f$ if and only if $ef = fe = e$. This order is called the *natural partial order* on $E(S)$. A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents.

If S is an inverse semigroup then the semigroup operation on S determines the following partial order $\preccurlyeq$ on S: $s \preccurlyeq t$ if and only if there exists $e \in E(S)$ such that $s = te$. This order is called the *natural partial order* on S [16].

A congruence $\mathfrak{C}$ on a semigroup S is called *non-trivial* if $\mathfrak{C}$ is distinct from the universal and identity congruences on S, and a *group congruence* if the quotient semigroup $S/\mathfrak{C}$ is a group. Every inverse semigroup S admits the *least* (*minimum*) group congruence $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$:

$$a\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}b \text{ if and only if there exists } e \in E(S) \text{ such that } ae = be$$

(see [14, Lemma III.5.2]).

The bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q subjected only to the condition $pq = 1$. The semigroup operation on $\mathscr{C}(p,q)$ is determined as follows:

$$q^k p^l \cdot q^m p^n = q^{k+m-\min\{l,m\}} p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

It is well known that the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is a bisimple (and hence simple) combinatorial E-unitary inverse semigroup and every non-trivial congruence on $\mathscr{C}(p,q)$ is a group congruence [4].

If $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ is a partial map, then we shall denote the domain and the range of α by $\operatorname{dom}\alpha$ and $\operatorname{ran}\alpha$, respectively. A partial map $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ is called *cofinite* if both sets $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ and $Y \setminus \operatorname{ran}\alpha$ are finite.

Let $\mathscr{I}_\lambda$ denote the set of all partial one-to-one transformations of a non-zero cardinal λ together with the following semigroup operation:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{if} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \qquad \text{for} \quad \alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

The semigroup $\mathscr{I}_\lambda$ is called the *symmetric inverse* (*monoid*) *semigroup* over cardinal λ (see [4]). The symmetric inverse semigroup was introduced by Wagner [16] and it plays a major role in the theory of semigroups. By $\mathscr{I}^{\mathrm{cf}}_\lambda$ we denote a subsemigroup of injective partial selfmaps of λ with cofinite domains and ranges in $\mathscr{I}_\lambda$. Obviously, $\mathscr{I}^{\mathrm{cf}}_\lambda$ is an inverse submonoid of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda$. The semigroup $\mathscr{I}^{\mathrm{cf}}_\lambda$ is called the *monoid of injective partial cofinite selfmaps* of λ [9].

A partial transformation $\alpha\colon (X,d) \rightharpoonup (X,d)$ of a metric space (X,d) is called *isometric* or a *partial isometry*, if $d(x\alpha, y\alpha) = d(x,y)$ for all $x, y \in \operatorname{dom}\alpha$. It is obvious that the composition of two partial isometries of a metric space (X,d) is a partial isometry, and the converse partial map to a partial isometry is a partial isometry, too. Hence the set of partial isometries of a metric space (X,d) with the operation of composition of partial isometries is an inverse submonoid of the symmetric inverse monoid over the cardinal $|X|$. Also, it is obvious that the set of partial cofinite isometries of a metric space (X,d) with the operation of composition of partial isometries is an inverse submonoid of the monoid of injective partial cofinite selfmaps of the cardinal $|X|$.

The semigroup $\mathbf{ID}_\infty$ of all partial cofinite isometries of the set of integers $\mathbb{Z}$ with the usual metric $d(n,m)=|n-m|$, $n,m\in\mathbb{Z}$, in the Bezushchak papers [1, 2] is considered. In [1] the generators of the semigroup $\mathbf{ID}_\infty$ are described and it is proved therein that $\mathbf{ID}_\infty$ has the exponential growth. We remark that the semigroup $\mathbf{ID}_\infty$ is an inverse submonoid of the monoid of all partial cofinite bijections of $\mathbb{Z}$, and elements of $\mathbf{ID}_\infty$ are restrictions of isometries of $\mathbb{Z}$ onto its cofinite subsets in the Lawson interpretation (see [13, p. 9]). Green's relations and principal ideals of $\mathbf{ID}_\infty$ are described in [2]. In [10] it is shown that the quotient semigroup $\mathbf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is isomorphic to the group $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$ of all isometries of $\mathbb{Z}$, the semigroup $\mathbf{ID}_\infty$ is F-inverse, and $\mathbf{ID}_\infty$ is isomorphic to the semidirect product $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})\ltimes_{\mathfrak{h}}\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ of the free semilattice with identity $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}),\cup)$ by the group $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$. Also in [10] there are investigated semigroup and shift-continuous topologies on $\mathbf{ID}_\infty$ and embedding of the discrete semigroup $\mathbf{ID}_\infty$ into compact-like topological semigroups.

Later we assume that on $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}$ the usual linear order is considered.

Let $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ be the set of all partial cofinite isometries of the set of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual metric $d(n,m)=|n-m|$, $n,m\in\mathbb{N}$. Then $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ with the operation of composition of partial isometries is an inverse submonoid of $\mathscr{I}_\omega$. The semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ of all partial cofinite isometries of positive integers is studied in [11]. There we described the Green relations on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, its band, and proved that $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a simple E-unitary F-inverse semigroup. Also in [11], the least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ on $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is described and it is proved that the quotient-semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is isomorphic to the additive group of integers $\mathbb{Z}(+)$. An example of a non-group congruence on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is presented. Also in [11], we proved that a congruence on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a group congruence if and only if its restriction onto an isomorphic copy of the bicyclic semigroup in $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a group congruence and it is shown that $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ has a non-trivial homomorphic retract which is isomorphic to the bicyclic semigroup. Another non-trivial homomorphic retracts of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is constructed in [15].

The semigroup of monotone, non-decreasing, injective partial transformations φ of $\mathbb{N}$ such that the sets $\mathbb{N}\setminus\operatorname{dom}\varphi$ and $\mathbb{N}\setminus\operatorname{ran}\varphi$ are finite was introduced in [7] and was denoted by $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$. Obviously, $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse subsemigroup of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$. The semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is called *the semigroup of cofinite monotone partial bijections* of $\mathbb{N}$. In [7] Gutik and Repovš studied properties of the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$. In particular, they showed that $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse bisimple semigroup and all of its non-trivial group homomorphisms are either isomorphisms or group homomorphisms. It is obvious that $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is an inverse submonoid of $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$.

Doroshenko in [5, 6] studied the semigroups of endomorphisms of linearly ordered sets $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}$ and their subsemigroups of cofinite endomorphisms $\mathcal{O}_{fin}(\mathbb{N})$ and $\mathcal{O}_{fin}(\mathbb{Z})$. In [6] he described Green's relations, groups of automorphisms, conjugacy, centralizers of elements, growth, and free subsemigroups in these semigroups. In particular, in [6] it is proved that, in $\mathcal{O}_{fin}(\mathbb{N})$ the group of automorphisms consists only of the identity mapping, whereas the groups of automorphisms of $\mathcal{O}_{fin}(\mathbb{Z})$ is isomorphic to the semigroup of integers with operation of addition and consist only of inner automorphisms. In [5] it was shown that both these semigroups do not admit an irreducible system of generators. In their subsemigroups of cofinite functions all irreducible systems of generators are described here. Also, here the last semigroups are presented in terms of generators and relations.

A partial map $\alpha\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ is called *almost monotone* if there exists a finite subset A of $\mathbb{N}$ such that the restriction $\alpha\,|_{\mathbb{N}\setminus A}\colon \mathbb{N}\setminus A \rightharpoonup \mathbb{N}$ is a monotone partial map. By $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ we denote the semigroup of monotone, almost non-decreasing, injective partial transformations of $\mathbb{N}$ such that the sets $\mathbb{N}\setminus \operatorname{dom}\varphi$ and $\mathbb{N}\setminus \operatorname{ran}\varphi$ are finite for all $\varphi \in \mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$. Obviously, $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse subsemigroup of the semigroup $\mathscr{I}_{\omega}$ and the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse subsemigroup of $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ as well. The semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ is called *the semigroup of cofinite almost monotone partial bijections* of $\mathbb{N}$. In [3] the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ is studied. In particular, it was shown that the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ is inverse, bisimple and all of its non-trivial group homomorphisms are either isomorphisms or group homomorphisms. In [12] we showed that every automorphism of a full inverse subsemigroup of $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ which contains the semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ is the identity map. Also, here we constructed a submonoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}^{[\underline{1}]}$ of $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ with the following property: if S be an inverse subsemigroup of $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ such that S contains $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}^{[\underline{1}]}$ as a submonoid, then every non-identity congruence $\mathfrak{C}$ on S is a group congruence. We show that if S is an inverse submonoid of $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ such that S contains $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ as a submonoid then S is simple and the quotient semigroup $S/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$, where $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is the minimum group congruence on S, is isomorphic to the additive group of integers. Also, topologizations of inverse submonoids of $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ and embeddings of such semigroups into compact-like topological semigroups are given in [3, 12]. Similar results for semigroups of cofinite almost monotone partial bijections and cofinite almost monotone partial bijections of $\mathbb{Z}$ were obtained in [8].

In the present paper we show that the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ does not embed isomorphically into the semigroup $\mathbf{ID}_{\infty}$. Moreover every non-annihilating homomorphism $\mathfrak{h}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty} \to \mathbf{ID}_{\infty}$ has the following property: the image $(\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty})\mathfrak{h}$ is isomorphic either to $\mathbb{Z}_2$ or to $\mathbb{Z}(+)$. Also we prove that the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ does not have a finite set of generators, and moreover monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ does not contain a minimal generating set.

2. On homomorphisms from $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ into $\mathbf{ID}_{\infty}$

The definition of the semigroup $\mathbf{ID}_{\infty}$ implies that for any $\alpha \in \mathbf{ID}_{\infty}$ there exists a unique element γ_{α} of the group of units of $\mathbf{ID}_{\infty}$ such that $\alpha \preccurlyeq \gamma_{\alpha}$ (see [10]). Also we have that $|\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\alpha| = |\mathbb{Z}\setminus \operatorname{ran}\alpha|$ for each $\alpha \in \mathbf{ID}_{\infty}$. Hence we get the following obvious lemma:

Lemma 1. *If $\alpha = \beta\gamma$ for some $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{ID}_{\infty}$ then*

$$\max\left\{|\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\beta|, |\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\gamma|\right\} \leqslant |\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\alpha| \leqslant |\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\beta| + |\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\gamma|.$$

Proposition 1. *The semigroup $\mathbf{ID}_{\infty}$ does not contain an isomorphic copy of the bicyclic semigroup.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists a subsemigroup S of $\mathbf{ID}_{\infty}$ which is isomorphic to the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$. Let $\mathfrak{h}\colon \mathscr{C}(p,q) \to S$ be an embedding isomorphism. Put $(1)\mathfrak{h} = \varepsilon_0$, $(qp)\mathfrak{h} = \varepsilon_1$, $(p)\mathfrak{h} = \alpha$ and $(q)\mathfrak{h} = \beta$. Then ε_0 and ε_1 are idempotent of $\mathbf{ID}_{\infty}$ such that $\varepsilon_1 \preccurlyeq \varepsilon_0$. The definition of the semigroup $\mathbf{ID}_{\infty}$ implies that ε_0 and ε_1 are the identity maps of $\operatorname{dom}\varepsilon_0$ and $\operatorname{dom}\varepsilon_1$, respectively, and moreover $\operatorname{dom}\varepsilon_1 \subsetneqq \operatorname{dom}\varepsilon_0$. Since $1 = p(qp)p$, we get that $\varepsilon_0 = \beta\varepsilon_1\alpha$. The latter equality and Lemma 1 imply that

$$|\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\varepsilon_1| \leqslant |\mathbb{Z}\setminus \operatorname{dom}\varepsilon_0|.$$

The obtained inequality contradicts the inclusion $\operatorname{dom}\varepsilon_1 \subsetneq \operatorname{dom}\varepsilon_0$, because $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$. $\square$

It is obvious that for every $\alpha \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ there exist infinitely many $\gamma \in \mathbf{ID}_\infty$ such that α is the restriction of γ onto $\mathbb{N}$. This motivated Taras Banakh to ask:

Question 1. *Does the semigroup* $\mathbf{ID}_\infty$ *contain an isomorphic copy of* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$*?*

In this section we give a negative answer on this question.

Remark 1. We observe that the bicyclic semigroup is isomorphic to the semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ which is generated by partial transformations α and β of the set of positive integers $\mathbb{N}$, defined as follows:

$$\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{N}, \qquad \operatorname{ran}\alpha = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \qquad (n)\alpha = n+1$$

and

$$\operatorname{dom}\beta = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \qquad \operatorname{ran}\beta = \mathbb{N}, \qquad (n)\beta = n-1$$

(see Exercise IV.1.11(ii) in [14]). It is obvious that $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ is a submonoid of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

Proposition 1 and Remark 1 imply the following statement which gives a negative answer to Question 1.

Theorem 1. *The semigroup* $\mathbf{ID}_\infty$ *does not contain an isomorphic copy of the semigroup* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$*.*

Next we shall discuss maximal subgroups (i.e., on $\mathscr{H}$-classes with an idempotent) in the semigroup $\mathbf{ID}_\infty$.

The following statement belongs to the folklore of the geometric group theory.

Lemma 2. *The group of isometries of the set of integers* $\mathbb{Z}$ *with the usual metric is isomorphic to the semidirect product* $\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2$*.*

The following lemma describes cyclic subgroups of the group of isometries of the set of integers $\mathbb{Z}$ with the usual metric.

Lemma 3. *Let G be a cyclic subgroup of the group of isometries of the set of integers $\mathbb{Z}$ with the usual metric. Then only one of the following conditions holds:*

(i) *G is a singleton;*
(ii) *G is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$;*
(iii) *G is isomorphic to $\mathbb{Z}(+)$.*

Proof. Fix a generator (a,b) of G. Next we consider all possible cases.

1. Suppose that $(a,b) = (0,\overline{0})$ where 0 and $\overline{0}$ are neutral elements of $\mathbb{Z}(+)$ and $\mathbb{Z}_2$, respectively. Then the group operation of $\mathbb{Z}(+)\rtimes\mathbb{Z}_2$ implies that $(0,\overline{0})^n = (0,\overline{0})$ for any integer n, and hence G is a singleton.

2. Suppose that $(a,b) = (0,\overline{1})$ where $\overline{1}$ is a non-neutral element of $\mathbb{Z}_2$. Then we have that $(0,\overline{1})^2 = (0,\overline{0})$, and hence G is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.

3. Suppose that $(a,b) = (g,\overline{0})$ where g is a non-neutral element of $\mathbb{Z}(+)$. Then $(g,\overline{0})^n = (n\cdot g,\overline{0})$ for any integer n, and hence G is isomorphic to $\mathbb{Z}(+)$.

4. Suppose that $(a,b)=\left(g,\overline{1}\right)$ where g is a non-neutral element of $\mathbb{Z}(+)$. Then we have that

$$\left(g,\overline{1}\right)\left(g,\overline{1}\right)=\left(g-g,\overline{1}\cdot\overline{1}\right)=\left(0,\overline{0}\right),$$

and hence G is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$. □

A subset $C\subseteq\mathbb{R}$ is called *symmetric* in $\mathbb{R}$ if there exists a number $c\in\mathbb{R}$ (the *center* of C) such that $c+x\in C$ if and only if $c-x\in C$. A subset $C\subseteq\mathbb{Z}$ is called *symmetric* in $\mathbb{Z}$ if C is symmetric in $\mathbb{R}$.

Remark 2. We observe that a subset C is symmetric in $\mathbb{Z}$ if and only if $\mathbb{Z}\setminus C$ is symmetric in $\mathbb{Z}$. Also, if $\mathbb{Z}$ endowed with the usual metric, then the partial mapping $f_C\colon C\to C$, $c+x\mapsto c-x$ which is determined by the symmetry of the symmetric set C with the centre $c\in\mathbb{R}$ is a partial isometry of $\mathbb{Z}$. In this case we shall say that the *partial map* f_C *determines a symmetry of* C.

Lemma 4. *Let C be a proper cofinite subset of $\mathbb{Z}$ and $\gamma\colon\mathbb{Z}\rightharpoonup\mathbb{Z}$ be a partial isometry of $\mathbb{Z}$ such that $\operatorname{dom}\gamma=\operatorname{ran}\gamma=C$. Then γ is either the identity map of C or γ determines a symmetry of C.*

Proof. Suppose that the partial map γ is a nonidentity. Then γ is an element of the semigroup $\mathbf{ID}_\infty$. By Corollary 1 of [10], $\mathbf{ID}_\infty$ is an F-inverse semigroup, and moreover there exists a unique element σ_γ of the group of units of $\mathbf{ID}_\infty$ such that $\gamma\preccurlyeq\sigma_\gamma$. The latter implies that the partial map γ extends to the unique isometry σ_γ of $\mathbb{Z}$. It is obvious that the restriction of σ_γ onto the set $\mathbb{Z}\setminus C$ is an isometry of $\mathbb{Z}\setminus C$. We denote this isometry by γ°. Since γ is a nonidentity, so is γ°. Since C is a proper cofinite subset of $\mathbb{Z}$, $(\max(\mathbb{Z}\setminus C))\gamma^\circ=\min(\mathbb{Z}\setminus C)$ and $(\min(\mathbb{Z}\setminus C))\gamma^\circ=\max(\mathbb{Z}\setminus C)$. Then the isometry of $\mathbb{Z}\setminus C$ by γ° implies that

$$c=\frac{\min(\mathbb{Z}\setminus C)+\max(\mathbb{Z}\setminus C)}{2}$$

is the centre of symmetry of $\mathbb{Z}\setminus C$. It is obvious that c is the centre of symmetry of C. This implies the statement of the lemma. □

Since any elements α and β are $\mathscr{H}$-equivalent in $\mathbf{ID}_\infty$ if and only if $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{dom}\beta$ and $\operatorname{ran}\alpha=\operatorname{ran}\beta$, Lemma 4 implies the following proposition.

Proposition 2. *Every subgroup of $\mathbf{ID}_\infty$ distinct from its group of units is either trivial or isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.*

Theorem 2. *Let S be an inverse submonoid of $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}\!\!\!\!\!\!\nearrow(\mathbb{N})$ which contains $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ as a submonoid. Then for any homomorphism $\mathfrak{h}\colon S\to\mathbf{ID}_\infty$ one of the following conditions holds:*

(i) the image $(S)\mathfrak{h}$ is a singleton, i.e., $\mathfrak{h}$ is an annihilating homomorphism;
(ii) the image $(S)\mathfrak{h}$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$;
(iii) the image $(S)\mathfrak{h}$ is isomorphic to $\mathbb{Z}(+)$.

Proof. Suppose that the homomorphism $\mathfrak{h}\colon S\to\mathbf{ID}_\infty$ is not annihilating. Since by Remark 1 the monoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ is isomorphic to the bicyclic semigroup, Theorem 1 implies that the restriction $\mathfrak{h}|_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}\colon\mathscr{C}_\mathbb{N}\to\mathbf{ID}_\infty$ is not an injective homomorphism. Then by

Corollary 1.32 of [4] the image $(\mathscr{C}_{\mathbb{N}})\mathfrak{h}$ is a cyclic subgroup of $\mathbf{ID}_\infty$ such that $\{(\mathbb{I})\mathfrak{h}\} = (E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}))\mathfrak{h}$.

We shall show that for any idempotent $\varepsilon \in S$ we have that $(\varepsilon)\mathfrak{h} = (\mathbb{I})\mathfrak{h}$. Since $\varepsilon \in \mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow\!\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$, there exists a smallest positive integer n_ε such that $n \in \operatorname{dom}\varepsilon$ for any $n \geqslant n_\varepsilon$. Put ε_0 be the identity map of the set $\{j \in \mathbb{N} \colon j \geqslant n_\varepsilon\}$. Then ε_0 is an idempotent of $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ such that $\varepsilon_0 \preccurlyeq \varepsilon$ in S. The above arguments in the previous paragraph imply that

$$(\varepsilon)\mathfrak{h} = (\varepsilon\mathbb{I})\mathfrak{h} = (\varepsilon)\mathfrak{h}(\mathbb{I})\mathfrak{h} = (\varepsilon)\mathfrak{h}(\varepsilon_0)\mathfrak{h} = (\varepsilon\varepsilon_0)\mathfrak{h} = (\varepsilon_0)\mathfrak{h}.$$

Hence we have that $(E(S))\mathfrak{h} = (E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}))\mathfrak{h}$ is a singleton in $\mathbf{ID}_\infty$ and moreover the image $(E(S))\mathfrak{h}$ is an idempotent which is the neutral element of the cyclic subgroup $(\mathscr{C}_{\mathbb{N}})\mathfrak{h}$ in $\mathbf{ID}_\infty$. This implies that the image $(S)\mathfrak{h}$ is a subgroup of $\mathbf{ID}_\infty$, i.e., the homomorphisms $\mathfrak{h}\colon S \to \mathbf{ID}_\infty$ generates a group congruence $\mathfrak{C}_{\mathfrak{h}}$ on the monoid S. By Theorem 4 of [12], the quotient semigroup $S/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$, where $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is the minimum group congruence on S, is isomorphic to the additive group of integers $\mathbb{Z}(+)$. This implies that the image $(S)\mathfrak{h}$ is a cyclic subgroup of $\mathbf{ID}_\infty$. Next we apply Lemma 3 and Proposition 2. $\square$

Theorem 2 implies the following corollary:

Corollary 1. *Let $\mathfrak{h}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{ID}_\infty$ be an arbitrary homomorphism. Then one of the following conditions holds:*

(i) *$\mathfrak{h}$ is an annihilating homomorphism;*
(ii) *the image $(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)\mathfrak{h}$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$;*
(iii) *the image $(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)\mathfrak{h}$ is isomorphic to $\mathbb{Z}(+)$.*

The following example shows that every cofinite (almost) monotone partial bijection of $\mathbb{N}$ extends to a cofinite (almost) monotone partial bijection of $\mathbb{Z}$.

Example 1. Fix an arbitrary $\alpha \in \mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow\!\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ and any non-positive integer n. We define a partial map $\alpha_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ in the following way. Put

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}\alpha_{\mathbb{Z}} &= \operatorname{dom}\alpha \cup \{i \in \mathbb{Z}\colon i \leqslant n\},\\ \operatorname{ran}\alpha_{\mathbb{Z}} &= \operatorname{ran}\alpha \cup \{i \in \mathbb{Z}\colon i \leqslant n\} \end{aligned}$$

and

$$(k)\alpha_{\mathbb{Z}} = \begin{cases} (k)\alpha, & \text{if } k \in \operatorname{dom}\alpha;\\ k, & \text{if } k \leqslant n. \end{cases}$$

This determines a map $\mathfrak{i}_n\colon \mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow\!\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N}) \to \mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh}(\mathbb{Z})$, where $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh}(\mathbb{Z})$ is a monoid of cofinite almost monotone partial bijection of $\mathbb{Z}$ (see [8]). It is obvious that the so defined map $\mathfrak{i}_n\colon \mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow\!\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N}) \to \mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh}(\mathbb{Z})$ is a homomorphism, and moreover in the case $n = 0$ the map $\mathfrak{i}_0$ is a monoid homomorphism. Also, if α is an element of the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ of cofinite monotone partial bijections of $\mathbb{N}$, then the above defined extension $\alpha_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ of α is a cofinite monotone partial bijection of $\mathbb{Z}$, and hence $\alpha_{\mathbb{Z}} \in \mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$, where $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{Z})$ is a monoid of cofinite monotone partial bijections of $\mathbb{Z}$ (see [8]).

3. On generators of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$

In [1] it is proved that the semigroup $\mathbf{ID}_\infty$ is finitely generated and moreover $\mathbf{ID}_\infty$ has three generators. Taras Banakh posed the following question.

Question 2. *Is the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ finitely generated?*

In this section we give a negative answer on this question.

Lemma 5. *If A is a set of generators of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, then A contains at least two distinct elements of $\mathscr{C}_\mathbb{N}$.*

Proof. Let α and β be elements of a monoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ which are defined in Remark 1. Then there exist finitely many $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in A$ such that $\alpha=\alpha_1\ldots\alpha_k$ and $\alpha_1\neq\mathbb{I}$. Since $\operatorname{dom}\alpha=\mathbb{N}$, the definition of the composition of partial maps implies that $\operatorname{dom}\alpha\subseteq\operatorname{dom}\alpha_1$. By Lemma 1 of [11], every element of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a partial shift of $\mathbb{N}$, and hence we get that $\operatorname{dom}\alpha_1=\mathbb{N}$. By Lemma 1 of [11] and Remark 1, we have that $\alpha_1\in\mathscr{C}_\mathbb{N}$. If $\beta=\beta_1\ldots\beta_j$ for some $\beta_1,\ldots,\beta_j\in A$ and $\beta_j\neq\mathbb{I}$, then dually we get that $\beta_j\in\mathscr{C}_\mathbb{N}$ with $\operatorname{ran}\beta_j=\mathbb{N}$. This implies the statement of the lemma. $\square$

Remark 3. We observe that the set $A_0=\{\alpha,\beta\}$ is not a unique set of generators of the monoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$. It is obvious that for any positive integer $n\geqslant 2$ any of the following sets $A_n=\{\alpha^n,\beta\}$ and $B_n=\{\alpha,\beta^n\}$ generates the monoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$.

Next we need some notions defined in [11] and [12]. For an arbitrary positive integer n_0 we denote

$$[n_0)=\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_0\}.$$

Since the set of all positive integers is well ordered, the definition of the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow}(\mathbb{N})$ implies that for every $\gamma\in\mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow}(\mathbb{N})$ there exists the smallest positive integer $n_\gamma^{\mathbf{d}}\in\operatorname{dom}\gamma$ such that the restriction $\gamma|_{[n_\gamma^{\mathbf{d}})}$ of the partial map $\gamma\colon\mathbb{N}\rightharpoonup\mathbb{N}$ onto the set $[n_\gamma^{\mathbf{d}})$ is an element of the semigroup $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, i.e., $\gamma|_{[n_\gamma^{\mathbf{d}})}$ is a some shift of $[n_\gamma^{\mathbf{d}})$. For every $\gamma\in\mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow}(\mathbb{N})$ we put $\overrightarrow{\gamma}=\gamma|_{[n_\gamma^{\mathbf{d}})}$, i.e.

$$\operatorname{dom}\overrightarrow{\gamma}=[n_\gamma^{\mathbf{d}}), \qquad (x)\overrightarrow{\gamma}=(x)\gamma \quad \text{for all} \quad x\in\operatorname{dom}\overrightarrow{\gamma} \qquad \text{and} \qquad \operatorname{ran}\overrightarrow{\gamma}=(\operatorname{dom}\overrightarrow{\gamma})\gamma.$$

Also, we put

$$\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}=\min\operatorname{dom}\gamma \qquad \text{for} \quad \gamma\in\mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow}(\mathbb{N}),$$

It is obvious that $\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}=n_\gamma^{\mathbf{d}}$ when $\gamma\in\mathscr{C}_\mathbb{N}$ and $\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}<n_\gamma^{\mathbf{d}}$ when $\gamma\in\mathscr{I}_\infty^{\!\nearrow}(\mathbb{N})\setminus\mathscr{C}_\mathbb{N}$. Also for any $\gamma\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ we denote

$$\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}=(\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}})\gamma \qquad \text{and} \qquad n_\gamma^{\mathbf{r}}=(n_\gamma^{\mathbf{d}})\gamma.$$

By Lemma 1 of [11] every element of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a partial shift of the set $\mathbb{Z}$. This implies the following lemma.

Lemma 6. *For every element γ of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ the following equality holds:*

$$n_\gamma^{\mathbf{r}}-\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}=n_\gamma^{\mathbf{d}}-\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}.$$

Lemma 7. *Let be $\gamma\in\mathscr{C}_\mathbb{N}$ and $\delta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Then*

$$n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}}-\underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}}\leqslant n_\delta^{\mathbf{d}}-\underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}.$$

Proof. If $\delta\in\mathscr{C}_\mathbb{N}$, then $\gamma\delta\in\mathscr{C}_\mathbb{N}$ and hence we have that $n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}}=\underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}}$ which implies that

$$n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}}-\underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}}=n_\delta^{\mathbf{d}}-\underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}=0.$$

Next we assume that $\delta,\gamma\delta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\setminus\mathscr{C}_\mathbb{N}$, because in the case when $\gamma\delta\in\mathscr{C}_\mathbb{N}$ the above argument implies the require inequality. Since $\gamma\delta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\setminus\mathscr{C}_\mathbb{N}$, we get that $n_\gamma^{\mathbf{r}}<n_\delta^{\mathbf{d}}-1$. It

is obvious that if $n_\gamma^{\mathbf{r}} \leqslant \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$ then $n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = n_\gamma^{\mathbf{r}}$ and $\underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = \underline{n}_\delta^{\mathbf{r}}$. If $\underline{n}_\delta^{\mathbf{d}} < n_\gamma^{\mathbf{r}} < n_\delta^{\mathbf{d}} - 1$ then $n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = n_\gamma^{\mathbf{r}}$ and $\underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} \geqslant \underline{n}_\delta^{\mathbf{r}}$. By Lemma 6 in the both above cases we have that $n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} \leqslant n_\delta^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$. ☐

Lemma 8. *Let be $\gamma \in \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ and $\delta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Then*

$$n_{\delta\gamma}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\delta\gamma}^{\mathbf{d}} \leqslant n_\delta^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}.$$

Proof. By the first paragraph of the proof of Lemma 6 without loss of generality we may assume that $\delta, \delta\gamma \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$. Since $\delta\gamma \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$, we have that $n_\gamma^{\mathbf{d}} < n_\delta^{\mathbf{r}} - 1$. It is obvious that if $n_\gamma^{\mathbf{d}} \leqslant \underline{n}_\delta^{\mathbf{r}}$ then $n_{\delta\gamma}^{\mathbf{d}} = n_\gamma^{\mathbf{d}}$ and $\underline{n}_{\delta\gamma}^{\mathbf{d}} = \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$. If $\underline{n}_\delta^{\mathbf{r}} < n_\gamma^{\mathbf{d}} < n_\delta^{\mathbf{r}} - 1$ then there exists a positive integer $i^\circ \in \operatorname{dom}\delta$ such that $(i^\circ)\delta \geqslant n_\gamma^{\mathbf{d}}$ and $(i^\circ)\delta\gamma = \underline{n}_{\delta\gamma}^{\mathbf{r}}$. Hence in this case we have that $n_{\delta\gamma}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\delta\gamma}^{\mathbf{d}} \leqslant n_{\delta\gamma}^{\mathbf{d}} - i^\circ < n_\delta^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$. ☐

Lemma 9. *Let k be a positive integer $\geqslant 2$. If $\gamma, \delta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ such that $\gamma\delta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$, $n_\gamma^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}} \leqslant k$ and $n_\delta^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}} \leqslant k$, then*

$$n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} \leqslant k.$$

Proof. We consider all possible cases.

1. If $\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}} \leqslant \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$ and $n_\gamma^{\mathbf{r}} \leqslant n_\delta^{\mathbf{d}}$, then $\underline{n}_\delta^{\mathbf{r}} \leqslant \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} < n_\delta^{\mathbf{r}} - 1$ and $n_\delta^{\mathbf{r}} = n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}}$. Hence in this case by Lemma 1 of [11] and Lemma 6 we have that

$$n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} = n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} \leqslant n_\delta^{\mathbf{r}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{r}} = n_\delta^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}} \leqslant k.$$

2. If $\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}} > \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$ and $n_\gamma^{\mathbf{r}} \leqslant n_\delta^{\mathbf{d}}$, then $n_\delta^{\mathbf{r}} = n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}}$ and there exists a positive integer $i^\circ \in \operatorname{dom}\gamma$ such that $(i^\circ)\gamma > \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$ and $(i^\circ)\gamma\delta = \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}}$. In this case by Lemma 1 of [11] and Lemma 6 we have that

$$n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} = n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = n_\delta^{\mathbf{r}} - (i^\circ)\gamma\delta < n_\delta^{\mathbf{r}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{r}} = n_\delta^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}} \leqslant k.$$

3. If $\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}} \leqslant \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$ and $n_\gamma^{\mathbf{r}} > n_\delta^{\mathbf{d}}$, then $n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = (n_\gamma^{\mathbf{r}})\delta$ and there exists a positive integer $j^\circ \in \operatorname{ran}\gamma \cap \operatorname{dom}\delta$ such that $j^\circ \geqslant \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$ and $(j^\circ)\delta = \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}}$. In this case by Lemma 1 of [11] and Lemma 6 we have that

$$n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} = n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = (n_\gamma^{\mathbf{r}})\delta - (j^\circ)\delta = n_\gamma^{\mathbf{r}} - j^\circ \leqslant n_\gamma^{\mathbf{r}} - \underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}} = n_\gamma^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}} \leqslant k.$$

4. If $\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}} > \underline{n}_\delta^{\mathbf{d}}$ and $n_\gamma^{\mathbf{r}} > n_\delta^{\mathbf{d}}$, then $n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = (n_\gamma^{\mathbf{r}})\delta$ and there exists a positive integer $l^\circ \in \operatorname{ran}\gamma \cap \operatorname{dom}\delta$ such that $l^\circ \geqslant \underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}$ and $(l^\circ)\delta = \underline{n}_{\gamma\gamma}^{\mathbf{r}}$. Hence in this case by Lemma 1 of [11] and Lemma 6 we have that

$$n_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{d}} = n_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} - \underline{n}_{\gamma\delta}^{\mathbf{r}} = (n_\gamma^{\mathbf{r}})\delta - (l^\circ)\delta = n_\gamma^{\mathbf{r}} - l^\circ \leqslant n_\gamma^{\mathbf{r}} - \underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}} = n_\gamma^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}} \leqslant k.$$

This completes the proof of the lemma. ☐

Theorem 3. *The monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is not finitely generated.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists a finite set $A = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ of generators of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Lemma 5 implies that $p \geqslant 3$ and without loss of generality we may assume that $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ and $\gamma_3, \ldots, \gamma_p \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$. Since the set $A \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\} = \{\gamma_3, \ldots, \gamma_p\}$ is finite and $\gamma_3, \ldots, \gamma_p \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$, there exists a positive integer $k \geqslant 2$ such that $n_{\gamma_j}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\gamma_j}^{\mathbf{d}} \leqslant k$ for any $j = 3, \ldots, p$.

Since A generates the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, Lemmas 6, 7, 8, and 9 imply that $n_\gamma^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}} \leqslant k$ for any $\gamma \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Let ε^* be the identity map of the set $\{1\} \cup \{s \in \mathbb{N}\colon s \geqslant k+2\}$. It is obvious that

$$n_{\varepsilon^*}^{\mathbf{d}} - \underline{n}_{\varepsilon^*}^{\mathbf{d}} = k+2-1 = k+1,$$

which contradicts the above part of the proof. The obtained contradiction implies the statement of the theorem. □

In the following example we construct a set of generators of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

Example 2. Let α and β be elements of the submonoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ which are described in Remark 1. For every positive integer $k \geqslant 2$ we put $\varepsilon^{[k]}$ to be the identity map of the set $\mathbb{N} \setminus \{k\}$. It is obvious that $\varepsilon^{[k]}$ is an idempotent of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ and $\varepsilon^{[k]} \notin \mathscr{C}_\mathbb{N}$ for all positive integers $k \geqslant 2$. We claim that the set

$$A = \{\alpha, \beta\} \cup \left\{\varepsilon^{[k]} \colon k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}$$

generates the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Indeed, fix an arbitrary $\gamma \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. By Lemma 1 from [11], γ is a partial shift of the set of integers $\mathbb{Z}$ and hence by Remark 1 there exist a non-negative integers i and j such that $(x)\beta^i\alpha^j = (x)\gamma$ for any $x \in \operatorname{dom}\gamma$ and $\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}$ is the smallest element of $\operatorname{dom}(\beta^i\alpha^j)$. If $\gamma = \beta^i\alpha^j$ then the proof is complete. In the other case we have that $\operatorname{dom}(\beta^i\alpha^j) \setminus \operatorname{dom}\gamma \neq \varnothing$ and put

$$\{i_1, \ldots, i_p\} = \operatorname{dom}(\beta^i\alpha^j) \setminus \operatorname{dom}\gamma.$$

Then Lemma 1 from [11] implies that $\gamma = \varepsilon^{[i_1]} \cdots \varepsilon^{[i_p]}\beta^i\alpha^j$, which implies that the set A generates the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

Remark 4. We observe that for any positive integers k and l such that $k > l \geqslant 2$ we have that

$$\varepsilon^{[l]} = \alpha^{k-l}\varepsilon^{[k]}\beta^{k-l}.$$

This implies that the set A from Example 2 has not a minimal set of generators of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

Example 2 and Remark 4 imply the following corollary.

Corollary 2. *Every finitely generated subsemigroup of* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *is a subsemigroup of an inverse subsemigroup of* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *generated by three elements.*

Lemma 10. *Let A be any generating set of the monoid* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. *Then there exists a minimal finite subset $A_\mathscr{C}^\circ$ of A such that $\mathscr{C}_\mathbb{N} \subseteq \langle A_\mathscr{C}^\circ \rangle$.*

Proof. Let α and β be elements of the submonoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ which are described in Remark 1. Then there exist finitely many $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_1, \ldots, \delta_l \in A$ such that $\alpha = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ and $\beta = \delta_1 \cdots \delta_l$. Since α and β generate $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, we obtain that $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_1, \ldots, \delta_l \rangle \supseteq \mathscr{C}_\mathbb{N}$. Since the set $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_1, \ldots, \delta_l\}$ is finite, it contains a minimal subset $A_\mathscr{C}^\circ$ such that $\mathscr{C}_\mathbb{N} \subseteq \langle A_\mathscr{C}^\circ \rangle$. □

For any integer $j \geqslant 0$ we define

$$\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[j]} = \left\{\gamma \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \colon n_\gamma^{\mathbf{d}} - \underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}} \leqslant j\right\}.$$

Therefore, by Lemmas 7, 8, and 9 we obtain an infinite inverse semigroup series in the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$:

$$\mathscr{C}_\mathbb{N} = \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[0]} = \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[1]} \subsetneqq \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[2]} \subsetneqq \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[1]} \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]} \subsetneqq \cdots \subset \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty.$$

Theorems 1, 4, and 5 from [12] imply the following proposition.

Proposition 3. *For any integer $k \geqslant 0$ the following assertions hold:*

(*i*) *every automorphism of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]}$ is the identity map;*
(*ii*) *the quotient semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]}/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is isomorphic to the additive group of integers $\mathbb{Z}(+)$;*
(*iii*) *$\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]}$ is an inverse simple semigroup.*

In the sequel, for any positive integer $j \geqslant 2$ by $\varepsilon^{[j]}$ we shall denote the idempotent which is defined in Example 2.

Lemma 11. *Let k be any integer $\geqslant 2$. If A is a subset of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ such that $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ is a subsemigroup of $\langle A\rangle$ and $\varepsilon^{[k]} \in \langle A\rangle$, then $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]}$ is a subsemigroup of $\langle A\rangle$.*

Proof. By Remark 4 any idempotent $\varepsilon^{[l]}$ of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ such that $l < k$ is generated by the idempotent $\varepsilon^{[k]}$ and the elements α and β of $\mathscr{C}_\mathbb{N}$. Since $\varepsilon = \varepsilon^{[i_1]}\cdots\varepsilon^{[i_p]}$, where $i_1, \ldots, l_p \leqslant k$, for any idempotent $\varepsilon \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ with $\varepsilon \preccurlyeq \beta^k\alpha^k$, we conclude that every idempotent $\varepsilon \preccurlyeq \beta^k\alpha^k$ of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is generated by the set A.

Fix any element γ of the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]}$. Then the arguments presented in Example 2 show that the partial map γ is a partial shift of the set $\operatorname{dom}\gamma$ such that γ is the restriction of $\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}}$ onto the set $\operatorname{dom}\gamma$. Since $\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}}\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}}$ is the identity map of $\mathbb{N}$, the previous arguments imply that $\varepsilon_0 = \alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\gamma\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}}$ is an idempotent of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. By Lemmas 7, 8, 9 and Lemma 1 of [11], ε_0 belongs to the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]}$. By the previous part of the proof there exist $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in A$ such that $\varepsilon_0 = \gamma_1\cdots\gamma_n$. Again, since γ is the restriction of $\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}}$ onto the set $\operatorname{dom}\gamma$, we obtain that

$$\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\gamma\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}}\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}} = \gamma.$$

This implies that

$$\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\varepsilon_0\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}} = \beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{d}}}\gamma\beta^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}}\alpha^{\underline{n}_\gamma^{\mathbf{r}}} = \gamma,$$

and hence the statement of our lemma holds. □

Lemma 12. *Let A be a generating set of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ and $A_\mathscr{C}^\circ$ be a minimal finite subset of A such that $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ is a subsemigroup of $\langle A\rangle$. Then for any integer $k \geqslant 2$ and any representation $\varepsilon^{[k]} = \gamma_1\cdots\gamma_s$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in A$, there exist finitely many $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_s^* \in A \cup \mathscr{C}_\mathbb{N}$ such that*

$$\varepsilon^{[k]} = \gamma_1^*\cdots\gamma_s^* \quad \textit{and either} \quad \gamma_j^* = \gamma_j \in A\backslash\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k-1]} \textit{ or } \gamma_j^* \in \mathscr{C}_\mathbb{N}, \quad \textit{for} \quad j = 1, \ldots, s. \quad (1)$$

Moreover, if $\gamma_j^* \in \mathscr{C}_\mathbb{N}$, then there exist $\delta_{j,1}, \ldots, \delta_{j,p_j} \in A_\mathscr{C}^\circ$ such that $\gamma_j^* = \delta_{j,1}\cdots\delta_{j,p_j}$ for some positive integer p_j.

Proof. Fix any integer $k \geqslant 2$ and suppose that $\varepsilon^{[k]} = \gamma_1\cdots\gamma_s$ for some $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in A$.

The definitions of the idempotent $\varepsilon^{[k]}$ and composition of partial maps (see [13, Section 1.1]) imply that either $\operatorname{dom}\gamma_1 = \mathbb{N}$ or $\operatorname{dom}\gamma_1 = \operatorname{dom}\varepsilon^{[k]}$, because the set $\mathbb{N}\setminus$

$\operatorname{dom}\varepsilon^{[k]}$ is a singleton. If $\operatorname{dom}\gamma_1=\mathbb{N}$, then by Lemma 1 of [11], γ_1 is the partial shift of integers, and hence $\gamma_1\in\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$. If $\operatorname{dom}\gamma_1=\operatorname{dom}\varepsilon^{[k]}$, then similar arguments imply that γ_1 is the partial shift of the set $\mathbb{N}\setminus\{k\}$. In both cases we put $\gamma_1^*=\gamma_1$.

Next we consider the element γ_2. The definition of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ and Lemma 1 of [11] imply that $(\operatorname{dom}\varepsilon^{[k]})\gamma_1\subseteq\operatorname{dom}\gamma_2$.

Suppose that $n_{\gamma_2}^{\mathbf{d}}-\underline{n}_{\gamma_2}^{\mathbf{d}}\geqslant k$. Then one of the following cases holds:

$$n_{\gamma_2}^{\mathbf{d}}=(k+1)\gamma_1 \qquad \text{or} \qquad n_{\gamma_2}^{\mathbf{d}}\leqslant(1)\gamma_1.$$

In the first case we have that $\{(i)\gamma_1\colon i=1,\ldots,k-1\}\subseteq\operatorname{dom}\gamma_2$ and hence we put $\gamma_2^*=\gamma_2$. In the second case by Lemma 1 of [11], γ_2 is the partial shift of integers, and we put $\gamma_2^*=\beta^{(1)\gamma_1}\alpha^{(1)\gamma_1\gamma_2}$. It it obvious that in both cases we have that $\gamma_1\gamma_2=\gamma_1^*\gamma_2^*$.

Suppose that $n_{\gamma_2}^{\mathbf{d}}-\underline{n}_{\gamma_2}^{\mathbf{d}}<k$. Then the equality $\varepsilon^{[k]}=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s$ implies that $n_{\gamma_2}^{\mathbf{d}}\leqslant(1)\gamma_1$, and hence the above presented arguments imply that $\gamma_1\gamma_2=\gamma_1^*\gamma_2^*$, where $\gamma_2^*=\beta^{(1)\gamma_1}\alpha^{(1)\gamma_1\gamma_2}$.

Using induction up to s in the similar way we obtain the requested representation of the idempotent $\varepsilon^{[k]}=\gamma_1^*\cdots\gamma_s^*$ in form (1). Also, since $k\notin\operatorname{dom}\varepsilon^{[k]}$, there exists a smallest positive integer $j\leqslant s$ such that $(1)\gamma_1\cdots\gamma_{j-1}\notin\operatorname{dom}\gamma_j$. This completes the first statement of the lemma. The second statement is obvious and follows from Lemma 10. $\square$

Theorem 4. *Let A be any infinite subset of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ generating the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Then there exists no a minimal subset $B\subseteq A$ generating $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.*

Proof. By Lemma 10 there exists a minimal finite subset $A_{\mathscr{C}}^{\circ}$ of A such that $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}\subseteq\langle A_{\mathscr{C}}^{\circ}\rangle$. Put $j_1=2$. Since $\varepsilon^{[j_1]}=\gamma_1\cdots\gamma_{s_1}$ for some $\gamma_1,\ldots,\gamma_{s_1}\in A$, there exists the smallest positive integer k_1 such that $n_{\gamma_i}^{\mathbf{d}}-\underline{n}_{\gamma_i}^{\mathbf{d}}\leqslant k_1$ for any $i=1,\ldots,s_1$ and $n_{\gamma}^{\mathbf{d}}-\underline{n}_{\gamma}^{\mathbf{d}}\leqslant k_1$ for any $\gamma\in A_{\mathscr{C}}^{\circ}$. By Lemma 11, $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k_1]}$ is a subsemigroup of $\langle A_{\mathscr{C}}^{\circ}\cup\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{s_1}\}\rangle$.

Put $j_2=k_1+1$. Then by Lemmas 7, 8, 9 we have that

$$\varepsilon^{[j_2]}\notin\langle A_{\mathscr{C}}^{\circ}\cup\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{s_1}\}\rangle\,.$$

Suppose that $\varepsilon^{[j_2]}=\gamma_{s_1+1}\cdots\gamma_{s_2}$ for some $\gamma_{s_1+1},\ldots,\gamma_{s_2}\in A$, where $s_1+1\leqslant s_2$. By Lemma 12 there exist finitely many $\gamma_{s_1+1}^*,\ldots,\gamma_{s_2}^*\in A\cup\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ such that

$$\varepsilon^{[k]}=\gamma_{s_1+1}^*\cdots\gamma_{s_2}^* \text{ and either } \gamma_j^*=\gamma_j\in A\setminus\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k-1]} \text{ or } \gamma_j^*\in\mathscr{C}_{\mathbb{N}}, \text{ for } j=s_1+1,\ldots,s_2.$$

The second statement of Lemma 12 and Lemma 11 imply that

$$\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[j_2]}\subseteq\langle A_{\mathscr{C}}^{\circ}\cup\{\gamma_{s_1+1},\ldots,\gamma_{s_2}\}\rangle\subseteq\left\langle A\setminus\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[j_2]}\cup A_{\mathscr{C}}^{\circ}\right\rangle.$$

Next, if we repeat the above presented construction infinitely many times, then we obtain an increasing sequence of positive integers $\{j_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ such that

$$\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[j_p]}\subseteq\left\langle A\setminus\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[j_p]}\cup A_{\mathscr{C}}^{\circ}\right\rangle \qquad \text{for any} \quad j_p.$$

Since

$$\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[0]}=\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[1]}\subsetneqq\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[2]}\subsetneqq\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[1]}\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[k]}\subsetneqq\cdots\subset\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$$

and $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty^{\boldsymbol{g}[i]}$, Lemma 11 implies that the set A does not contain a minimal subset $B\subseteq A$ which generates the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. $\square$

Theorem 4 implies the following corollary.

Corollary 3. *The monoid* $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ *does not contains a minimal generating set.*

Acknowledgements

The author acknowledges Taras Banakh, Alex Ravsky and the referee for useful important comments and suggestions.

References

1. O. Bezushchak, *On growth of the inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers*, Algebra Discrete Math. (2004), no. 2, 45–55.
2. O. Bezushchak, *Green's relations of the inverse semigroup of partially defined co-finite isometries of discrete line*, Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2008), no. 1, 12–16.
3. I. Chuchman and O. Gutik, *Topological monoids of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of the set of positive integers*, Carpathian Math. Publ. **2** (2010), no. 1, 119–132.
4. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
5. V. Doroshenko, *Generators and relations for the semigroups of increasing functions on* $\mathbb{N}$ *and* $\mathbb{Z}$. Algebra Discrete Math. (2005), no. 4, 1–15.
6. В. В. Дорошенко, *Про напівгрупи перетворень зліченних лінійно упорядкованих множин, які зберігають порядок*, Укр. мат. журн. **61** (2009), no. 6, 723–732; **English version:** V. V. Doroshenko, *On semigroups of order-preserving transformations of countable linearly ordered sets*, Ukr. Math. J. **61** (2009), no. 6, 859–872.
DOI: 10.1007/s11253-009-0256-3
7. O. Gutik and D. Repovš, *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}$ *having cofinite domain and image*, Stud. Sci. Math. Hungar. **48** (2011), no. 3, 342–353. DOI: 10.1556/SScMath.48.2011.3.1176
8. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images*, Georgian Math. J. **19** (2012), no. 3, 511–532.
DOI: 10.1515/gmj-2012-0022
9. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial cofinite selfmaps*, Math. Slovaca **65** (2015), no. 5, 981–992. DOI: 10.1515/ms-2015-0067
10. O. Gutik and A. Savchuk, *On the semigroup* $\mathbf{ID}_{\infty}$, Visn. Lviv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **83** (2017), 5–19 (in Ukrainian).
11. O. Gutik and A. Savchuk, *The semigroup of partial co-finite isometries of positive integers,* Bukovyn. Mat. Zh. **6** (2018), no. 1–2, 42–51 (in Ukrainian).
DOI: 10.31861/bmj2018.01.042
12. O. Gutik and A. Savchuk, *On inverse submonoids of the monoid of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of positive integers*, Carpathian Math. Publ. **11** (2019), no. 2, 296–310. DOI: 10.15330/cmp.11.2.296-310
13. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, Singapore: World Scientific, 1998.
14. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
15. A. Savchuk, *On homomorphic retracts of the monoid* $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, Visn. Lviv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **88** (2019), 22–31 (in Ukrainian).

16. V. V. Wagner, *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **84** (1952), 1119–1122 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 24.02.2020
доопрацьована 13.08.2020
прийнята до друку 23.12.2020

ПРО МОНОЇД КОСКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВИХ ІЗОМЕТРІЙ МНОЖИНИ $\mathbb{N}$ ЗІ ЗВИЧАЙНОЮ МЕТРИКОЮ

Олег ГУТІК, Анатолій САВЧУК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, asavchuk3333@gmail.com

Доводимо, що моноїд $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ усіх часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел не занурюється ізоморфно в моноїд $\mathbf{ID}_\infty$ усіх часткових коскінченних ізометрій цілих чисел. Більше того, для кожного неанулюючого гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{ID}_\infty$ виконується одна з умов: образ $(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)\mathfrak{h}$ або ізоморфний двоелементній циклічній групі $\mathbb{Z}_2$, або адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$. Також доводимо, що моноїд $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ не є скінченно породженим, і, більше того, напівгрупа $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ не містить мінімальну породжуючу множину.

Ключові слова: часткова ізометрія, інверсна напівгрупа, часткова бієкція, біциклічний моноїд, вкладення, групова конгруенція, породжуючий елемент.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 31–38
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 31–38
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.031-038

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 3: ІНВАРІАНТИ

Назар ПИРЧ

Українська академія друкарства,
вул. Підголоско, 19, 79020, м. Львів
e-mail: pnazar@ukr.net

У статті вивчаються властивості, що характеризують розміщення сім'ї підпросторів у тихоновському просторі, які зберігаються відношенням M-еквівалентності.

Ключові слова: вільна топологічна група, спеціальний ізоморфізм вільних груп, сім'я топологічних просторів.

1. Вступ

Ми продовжуємо вивчати еквівалентні за Марковим набори тихоновських просторів, розпочаті в [2]–[3]. Термінологія і позначення взяті з цих праць. Ми означуємо ряд топологічних властивостей, що характеризують розміщення сім'ї підпросторів у тихоновському просторі та визначаємо їхню M-інваріантність.

У [4] міститься найповніший на сьогодні систематизований виклад властивостей вільних топологічних груп, які будемо використовувати у цій праці.

Для тихоновського простору X через $F(X)$ будемо позначати вільну топологічну групу над X. Для підпростору $Y \subseteq X$ тихоновського простору X через $\langle Y \rangle$ будемо позначати підгрупу в $F(X)$ породжену множиною твірних Y. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_i : i \in I\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i : i \in I\})$ є *M-еквівалентною* сім'ї $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, якщо існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, такий, що $h(X_i) \subseteq \langle Y_i \rangle$ і $h^{-1}(Y_i) \subseteq \langle X_i \rangle$ для всіх $i \in I$. Позначатимемо це так:

$$(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\}).$$

2020 Mathematics Subject Classification: 22A05

Міняючи в цьому означенні функтор вільної топологічної групи на функтори вільної абелевої топологічної групи та вільного локально опуклого простору, отримаємо поняття A-еквівалентних і L-еквівалентних наборів.

Скажемо, що ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ спеціальний, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ є постійним відображенням, де $e_Y^*\colon F(Y) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y\colon Y \to \mathbb{Z}$, яка тотожно рівна 1 на Y. Через $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots \overline{n-1}\}$ будемо позначати скінченну групу лишків, наділену дискретною топологією.

2. Про деякі інваріанти відношення M-еквівалентності

Нехай G_1 – топологічна група. Скажемо, що система підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ є G_1-*віддільною в* X, якщо існує неперервне відображення $f\colon X \to G_1$ таке, що $f(X_s) \subseteq \{a_s\}$, і $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

Твердження 1. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору Y, G_1 – топологічна група. Нехай також існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$. Якщо система $\{X_s : s \in S\}$ є G_1-віддільною в X, то система $\{Y_s : s \in S\}$ є G_1-віддільною в Y.*

Доведення. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$. Нехай $f\colon X \to G_1$, неперервне відображення таке, що $f(X_s) \subseteq \{a_s\}$. Продовжимо відображення $f\colon X \to G_1$ до неперервного гомоморфізму $f^*\colon F(X) \to G_1$. Приймемо $g^* = f^* \circ i^{-1}$. Нехай $b \in Y_s$, причому

$$i^{-1}(b) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n},$$

де $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$. Тоді

$$g(b) = f^* \circ i^{-1}(b) = f^*(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}) = a_s^{\varepsilon_1} a_s^{\varepsilon_2} \dots a_s^{\varepsilon_n} = a_s^{\varepsilon_n} = g^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} = a_s^1 = a_s.$$

Отож, $g(Y_s) \subseteq \{a_s\}$.

□

Наслідок 1. *Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – скінченна сім'я підпросторів тихоновського простору X, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – скінченна сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Якщо існують спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s = 1, .., n$ та система відкрито-замкнених диз'юнктних множин $V_1, V_2, \cdots, V_n$ в X таких, що $X_s \subseteq V_s$ для всіх $s = 1, .., n$, то існує система відкрито-замкнених диз'юнктних множин $U_1, U_2, \cdots, U_n$ в Y таких, що $Y_s \subseteq U_s$ для всіх $s = 1, .., n$.*

Доведення. Згадана умова еквівалентна умові $\mathbb{Z}_n$-віддільності. □

Нехай G_1 – топологічна група. Будемо говорити, що сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ топологічного простору X *утворює G_1-покриття*, якщо для довільного відображення $f\colon X \to G_1$ з неперервності усіх звужень $f|_{X_s}$ випливає неперервність відображення f.

Нагадаємо, що підпростір Y топологічного простору X називається P-*вкладеним*, якщо довільна неперервна псевдометрика, задана на просторі Y, допускає неперервне продовження на X. Якщо підпростір Y є P-вкладеним у X, то підгрупа $\langle Y\rangle$ вільної топологічної групи $F(X)$, породжена множиною твірних Y є топологічно ізоморфною $F(Y)$.

Твердження 2. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y, G — топологічна група та*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}).$$

Якщо сім'я $\{X_s : s \in S\}$ утворює G-покриття простору X, а усі елементи сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ є P-вкладеними в Y, то сім'я $\{Y_s : s \in S\}$ утворює G-покриття простору Y.

Доведення. Нехай $f\colon Y \to G$ — відображення таке, що усі звуження $f|_{Y_s}$ неперервні. Продовжимо відображення f до гомоморфізму $f^*\colon F(Y) \to G$. Оскільки всі елементи сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ є P-вкладеними в Y, то кожна підгрупа $\langle Y_i\rangle$ топологічно ізоморфна групі $F(Y_i)$, а тому усі гомоморфізми $f^*|_{\langle Y_s\rangle}\colon \langle Y_s\rangle \to G$ є неперервними. Отож, усі звуження $f^*|_{X_s}$ неперервні. З того, що сім'я $\{X_s : s \in S\}$ утворює G-покриття простору X, випливає неперервність відображення $f^*|_X$, звідки випливає неперервність гомоморфізму f^*, а отже, і неперервність самого відображення f. $\square$

Твердження 3. *Нехай G — топологічна група, $\{\tau_s : s \in S\}$ — сім'я нескінченних кардиналів, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y,*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

а довільне неперервне відображення $f\colon X \to G$ має ту властивість, що $|f(X_s)| \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$. Тоді довільне неперервне відображення $h\colon Y \to G$ має ту властивість, що $|h(Y_s)| \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$.

Доведення. Якщо простір X нескінченний, то $|X| = |\langle X\rangle|$. Нехай $f\colon Y \to G$ — неперервне відображення. Тоді для кожного $s \in S$ виконується

$$|h(Y_s)| = |\langle h(Y_s)\rangle| = |h^*(Y_s)| = |f^*(X_s)| = |\langle f(X_s)\rangle| = |f(X_s)|.$$

$\square$

Для топологічного простору X через $nw(X)$ позначимо сіткову вагу простору X.

Твердження 4. *Нехай G — топологічна група, $\{\tau_s : s \in S\}$ — сім'я нескінченних кардиналів, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y,*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

а довільне неперервне відображення $f\colon X \to G$ має ту властивість, що $nw(f(X_s)) \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$. Тоді довільне неперервне відображення $h\colon Y \to G$ має ту властивість, що $nw(h(Y_s)) \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$.

Доведення. Нехай X — підпростір топологічної групи G. Якщо сіткова вага простору X нескінченна, то $nw(X) = nw(\langle X\rangle)$. Якщо X_1 та X_2 підпростори топологічної групи G, то
$$nw(X_1 \cdot X_2) \leqslant \max\{nw(X_1), nw(X_2)\}.$$
Отож, для кожного $s \in S$ виконується
$$nw(h(Y_s)) = nw(\langle h(Y_s)\rangle) = nw(h^*(Y_s)) = nw(f^*(X_s)) = nw(\langle f(X_s)\rangle) = nw(f(X_s)).$$
□

Будемо говорити, що підпростір $A \subseteq X$ *є зв'язним стосовно* X, якщо для довільних двох неперетинних відкрито-замкнених підмножин $U, V \subseteq X$ таких, що $U \cup V = X$ маємо, що $A \subseteq U$ або $A \subseteq V$.

Твердження 5. *Нехай* $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ *і простір* A *є зв'язним стосовно* X. *Тоді простір* B *є зв'язним стосовно* Y.

Доведення випливає з наступної леми.

Лема 1. *Підпростір* $A \subseteq X$ *є зв'язним стосовно* X *тоді і тільки тоді, коли існує не більше двох неперервних гомоморфізмів* $\langle A\rangle \to \mathbb{Z}_2$, *які допускають продовження на* $F(X)$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що простір A є незв'язним стосовно X, U та V — множини зазначені в умові незв'язності. Розглянемо відображення $f\colon A \to G$, прийнявши $f(x) = \overline{0}$, якщо $x \in A \cap U$ і $f(x) = \overline{1}$, якщо $x \in A \cap V$. Тоді відображення f, а також відображення тотожно рівні $\overline{0}$ та $\overline{1}$, допускають неперервне продовження на X.

Достатність. Припустимо, що існує щонайменше три відображення з простору G у топологічну групу $\mathbb{Z}_2$, які продовжуються неперервно на X. Серед них існує відображення $f\colon A \to G$, яке не є сталим на A. Нехай $F\colon X \to \mathbb{Z}_2$ — неперервне продовження відображення f. Приймемо $U = F^{-1}(\overline{0})$, $V = F^{-1}(\overline{1})$. Тоді
$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \varnothing, \quad A \cap U \neq \varnothing, \quad A \cap V \neq \varnothing,$$
що суперечить зв'язності множини A стосовно X. □

Твердження 5 легко узагальнюється на випадок більшої кількості підпросторів. Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X. Скажемо, що *сім'я* $\{X_s : s \in S\}$ *є зв'язною стосовно* X, якщо не існує відкрито-замкнених підмножин U і V в X таких, що:

1) $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = X$;
2) для всіх $s \in S$ виконується $U \cap X_s = \varnothing$ або $V \cap X_s = \varnothing$,

або іншими словами, не можна відокремити простір X, не відокремивши принаймні одного з підпросторів X_s.

Твердження 6. *Нехай* $\{X_s : s \in S\}$ — *сім'я підпросторів топологічного простору* X, $\{Y_s : s \in S\}$ — *сім'я підпросторів топологічного простору* Y. *Нехай також існує спеціальний топологічний ізоморфізм* $i\colon F(X) \to F(Y)$ *такий, що* $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ *для всіх* $s \in S$. *Якщо сім'я підпросторів* $\{X_s : s \in S\}$ *простору* X *є зв'язною стосовно* X, *то сім'я підпросторів* $\{Y_s : s \in S\}$ *простору* Y *є зв'язною стосовно* Y.

3. G-зв'язні та G-стабільні підпростори

Нехай G — топологічна група. Скажемо, що сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ топологічного простору X є *G-зв'язною в X* , якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G_1$ з умови $f|_X \neq \text{const}$ випливає, що існує $s \in S$, що $f|_{X_s} \neq$ const.

Теорема 1. *Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y такі, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$, що задовольняє умову $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$. Якщо сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ простору X G-зв'язна в X, то сім'я підпросторів $\{Y_s : s \in S\}$ простору Y є G-зв'язною в Y.*

Доведення. Припустимо, що сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ простору X G-зв'язна в X. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$, $h\colon Y \to G$, неперервне відображення таке, що $h|_Y \neq const$. Продовжимо відображення $h\colon Y \to G$ до неперервного гомоморфізму $h^*\colon F(X) \to G$. Приймемо $f^* = h^* \circ i$, $f = f^*|_X$. Відображення f є неперервним. Доведемо, що $f|_X \neq$ const. Припустимо $f(X) = \{a\}$ для деякого $a \in G$. Нехай $b \in Y$, $i^{-1}(b) = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}$, де $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$. Тоді

$$h(b) = a^{\varepsilon_1} a^{\varepsilon_2} \dots a^{\varepsilon_n} = a^{\varepsilon_n} = g^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} = a^1 = a.$$

Отримали суперечність з тим, що $f|_X \neq$ const. Отож, існує $s \in S$, що $f|_{X_s} \neq$ const. Міркуваннями аналогічними до попередніх доводимо, що $h|_{Y_s} \neq$ const. □

Наслідок 2. *Нехай G — топологічна група, X — тихоновський простір, підпростір X_1 є G-зв'язним в X, $(X, X_1) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1)$. Тоді підпростір Y_1 G-зв'язний в Y.*

Будемо говорити, що топологічний простір X *G-зв'язний*, якщо довільне неперервне відображення з топологічного простору X у топологічну групу G є сталим.

Наслідок 3. *Нехай G — топологічна група, X — тихоновський простір, простір X G-зв'язний у X, $X \overset{M}{\sim} Y$. Тоді простір Y є G-зв'язним.*

Аналогічно до твердження 1 доводяться твердження 7 і 8.

Твердження 7. *Нехай G — топологічна група, τ — довільний кардинал, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y такі, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$, що задовольняє умову $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ при всіх $s \in S$. Нехай також для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з умови $f|_X \neq$ const випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{X_s : s \in S\}$ таких, що $f|_{X_s} \neq$ const для кожного елемента з цієї сім'ї. Тоді для довільного неперервного відображення $h\colon Y \to G_1$ з умови $h|_Y \neq$ const випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ таких, що $h|_{Y_s} \neq$ const для кожного елемента з цієї сім'ї.*

Твердження 8. *Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$, $\{K_s : s \in S\}$ — сім'ї підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$, $\{P_s : s \in S\}$ — сім'ї підпросторів топологічного простору Y, τ — довільний кардинал такі, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$, $i(\langle K_s\rangle) = \langle P_s\rangle$ для всіх $s \in S$. Якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з умови $f|_X \neq \mathrm{const}$, $f|_{K_j} = \mathrm{const}_j$ випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{X_s : s \in S\}$ таких, що $f|_{X_s} \neq \mathrm{const}$ для кожного елемента з цієї сім'ї. Тоді для довільного неперервного відображення $h\colon Y \to G$ з умови $h|_Y \neq \mathrm{const}$, $h|_{P_j} = \mathrm{const}_j$ випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ таких, що $h|_{Y_s} \neq \mathrm{const}$ для кожного елемента з цієї сім'ї.*

Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпрострів топологічного простору X. Будемо говорити, що ця сім'я *G-стабільна*, якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$, для довільного $s \in S$ матимемо, що звуження $f|_{X_s}$ є сталим.

Твердження 9. *Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Якщо існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$, а сім'я є G-стабільною в X, то сім'я $\{Y_s : s \in S\}$ є G-стабільною в Y.*

Доведення. Нехай підмножина A G-стабільна в X. Нехай також $f\colon Y \to G$ — неперервне відображення, $f^*\colon F(Y) \to G$ — його неперервне продовження. Оскільки підмножина A G-стабільна в X, то $f^*(A) \subseteq \{g\}$ для деякого $g \in G$. Нехай $b \in B$, тоді $i^{-1}(b) = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$, де $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$. Тоді

$$f(g) = g^{\varepsilon_1} g^{\varepsilon_2} \ldots g^{\varepsilon_n} = g^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} = g^1 = g.$$

□

Наслідок 4. *Нехай G — топологічна група, $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ а підпростір A G-стабільна в X. Тоді підпростір B G-стабільний в Y.*

Доведення. Якщо $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$, то існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle A\rangle) = \langle B\rangle$ ([1]). Тепер залишається застосувати твердження 9. □

Нехай $Z \subseteq Y \subseteq X$ — тихоновські простори, G — топологічна група. Скажемо, що *пара (Y, Z) G-стабільна*, якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ такого, що $f|_Z = \mathrm{const}$ маємо, що $f|_Y = \mathrm{const}$.

Твердження 10. *Нехай $Z_1 \subseteq Y_1 \subseteq X_1$, $Z_2 \subseteq Y_2 \subseteq X_2$ — тихоновські простори, $(X_1, Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2, Z_2)$, G — топологічна група і пара (Y_1, Z_1) G-стабільна в X_1. Тоді пара (Y_2, Z_2) G-стабільна в X_2.*

Доведення. З того, що $(X_1, Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2, Z_2)$ випливає, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X_1) \to F(X_2)$ такий, що $i(\langle Y_1\rangle) = \langle Y_2\rangle$, $i(\langle Z_1\rangle) = \langle Z_2\rangle$.

Нехай також $f\colon X_2 \to G$ — неперервне відображення таке, що $f|_{Z_2} = g$ для деякого $g \in G$ $f^*\colon F(X_2) \to G$ — його неперервне продовження. Доведемо, що $i \circ f^*(Z_2) = \{g\}$. Аналогічно до твердження 9 доводиться, що $f^* \circ i^{-1}|_{Z_1} = \text{const}$. Звідси, за G-стабільністю пари (Y_1, Z_1), отримаємо, що $f^* \circ i^{-1}|_{Y_1} = \text{const}$. Аналогічно до твердження 9 отримаємо, що $f|_{Y_2} = \text{const}$. □

Нехай $Z \subseteq Y \subseteq X$ — тихоновські простори, тоді скажемо, що *пара* (Y, Z) *зв'язна* стосовно X, якщо не існує двох відкрито замкнених підмножин U і V в X таких, що:

1) $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = X$;
2) $U \cap Y \neq \varnothing$, $V \cap Y \neq \varnothing$;
3) $Z \subset U$ або $Z \subset V$;

або іншими словами, не можна відокремити множину Y в X, не відокремивши множини Z.

Наслідок 5. *Нехай $Z_1 \subseteq Y_1 \subseteq X_1$, $Z_2 \subseteq Y_2 \subseteq X_2$ — тихоновські простори, $(X_1, Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2, Z_2)$ і пара (Y_1, Z_1) зв'язна стосовно X_1. Тоді пара (Y_2, Z_2) є зв'язною стосовно X_2.*

Доведення випливає з очевидної леми 2.

Лема 2. *Нехай $Z \subseteq Y \subseteq X$ — тихоновські простори. Пара (Y, Z) зв'язна стосовно X тоді тільки тоді, коли вона є $\mathbb{Z}_2$-стабільною.*

Нехай G — топологічна група. Будемо говорити, що підпростір $A \subseteq X$ *G-щільний в X*, якщо довільне неперервне відображення $f\colon A \to G$ допускає не більше одного неперервного продовження на X.

Лема 3. *Наступні умови є еквівалентними для топологічного простору X та його підпростору A:*

(1) *A є G-щільним в X;*
(2) *відображення $t\colon A \to G$ означене як $t|_A = e_G$ допускає едине неперервне продовження на X.*

Доведення. Імплікація (1) ⇒ (2) є очевидною.

(2) ⇒ (1) Нехай $f\colon A \to G$ — деяке неперервне відображення. Припустимо, що f допускає два неперервних продовження F_1 та F_2 на X. Відображення F_1^{-1} та F_2^{-1} є неперервними продовженнями відображення f_{-1}. Тоді відображення $F_1 \cdot F_2^{-1}$ та $F_1 \cdot F_1^{-1}$ є неперервними продовженнями відображення на $f \cdot f^{-1}$. □

Теорема 2. *Нехай $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ і підпростір A G-щільний в X. Тоді підпростір B G-щільний в Y.*

Доведення. Нехай простір A G-щільний в X. Доведемо, що простір B G-щільний в X. Нехай $s\colon B \to G$ — відображення таке, що $s(B) = \{e_G\}$, $S\colon Y \to G$ — його продовження. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(\langle A \rangle) = \langle B \rangle$, $S^*\colon F(Y) \to G$ — гомоморфне продовження відображення. Тоді $S^*(W) = e_G$ для всіх $W \in \langle B \rangle$ Приймемо $f^* = S^* \circ i^{-1}$, $f = f^*|_X$. За побудовою $f^*(V) = e_G$ для всіх $V \in \langle A \rangle$. Отже, $f|_A$ — відображення, що має властивість

$f(A) \subseteq \{e_G\}$. За G-щільністю множини A в X отримаємо, що $f(X) = \{e_G\}$. Звідки, $f^*(F(X)) = \{e_G\}$, отже, $S^* = f^* \circ i^{-1}(F(Y)) = \{e_G\}$ і ми отримали єдиність неперервного продовження відображення s на множину Y. Тому за лемою 3 підпростір B є G-щільним в Y. $\square$

Якщо у всіх твердженнях цієї праці в якості групи G взяти абелеву топологічну групу, то можна замінити в цих твердженнях відношення M-еквівалентності на відношення A-еквівалентності.

Автор висловлює щиру подяку проф. Зарічному М. М. і рецензентам за цінні поради.

Список використаної літератури

1. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар*, Прикладні проблеми математики і механіки **2** (2004), 74–79.
2. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 38–46.
3. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 2: спеціальні ізоморфізми*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **88** (2019), 59–69.
4. A. V. Arhangel'skii and M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781 p.

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 14.12.2020
прийнята до друку 23.12.2020

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF THE TYCHONOFF SPACES 3: INVARIANTS

Nazar PYRCH

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020, Lviv, Ukraine
e-mail: pnazar@ukr.net

We consider topological properties characterizing of the position of the family of subspaces in a Tychonoff space which are preserved by the relation of M-equivalence.

Key words: free topological group, special isomorphism of the free groups, bundle of topological spaces.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 39–59
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 39–59
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.039-059

УДК 515.12

HOMEOMORPHISMS OF THE SPACE OF NONZERO INTEGERS WITH THE KIRCH TOPOLOGY

Yaryna STELMAKH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: yarynziya@ukr.net

The *Golomb* (resp. *Kirch*) topology on the set $\mathbb{Z}^\bullet$ of nonzero integers is generated by the base consisting of arithmetic progressions $a + b\mathbb{Z} = \{a + bn : n \in \mathbb{Z}\}$ where $a \in \mathbb{Z}^\bullet$ and b is a (square-free) number, coprime with a. In 2019 Dario Spirito proved that the space of nonzero integers endowed with the Golomb topology admits only two self-homeomorphisms. In this paper we prove an analogous fact for the space of nonzero integers endowed with the Kirch topology: it also admits exactly two self-homeomorphisms.

Key words: Kirch topology, superconnected space, superconnecting poset.

In this paper we describe the homeomorphism group of the space $\mathbb{Z}^\bullet$ of nonzero integers endowed with the *Kirch topology* τ_K, which is generated by the subbase consisting of the cosets $a + p\mathbb{Z}$ where $a \in \mathbb{Z}^\bullet$ and p is a prime number that does not divide a. On the subspace $\mathbb{N}$ of $\mathbb{Z}^\bullet$ this topology was introduced by Kirch in [6].

Banakh, Stelmakh and Turek [3] proved that the subspace $\mathbb{N}$ of $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$ is topologically rigid in the sense that each self-homeomorphism of $\mathbb{N}$ endowed with the subspace topology $\tau_K{\restriction}\mathbb{N} = \{U \cap \mathbb{N} : U \in \tau\}$ is the identity map of $\mathbb{N}$.

On the other hand, the space $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$ does admit a non-trivial self-homeomorpfism, namely the map

$$j : \mathbb{Z}^\bullet \to \mathbb{Z}^\bullet, \quad j : x \mapsto -x.$$

In this paper we prove that this is the unique non-trivial self-homeomorphism of the topological space $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$. A similar result for the Golomb topology on $\mathbb{Z}^\bullet$ was proved by Dario Spirito [11]. The topological rigidity of the Golomb topology on $\mathbb{N}$ was proved by Banakh, Spirito and Turek in [2].

Theorem 1. *The space $\mathbb{Z}^\bullet = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ of nonzero integers endowed with the Kirch topology admits only two self-homeomorphisms.*

2020 Mathematics Subject Classification: 54D05, 54H99, 11A41, 11N13.

The proof of this theorem follows the lines of the proof of the topological rigidity of the space $(\mathbb{N}, \tau_K{\restriction}\mathbb{N})$ from [3]. The proof is divided into 23 lemmas. A crucial role in the proof belongs to the superconnectedness of the Kirch space and the superconnecting poset of the Kirch space, which is defined in Section 2.

1. Four classical number-theoretic results

By Π we denote the set of prime numbers. For a number $x \in \mathbb{Z}$ by Π_x we denote the set of all prime divisors of x. Two numbers $x, y \in \mathbb{Z}$ are *coprime* iff $\Pi_x \cap \Pi_y = \varnothing$.

In the proof of Theorem 1 we shall exploit the following four known results of Number Theory. The first one is the famous Chinese Remainder Theorem (see. e.g. [5, 3.12]).

Theorem 2 (**Chinese Remainder Theorem**). *If $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ are pairwise coprime numbers, then for any numbers $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, the intersection $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i\mathbb{N})$ is infinite.*

The second classical result is not elementary and is due to Dirichlet [4, S.VI], see also [1, Ch.7].

Theorem 3 (**Dirichlet**). *For any coprime numbers $a, b \in \mathbb{N}$ the arithmetic progression $a + b\mathbb{N}$ contains a prime number.*

The third classical result is a recent theorem of Mihaĭlescu [8] who solved old Catalan's Conjecture [7].

Theorem 4 (**Mihăilescu**). *If $a, b \in \{m^{n+1} : n, m \in \mathbb{N}\}$, then $|a - b| = 1$ if and only if $\{a, b\} = \{2^3, 3^2\}$.*

The fourth classical result we use is due to Karl Zsigmondy [12], see also [10, Theorem 3].

Theorem 5 (**Zsigmondy**). *For integer numbers $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ the inclusion*

$$\Pi_{a^n-1} \subseteq \bigcup_{0<k<n} \Pi_{a^k-1}$$

holds if and only if one of the following conditions is satisfied:

(1) *$n = 2$ and $a = 2^k - 1$ for some $k \in \mathbb{N}$; then*
$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1) = 2^k(a - 1);$$

(2) *$n = 6$ and $a = 2$; then*
$$a^n - 1 = 2^6 - 1 = 63 = 3^2 \times 7 = (a^2 - 1)^2 \times (a^3 - 1).$$

2. Superconnected spaces and their superconnecting posets

In this section we discuss superconnected topological spaces and some order structures related to such spaces.

First let us introduce some notation and recall some notions.

For a set A and $n \in \omega$ let $[A]^n = \{E \subseteq A : |A| = n\}$ be the family of n-element subsets of A, and $[A]^{<\omega} = \bigcup\limits_{n\in\omega}[A]^n$ be the family of all finite subsets of A. For a function

$f : X \to Y$ and a subset $A \subseteq X$ by $f[A]$ we denote the image $\{f(a) : a \in A\}$ of the set A under the function f.

For a subset A of a topological space (X, τ) by $\overline{A}$ we denote the closure of A in X. For a point $x \in X$ we denote by $\tau_x := \{U \in \tau : x \in U\}$ the family of all open neighborhoods of x in (X, τ). A *poset* is an abbreviation for a partially ordered set.

A family $\mathcal{F}$ of subsets of a set X is called a *filter* if

- $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
- for any $A, B \in \mathcal{F}$ their intersection $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- for any sets $F \subseteq E \subseteq X$ the inclusion $F \in \mathcal{F}$ implies $E \in \mathcal{F}$.

A topological space (X, τ) is called *superconnected* if for any $n \in \mathbb{N}$ and non-empty open sets $U_1, \dots, U_n$ the intersection $\overline{U_1} \cap \dots \cap \overline{U_n}$ is non-empty. This allows us to define the filter

$$\mathcal{F}_\infty = \big\{B \subseteq X \colon \exists U_1, \dots, U_n \in \tau \setminus \{\varnothing\}\ \ (\overline{U_1} \cap \dots \cap \overline{U_n} \subseteq B)\big\}$$

called the *superconnecting filter* of X.

For every finite subset E of X consider the subfilter

$$\mathcal{F}_E := \Big\{B \subseteq X : \exists (U_x)_{x \in E} \in \prod_{x \in E} \tau_x \Big(\bigcap_{x \in E} \overline{U_x} \subseteq B\Big)\Big\}$$

of $\mathcal{F}_\infty$. Here we assume that $\mathcal{F}_\varnothing = \{X\}$. It is clear that for any finite sets $E \subseteq F$ in X we have $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$.

The family

$$\mathfrak{F} = \big\{\mathcal{F}_E : E \in [X]^{<\omega}\big\} \cup \{\mathcal{F}_\infty\}$$

is endowed with the inclusion partial order and is called the *superconnecting poset* of the superconnected space X. The filters $\mathcal{F}_\varnothing$ and $\mathcal{F}_\infty$ are the smallest and largest elements of the poset $\mathfrak{F}$, respectively.

The following obvious lemma shows that the superconnecting poset $\mathfrak{F}$ is a topological invariant of the superconnected space.

Proposition 1. *For any homeomorphism h of any superconnected topological space X, the map*

$$\tilde{h} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}, \quad \tilde{h} \colon \mathcal{F} \mapsto \{h[A] \colon A \in \mathcal{F}\},$$

is an order isomorphism of the superconnecting poset $\mathfrak{F}$.

In the following sections we shall study the order properties of the poset $\mathfrak{F}$ for the Kirch space $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$ and shall exploit the obtained information in the proof of the topological rigidity of the Kirch space.

3. Proof of Theorem 1

We divide the proof of Theorem 1 into 23 lemmas.

Lemma 1. *For any $a, b \in \mathbb{Z}^\bullet$ the closure $\overline{a + b\mathbb{Z}}$ of the arithmetic progression $a + b\mathbb{Z}$ in the Kirch space $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$ is equal to*

$$\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p \in \Pi_b} \big(\{0, a\} + p\mathbb{Z}\big).$$

Proof. First we prove that $\overline{a+b\mathbb{Z}} \subseteq \{0,a\}+p\mathbb{Z}$ for every $p \in \Pi_b$. Take any point $x \in \overline{a+b\mathbb{Z}}$ and assume that $x \notin p\mathbb{Z}$. Then $x+p\mathbb{Z}$ is a neighborhood of x and hence the intersection $(x+p\mathbb{Z}) \cap (a+b\mathbb{Z})$ is not empty. Then there exist $u, v \in \mathbb{Z}$ such that $x+pu = a+bv$. Consequently, $x-a = bv-pu \in p\mathbb{Z}$ and $x \in a+p\mathbb{Z}$.

Next, take any point $x \in \mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in\Pi_b}(\{0,a\}+p\mathbb{Z})$. Given any neighborhood O_x of x in $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$, we should prove that $O_x \cap (a+b\mathbb{Z}) \neq \varnothing$. By the definition of the Kirch topology there exists a square-free number $d \in \mathbb{Z}^\bullet$ such that d, x are coprime and $x + d\mathbb{Z} \subseteq O_x$.

If $\Pi_b \subseteq \Pi_x$, then b, d are coprime and by the Chinese Remainder Theorem

$$\varnothing \neq (x+d\mathbb{Z}) \cap (a+b\mathbb{Z}) \subseteq O_x \cap (a+b\mathbb{Z}).$$

So, we can assume $\Pi_b \setminus \Pi_x \neq \varnothing$. The choice of $x \in \bigcap\limits_{p\in\Pi_b}(\{0,a\}+p\mathbb{Z})$ guarantees that

$$x \in \bigcap_{p\in\Pi_b\setminus\Pi_x}(a+p\mathbb{Z}) = a+q\mathbb{Z}$$

where $q = \prod\limits_{p\in\Pi_b\setminus\Pi_x} p$. Since the numbers x and d are coprime and d is square-free, the greatest common divisor of b and d divides the number q. Since $x-a \in q\mathbb{Z}$, the Euclides algorithm yields two numbers $u, v \in \mathbb{Z}$ such that $x-a = bu-dv$, which implies that $O_x \cap (a+b\mathbb{Z}) \supseteq (x+d\mathbb{Z}) \cap (a+b\mathbb{Z}) \neq \varnothing$. □

Lemma 1 implies that the Kirch space $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$ is superconnected and hence possesses the superconnecting filter

$$\mathcal{F}_\infty = \Big\{F \subseteq \mathbb{Z}^\bullet : \exists U_1, \dots, U_n \in \tau_K \setminus \{\varnothing\} \quad \Big(\bigcap_{i=1}^n \overline{U_i} \subseteq F\Big)\Big\}$$

and the superconnecting poset

$$\mathfrak{F} = \big\{\mathcal{F}_E : E \in [\mathbb{Z}^\bullet]^{<\omega}\big\} \cup \{\mathcal{F}_\infty\}$$

consisting of the filters

$$\mathcal{F}_E = \Big\{F \subseteq \mathbb{Z}^\bullet : \exists (U_x)_{x\in E} \in \prod_{x\in E}\tau_x \Big(\bigcap_{x\in E}\overline{U_x} \subseteq F\Big)\Big\}.$$

Here for a point $x \in \mathbb{Z}^\bullet$ by $\tau_x := \{U \subseteq \mathbb{Z}^\bullet : x \in U\}$ we denote the family of open neighborhoods of x in the Kirch topology τ_K.

For a nonempty finite subset $E \subseteq \mathbb{Z}^\bullet$, let $\Pi_E = \bigcap\limits_{x\in E}\Pi_x$ be the set of common prime divisors of numbers in the set E. Also let

$$A_E = \{p \in \Pi : \exists k \in \mathbb{N} \ \ (E \subset \{0,k\}+p\mathbb{Z})\}.$$

Observe that $\Pi_E \subseteq A_E$ and $A_E \neq \varnothing$ because $2 \in A_E$. If E is a singleton, then $A_E = \Pi$; if $|E| \geq 2$, then

$$A_E \subseteq \Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} \subseteq \{2, \dots, \max E\}$$

for any distinct numbers $x, y \in E$. This inclusion follows from

Lemma 2. *For any two-element set $E = \{x,y\} \subset \mathbb{Z}^\bullet$ we have $A_E = \Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y}$.*

Proof. Each number $p \in \Pi_x$ (resp. $p \in \Pi_y$) belongs to A_E because $\{x,y\} \subset \{0,y\}+p\mathbb{Z}$ (resp. $\{x,y\} \subset \{0,x\}+p\mathbb{Z}\}$). Each number $p \in \Pi_{x-y}$ belongs to A_E because $\{x,y\} \subset x+p\mathbb{Z} \subseteq \{0,x\}+p\mathbb{Z}$. This proves that $\Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} \subseteq A_E$.

Now take any prime number $p \in A_E$ and assume that $p \notin \Pi_x \cup \Pi_y$. It follows from $\{x,y\} = E \subset \{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}$ that $\{x,y\} \subseteq \alpha_E(p)+p\mathbb{Z}$ and hence $x-y \in p\mathbb{Z}$ and $p \in \Pi_{x-y}$. □

Let $\alpha_E \colon A_E \to \omega$ be the unique function satisfying the following conditions:

(i) $\alpha_E(p) < p$ for all $p \in A_E$;
(ii) $E \subseteq \{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}$ for all $p \in A_E$;
(iii) $\alpha_E(2)=1$ and $\alpha_E(p)=0$ for all $p \in \Pi_E \setminus \{2\}$.

Lemma 3. *Let $A \subset \Pi$ be a finite set containing 2 and $\alpha : A \to \mathbb{N}_0$ be a function such that $\alpha(2)=1$ and $\alpha(p) \in \{0,\dots,p-1\}$ for all $p \in A \setminus \{2\}$. Let x be the product of odd prime numbers in the set A and y be any number in the set $\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A}(\alpha(p)+p\mathbb{Z})$. Then the set $E=\{y,x,2x\}$ has $A_E=A$ and $\alpha_E=\alpha$.*

Proof. For every prime number $p \in A$ we have $\{x,y\} \subset \{0,y\}+p\mathbb{Z}$, which implies that $p \in A_E$. Assuming that $A_E \setminus A$ contains some prime number p, we conclude that $x \notin p\mathbb{Z}$ and hence the inclusion $\{y,x,2x\} = E \subset \{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}$ implies $\{x,2x\} \subset \alpha_E(p)+p\mathbb{Z}$ and $x = 2x-x \in p\mathbb{Z}$. This contradiction shows that $A_E = A$. To show that $\alpha_E=\alpha$, take any prime number $p \in A = A_E$. If $p=2$, then $\alpha(p)=1=\alpha_E(p)$. So, we assume that $p \neq 2$. If $\alpha(p)=0$, then $y \in \alpha(p)+p\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ and hence $p \in \Pi_E$. In this case $\alpha_E(p)=0=\alpha(p)$. If $\alpha(p)\neq 0$, then the number $y \in \alpha(p)+p\mathbb{Z}$ is not divisible by p and then the inclusions $\{y,x,2x\} \subseteq \{0,\alpha(p)\}+p\mathbb{Z}$ and $\{y,x,2x\} = E \subset \{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}$ imply that $\alpha(p)=\alpha_E(p)$. □

The following lemma yields an arithmetic description of the filters $\mathcal{F}_E$.

Lemma 4. *For any finite subset $E \subseteq \mathbb{Z}^\bullet$ with $|E| \geq 2$ we have*

$$\mathcal{F}_E = \Big\{B \subseteq \mathbb{Z}^\bullet \colon \exists L \in [\Pi \setminus A_E]^{<\omega} \quad \bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}) \subseteq B\Big\}.$$

Here we assume that $\bigcap_{p\in\varnothing} p\mathbb{Z}^\bullet = \mathbb{Z}^\bullet$.

Proof. It suffices to verify two properties:

(1) for any $(U_x)_{x\in E} \in \prod_{x\in E} \tau_x$ there exists a finite set $L \subseteq \Pi \setminus A_E$ such that
$$\bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}) \subseteq \bigcap_{x\in E} \overline{U_x};$$

(2) for any finite set $L \subseteq \Pi \setminus A_E$ there exists a sequence of neighborhoods $(U_x)_{x\in E} \in \prod_{x\in E} \tau_x$ such that
$$\bigcap_{x\in E} \overline{U_x} \subseteq \bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}).$$

1. Given a sequence of neighborhoods $(U_x)_{x\in E} \in \prod_{x\in E} \tau_x$, for every $x \in E$ find a square-free number $q_x > x$ such that $\Pi_{q_x} \cap \Pi_x = \varnothing$ and $x + q_x\mathbb{Z} \subseteq U_x$. We claim that the finite set $L = \bigcup_{x\in E} \Pi_{q_x} \setminus A_E$ has the required property. Given any number

$$z \in \bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^{\bullet} \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0, \alpha_E(p)\} + p\mathbb{Z}),$$

we should prove that $z \in \overline{U_x}$ for every $x \in E$. By Lemma 1,

$$\mathbb{Z}^{\bullet} \cap \bigcap_{p\in\Pi_{q_x}} (\{0, x\} + p\mathbb{Z}) = \overline{(x + q_x\mathbb{Z})} \subseteq \overline{U_x}.$$

So, it suffices to show that $z \in \{0, x\} + p\mathbb{Z}$ for any $p \in \Pi_{q_x}$. Since the numbers x and q_x are coprime, $p \notin \Pi_x$ and hence $p \notin \Pi_E$. If $p \notin A_E$, then $p \in \Pi_{q_x} \setminus A_E \subseteq L$ and hence $z \in p\mathbb{N} \subseteq \{0, x\} + p\mathbb{Z}$. If $p \in A_E$, then $x \in E \subseteq \{0, \alpha_E(p)\} + p\mathbb{Z}$ and $x \in \alpha_E(p) + p\mathbb{Z}$ (as $p \notin \Pi_x$). Then $x + p\mathbb{Z} = \alpha_E(p) + p\mathbb{Z}$ and $z \in \{0, \alpha_E(p)\} + p\mathbb{Z} = \{0, x\} + p\mathbb{Z}$.

2. Fix any finite set $L \subseteq \Pi \setminus A_E$. For every $x \in E$ consider the neighborhood $U_x = \bigcap_{p\in L\cup A_E\setminus\Pi_x} (x + p\mathbb{Z})$ of x in the Kirch topology. By Lemma 1,

$$\overline{U_x} = \mathbb{Z}^{\bullet} \cap \bigcap_{p\in L\cup A_E\setminus\Pi_x} (\{0, x\} + p\mathbb{Z}).$$

Given any number $z \in \bigcap_{x\in E} \overline{U_x}$, we should show that

$$z \in \bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^{\bullet} \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0, \alpha_E(p)\} + p\mathbb{Z}).$$

This will follow as soon as we check that $z \in p\mathbb{Z}^{\bullet}$ for all $p \in L$ and $z \in \{0, \alpha_E(p)\} + p\mathbb{Z}$ for all $p \in A_E \setminus \Pi_E$.

Given any $p \in A_E \setminus \Pi_E$, we can find a point $x \in E \setminus p\mathbb{Z}$ and observe that $x \in E \subseteq \{0, \alpha_E(p)\} + p\mathbb{Z}$. Then

$$z \in \overline{U_x} \subseteq \overline{x + p\mathbb{Z}} \subseteq \{0, x\} + p\mathbb{Z} = \{0, \alpha_E(p)\} + p\mathbb{Z}.$$

Now take any prime number $p \in L$. Since $L \cap A_E = \varnothing$, we conclude that $E \not\subseteq p\mathbb{Z}$. So, we can fix a number $x \in E \setminus p\mathbb{Z}$. Taking into account that $p \notin A_E$, we conclude that $E \not\subseteq \{0, x\} + p\mathbb{Z}$ and hence there exists a number $y \in E$ such that $p\mathbb{Z} \neq y + p\mathbb{Z} \neq x + p\mathbb{Z}$. Then

$$z \in \overline{U_x} \cap \overline{U_y} \subseteq (\{0, x\} + p\mathbb{Z}) \cap (\{0, y\} + p\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}.$$

□

We shall use Lemma 4 for an arithmetic characterization of the partial order of the superconnecting poset $\mathfrak{F}$ of the Kirch space.

Lemma 5. *For two finite subsets $E, F \subseteq \Pi$ with $\min\{|E|, |F|\} \geq 2$ we have $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$ if and only if*

$$A_F \subseteq A_E, \quad \Pi_F \setminus \{2\} \subseteq \Pi_E \quad \textit{and} \quad \alpha_E{\restriction}A_F \setminus \Pi_E = \alpha_F{\restriction}A_F \setminus \Pi_E.$$

Proof. To prove the "only if" part, assume that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$. By Lemma 4, the set

$$\bigcap_{p\in A_F\setminus A_E} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z})$$

belongs to the filter $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$. By Lemma 4, there exists a finite set $L \subset \Pi \setminus A_F$ such that

$$\bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_F\setminus\Pi_F} (\{0,\alpha_F(p)\}+p\mathbb{Z}) \subseteq \bigcap_{p\in A_F\setminus A_E} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}). \quad (1)$$

This inclusion combined with the Chinese Remainder Theorem 2 implies

$$A_F \setminus A_E \subseteq L \subset \Pi \setminus A_F, \quad A_E \setminus (\Pi_E \cup \{2\}) \subseteq L \cup (A_F \setminus \Pi_F)$$

and

$$\alpha_E(p) = \alpha_F(p) \qquad \text{for any} \qquad p \in (A_F\setminus\Pi_F)\cap(A_E\setminus\Pi_E),$$

and

$$A_F \subseteq A_E, \qquad \Pi_F\setminus\{2\} \subseteq \Pi_E \qquad \text{and} \qquad \alpha_E{\restriction}A_F\setminus\Pi_E = \alpha_F{\restriction}A_F\setminus\Pi_E. \qquad (2)$$

To prove the "if" part, assume that condition (2) holds. To prove that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$, fix any set $\Omega \in \mathcal{F}_E$ and using Lemma 4, find a finite set $L \subseteq \Pi \setminus A_E$ such that

$$\bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}) \subseteq \Omega.$$

Consider the finite set

$$\Lambda = (L \cup A_E) \setminus A_F = L \cup (A_E \setminus A_F) \supseteq L$$

and observe that condition (2) implies the inclusion

$$\mathcal{F}_F \ni \bigcap_{p\in\Lambda} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_F\setminus\Pi_F} (\{0,\alpha_F(p)\}+p\mathbb{Z}) \subseteq \bigcap_{p\in L} p\mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p\in A_E\setminus\Pi_E} (\{0,\alpha_E(p)\}+p\mathbb{Z}) \subseteq \Omega, \quad (3)$$

yielding $\Omega \in \mathcal{F}_F$. $\square$

Lemma 6. *For two nonempty subsets $E, F \subseteq \mathbb{N}$ with $\min\{|E|,|F|\} = 1$ the relation $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$ holds if and only if $|E| = 1$ and $E \subseteq F$.*

Proof. The "if" part is trivial. To prove the "only if" part, assume that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$. First we prove that $|E| = 1$. Assuming that $|E| > 1$ and taking into account that $\min\{|E|,|F|\} = 1$, we conclude that $|F| = 1$. Choose a prime number $p > \max(E \cup F)$. Since $\bigcap_{y\in E} \overline{y + p\mathbb{Z}} \in \mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$, for the unique number x in the set F, there exists a square-free number d such that $\Pi_d \cap \Pi_x = \varnothing$ and $\overline{x + dp\mathbb{Z}} \subseteq \bigcap_{y\in E} \overline{y + p\mathbb{Z}}$. By Lemma 1,

$$x + qp\mathbb{Z}^\bullet \subseteq \overline{x + dp\mathbb{Z}} \subseteq \bigcap_{y\in E} \overline{y + p\mathbb{Z}} = \bigcap_{y\in E} (\{0,y\} + p\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}.$$

The latter equality follows from $p > \max E$ and $|E| > 1$. Then $x + dp\mathbb{Z}^\bullet \subseteq p\mathbb{Z}$ implies $x \in p\mathbb{Z}$, which contradicts the choice of $p > \max(E \cup F) \geq x$. This contradiction shows that $|E| = 1$. Let z be the unique element of the set E.

It remains to prove that $z \in F$. To derive a contradiction, assume that $z \notin F$. Take any odd prime number $p > \max(E \cup F)$ and consider the set

$$\{0, z\} + p\mathbb{Z} = \overline{z + p\mathbb{Z}} \in \mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F.$$

By the definition of the filter $\mathcal{F}_F$, for every $x \in F$ there exists a square-free number d_x such that $\Pi_{d_x} \cap \Pi_x = \varnothing$ and

$$\bigcap_{x \in F} \overline{x + d_x\mathbb{Z}} \subseteq \overline{z + p\mathbb{Z}} = \{0, z\} + p\mathbb{Z}.$$

Consider the set $P = \bigcup_{x \in F} \Pi_{d_x}$. If $p \in \Pi_{d_x}$ for some $x \in F$, we can use the Chinese Remainder Theorem 2 and find a number

$$c \in (x + p\mathbb{Z}) \cap \bigcap_{q \in P \setminus \{p\}} q\mathbb{Z} \subseteq \bigcap_{y \in F} \overline{y + d_y\mathbb{Z}} \subseteq \{0, z\} + p\mathbb{Z}.$$

Taking into account that x is not divisible by p, we conclude that $c \in (x + p\mathbb{Z}) \cap (z + p\mathbb{Z})$ and hence $x - z \in p\mathbb{Z}$, which contradicts the choice of $p > \max(E \cup F)$. This contradiction shows that $p \notin P$. Since $p \geq 3$, we can find a number $z' \notin \{0, z\} + p\mathbb{Z}$ and using the Chinese Remainder Theorem 2, find a number

$$u \in (z' + p\mathbb{Z}) \cap \bigcap_{q \in P} q\mathbb{Z}^\bullet \subseteq \bigcap_{y \in F} \overline{y + d_y\mathbb{Z}} \subseteq \{0, z\} + p\mathbb{Z},$$

which is a desired contradiction showing that $E \subseteq F$. □

As we know, the largest element of the superconnecting poset $\mathfrak{F}$ is the superconnecting filter $\mathcal{F}_\infty$. This filter can be characterized as follows.

Lemma 7. *The superconnecting filter $\mathcal{F}_\infty$ of the Kirch space is generated by the base consisting of the sets $q\mathbb{N}$ for an odd square-free number $q \in \mathbb{N}$, i.e.*

$$\mathcal{F}_\infty = \Big\{B \subseteq \mathbb{Z}^\bullet : \exists q \in (2\mathbb{N} - 1) \setminus \bigcup_{p \in \Pi} p^2\mathbb{N} \;\; (q\mathbb{Z}^\bullet \subseteq B)\Big\}.$$

Proof. Lemma 1 implies that each element $F \in \mathcal{F}_\infty$ contains the set $q\mathbb{Z}^\bullet$ for some odd square-free number q. Conversely, let q be an odd square-free number. Then the sets $U_1 = 1 + q\mathbb{Z}$ and $U_2 = 2 + q\mathbb{Z}$ are open in the Kirch topology on $\mathbb{Z}^\bullet$. By Lemma 1 we have

$$\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p \in \Pi_q} (\{0, 1\} + p\mathbb{Z}) \cap (\{0, 2\} + p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\bullet \cap \bigcap_{p \in \Pi_q} p\mathbb{Z} = q\mathbb{Z}^\bullet.$$

Hence $q\mathbb{Z}^\bullet \in \mathcal{F}_\infty$. □

Lemma 8. *For a nonempty subset $E \subseteq \mathbb{Z}^\bullet$ the following conditions are equivalent:*

(1) $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_\infty$;
(2) $A_E = \{2\}$.

If $|E| = 2$, then conditions (1), (2) *are equivalent to*

(3) $E \in \big\{\{2^n, 2^{n+1}\}, \{-2^n, -2^{n+1}\}, \{-2^n, 2^n\} : n \in \omega\big\}$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): Assume $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_\infty$. Consider the set $F = \{1, 2\}$ and observe that $A_F = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_{2-1} = \{2\}$ and $\Pi_F = \varnothing$. Thus $A_F \subseteq A_E$, $\Pi_F \setminus \{2\} \subseteq \Pi_E$ and $\alpha_F{\restriction}A_F\setminus\Pi_E = \alpha_E{\restriction}A_F\setminus\Pi_E$. Lemma 5 implies $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$. Since $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_\infty$ is the largest element of $\mathfrak{F}$ we get $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_F$. By using again Lemma 5 we get $A_E \subseteq A_F$ which implies that $A_E = \{2\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): If $A_E = \{2\}$, then by the Lemma 4, the filter $\mathcal{F}_E$ is generated by the base consisting of the sets $q\mathbb{Z}^\bullet$ for an odd square-free number $q \in \mathbb{Z}^\bullet$. Therefore $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_\infty$ by the Lemma 7.

(2) $\Rightarrow$ (3): Assume that $|E| = 2$ and $A_E = \{2\}$. By Lemma 2, $E = \{\varepsilon 2^a, \delta 2^b\}$, where $a, b \in \omega$ and $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$. Without loss of generality we can assume that $b \leqslant a$. By Lemma 2, $\Pi_{\varepsilon 2^a - \delta 2^b} = \Pi_{\varepsilon 2^b(2^{a-b} - \delta/\varepsilon)} \subseteq \{2\}$. The last inclusion implies that $a - b = 1$ and $\delta/\varepsilon = 1$ or $a - b = 0$ and $\delta/\varepsilon = -1$. In the first case the set E equals $\{2^b, 2^{b+1}\}$ or $\{-2^b, -2^{b+1}\}$, in the second case $E = \{2^b, -2^b\}$.

(3) $\Rightarrow$ (2): The implication (3) $\Rightarrow$ (2) follows from Lemma 2. $\square$

In the following lemmas by $\mathfrak{F}'$ we denote the set of maximal elements of the poset $\mathfrak{F} \setminus \{\mathcal{F}_\infty\}$.

Lemma 9. *For a nonempty finite subset $E \subseteq \mathbb{Z}^\bullet$ the filter $\mathcal{F}_E$ belongs to the family $\mathfrak{F}'$ if and only if there exists an odd prime number $p \notin \Pi_E$ such that $A_E = \{2, p\}$.*

Proof. To prove the "if" part, assume that $A_E = \{2, p\}$ and $p \notin \Pi_E$ for some odd prime number p. By Lemma 8, $\mathcal{F}_E \neq \mathcal{F}_\infty$. To show that the filter $\mathcal{F}_E$ is maximal in $\mathfrak{F} \setminus \{\mathcal{F}_\infty\}$, take any finite set $F \subset \mathbb{Z}^\bullet$ such that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F \neq \mathcal{F}_\infty$. By Lemmas 5 and 8, $\{2\} \neq A_F \subseteq \{2, p\}$, $\Pi_F \subseteq \Pi_E \cup \{2\} = \{2\}$, and $\alpha_F{\restriction}A_F \setminus \Pi_E = \alpha_E{\restriction}A_F \setminus \Pi_E$. It follows that $A_F = \{2, p\} = A_E$, $\Pi_F \cup \{2\} = \Pi_E \cup \{2\}$ and $\alpha_F = \alpha_E$. Applying Lemma 5, we conclude that $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_F$, which means that the filter $\mathcal{F}_E$ is a maximal element of the poset $\mathcal{F} \setminus \{\mathcal{F}_\infty\}$.

To prove the "only if" part, assume that $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F}'$. By Lemma 8, $A_E \neq \{2\}$ and hence there exists an odd prime number $p \in A_E$. We claim that $p \notin \Pi_E$. To derive a contradiction, assume that $p \in \Pi_E$ and consider the sets $F = \{p, 2p\}$ and $G = \{1, p, 2p\}$. By Lemma 2, $A_F = A_G = \{2, p\}$, $\Pi_F = \{p\}$, and $\Pi_G = \varnothing$. Taking into account that $F \subset G$, $A_F = \{2, p\} \subseteq A_E$, $\Pi_F \setminus \{2\} = \{p\} \subseteq \Pi_E$ and $A_F \setminus \Pi_E \subseteq \{2\}$, we can apply Lemmas 5, 8 and conclude that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F \subseteq \mathcal{F}_G \neq \mathcal{F}_\infty$. The maximality of $\mathcal{F}_E$ implies $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_F = \mathcal{F}_G$. By Lemma 5, the equality $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_F$ implies $p \in \Pi_F \setminus \{2\} \subseteq \Pi_G = \varnothing$, which is a contradiction showing that $p \notin \Pi_E$.

Now consider the set $H = \{\alpha_E(p), p, 2p\}$ and observe that $A_H = \{2, p\}$, $\Pi_H = \varnothing$ and $\alpha_H(p) = \alpha_E(p)$. Lemmas 5 and 8 guarantee that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_H \neq \mathcal{F}_\infty$. By the maximality of $\mathcal{F}_E$, we have $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_H$. Applying Lemma 5 once more, we conclude that $A_E = A_H = \{2, p\}$. $\square$

Lemma 9 implies the following description of the set $\mathfrak{F}'$.

Lemma 10. $\mathfrak{F}' = \big\{\mathcal{F}_{\{a,p,2p\}} : p \in \Pi \setminus \{2\},\ \ a \in \{1, \dots, p-1\}\big\}$.

Let $\mathfrak{F}''$ be the set of maximal elements of the poset $\mathfrak{F} \setminus (\mathfrak{F}' \cup \{\mathcal{F}_\infty\})$

Lemma 11. *For a finite set $E \subset \mathbb{Z}^\bullet$, the filter $\mathcal{F}_E$ belongs to the family $\mathfrak{F}''$ if and only if one of the following conditions holds:*

(1) *there exists an odd prime number p such that $p \in \Pi_E$ and $A_E = \{2, p\}$;*
(2) *there are two distinct odd prime numbers p, q such that $A_E = \{2, p, q\}$ and $\Pi_E \subseteq \{2\}$.*

Proof. To prove the "only if" part, assume that $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F}''$. By Lemma 8, there is an odd prime number $p \in A_E$. If $A_E = \{2, p\}$, then $p \in \Pi_E$ by Lemma 9, and condition (1) is satisfied. So, we assume that $\{2, p\} \neq A_E$ and find an odd prime number $q \in A_E \setminus \{2, p\}$. By Lemma 3, there is a number $x \in \mathbb{N}$ such that for the set $F = \{x, pq, 2pq\}$ we have $A_F = \{2, p, q\}$, $\Pi_F = \varnothing$, $\alpha_F(p) = \alpha_E(p)$ and $\alpha_F(q) = \alpha_E(q)$. Then $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F$ by Lemma 5, and $\mathcal{F}_F \in \mathfrak{F} \setminus (\mathfrak{F}' \cup \{\mathcal{F}_\infty\})$ by Lemma 9. Now the maximality of the filter $\mathcal{F}_E$ implies that $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_F$ and hence $A_E = A_F = \{2, p, q\}$ and $\Pi_E \subseteq \Pi_F \cup \{2\} = \{2\}$, see Lemma 5.

To prove the "if" part, we consider two cases. First we assume that $A_E = \{2, p\}$ and $p \in \Pi_E$ for some odd prime number p. By Lemmas 8 and 9, $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F} \setminus (\{\mathcal{F}_\infty\} \cup \mathfrak{F}')$. To prove that $\mathcal{F}_E$ is a maximal element of $\mathfrak{F} \setminus (\{\mathcal{F}_\infty\} \cup \mathfrak{F}')$, take any finite set $F \subseteq \mathbb{Z}^\bullet$ such that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F \in \mathfrak{F} \setminus (\{\mathcal{F}_\infty\} \cup \mathfrak{F}')$. Lemma 6 implies that $\min\{|E|, |F|\} \geq 2$ and then by Lemmas 5 and 9, we have $A_F = \{2, p\}$, $\Pi_F \setminus \{2\} \subseteq \{p\}$ and $\alpha_E{\restriction}A_F \setminus \{p\} = \alpha_F{\restriction}A_F \setminus \{p\}$. Now notice that $p \in \Pi_F$ since otherwise $\mathcal{F}_F \in \mathfrak{F}'$ by Lemma 9. By using again Lemma 5 we get $\mathcal{F}_F = \mathcal{F}_E$ which means that $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F}''$.

Now assume that there are two distinct odd prime numbers p, q such that $A_E = \{2, p, q\}$ and $\Pi_E \subseteq \{2\}$. By Lemmas 8 and 9, $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F} \setminus (\{\mathcal{F}_\infty\} \cup \mathfrak{F}')$. To prove that $\mathcal{F}_E$ is a maximal element of $\mathfrak{F} \setminus (\{\mathcal{F}_\infty\} \cup \mathfrak{F}')$, take any finite set $F \subseteq \mathbb{Z}^\bullet$ such that $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{F}_F \in \mathfrak{F} \setminus (\{\mathcal{F}_\infty\} \cup \mathfrak{F}')$. Lemma 5 implies that $A_F \subseteq \{2, p, q\}$, $\Pi_F \subseteq \{2\}$ and $\alpha_E{\restriction}A_F \setminus \Pi_E = \alpha_F{\restriction}A_F \setminus \Pi_E$. Taking into account that $\mathcal{F}_F \notin \mathfrak{F}' \cup \{\mathcal{F}_\infty\}$ and $\Pi_F \subseteq \{2\}$, we can apply Lemmas 9, 8 and conclude that $A_F = \{2, p, q\}$. We therefore know that $A_F = A_E$, $\Pi_E \cup \{2\} = \Pi_F \cup \{2\}$ and $\alpha_F{\restriction}A_E \setminus \Pi_F = \alpha_E{\restriction}A_E \setminus \Pi_F$. By Lemma 5, $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_F$ and hence $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F}''$. □

Lemma 12. *For any homeomorphism h of the Kirch space and any odd prime number p we have*

$$\tilde{h}(\mathcal{F}_{\{p,2p\}}) = \mathcal{F}_{\{p,2p\}}.$$

Proof. By Proposition 1, the homeomorphism h induces an order isomorphism $\tilde{h}$ of the superconnecting poset $\mathfrak{F}$ on the Kirch space. Then $\tilde{h}[\mathfrak{F}'] = \mathfrak{F}'$ and $\tilde{h}[\mathfrak{F}''] = \mathfrak{F}''$.

By Lemmas 11 and 3, $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}''_2 \cup \mathfrak{F}''_3$ where

$$\mathfrak{F}''_2 = \big\{\mathcal{F}_{\{p,2p\}} : p \in \Pi \setminus \{2\}\big\} \qquad \text{and}$$
$$\mathfrak{F}''_3 = \big\{\mathcal{F}_{\{x,pq,2pq\}} : p, q \in \Pi \setminus \{3\},\ x \in \{0, \dots, pq-1\} \setminus (p\mathbb{Z} \cup q\mathbb{Z})\big\}.$$

By Lemmas 5 and 9, for every filter $\mathcal{F}_{\{p,2p\}} \in \mathfrak{F}''_2$ the set

$$\uparrow\!\mathcal{F}_{\{p,2p\}} = \big\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}' : \mathcal{F}_{\{p,2p\}} \subset \mathcal{F}_E\big\}$$

coincides with the set $\big\{\mathcal{F}_{\{a,p,2p\}} : a \in \{1, \dots, p-1\}\big\}$ and hence has cardinality $p-1$.

On the other hand, for any filter $\mathcal{F}_{\{x,pq,2pq\}} \in \mathfrak{F}''_3$, the set

$$\uparrow\!\mathcal{F}_{\{x,pq,2pq\}} = \big\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}' : \mathcal{F}_{\{x,pq,2pq\}} \subset \mathcal{F}\big\}$$

coincides with the doubleton $\big\{\mathcal{F}_{\{x,p,2p\}}, \mathcal{F}_{\{x,q,2q\}}\big\}$.

These order properties uniquely determine the filters $\mathcal{F}_{\{p,2p\}}$ for $p \in \Pi \setminus \{3\}$ and ensure that $\tilde{h}(\mathcal{F}_{\{p,2p\}}) = \mathcal{F}_{\{p,2p\}}$ for every $p \in \Pi \setminus \{3\}$.

Next, observe that $\mathcal{F}_{\{3,6\}}$ is a unique element $\mathcal{F}$ of $\mathfrak{F}''$ such that

$$\uparrow\mathcal{F} \cap \bigcup_{p \in \Pi\setminus\{3\}} \uparrow\mathcal{F}_{\{p,2p\}} = \varnothing.$$

This uniqueness order property of $\mathcal{F}_{\{3,6\}}$ ensures that $\tilde{h}(\mathcal{F}_{\{3,6\}}) = \mathcal{F}_{\{3,6\}}$. □

Lemma 13. *Let $E \subseteq \mathbb{Z}^\bullet$ be a finite subset such that $A_E = \{2, p\}$ for some odd prime number $p \notin \Pi_E$. Then $A_{h[E]} = \{2, p\}$.*

Proof. By Lemma 9, $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F}'$. Consider the doubleton $\{p, 2p\}$ which has $A_{\{p,2p\}} = \{2, p\}$ and $\Pi_{\{p,2p\}} = \{p\}$. By Lemma 5, $\mathcal{F}_{\{p,2p\}} \subseteq \mathcal{F}_E$ and by Lemma 12,

$$\mathcal{F}_{\{p,2p\}} = \tilde{h}(\mathcal{F}_{\{p,2p\}}) = \mathcal{F}_{\{h(p),h(2p)\}} \subseteq \mathcal{F}_{h[E]}.$$

By Lemma 5, $A_{h[E]} \subseteq A_{\{p,2p\}} = \{2, p\}$. By Lemma 8, $A_{h[E]} = \{2, p\}$. □

Definition 1. A homeomorphism h of the Kirch space $(\mathbb{Z}^\bullet, \tau_K)$ is called *positive* if $h(1) > 0$.

Lemma 14. *Every positive homeomorphism h of the Kirch space has $h(x) = x$ for any $x \in \{\pm 2^n, n \in \omega\}$*

Proof. Consider the graph $\Gamma_2 = (V_2, \mathcal{E})$ with the set of vertices $V_2 = \{\pm 2^n : n \in \omega\}$ and the set of edges

$$\mathcal{E} = \left\{\{2^n, 2^{n+1}\}, \{-2^n, -2^{n+1}\}, \{-2^n, 2^n\} : n \in \omega\right\}.$$

Observe that 1 and -1 are the unique vertices of Γ_2 that have order 2. Any other vertices have order 3. This ensures that $h(1) = \pm 1$. The positivity of h implies that $h(1) = 1$. Then $h(-1) = -1$, $h(2) = 2$. Hence $h(\pm 2^n) = \pm 2^n$ for all $n \in \omega$. □

Lemmas 14 and 12 imply

Lemma 15. *For any positive homeomorphism h of the Kirch space and any odd prime number p we have*

$$\tilde{h}(\mathcal{F}_{\{1,p,2p\}}) = \mathcal{F}_{\{1,p,2p\}} \quad \textit{and} \quad \tilde{h}(\mathcal{F}_{\{2,p,2p\}}) = \mathcal{F}_{\{2,p,2p\}}.$$

Lemma 16. *For an integer number $x \in \mathbb{Z}^\bullet \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$ and an odd prime p, the following conditions are equivalent:*

(1) $p \in \Pi_x$;
(2) $\mathcal{F}_{\{1,x\}} \subseteq \mathcal{F}_{\{1,p,2p\}}$ *and* $\mathcal{F}_{\{2,x\}} \subseteq \mathcal{F}_{\{2,p,2p\}}$.

Proof. If $p \in \Pi_x$, then $A_{\{1,p,2p\}} = \{2, p\} \subseteq A_{\{1,x\}}$, $\Pi_{\{1,x\}} \cup \{2\} = \{2\} = \Pi_{\{1,p,2p\}} \cup \{2\}$ and $\alpha_{\{1,x\}}(p) = 1 = \alpha_{\{1,p,2p\}}(p)$. By Lemma 5, $\mathcal{F}_{\{1,x\}} \subseteq \mathcal{F}_{\{1,p,2p\}}$. By analogy we can prove that $\mathcal{F}_{\{2,x\}} \subseteq \mathcal{F}_{\{2,p,2p\}}$.

Conversely, assume $\mathcal{F}_{\{1,x\}} \subseteq \mathcal{F}_{\{1,p,2p\}}$ and $\mathcal{F}_{\{2,x\}} \subseteq \mathcal{F}_{\{2,p,2p\}}$. By Lemmas 5 and 2, we have

$$\{2, p\} = A_{\{1,p,2p\}} \subseteq A_{\{1,x\}} = \Pi_x \cup \Pi_{x-1} \text{ and } \{2, p\} = A_{\{2,p,2p\}} \subseteq A_{\{2,x\}} = \{2\} \cup \Pi_x \cup \Pi_{x-2}$$

and hence $p \in (\Pi_x \cup \Pi_{x-1}) \cap (\Pi_x \cup \Pi_{x-2}) \setminus \{2\} \subseteq \Pi_x$. □

Proposition 1 and Lemmas 14, 15, 16 imply

Lemma 17. *For every homeomorphism h of the Kirch space and any number $x \in \mathbb{N}$ we have*

$$\Pi_x \cup \{2\} = \Pi_{h(x)} \cup \{2\}.$$

For every prime number p consider the set

$$V_p = \{\pm 2^{n-1} p^m : n, m \in \mathbb{N}\}$$

of numbers $x \in \mathbb{N}$ such that $p \in \Pi_x \subseteq \{2, p\}$. Lemmas 14 and 17 imply that $h[V_p] = V_p$ for every homeomorphism h of the Kirch space.

Consider the graph $\Gamma_p = (V_p, \mathcal{E}_p)$ on the set V_p with the set of edges

$$\mathcal{E}_p := \{E \in [V_p]^2 : A_E = \{2, p\}\}.$$

Lemma 18. *For every prime number p and every homeomorphism h of the Kirch space, the restriction of h to V_p is an isomorphism of the graph Γ_p.*

Proof. Let $E \in \mathcal{E}_p$. Since $p \in \Pi_E$, we can apply Lemma 11 and conclude that $\mathcal{F}_E \in \mathfrak{F}''$. Using fact that $\tilde{h}$ is isomorphism of $\mathfrak{F}$ we get $\mathcal{F}_{h[E]} = \tilde{h}(\mathcal{F}_E) \in \mathfrak{F}''$. Since $h[E] \subseteq h[V_p] = V_p$, we obtain $p \in \Pi_{h[E]}$. Using Lemma 11 once more, we obtain that $A_{h[E]} = \{2, p\}$, which means that $h[E] \in \mathcal{E}_p$. By analogical reasoning we can prove that $h^{-1}[E] \in \mathcal{E}_p$ for every $E \in \mathcal{E}_p$. This means that $h{\restriction}V_p$ is an isomorphism of the graph Γ_p. □

The structure of the graph Γ_p depends on properties of the prime number p.

A prime number p is called

- *Fermat prime* if $p = 2^n + 1$ for some $n \in \mathbb{N}$;
- *Mersenne prime* if $p = 2^n - 1$ for some $n \in \mathbb{N}$;
- *Fermat–Mersenne* if p is either Fermat prime or Mersenne prime.

It is known (and easy to see) that for any Fermat prime number $p = 2^n + 1$ the exponent n is a power of 2, and for any Mersenne prime number $p = 2^n - 1$ the power n is a prime number. It is not known whether there are infinitely many Fermat–Mersenne prime numbers. All known Fermat prime numbers are the numbers $2^{2^n} + 1$ for $0 \le n \le 4$ (see `oeis.org/A019434` in [9]). At the moment only 51 Mersenne prime numbers are known, see the sequence `oeis.org/A000043` in [9].

Lemma 19. *Let p be an odd prime number, $p \neq 3$.*

(1) *If $p = 3$, then the set $\mathcal{E}_p$ of the edges of the graph Γ_p coincides with the set of doubletons* $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \varepsilon 2^{a-1}3^{b+1}\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, 2\varepsilon^{a-1}3^{b+2}\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \varepsilon 2^a 3^b\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \varepsilon 2^{a+1}3^b\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^{b+1}, \varepsilon 2^{a+1}3^b\}$, $\{\varepsilon 2^{a+1}3^b, \varepsilon 2^a 3^{b+1}\}$, $\{\varepsilon 2^{a+3}3^b, \varepsilon 2^a 3^{b+2}\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a-1}3^{b+1}\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^a 3^b\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a+2}3^b\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a-1}3^b\}$ *for some* $a, b \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

(2) *If $p = 2^m + 1 > 3$ is Fermat prime, then*

$$\mathcal{E}_p = \big\{\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^a p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a+m-1}p^b\}, \\ \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{m+a-1}p^b, \varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\} : a, b \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \{-1, 1\}\big\}.$$

(3) *If $p = 2^m - 1 > 3$ is a Mersenne prime, then*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p =\big\{&\{\varepsilon 2^a p^b, \varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^{m+a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}, \varepsilon 2^{m+a-1}p^b\},\\ &\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\} : a, b \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \{-1, 1\}\big\}.\end{aligned}$$

(4) *If p is not Fermat–Mersenne, then*

$$\mathcal{E}_p = \big\{\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^a p^b\} : a, b \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \{-1, 1\}\big\}.$$

Proof. Proof of Lemma 19 in each of cases (1)–(4) will be similar. The edges of graph Γ_p are 2-element subsets of set V_p such that $A_E = \{2, p\}$. Since the vertices of graph Γ_p are numbers of the form $\pm 2^{n-1}p^m$, where $n, m \in \mathbb{N}$, we can apply Lemma 2 and conclude that a doubleton $\{x, y\} \subset V_p$ belongs to $\mathcal{E}_p$ if and only if $\{2, p\} = \Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y}$. In subsequent proofs, we will intensively use the Mihăilescu Theorem 4 saying that $2^3, 3^2$ is a unique pair of consecutive powers.

1. First we consider the case of $p = 3$. It is easy to see that the doubletons $\{x, y\}$ written in statement (1) have $\Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} \subseteq \{2, 3\}$, which implies that $\{x, y\} \in \mathcal{E}_3$. It remains to show that every doubleton $\{x, y\} \in \mathcal{E}_3$ is of the form indicated in statement (1). Write $\{x, y\}$ as $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \delta 2^{c-1}3^d\}$ for some $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$ such that $2^{a-1}3^b \le 2^{c-1}3^d$.

If $a = c$ and $b = d$, then $\varepsilon \neq \delta$ and $\{x, y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a-1}3^b\}$.

If $a = c$, then $b \le d$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, 3\}$ implies that $\Pi_{3^{d-b} - \varepsilon/\delta} \subseteq \{2, 3\}$ and hence $3^{d-b} - \varepsilon/\delta$ is a power of 2. If $\varepsilon/\delta = 1$ then by the Mihăilescu Theorem 4, $d - b \in \{1, 2\}$, which means that $\{x, y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \varepsilon 2^{a-1}3^{b+1}\}$ or $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \varepsilon 2^{a-1}3^{b+2}\}$. If $\varepsilon/\delta = -1$ then by the Mihăilescu Theorem 4, $d - b \in \{0, 1\}$, which means that $\{x, y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a-1}3^b\}$ or $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a-1}3^{b+1}\}$.

If $b = d$, then $a \le c$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, 3\}$ implies that $\Pi_{2^{c-a} - \varepsilon/\delta} \subseteq \{2, 3\}$ and hence $2^{c-a} - \varepsilon/\delta$ is either 2 or a power of 3. If $\varepsilon/\delta = 1$ then by the Mihăilescu Theorem 4, $c - a \in \{1, 2\}$, which means that $\{x, y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \varepsilon 2^a 3^b\}$ or $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, \varepsilon 2^{a+1}3^b\}$. If $\varepsilon/\delta = -1$ then by the Mihăilescu Theorem 4, $c - a \in \{0, 1, 3\}$, which means that $\{x, y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a-1}3^b\}$, $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^a 3^b\}$ or $\{\varepsilon 2^{a-1}3^b, -\varepsilon 2^{a+2}3^b\}$.

So, we assume that $a \neq c$ and $b \neq d$. In this case we should consider four subcases.

If $a < c$ and $b < d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, 3\}$ implies that each prime divisor of $2^{c-a}3^{d-b} - \varepsilon/\delta$ is equal to 2 or 3, which is not possible.

If $a < c$ and $b > d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, 3\}$ and $2^{a-1}3^b \le 2^{c-1}3^d$ imply that $2^{c-a} - (\varepsilon/\delta)3^{b-d} = 1$ which implies that $\varepsilon = \delta$. Hence $c - a = 2$ and $b - d = 1$ by the Mihăilescu Theorem 4. In this case $\{x, y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}3^{d+1}, \varepsilon 2^{a+1}3^d\}$.

If $a > c$ and $b < d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, 3\}$ and $2^{a-1}3^b \le 2^{c-1}3^d$ imply that $3^{d-b} - (\varepsilon/\delta)2^{a-c} = 1$. This implies that $\varepsilon/\delta = 1$ and hence $\langle d - b, a - c\rangle \in \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ by the Mihăilescu Theorem 4. In this case $\{x, y\}$ is equal to $\{2^{c+1}3^b, 2^c 3^{b+1}\}$ or $\{2^{c+3}3^b, 2^c 3^{b+2}\}$.

The subcase $a > c$ and $b > d$ is forbidden by the inequality $2^{a-1}3^b \le 2^{c-1}3^d$.

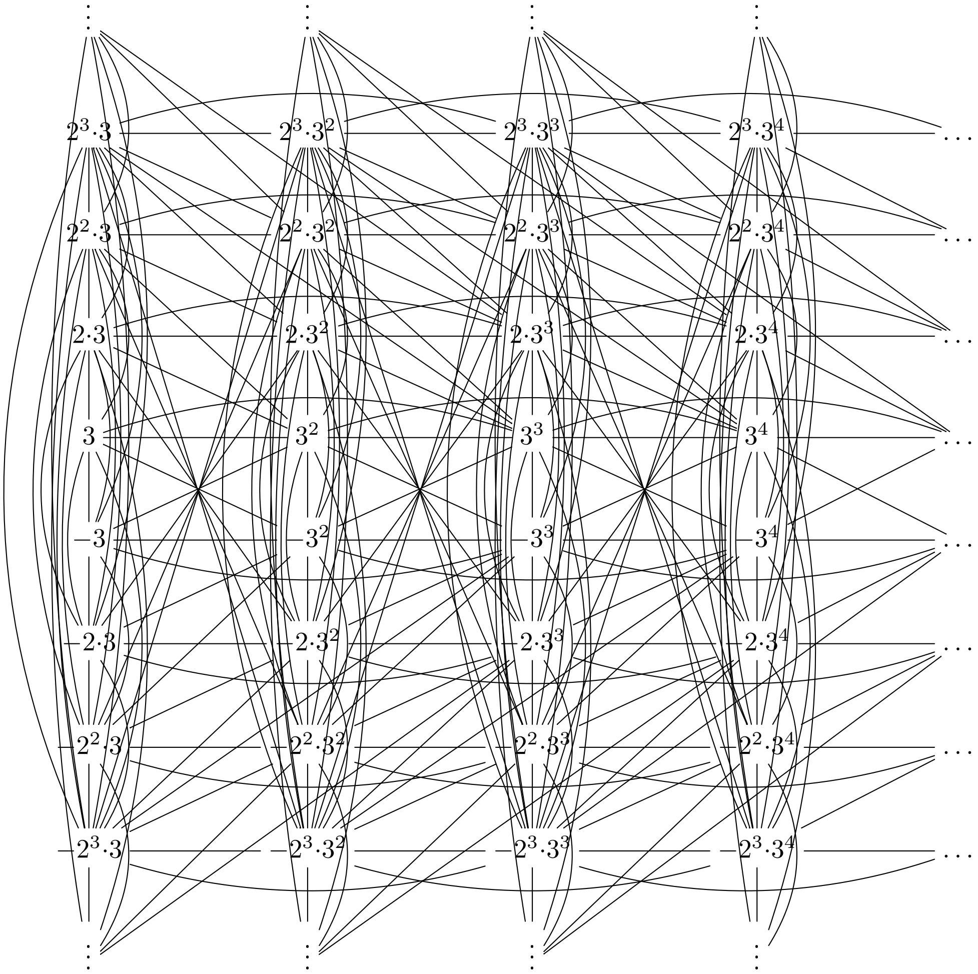

FIGURE 1. The graph Γ_3

2. Assume that $p = 2^m + 1 > 3$ is a Fermat prime. In this case $m > 1$. Since $p > 3$, p is not Mersenne prime. It is easy to check that every doubleton

$$\{x, y\} \in \big\{\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^a p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a+m-1}p^b\},$$
$$\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{m+a-1}p^b, \varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\} : a, b \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \{-1, 1\}\big\}$$

has $A_{\{x,y\}} = \Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} = \{2, p\}$ and hence $\{x, y\} \in \mathcal{E}_p$.

Now assume that $\{x, y\} \in \mathcal{E}_p$ is an edge of the graph Γ_p. Then

$$\Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} = A_{\{x,y\}} = \{2, p\}$$

and $\{x,y\}$ can be written as $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \delta 2^{c-1}p^d\}$ for some $a,b,c,d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon,\delta \in \{-1,1\}$ with $2^{a-1}p^b \le 2^{c-1}p^d$.

If $a=c$, $b=d$ and $\varepsilon=-\delta$ then $\Pi_{\varepsilon 2^{a-1}p^b-\delta 2^{a-1}p^b} = \Pi_{\varepsilon 2^a p^b} \subset \{2,p\}$. In this case $\{x,y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}$.

If $a=c$, then $b \le d$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2,p\}$ implies that $\Pi_{p^{d-b}-\varepsilon/\delta} \subseteq \{2,p\}$ and hence $p^{d-b}-\varepsilon/\delta$ is a power of 2. By the Mihăilescu Theorem 4, $d-b \in \{0,1\}$. If $d-b=0$, then $\varepsilon=-\delta$ and $\{x,y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}$ by the preceding case. So, we assume that $d-b=1$. Since p is not Mersenne prime, we conclude that $\varepsilon=\delta$, and hence $\{x,y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\}$.

If $b=d$, then $a \le c$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2,p\}$ implies that $\Pi_{2^{c-a}-\varepsilon/\delta} \subseteq \{2,p\}$ and hence $2^{c-a}-\varepsilon/\delta$ is a power of p. By the Mihăilescu Theorem 4, $2^{c-a}-\varepsilon/\delta \in \{1,p\} = \{1, 2^m+1\}$. If $\varepsilon=\delta$ then $c-a=1$, which means that $\{x,y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^a p^b\}$. If $\varepsilon=-\delta$ then $c-a=m$ and $\{x,y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a+m-1}p^b\}$.

So, we assume that $a \ne c$ and $b \ne d$. In this case we should consider four subcases.

If $a<c$ and $b<d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2,p\}$ implies that each prime divisor of $2^{c-a}p^{d-b} - \varepsilon/\delta$ is equal to 2 or p, which is not possible.

If $a<c$ and $b>d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2,p\}$ implies that $2^{c-a}-(\varepsilon/\delta)p^{b-d}=1$ and hence $\varepsilon=\delta$. In this case the Mihăilescu Theorem 4 ensures that $b-d=1$ and hence $2^{c-a}=p+1=2^m+2$ which is not possible (as $m>1$).

If $a>c$ and $b<d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2,p\}$ implies that $p^{d-b}-(\varepsilon/\delta)2^{a-c}=1$, which implies that $\varepsilon=\delta$. The Mihăilescu Theorem 4 implies that $d-b=1$ and hence $2^{a-c} = p-1=2^m$ and $a-c=m$. In this case $\{x,y\} = \{\varepsilon 2^{c+m-1}2^b, \varepsilon 2^{c-1}p^{b+1}\}$.

The subcase $a>c$ and $b>d$ is forbidden by the inequality $2^{a-1}p^b \le 2^{c-1}p^d$.

3. Assume that $p=2^m-1>3$ is Mersenne prime. In this case $m>2$ and p is not Fermat. It is easy to check that every doubleton

$$\{x,y\} \in \big\{\{\varepsilon 2^a p^b, \varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^{m+a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}, \varepsilon 2^{m+a-1}p^b\},$$
$$\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\} : a,b \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \{-1,1\}\big\}$$

has $A_{\{x,y\}} = \Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} = \{2,p\}$ and hence $\{x,y\} \in \mathcal{E}_p$.

Now assume that $\{x,y\} \in \mathcal{E}_p$ is an edge of the graph Γ_p. Then $\Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} = A_{\{x,y\}} = \{2,p\}$ and $\{x,y\}$ can be written as $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \delta 2^{c-1}p^d\}$ for some $a,b,c,d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon,\delta \in \{-1,1\}$ with $2^{a-1}p^b \le 2^{c-1}p^d$.

If $a=c$, $b=d$, then $\varepsilon=-\delta$ and $\{x,y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}$.

If $a=c$, then $b \le d$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2,p\}$ implies that $\Pi_{p^{d-b}-\varepsilon/\delta} \subseteq \{2,p\}$ and hence $p^{d-b}-\varepsilon/\delta$ is a power of 2. By the Mihăilescu Theorem 4, $d-b \in \{0,1\}$. If $d-b=0$, then $\{x,y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}$ by the preceding case. So, we assume that $d-b=1$. If $\varepsilon=\delta$, then $p^{d-b}-\varepsilon/\delta = p-1 = 2^m-2$ is a power of 2, which is not true as $m>2$. Therefore $\varepsilon=-\delta$ and $\{x,y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^{b+1}\}$

If $b=d$, then $a \le c$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2,p\}$ implies that $\Pi_{2^{c-a}-\varepsilon/\delta} \subseteq \{2,p\}$ and hence $2^{c-a}-\varepsilon/\delta$ is a power of p. By the Mihăilescu Theorem 4, $2^{c-a}-\varepsilon/\delta \in \{1,p\} = \{1, 2^m-1\}$, which implies that $\varepsilon=\delta$ and $c-a \in \{1,m\}$. Therefore $\{x,y\}$ is equal to $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^a p^b\}$ or $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^{m+a-1}p^b\}$.

So, we assume that $a \ne c$ and $b \ne d$. By analogy with the case of Fermat primes, we can show that the subcases ($a<c$ and $b<d$) and ($a>c$ and $b>d$) are impossible.

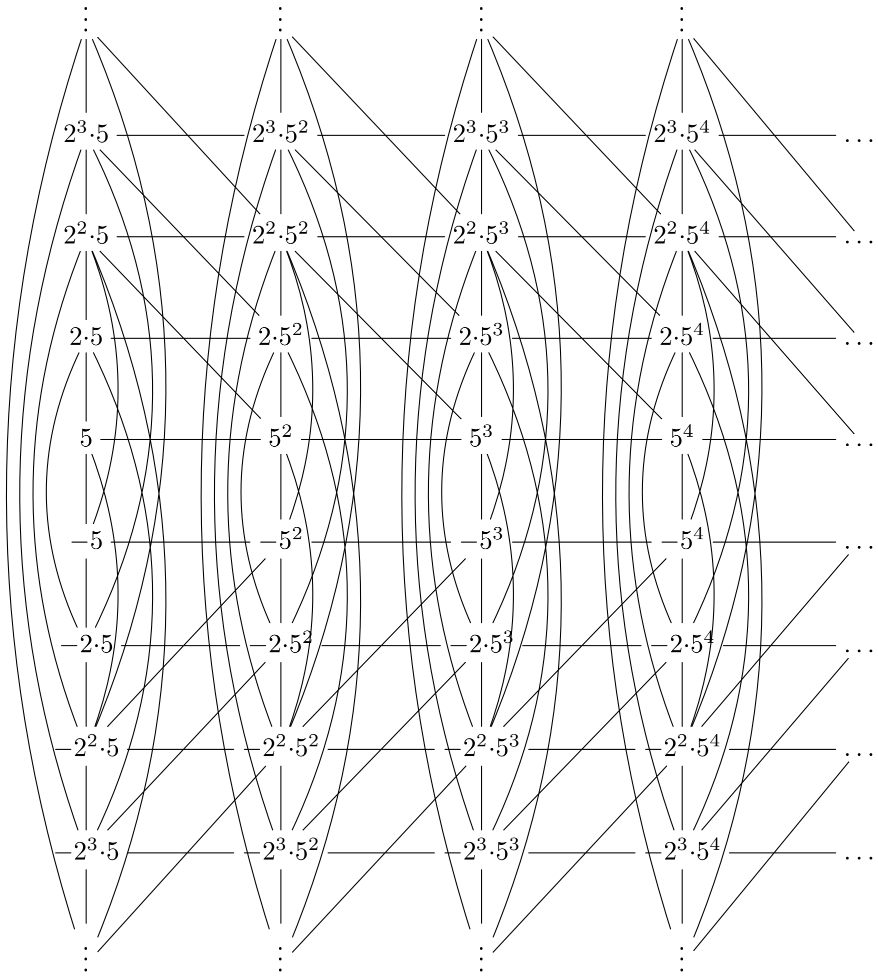

FIGURE 2. The graph Γ_5

If $a < c$ and $b > d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, p\}$ implies that $2^{c-a} - (\varepsilon/\delta)p^{b-d} = 1$, and hence $\varepsilon/\delta = 1$. Then the Mihăilescu Theorem 4 ensures that $b - d = 1$ and hence $2^{c-a} = p + 1 = 2^m$ and $c - a = m$. In this case $\{x, y\} = \{\varepsilon 2^{a-1}p^{d+1}, \varepsilon 2^{a+m-1}p^d\}$.

If $a > c$ and $b < d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, p\}$ implies that $p^{d-b} - (\varepsilon/\delta)2^{a-c} = 1$ and hence $\varepsilon/\delta = 1$. Then Mihăilescu Theorem 4 implies that $d - b = 1$ and hence $2^{a-c} = p - 1 = 2^m - 2$, which is not possible as $m > 2$.

4. Assume that p is not Fermat–Mersenne. It is easy to check that every doubleton

$$\{x, y\} \in \big\{\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, -\varepsilon 2^{a-1}p^b\}, \{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \varepsilon 2^a p^b\} : a, b \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in \{-1, 1\}\big\}$$

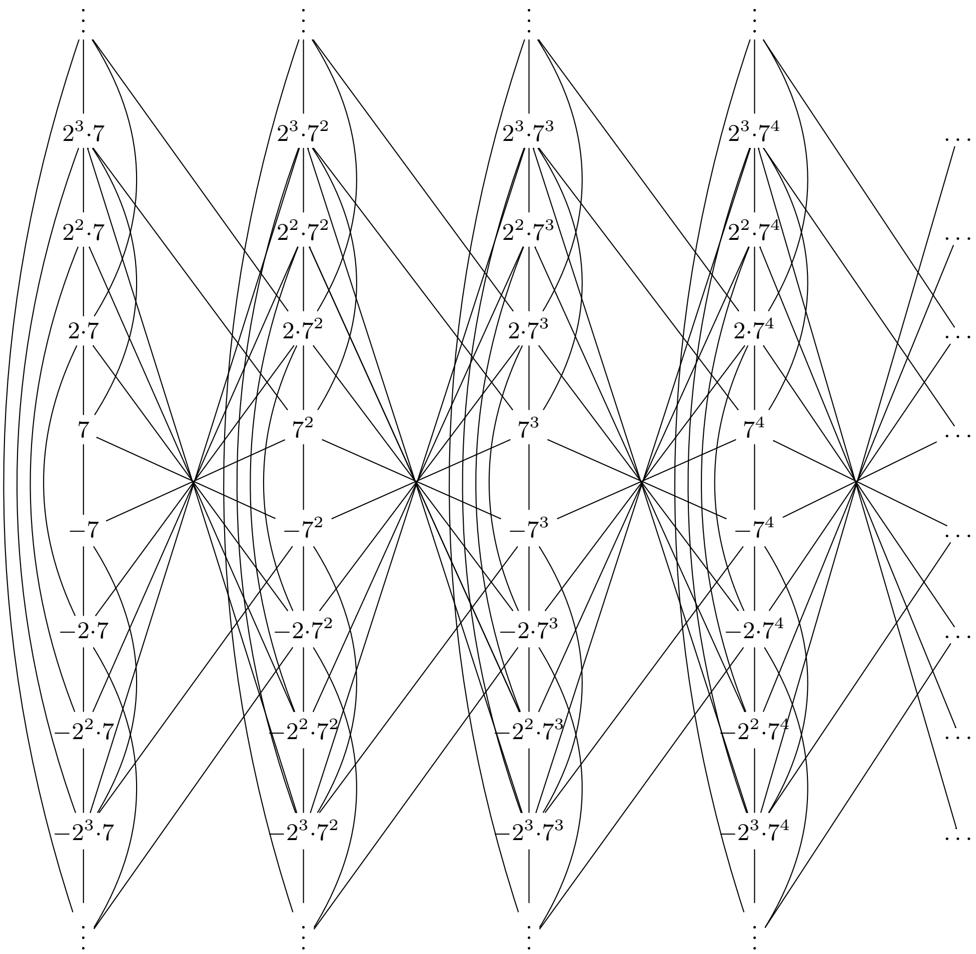

FIGURE 3. The graph Γ_7

has $A_{\{x,y\}} = \Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} = \{2, p\}$ and hence $\{x, y\} \in \mathcal{E}_p$.

Now assume that $\{x, y\} \in \mathcal{E}_p$ is an edge of the graph Γ_p. Then $\Pi_x \cup \Pi_y \cup \Pi_{x-y} = A_{\{x,y\}} = \{2, p\}$ and $\{x, y\}$ can be written as $\{\varepsilon 2^{a-1}p^b, \delta 2^{c-1}p^d\}$ for some $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$ with $2^{a-1}p^b \le 2^{c-1}p^d$.

If $a = c$ and $b = d$, then $\varepsilon \ne \delta$ and $\{x, y\} = \{2^{a-1}p^b, -2^{a-1}p^b\}$.

If $a = c$, then $b \le d$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, p\}$ implies that $\Pi_{p^{d-b}-\varepsilon/\delta} \subseteq \{2, p\}$ and hence $p^{d-b} - \varepsilon/\delta$ is a power of 2. By the Mihăilescu Theorem 4, $d - b = 1$ and hence p is either Fermat prime or Mersenne prime which is not true.

If $b = d$, then $a \le c$ and the inclusion $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, p\}$ implies that $\Pi_{2^{c-a}-\varepsilon/\delta} \subseteq \{2, p\}$ and hence $2^{c-a} - \varepsilon/\delta$ is a power of p. By the Mihăilescu Theorem 4, $2^{c-a} - \varepsilon/\delta \in \{1, p\}$.

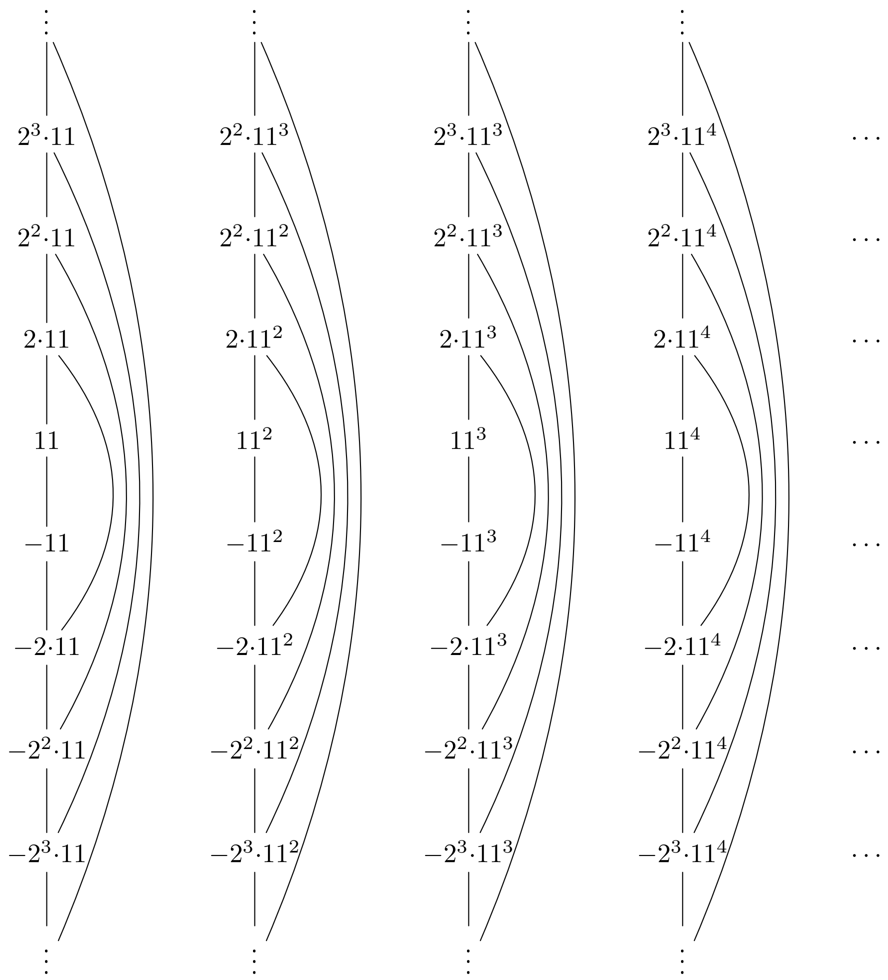

FIGURE 4. The graph Γ_{11}

Taking into account that p is neither Fermat nor Mersenne prime, we conclude that if $\varepsilon = \delta$, $2^{c-a} - 1 = 1$ and hence $c - a = 1$. Then $\{x, y\} = \{\varepsilon 2^{a-1} p^b, \varepsilon 2^a p^b\}$.

So, we assume that $a \neq c$ and $b \neq d$. By analogy with the case of Fermate primes, we can show that the subcases ($a < c$ and $b < d$) and ($a > c$ and $b > d$) are impossible.

If $a < c$ and $b > d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, p\}$ implies that $2^{c-a} - (\varepsilon/\delta)p^{b-d} = 1$. By the Mihăilescu Theorem 4 $b - d = 1$ and hence $p = 2^{c-a} - 1$ is a Mersenne prime, which is not true.

If $a > c$ and $b < d$, then $\Pi_{x-y} \subseteq \{2, p\}$ implies that $p^{d-b} - (\varepsilon/\delta)2^{a-c} = 1$. By the Mihăilescu Theorem 4 $d - b = 1$ and hence $p = 1 + 2^{a-c}$ is a Fermat prime, which is not true. $\square$

In Figures 1, 2, 3, 4 we draw the graphs Γ_p for p equal to $3, 5, 7, 11$. Observe that 3 is both Fermat and Mersenne prime, 5 is Fermat prime, 7 is Mersenne prime and 11 is not Fermat–Mersenne.

Lemma 20. *Let p be an odd prime number and h be a positive homeomorphism of the Kirch space.*

(1) *If p is Fermat-Mersenne, then $h(p) = p$;*
(2) *If p is not Fermat-Mersenne, then $h(p) = p^n$ for some $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. 1. Lemma 19(1) implies that the degree of ± 3 in the graph Γ_3 is equal to 8 but the other vertices have degree at least 9. Hence $h(3) = \pm 3$. Assume that $h(3) = -3$. Then by Lemma 14 and by Lemma 13

$$\{2, 3\} = A_{\{2,3\}} = A_{h(\{2,3\})} = A_{\{2,-3\}} = \{2, 3, 5\}$$

but this is not true and hence $h(3) = 3$.

Assume that $p > 3$ is either Fermat or Mersenne prime. Lemma 19(2,3) implies that the degree of $\pm p$ in the graph Γ_p is 4 but the other vertices have degree at least 5. Hence $h(p) = \pm p$. Assume that $h(p) = -p$. By Lemma 14, $A_{\{1,p\}} = A_{\{1,h(p)\}} = A_{\{1,-p\}}$, so $\{p\} \cup \Pi_{p-1} = \{p\} \cup \Pi_{p+1}$, according to Lemma 2. This implies that $\Pi_{p-1} = \Pi_{p+1} = \{2\}$. Hence p is both Fermate and Mersenne which is possible iff $p = 3$ and this contradicts our assumption. Therefore $h(p) = p$.

2. Let p be an odd prime number, which is not Fermat–Mersenne. Lemma 19(4) implies that the set $\pm p^{\mathbb{N}} = \{\varepsilon p^n : n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \{-1, 1\}\}$ coincides with the set of vertices of order 2 in the graph Γ_p. Taking into account that $h{\restriction}V_p$ is an isomorphism of the graph Γ_p, we conclude that $h(p) = \pm p^n$ for some $n \in \mathbb{N}$. Assume that $h(p) = -p^n$. Then $h(\{-1, p\}) = \{-1, -p^n\}$. By Lemma 13, $A_{\{-1,p\}} = A_{\{-1,-p^n\}}$, so $\{p\} \cup \Pi_{p+1} = \{p\} \cup \Pi_{p^n-1}$, according to Lemma 2. Since $\{p\}$ does not intersect Π_{p+1} and Π_{p^n-1} we conclude that $\Pi_{p+1} = \Pi_{p^n-1}$. Hence we get the inclusion $\Pi_{p-1} \subseteq \Pi_{p^n-1} = \Pi_{p+1}$. If some prime number d divides $p - 1$ then the inclusion $\Pi_{p-1} \subseteq \Pi_{p+1}$ implies that d divides $p + 1$, consequently d divides the difference $(p + 1) - (p - 1) = 2$ and hence $d = 2$. As a consequence, $\Pi_{p-1} = \{2\}$ and $p - 1 = 2^m$ for some $m \in \mathbb{N}$ which contradicts the assumption that p is not Fermat prime. Hence $h(p) = p^n$. □

Lemma 21. *For any positive homeomorphism h of the Kirch space and any prime number p we have $h(p) = p$.*

Proof. If $p = 2$, then $h(p) = p$ by Lemma 14. If p is Fermat–Mersenne, then $h(p) = p$ by Lemma 20. So, we assume p is not Fermat–Mersenne. By Lemma 20, $h(p) = p^n$ for some $n \in \mathbb{N}$. By Lemmas 2, 14 and 13,

$$\{p\} \cup \Pi_{p-1} = A_{\{1,p\}} = A_{\{1,h(p)\}} = A_{\{1,p^n\}} = \{p\} \cup \Pi_{p^n-1}$$

and hence $\Pi_{p^n-1} = \Pi_{p-1}$. Since p is not Mersenne prime, Zsigmondy Theorem 5 guarantees that $n = 1$ and hence $h(p) = p^1 = p$. □

Lemma 22. *The positive homeomorphism group of the Kirch space is trivial.*

Proof. To derive a contradiction, assume that the Kirch space admits a homeomorphism h such that $h(x) \neq x$ for some number x. By the Hausdorff property of the Kirch space and the continuity of h, there exists a neighborhood O_x of x in the Kirch topology such that $h[O_x] \cap O_x = \varnothing$. By the definition of the Kirch topology, there exists a square-free number b such that $\Pi_b \cap \Pi_x = \varnothing$ and $x + b\mathbb{Z} \subseteq O_x$. By the Dirichlet Theorem 3, the arithmetic progression $x+b\mathbb{N} \subseteq x+b\mathbb{Z}$ contains some prime number p. Then $h[O_x] \cap O_x = \varnothing$ implies $h(p) \neq p$, which contradicts Lemma 21. □

Our final lemma completes the proof of Theorem 1.

Lemma 23. *Any homeomorphism h of the Kirch space $\mathbb{Z}^\bullet$ is equal to $i : \mathbb{Z}^\bullet \to \mathbb{Z}^\bullet$, $i : x \mapsto x$ or to $j : \mathbb{Z}^\bullet \to \mathbb{Z}^\bullet, j : x \mapsto -x$.*

Proof. If h is positive, then $h = i$ by previous Lemma. If h is not positive then $h(1) < 0$ and $j \circ h(1) > 0$. Then the homeomorphism $j \circ h$ is positive and equals i by the preceding case. This implies that

$$h = i \circ h = (j \circ j) \circ h = j \circ (j \circ h) = j \circ i = j.$$

□

Acknowledgement

The author expresses her sincerely thanks to Taras Banakh for his generous help during preparation of this paper.

References

1. T. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.
2. T. Banakh, D. Spirito, and S. Turek, *The Golomb space is topologically rigid*, Comment Math. Univ. Carolin. (accepted); arXiv:1912.01994, 2019, preprint.
3. T. Banakh, Y. Stelmakh, and S. Turek, *The Kirch space is topologically rigid*, Topology Appl. (accepted); arXiv:2006.12357, 2020, preprint.
4. P. Dirichlet, *Lectures on number theory.* Supplements by R. Dedekind. Translated from the 1863 German original and with an introduction by John Stillwell, Amer. Math. Soc., Providence, RI; London Math. Soc., London, 1999.
5. G. A. Jones and J. M. Jones, *Elementary number theory*, Springer, 2012.
6. A. M. Kirch, *A countable, connected, locally connected Hausdorff space*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), no. 2, 169–171. DOI: 10.2307/2317265
7. T. Metsänkylä, *Catalan's conjecture: another old Diophantine problem solved*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **41** (2004), no. 1, 43–57. DOI: 10.1090/S0273-0979-03-00993-5
8. P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine Angew. Math. **572** (2004), 167–195. DOI: 10.1515/crll.2004.048
9. N. J. A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, (`https://oeis.org`).
10. M. Roitman, *On Zsigmondy primes*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 7, 1913–1919. DOI: 10.1090/S0002-9939-97-03981-6
11. D. Spirito, *The Golomb topology on a Dedekind domain and the group of units of its quotients*, Topology Appl. **273** (2020), 107101. DOI: 10.1016/j.topol.2020.107101
12. K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatsh. Math. Phys. **3** (1892), 265–284. DOI: 10.1007/BF01692444

Стаття: надійшла до редколегії 24.12.2020
доопрацьована 09.01.2021
прийнята до друку 23.03.2021

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89

ГОМЕОМОРФІЗМИ ПРОСТОРУ НЕНУЛЬОВИХ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ З ТОПОЛОГІЄЮ КІРХА

Ярина СТЕЛЬМАХ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: yarynziya@ukr.net

Топологія Голомба (відповідно Кірха) на множині $\mathbb{Z}^\bullet$ ненульових цілих чисел породжується базою, що складається з арифметичних прогресій $a + b\mathbb{Z} = \{a + bn : n \in \mathbb{Z}\}$, де $a \in \mathbb{Z}^\bullet$ і b – взаємно просте з a число, (що не ділиться на квадрат жодного простого числа). У 2019 році Даріо Спіріто довів, що простір ненульових цілих чисел з топологією Голомба допускає лише два автогомеоморфізми. Ми доводимо аналогічний факт для простору ненульових цілих, наділеного топологією Кірха: він також має рівно два автогомеоморфізми.

Ключові слова: топологія Кірха, суперзв'язний простір, суперзв'язуюча частково впорядкована множина.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 60–79
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 60–79
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.060-079

УДК 517.927.25

ON SPECTRUM OF STRINGS WITH δ'-LIKE PERTURBATIONS OF MASS DENSITY

To my Teacher Olga Arsenievna Oleinik

Yuriy GOLOVATY

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: yuriy.golovaty@lnu.edu.ua

We study the asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of a boundary value problem for the Sturm-Liouville operator with general boundary conditions and the weight function perturbed by the so-called δ'-like sequence $\varepsilon^{-2}h(x/\varepsilon)$. The eigenvalue problem is realized as a family of non-self-adjoint matrix operators acting on the same Hilbert space and the norm resolvent convergence of this family is established. We also prove the Hausdorff convergence of the perturbed spectra.

Key words: Sturm-Liouville operator, adjoint mass, concentrating mass, singular perturbation, spectral problem, norm resolvent convergence, Hausdorff convergence, non-self-adjoint operator.

1. Introduction

The vibrating systems with added masses have become the subject of research for mathematicians and physicists since the time of Poisson and Bessel [1, Ch.2], and an enormous number of studies have been devoted to these problems. Many authors have investigated properties of one-dimensional continua (strings and rods) with the mass density perturbed by the finite or infinite sum $\sum_k M_k\delta(x-x_k)$, where δ is the Dirac function (see for instance [2, 3, 4, 5] and the references given there). The mathematical models involving the δ-functions are in general non suitable for 2D and 3D elastic systems, because the formal partial differential expressions which appear in the models often have no mathematical meaning. Such models are also not adequate in the one-dimensional

---

2020 Mathematics Subject Classification: 34B24, 34L05, 34L10

case, when the added masses M_k are large enough. The large adjoint mass can lead to a strong local reaction which brings about a considerable change in the basic form of the oscillations. But this reaction cannot be described on the discrete set which is a support of singular distributions. It is natural that the geometry of a small part of the vibrating system where the large mass is loaded should also have an effect on eigenfrequencies and eigenvibrations. Since the works of E. Sánchez-Palencia [6, 7, 8], more adequate and more complicated mathematical models of media with the concentrated masses have gained popularity; the asymptotic analysis began to be applied to the spectral problems with the perturbed mass density having the form

$$\rho_\varepsilon(x) = \rho_0(x) + \sum_k \varepsilon^{-m_k} h_k\left(\frac{x - x_k}{\varepsilon}\right),$$

where h_k are functions of compact support and $m_k \in \mathbb{R}$. The most interesting cases of the limit behaviour of eigenvalues and eigenfunctions as $\varepsilon \to 0$ arise when the powers m_k are greater than or equal to the dimension of vibrating system.

These improved models have attracted considerable attention in the mathematical literature over three past decades (see review [9]). The classic elastic systems such as strings, rods, membranes, plates and bodies with the perturbed density

$$\rho_\varepsilon(x) = \rho_0(x) + \varepsilon^{-m} h(x/\varepsilon)$$

have been considered in [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], where the convergence of spectra for each real m and the complete asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions for selected values of m have been obtained. The influence of the concentrated masses on the spectral characteristics and oscillations of junctions, the objects with very complicated geometry, has been studied in [18, 19, 20]. The asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of membranes and bodies with many concentrated masses near the boundary has been investigated in [21, 22, 23, 24, 25]. In [26, 27] the asymptotic analysis has been applied to the spectral problems for membranes and plates with the density perturbed in a thin neighbourhood of a closed smooth curve. The spectral problems on metric graphs that describe the eigenvibrations of elastic networks with heavy nodes have been studied in [28, 29].

A characteristic feature of such problems is the presence of perturbed density ρ_ε at the spectral parameter, which in turn leads to a self-adjoint operator realization of the problem in a Hilbert space (a weighted Lebesgue space) that also depends on the small parameter. The study of families of operators acting on varying spaces entails some mathematical difficulties. First of all, the question arises how to understand the convergence of such families. Next, if these operators do converge in some sense, does this convergence implies the convergence of their spectra (see [15, III.1], [31, 32, 33] for more details). Most of the above-mentioned publications deal with asymptotic approximations of eigenvalues and eigenfunctions; justifying such asymptotics, the researchers used the theory of quasimodes [34], and therefore the question of the operator convergence can be avoided in the studies.

In this paper we consider the Sturm-Liouville operators and investigate the eigenvalue problems with general boundary conditions and the weight function perturbed by the so-called δ'-like sequence $\varepsilon^{-2}h(x/\varepsilon)$. By abandoning the self-adjointness, we realize the perturbed problem as a family of non-self-adjoint matrix operators $\mathcal{A}_\varepsilon$ acting on a fixed Hilbert space and prove the norm resolvent convergence of $\mathcal{A}_\varepsilon$ as $\varepsilon \to 0$. The operators $\mathcal{A}_\varepsilon$ are certainly similar to self-adjoint ones for each ε and their spectra are real, discrete and simple. Surprisingly enough, the limit operator is essentially non-self-adjoint, because it possesses multiple eigenvalues with non-trivial Jordan cells. Actually the singularly perturbed problem gives us an example of some self-adjoint operators T_ε with compact resolvents acting on varying spaces H_ε that "converge" to a non-self-adjoint operator T_0 in the space H_0. More precisely, the spectra of T_ε converge to the spectrum of T_0 in the Hausdorff sense, taking account of the algebraic multiplicities of eigenvalues; moreover the limit position, as $\varepsilon \to 0$, of the eigensubspaces of T_ε can be described by means of the root subspaces of T_0.

Note that a partial case of the problem, namely the Sturm-Liouville operator without a potential subject to the Dirichlet type boundary condition, was previously studied in [13]. In Theorem 9, the Hausdorff convergence of the perturbed spectrum to some limit set was proved. This limit set was treated as a union of spectra of three self-adjoint operators (cf. Theorem 2 below), but the limit operator was not constructed and the question of eigenvalue multiplicity was not discussed.

We use the following notation. Let $L_2(r, I)$ be the weighted Lebesgue space with the norm

$$\|f\|_{L_2(r,I)} = \left(\int_I r(x)|f(x)|^2\, dx \right)^{1/2},$$

provided r is positive. Throughout the paper, $W_2^k(I)$ stands for the Sobolev space of the functions defined on $I \subset \mathbb{R}$ that belong to $L_2(I)$ together with their derivatives up to the order k. The norm in $W_2^k(I)$ is given by

$$\|f\|_{W_2^k(I)} := \left(\|f^{(k)}\|^2_{L_2(I)} + \|f\|^2_{L_2(I)} \right)^{1/2},$$

where $\|f\|_{L_2(I)}$ is the usual L_2-norm. The spectrum, point spectrum and resolvent set of a linear operator T are denoted by $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$ and $\rho(T)$, respectively, and the Hilbert space adjoint operator of T is T^*. For any complex number $z \in \rho(T)$, the resolvent operator $\mathrm{R}_z(T)$ is defined by $\mathrm{R}_z(T) = (T - z)^{-1}$. Also, we will sometimes abuse notation and write column vectors as row vectors.

2. Statement of Problem

Let $\mathcal{I} = (a, b)$ be a finite interval in $\mathbb{R}$ containing the origin and ε be a small positive parameter. Set $\mathcal{I}_a = (a, 0)$, $\mathcal{I}_b = (0, b)$, $\mathcal{I}_a^\varepsilon = (a, -\varepsilon)$, $\mathcal{I}_b^\varepsilon = (\varepsilon, b)$ and $\mathcal{J} = (-1, 1)$. We study the limiting behavior as $\varepsilon \to 0$ of eigenvalues λ^ε and eigenfunctions y_ε of the problem

$$-y_\varepsilon'' + q(x)y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon(x) y_\varepsilon, \quad x \in \mathcal{I}, \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(a)\cos\alpha + y_\varepsilon'(a)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y_\varepsilon(b)\cos\beta + y_\varepsilon'(b)\sin\beta = 0 \tag{3}$$

with the singularly perturbed weight function

$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & x \in \mathcal{I}_a^\varepsilon \cup \mathcal{I}_b^\varepsilon, \\ \varepsilon^{-2} h(\varepsilon^{-1}x), & x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases}$$

Assume that $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q, r \in L^\infty(\mathcal{I})$ and $h \in L^\infty(\mathcal{J})$; r and h are uniformly positive.

For any fixed real α, β and positive ε small enough, problem (1)–(3) admits a self-adjoint realization in the weighted space $L_2(r_\varepsilon, \mathcal{I})$. Let us consider the Sturm-Liouville differential expression $\tau(\phi) = -\phi'' + q\phi$. We introduce the operator T_ε defined by $T_\varepsilon \phi = r_\varepsilon^{-1}\tau(\phi)$ on the functions $\phi \in W_2^2(\mathcal{I})$ obeying boundary conditions (2) and (3). Hence $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is a family of self-adjoint operators in the varying Hilbert spaces $L_2(r_\varepsilon, \mathcal{I})$. Of course the spectrum of T_ε is real, discrete and simple.

Problem (1)–(3) can be also associated with a non-self-adjoint matrix operator in the fixed Hilbert space $\mathcal{L} = L_2(r, \mathcal{I}_a) \times L_2(h, \mathcal{J}) \times L_2(r, \mathcal{I}_b)$ as follows. Subsequently, we will write boundary conditions (2) and (3) for a function ϕ as $\ell_a\phi = 0$ and $\ell_b\phi = 0$ respectively. Let us introduce the new variable $t = x/\varepsilon$ and set $w_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(\varepsilon t)$. Then the eigenvalue problem can be written in the form

$$-y_\varepsilon'' + q(x)y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon r(x) y_\varepsilon, \quad x \in \mathcal{I}_a^\varepsilon, \qquad \ell_a y_\varepsilon = 0, \tag{4}$$

$$-w_\varepsilon'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon t) w_\varepsilon = \lambda^\varepsilon h(t) w_\varepsilon, \quad t \in \mathcal{J}, \tag{5}$$

$$-y_\varepsilon'' + q(x)y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon r(x) y_\varepsilon, \quad x \in \mathcal{I}_b^\varepsilon, \qquad \ell_b y_\varepsilon = 0 \tag{6}$$

with the coupling conditions

$$y_\varepsilon(-\varepsilon) = w_\varepsilon(-1), \quad y_\varepsilon(\varepsilon) = w_\varepsilon(1), \tag{7}$$

$$\varepsilon y_\varepsilon'(-\varepsilon) = w_\varepsilon'(-1), \quad \varepsilon y_\varepsilon'(\varepsilon) = w_\varepsilon'(1). \tag{8}$$

Let $\mathring{A}_a$ be the operator in $L_2(r, \mathcal{I}_a)$ that is defined by $\mathring{A}_a\phi = r^{-1}\tau(\phi)$ on the functions ϕ belonging to the set $D(\mathring{A}_a) = \{\phi \in W_2^2(\mathcal{I}_a) \colon \ell_a\phi = 0\}$. Similarly, let $\mathring{A}_b$ be the operator in $L_2(r, \mathcal{I}_b)$ such that $\mathring{A}_b\phi = r^{-1}\tau(\phi)$ and $D(\mathring{A}_b) = \{\phi \in W_2^2(\mathcal{I}_b) \colon \ell_b\phi = 0\}$. We also introduce the operator $\mathring{B} = -h^{-1}\dfrac{d^2}{dt^2}$ in $L_2(h, \mathcal{J})$ with domain $D(\mathring{B}) = W_2^2(\mathcal{J})$ and its potential perturbation $\mathring{B}_\varepsilon = \mathring{B} + \varepsilon^2 \dfrac{q(\varepsilon t)}{h(t)}$.

Let us consider the matrix operator

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathring{A}_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathring{B}_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \mathring{A}_b \end{pmatrix}$$

in $\mathcal{L}$, acting on the domain

$$D(\mathcal{A}_\varepsilon) = \big\{(\phi_a, \psi, \phi_b) \in D(\mathring{A}_a) \times D(\mathring{B}_\varepsilon) \times D(\mathring{A}_b) \colon \\ \phi_a(-\varepsilon) = \psi(-1),\ \phi_b(\varepsilon) = \psi(1),\ \varepsilon\phi_a'(-\varepsilon) = \psi'(-1),\ \varepsilon\phi_b'(\varepsilon) = \psi'(1)\big\}.$$

A straightforward calculation shows that $\mathcal{A}_\varepsilon$ is non-self-adjoint. Note that the spectral equation $(\mathcal{A}_\varepsilon - \lambda^\varepsilon)Y_\varepsilon = 0$ is slightly different from eigenvalue problem (4)–(8). In fact, if we display the components of the vector Y_ε by writing $Y_\varepsilon = (y_\varepsilon^a, w_\varepsilon, y_\varepsilon^b)$, then we see at once that y_ε^a is a solution of (4) on the whole interval $\mathcal{I}_a$ (not only in $\mathcal{I}_a^\varepsilon$), and y_ε^b

is a solution of (6) on the whole interval $\mathcal{I}_b$. However, this "extra information", namely the extensions of the solutions to the intervals $\mathcal{I}_a$ and $\mathcal{I}_b$, does not prevent the operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ from adequately describing the spectrum and the eigenfunctions of (4)–(8) (or also (1)–(3)), because of the uniqueness of such extensions.

Proposition 1. $\sigma(\mathcal{A}_\varepsilon) = \sigma(T_\varepsilon)$.

Proof. Fix a positive ε. We will show that $\rho(\mathcal{A}_\varepsilon) = \rho(T_\varepsilon)$. Suppose first that $\zeta \in \rho(T_\varepsilon)$ and consider the equation $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)Y = F$, where F belongs to $\mathcal{L}$. Suppose that $F = (f_a, f_0, f_b)$. Then we can construct the function

$$f(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{for } x \in \mathcal{I}_a^\varepsilon, \\ f_0(x/\varepsilon) & \text{for } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ f_b(x) & \text{for } x \in \mathcal{I}_b^\varepsilon \end{cases}$$

belonging to $L_2(r_\varepsilon, \mathcal{I})$. Next, $y = (T_\varepsilon - \zeta)^{-1} f$ is a unique solution of the problem

$$-y'' + qy - \zeta r y = r f_a \quad \text{in } \mathcal{I}_a^\varepsilon, \qquad \ell_a y = 0, \tag{9}$$

$$-\varepsilon^2 y'' + \varepsilon^2 q y - \zeta h y = h f_0 \quad \text{in } (-\varepsilon, \varepsilon), \tag{10}$$

$$-y'' + qy - \zeta r y = r f_b \quad \text{in } \mathcal{I}_b^\varepsilon, \qquad \ell_b y = 0, \tag{11}$$

$$[y]_{-\varepsilon} = 0, \quad [y]_\varepsilon = 0, \quad [y']_{-\varepsilon} = 0, \quad [y']_\varepsilon = 0, \tag{12}$$

where $[y]_{x_0}$ is a jump of y at the point x_0. Denote by y_a the extension of y from $\mathcal{I}_a^\varepsilon$ to $\mathcal{I}_a$ as a solution of (9). Recall that the right hand side f_a is defined on the whole interval $\mathcal{I}_a$. This extension is uniquely defined. Similarly, we denote by y_b the solution of (11) in $\mathcal{I}_b$ such that $y_b(x) = y(x)$ for $x \in \mathcal{I}_b^\varepsilon$. Then the vector $Y(x) = (y_a(x), y(x/\varepsilon), y_b(x))$ belongs to $D(\mathcal{A}_\varepsilon)$ and solves $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)Y = F$. The last equation admits a unique solution Y; if we assume that there are more such solutions, then we immediately obtain a contradiction with the uniqueness of y. Therefore, $\rho(\mathcal{A}_\varepsilon) \subset \rho(T_\varepsilon)$.

Conversely, suppose $\zeta \in \rho(\mathcal{A}_\varepsilon)$. We prove that $(T_\varepsilon - \zeta)y = f$ is uniquely solvable for all $f \in L_2(r_\varepsilon, \mathcal{I})$. Given f, construct the vector $F = (f_a(x), f(\varepsilon t), f_b(x))$, where f_a and f_b are the restrictions of f to $\mathcal{I}_a$ and $\mathcal{I}_b$ respectively. Then the problem

$$\begin{aligned} &-\phi_a'' + q\phi_a - \zeta r \phi_a = r f_a \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a \phi_a = 0, \\ &-\psi'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon\,\cdot)\psi - \zeta h \psi = h f(\varepsilon\,\cdot) \quad \text{in } \mathcal{J}, \\ &-\phi_b'' + q\phi_b - \zeta r \phi_b = r f_b \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad \ell_b \phi_b = 0, \\ &\ \phi_a(-\varepsilon) = \psi(-1), \ \ \phi_b(\varepsilon) = \psi(1), \ \ \varepsilon\phi_a'(-\varepsilon) = \psi'(-1), \ \ \varepsilon\phi_b'(\varepsilon) = \psi'(1). \end{aligned}$$

admits a unique solution $Y = (\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)^{-1} F$. If $Y = (\phi_a, \psi, \phi_b)$, then function

$$y(x) = \begin{cases} \phi_a(x) & \text{for } x \in \mathcal{I}_a^\varepsilon, \\ \psi(x/\varepsilon) & \text{for } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ \phi_b(x) & \text{for } x \in \mathcal{I}_b^\varepsilon \end{cases}$$

is a solution of (9)–(12). Since the spectrum of T_ε is discrete, the solvability of $(T_\varepsilon - \zeta)y = f$ for all $f \in L_2(r_\varepsilon, \mathcal{I})$ ensures $\zeta \in \rho(T_\varepsilon)$, and hence $\rho(T_\varepsilon) \subset \rho(\mathcal{A}_\varepsilon)$. □

3. Norm Resolvent Convergence of $\mathcal{A}_\varepsilon$

In this section we will prove that the family of operators $\mathcal{A}_\varepsilon$ converges in the norm resolvent sense as $\varepsilon \to 0$. Let B be the restriction of $\mathring{B}$ to the domain

$$D(B) = \left\{\psi \in D(\mathring{B})\colon \psi'(-1) = 0,\ \ \psi'(1) = 0\right\}.$$

We introduce the matrix operator

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathring{A}_a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & \mathring{A}_b \end{pmatrix}$$

in the space $\mathcal{L}$ acting on

$$D(\mathcal{A}) = \left\{(\phi_a, \psi, \phi_b) \in D(\mathring{A}_a) \times D(B) \times D(\mathring{A}_b)\colon \phi_a(0) = \psi(-1),\ \ \phi_b(0) = \psi(1)\right\}.$$

This operator is associated with the eigenvalue problem

$$-u'' + qu = \lambda ru \quad \text{in } \in \mathcal{I}_a, \quad \ell_a u = 0, \tag{13}$$

$$-w'' = \lambda hw, \quad \text{in } \in \mathcal{J}, \quad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0, \tag{14}$$

$$-v'' + qv = \lambda rv \quad \text{in } \in \mathcal{I}_b, \quad \ell_b v = 0, \tag{15}$$

$$u(0) = w(-1), \quad v(0) = w(1) \tag{16}$$

which can be regarded as *the limit problem.* The following assertion is one of the main results of this paper.

Theorem 1. *The family of operators $\mathcal{A}_\varepsilon$ converges to $\mathcal{A}$ as $\varepsilon \to 0$ in the norm resolvent sense. In addition,*

$$\|\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})\| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \tag{17}$$

the constant c being independent of ε.

For the convenience of the reader we collect together the definitions of all operators which will be used in the proof.

- *Operators $T_a^\varepsilon(\zeta)$, $T_b^\varepsilon(\zeta)$, $T_a(\zeta)$ and $T_b(\zeta)$.* We endow $D(\mathring{B})$ with the graph norm, i.e., the norm of the Sobolev space $W_2^2(\mathcal{J})$. Let $T_a^\varepsilon(\zeta)\colon D(\mathring{B}) \to L_2(r, \mathcal{I}_a)$ be defined as follows. Given $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ and $\psi \in D(\mathring{B})$, we compute $\psi(-1)$, find then a unique solution u_a of the problem

$$-u'' + qu - \zeta ru = 0 \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a u = 0, \quad u(-\varepsilon) = \psi(-1) \tag{18}$$

and finally set $T_a^\varepsilon(\zeta)\psi = u_a$. Similarly, we define $T_b^\varepsilon(\zeta)\colon D(\mathring{B}) \to L_2(r, \mathcal{I}_b)$ which solves the problem

$$-v'' + qv - \zeta rv = 0 \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad v(\varepsilon) = \psi(1), \quad \ell_b v = 0 \tag{19}$$

for given $\psi \in D(\mathring{B})$. Next, the operators $T_a(\zeta)$ and $T_b(\zeta)$ stand for $T_a^\varepsilon(\zeta)$ and $T_b^\varepsilon(\zeta)$, provided $\varepsilon = 0$. So $T_a(\zeta)$ (resp. $T_b(\zeta)$) solves problem (18) (resp. (19)) for given $\psi \in D(\mathring{B})$ and $\varepsilon = 0$.

- *Operators $S_a^\varepsilon(\zeta)$ and $S_b^\varepsilon(\zeta)$.* Suppose that $D(\mathring{A}_a)$ and $D(\mathring{A}_b)$ are equipped by the graph norms. These norms are equivalent to the norms of $W_2^2(\mathcal{I}_a)$ and $W_2^2(\mathcal{I}_b)$ respectively. The operator $S_a^\varepsilon(\zeta)\colon D(\mathring{A}_a) \to L_2(h, \mathcal{J})$ is defined by $S_a^\varepsilon(\zeta)\phi = w_a$, where w_a is a unique solution of
$$- w'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon\,\cdot)w = \zeta hw \quad \text{in } \mathcal{J}, \quad w'(-1) = \phi'(-\varepsilon), \;\; w'(1) = 0 \tag{20}$$
for given $\phi \in D(\mathring{A}_b)$ and $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Similarly, the operator $S_b^\varepsilon(\zeta)\colon D(\mathring{A}_b) \to L_2(h, \mathcal{J})$ solves
$$- w'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon\,\cdot)w = \zeta hw \quad \text{in } \mathcal{J}, \qquad w'(-1) = 0, \;\; w'(1) = \phi'(\varepsilon) \tag{21}$$
for some $\phi \in D(\mathring{A}_a)$ and $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
- *Operator B_ε.* This operator is the restriction of $\mathring{B}_\varepsilon$ to the domain
$$D(B_\varepsilon) = \Big\{\psi \in D(\mathring{B}_\varepsilon)\colon \psi'(-1) = 0, \;\; \psi'(1) = 0\Big\}.$$
- *Operators A_a^ε, A_b^ε, A_a and A_b.* Let A_a^ε and A_b^ε be the restrictions of $\mathring{A}_a$ and $\mathring{A}_b$ respectively to the domains
$$D(A_a^\varepsilon) = \{\phi \in D(\mathring{A}_a)\colon \phi(-\varepsilon) = 0\},$$
$$D(A_b^\varepsilon) = \{\phi \in D(\mathring{A}_b)\colon \phi(\varepsilon) = 0\}.$$
The operators A_a and A_b stand for A_a^ε and A_b^ε, provided $\varepsilon = 0$.

We now construct the resolvents of $\mathcal{A}_\varepsilon$ and $\mathcal{A}$ in the explicit form as follows. Fix $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. First of all, note that the operators $T_a^\varepsilon(\zeta)$, $T_b^\varepsilon(\zeta)$, $S_a^\varepsilon(\zeta)$ and $S_b^\varepsilon(\zeta)$ are well-defined for such values of ζ. Moreover these operators are compact. Given $F = (f_a, f_0, f_b) \in \mathcal{L}$, solve the equation $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)Y = F$. The first component of $Y = (\phi_a, \psi, \phi_b)$ is a solution of the Dirichlet type problem
$$-\phi'' + q\phi - \zeta r\phi = rf_a \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a\phi = 0, \quad \phi(-\varepsilon) = \psi(-1).$$
This solution can be represented as the sum of a solution of the non-homogeneous equation subject to the homogeneous boundary conditions and a solution of (18):
$$\phi_a = \mathrm{R}_\zeta(A_a^\varepsilon)f_a + T_a^\varepsilon(\zeta)\psi. \tag{22}$$
The same argument yields
$$\phi_b = \mathrm{R}_\zeta(A_b^\varepsilon)f_b + T_b^\varepsilon(\zeta)\psi. \tag{23}$$
The middle element ψ of Y is a solution of the Neumann type problem
$$-\psi'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon\,\cdot)\psi - \zeta h\psi = hf_0 \quad \text{in } \mathcal{J}, \quad \psi'(-1) = \varepsilon\phi_a'(-\varepsilon), \quad \psi'(1) = \varepsilon\phi_b'(\varepsilon),$$
and it can be written as
$$\psi = \mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)f_0 + \varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta)\phi_a + \varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta)\phi_b. \tag{24}$$
Then (22)–(24) taken together yield
$$\begin{aligned} \phi_a - T_a^\varepsilon(\zeta)\psi &= \mathrm{R}_\zeta(A_a^\varepsilon)f_a,\\ -\varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta)\phi_a + \psi - \varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta)\phi_b &= \mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)f_0,\\ -T_b^\varepsilon(\zeta)\psi + \phi_b &= \mathrm{R}_\zeta(A_b^\varepsilon)f_b. \end{aligned}$$

It follows that the resolvent of $\mathcal{A}_\varepsilon$ has the form

$$\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) = \mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta), \tag{25}$$

where

$$\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta) = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_\zeta(A_a^\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{R}_\zeta(A_b^\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta) = \begin{pmatrix} E & -T_a^\varepsilon(\zeta) & 0 \\ -\varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta) & E & -\varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta) \\ 0 & -T_b^\varepsilon(\zeta) & E \end{pmatrix}, \tag{27}$$

and E denotes the identity operator in the corresponding spaces. We shall prove below that $\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)$ is invertible for ε small enough.

Now we consider the equation

$$(\mathcal{A} - \zeta)Y = F$$

for $F \in \mathcal{L}$. In the coordinate representation we have $(\mathring{A}_a - \zeta)\phi_a = f_a$, $(B - \zeta)\psi = f_0$ and $(\mathring{A}_b - \zeta)\phi_b = f_b$, where $Y = (\phi_a, \psi, \phi_b)$ and $F = (f_a, f_0, f_b)$. Obviously, $\psi = \mathrm{R}_\zeta(B)f_0$. The functions ϕ_a and ϕ_b are solutions of the problems

$$-\phi'' + q\phi - \zeta r\phi = rf_a \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a\phi = 0, \quad \phi(0) = \psi(-1);$$
$$-\phi'' + q\phi - \zeta r\phi = rf_b \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad \phi(0) = \psi(-1), \quad \ell_b\phi = 0$$

respectively. By reasoning similar to that for (22) and (23), we find

$$\phi_a = \mathrm{R}_\zeta(A_a)f_a + T_a(\zeta)\mathrm{R}_\zeta(B)f_0, \qquad \phi_b = \mathrm{R}_\zeta(A_b)f_b + T_b(\zeta)\mathrm{R}_\zeta(B)f_0.$$

Hence the resolvent of $\mathcal{A}$ can be written in the form

$$\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_\zeta(A_a) & T_a(\zeta)\mathrm{R}_\zeta(B) & 0 \\ 0 & \mathrm{R}_\zeta(B) & 0 \\ 0 & T_b(\zeta)\mathrm{R}_\zeta(B) & \mathrm{R}_\zeta(A_b) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

To compare the resolvents of $\mathcal{A}_\varepsilon$ and $\mathcal{A}$, we need some auxiliary assertions.

Proposition 2. *The operators A_a^ε, A_b^ε and B_ε converge as $\varepsilon \to 0$ to A_a, A_b and B respectively in the norm resolvent sense. Moreover*

$$\|\mathrm{R}_\zeta(A_a^\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(A_a)\| \leqslant C_1\sqrt{\varepsilon}, \qquad \|\mathrm{R}_\zeta(A_b^\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(A_b)\| \leqslant C_2\sqrt{\varepsilon}, \tag{29}$$

$$\|\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(B)\| \leqslant C_3\varepsilon^2, \tag{30}$$

where the constants C_k do not depend on ε.

Proof. Fix $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ and let us compare the elements $u_\varepsilon = \mathrm{R}_\zeta(A_b^\varepsilon)f$ and $u = \mathrm{R}_\zeta(A_b)f$ for given $f \in L_2(r, \mathcal{I}_b)$. Since u_ε and u solve the problems

$$-u_\varepsilon'' + qu_\varepsilon - \zeta ru_\varepsilon = rf \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad u_\varepsilon(\varepsilon) = 0, \quad \ell_b u_\varepsilon = 0;$$
$$-u'' + qu - \zeta ru = rf \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad u(0) = 0, \quad \ell_b u = 0,$$

they are related by the equality

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \frac{u(\varepsilon)}{z(\varepsilon)}\, z(x), \qquad x \in \mathcal{I}_b,$$

where z is a solution of the problem

$$-z'' + qz - \zeta rz = 0 \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad z(0) = 1, \quad \ell_b z = 0. \tag{31}$$

Obviously, $z(\varepsilon)$ is different from zero for ε small enough. Then we have

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} \leqslant \frac{|u(\varepsilon)|}{|z(\varepsilon)|}\, \|z\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} \leqslant c_1|u(\varepsilon)| \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}\, \|u\|_{W_2^1(\mathcal{I}_b)},$$

because $z(\varepsilon) \to 1$ as $\varepsilon \to 0$ and

$$|u(\varepsilon)| = \left|\int_0^\varepsilon u'(x)\,dx\right| \leqslant c_3\sqrt{\varepsilon}\, \|u\|_{W_2^1(\mathcal{I}_b)}.$$

Observe that $\mathrm{R}_\zeta(A_b)$ is a bounded operator from $L_2(r, \mathcal{I}_b)$ to the domain of A_b equipped with the graph norm. Since the domain is a subspace of $W_2^1(\mathcal{I}_b)$, there exists a constant c_4 independent of f such that

$$\|u\|_{W_2^1(\mathcal{I}_b)} \leqslant c_4\|f\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)}.$$

Therefore

$$\big\|\big(\mathrm{R}_\zeta(A_b^\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(A_b)\big)f\big\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} \leqslant C_2\sqrt{\varepsilon}\, \|f\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)},$$

which establishes the norm resolvent convergence $A_b^\varepsilon \to A_b$ as $\varepsilon \to 0$ and the corresponding estimate in (29). The proof for the operators A_a^ε is similar to that just given.

We now turn to the operators B_ε and first we establish that $\|\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)\| \leqslant c$ for all ε small enough. Given $g \in L_2(h, \mathcal{J})$, consider $w_\varepsilon = \mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)g$ which solves

$$-w_\varepsilon'' + \varepsilon^2 q(\varepsilon\,\cdot)w_\varepsilon - \zeta h w_\varepsilon = hg \quad \text{in } \mathcal{J}, \quad w_\varepsilon'(-1) = 0, \quad w_\varepsilon'(1) = 0.$$

Recall that q and h are bounded in $\mathcal{I}$ and $\mathcal{J}$ respectively, and h is uniformly positive on $\mathcal{I}$. Then we have

$$\begin{aligned}\|\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} &= \big\|\mathrm{R}_\zeta(B)\big(g - \varepsilon^2 q(\varepsilon\,\cdot)h^{-1}w_\varepsilon\big)\big\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant \\ &\leqslant \|\mathrm{R}_\zeta(B)g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} + \varepsilon^2\|q\|_{L^\infty(\mathcal{I})}\, \|h^{-1}\|_{L^\infty(\mathcal{J})}\, \|w_\varepsilon\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant \\ &\leqslant c_0\|g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} + c_1\varepsilon^2\|\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(h,\mathcal{J})}\end{aligned}$$

and therefore

$$\|\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant \frac{c_0}{1 - c_1\varepsilon^2}\, \|g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant c\|g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \tag{32}$$

if ε is small enough.

Next, we set $w = \mathrm{R}_\zeta(B)g$. Then the difference $s_\varepsilon = w_\varepsilon - w$ solves the problem

$$-s_\varepsilon'' - \zeta h s_\varepsilon = -\varepsilon^2 q(\varepsilon\,\cdot)w_\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{J}, \quad s_\varepsilon'(-1) = 0, \quad s_\varepsilon'(1) = 0.$$

Hence in view of (32) we deduce

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(B))g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} &= \|s_\varepsilon\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant \\ &\leqslant c_2\varepsilon^2\|w_\varepsilon\|_{L_2(h,\mathcal{J})} = \\ &= c_2\varepsilon^2\|\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)g\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant \\ &\leqslant c_3\varepsilon^2\|g\|_{L_2(h,\mathcal{J})},\end{aligned}$$

which finishes the proof. □

Proposition 3. *(i) For each $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, we have the bounds*

$$\|T_a^\varepsilon(\zeta) - T_a(\zeta)\| \leqslant c\varepsilon, \qquad \|T_b^\varepsilon(\zeta) - T_b(\zeta)\| \leqslant c\varepsilon,$$

the constant c being independent of ε.
(ii) There exists a constant C such that

$$\|S_a^\varepsilon(\zeta)\| + \|S_b^\varepsilon(\zeta)\| \leqslant C$$

for all ε small enough.

Proof. (i) Let us show that $T_b^\varepsilon(\zeta)$ converge to $T_b(\zeta)$ in the norm as $\varepsilon \to 0$. The same proof remains valid for $T_a^\varepsilon(\zeta)$. Suppose that $u_\varepsilon = T_b^\varepsilon(\zeta)\psi$ is a solution of (19) for given $\psi \in D(\mathring{B})$. It is easily seen that

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\psi(1)}{z(\varepsilon)}\, z(x), \quad x \in \mathcal{I}_a,$$

where z is defined by (31). If $u = T_b(\zeta)\psi$, then we have $u = \psi(1)z$. Hence

$$\begin{aligned}\|(T_b^\varepsilon(\zeta) - T_b(\zeta))\psi\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} = \left\| \frac{\psi(1)}{z(\varepsilon)}\, z - \psi(1) z \right\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} \leqslant \\ \leqslant \left| \frac{z(\varepsilon) - 1}{z(\varepsilon)} \right| \, |\psi(1)| \, \|z\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} \leqslant \\ \leqslant c_1 \varepsilon \, \|\psi\|_{D(\mathring{B})},\end{aligned}$$

because z belongs to $C^1(\mathcal{I}_b)$ and $z(0) = 1$. Recall also that $D(\mathring{B}) = W_2^2(\mathcal{J})$ and hence $\|\psi\|_{C(\mathcal{J})} \leqslant C\|\psi\|_{D(\mathring{B})}$ by the Sobolev embedding theorem.

(ii) For each $\phi \in D(\mathring{A}_b)$, the function $w_\varepsilon = S_b^\varepsilon(\zeta)\phi$ is a solution of (21) and satisfies the estimate $\|w_\varepsilon\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant c_2\,|\phi'(\varepsilon)|$ with a constant c_2 independent of ε, since the resolvents $\mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon)$ are uniformly bounded on ε by Proposition 2. The trace operator $j_\varepsilon \colon D(\mathring{A}_b) \to \mathbb{C}$, $j_\varepsilon\phi = \phi'(\varepsilon)$, is also uniformly bounded on ε. Therefore

$$\|S_b^\varepsilon(\zeta)\phi\|_{L_2(h,\mathcal{J})} = \|w_\varepsilon\|_{L_2(h,\mathcal{J})} \leqslant C\|\phi\|_{W_2^2(\mathcal{I}_b)}.$$

The same proof works for $S_a^\varepsilon(\zeta)$. □

We are now in a position to prove Theorem 1. In view of Proposition 3, we conclude that the family of matrix operators $\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)$, given by (27), converges as $\varepsilon \to 0$ towards

$$\mathcal{H}(\zeta) = \begin{pmatrix} E & -T_a(\zeta) & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & -T_b(\zeta) & E \end{pmatrix}$$

in the norm. Moreover $\|\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta) - \mathcal{H}(\zeta)\| \leqslant c_1\varepsilon$. Observe that $\mathcal{H}(\zeta)$ is invertible and

$$\mathcal{H}(\zeta)^{-1} = \begin{pmatrix} E & T_a(\zeta) & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & T_b(\zeta) & E \end{pmatrix}.$$

Therefore $\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)$ is also invertible for ε small enough, and

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1} - \mathcal{H}(\zeta)^{-1}\| \leqslant c_2\varepsilon. \tag{33}$$

Recalling (25) and applying Proposition 2, we deduce

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) &= \mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta)\\
&= \begin{pmatrix} E & -T_a^\varepsilon(\zeta) & 0\\ -\varepsilon S_a^\varepsilon(\zeta) & E & -\varepsilon S_b^\varepsilon(\zeta)\\ 0 & -T_b^\varepsilon(\zeta) & E\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{R}_\zeta(A_a^\varepsilon) & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{R}_\zeta(B_\varepsilon) & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{R}_\zeta(A_b^\varepsilon)\end{pmatrix}\\
&\to \begin{pmatrix} E & T_a(\zeta) & 0\\ 0 & E & 0\\ 0 & T_b(\zeta) & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{R}_\zeta(A_a) & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{R}_\zeta(B) & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{R}_\zeta(A_b)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{R}_\zeta(A_a) & T_a(\zeta)\mathrm{R}_\zeta(B) & 0\\ 0 & \mathrm{R}_\zeta(B) & 0\\ 0 & T_b(\zeta)\mathrm{R}_\zeta(B) & \mathrm{R}_\zeta(A_b)\end{pmatrix} = \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}) \quad \text{as } \varepsilon\to 0,
\end{aligned}$$

by (28). Estimate (17) follows from the equality

$$\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}(\mathcal{R}_\varepsilon(\zeta)-\mathcal{R}(\zeta)) - (\mathcal{H}_\varepsilon(\zeta)^{-1}-\mathcal{H}(\zeta)^{-1})\mathcal{R}(\zeta)$$

and bounds (29), (30) and (33). Here $\mathcal{R}(\zeta) = \operatorname{diag}\{\mathrm{R}_\zeta(A_a), \mathrm{R}_\zeta(B), \mathrm{R}_\zeta(A_b)\}$.

4. Spectrum of $\mathcal{A}$

The limit operator

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}\mathring{A}_a & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & \mathring{A}_b\end{pmatrix}, \qquad D(\mathcal{A}) = \Big\{(\phi_a,\psi,\phi_b) \in D(\mathring{A}_a)\times D(B)\times D(\mathring{A}_b)\colon\ \phi_a(0)=\psi(-1),\ \ \phi_b(0)=\psi(1)\Big\}.$$

constructed above is non-self-adjoint. Direct computations show that the adjoint operator $\mathcal{A}^*$ in $\mathcal{L}$ has the form

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix}A_a & 0 & 0\\ 0 & \mathring{B} & 0\\ 0 & 0 & A_b\end{pmatrix}, \qquad D(\mathcal{A}^*) = \Big\{(\phi_a,\psi,\phi_b) \in D(A_a)\times D(\mathring{B})\times D(A_b)\colon\ \phi_a'(0)=\psi'(-1),\ \ \phi_b'(0)=\psi'(1)\Big\}.$$

In what follows we will denote by u_λ, v_λ and w_λ the eigenfunctions of A_a, A_b and B respectively which correspond to an eigenvalue λ. So u_λ, v_λ and w_λ are non-trivial solutions of the problems

$$-u''+qu=\lambda ru \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a u=0, \quad u(0)=0; \tag{34}$$

$$-v''+qv=\lambda rv \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad v(0)=0, \quad \ell_b v=0; \tag{35}$$

$$-w''=\lambda hw \quad \text{in } \mathcal{J}, \qquad w'(-1)=0, \quad w'(1)=0 \tag{36}$$

respectively. Let us normalize these eigenfunctions by setting

$$\|u_\lambda\|_{L_2(r,\mathcal{I}_a)} = \|v_\lambda\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} = \|w_\lambda\|_{L_2(h,\mathcal{J})} = 1. \tag{37}$$

Denote also by X_λ the root subspace of $\mathcal{A}$ for λ, that is

$$X_\lambda = \operatorname{span}\left\{\ker(\mathcal{A}-\lambda)^k\colon k\in\mathbb{N}\right\}.$$

The eigenvectors and root vectors of a non-self-adjoint operator are also called generalized eigenvectors. So X_λ is a subspace of the generalized eigenfunctions corresponding to the eigenvalue λ.

Theorem 2. *(i) The spectrum of $\mathcal{A}$ is real and discrete, and*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_a) \cup \sigma(B) \cup \sigma(A_b). \tag{38}$$

(ii) If λ belongs to only one of the sets $\sigma(A_a)$, $\sigma(B)$ or $\sigma(A_b)$, then λ is a simple eigenvalue of $\mathcal{A}$.

(iii) If $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b)$, but λ is not an eigenvalue of B, then λ is a double eigenvalue and $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda E)$.

(iv) Suppose that λ belongs to $\sigma(A_a) \cap \sigma(B)$ (resp. $\sigma(A_b) \cap \sigma(B)$), but λ is not an eigenvalue of A_b (resp. A_a), then λ is a double eigenvalue of $\mathcal{A}$. Finally, if $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b) \cap \sigma(B)$, then λ is an eigenvalue of $\mathcal{A}$ with multiplicity 3. In both the cases we have $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda)^2$, but $X_\lambda \neq \ker(\mathcal{A} - \lambda)$.

Proof. (i) Equality (38) follows directly from the explicit representation (28) of $\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})$. Indeed, each of spectra $\sigma(A_a)$, $\sigma(A_b)$ and $\sigma(B)$ is contained in the spectrum of $\mathcal{A}$. If ζ does not belongs to set $\sigma(A_a) \cup \sigma(A_b) \cup \sigma(B)$, then not only $\mathrm{R}_\zeta(A_a)$, $\mathrm{R}_\zeta(A_b)$, $\mathrm{R}_\zeta(B)$, but also $T_a(\zeta)$ and $T_b(\zeta)$ are bounded, because in this case problems (18) and (19) for $\varepsilon = 0$ are uniquely solvable for all $\psi \in W_2^2(\mathcal{J})$. Therefore operator $\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})$ is also bounded. The operators A_a, A_b and B associated with eigenvalue problems (34), (35) and (36) are self-adjoint and have compact resolvents. Consequently $\sigma(A)$ is real and discrete.

(ii) Observe that the spectra of A_a, A_b and B are simple. A trivial verification shows that if λ belongs to only one of the sets $\sigma(A_a)$, $\sigma(A_b)$ or $\sigma(B)$, then λ is a simple eigenvalue of $\mathcal{A}$ with eigenvector $(u_\lambda, 0, 0)$ if $\lambda \in \sigma(A_a)$, and $(0, 0, v_\lambda)$ if $\lambda \in \sigma(A_b)$, and $(T_a(\lambda)w_\lambda, w_\lambda, T_b(\lambda)w_\lambda)$ if $\lambda \in \sigma(B)$.

(iii) In the case $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b)$ and $\lambda \notin \sigma(B)$, there are two linearly independent eigenvectors $U = (u_\lambda, 0, 0)$ and $V = (0, 0, v_\lambda)$. Moreover, equation

$$(\mathcal{A} - \lambda)Y = c_1 U + c_2 V$$

is unsolvable for any c_1 and c_2 such that $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. If for instance c_1 is different from zero, then the problem

$$-u'' + qu - \lambda ru = c_1 r u_\lambda \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a u = 0, \quad u(0) = 0 \tag{39}$$

has no solutions. Suppose, contrary to our claim, that such solution exists. Then multiplying equation (39) by u_λ and integrating by parts yield $c_1 \|u_\lambda\|^2_{L_2(r,\mathcal{I}_a)} = 0$. Therefore $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda)$ and $\dim X_\lambda = 2$.

(iv) Suppose that $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(B)$ and $\lambda \notin \sigma(A_b)$. In this case there exists the eigenvector $U = (u_\lambda, 0, 0)$. Furthermore, we will show that the equation

$$(\mathcal{A} - \lambda)U_* = U$$

is solvable. We are thus looking for a solution $U_* = (u, w, v)$ of

$$-u'' + qu - \lambda ru = ru_\lambda \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a u = 0, \quad u(0) = w(-1); \tag{40}$$

$$-w'' - \lambda hw = 0 \quad \text{in } \mathcal{J}, \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0; \tag{41}$$

$$-v'' + qv - \lambda rv = 0 \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad v(0) = w(1), \quad \ell_b v = 0. \tag{42}$$

Obviously, $w = c_0 w_\lambda$ for some constant c_0, where w_λ is a normalized eigenfunction of B. Then (42) admits a unique solution $v_* = c_0\, T_b(\lambda) w_\lambda$ for each c_0, since $\lambda \in \varrho(A_b)$. Next, (40) is in general unsolvable, since λ is a point of $\sigma(A_a)$. But we have the free parameter

c_0 in the boundary condition; (40) with the condition $u(0) = c_0 w_\lambda(-1)$ is solvable if and only if

$$c_0 = \frac{1}{w_\lambda(-1)u'_\lambda(0)}. \tag{43}$$

This equality can be easily obtained by multiplying the equation in (40) by u_λ and integrating by parts. Remark that both of the values $w_\lambda(-1)$ and $u'_\lambda(0)$ are different from zero. If u_0 is a solution of (40), then the operator $\mathcal{A}$ has a root vector

$$U_* = (u_0, c_0\, w_\lambda, c_0\, T_b(\lambda) w_\lambda)\,,$$

where c_0 is given by (43). Hence, the subspace X_λ is a linear span of the eigenvector U and the root vector U_*. In addition, there are no other root vectors, because the equation

$$(\mathcal{A} - \lambda)Y = U_*$$

leads to the problem

$$-\, w'' - \lambda h w = c h w_\lambda \quad \text{in } \mathcal{J}, \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0, \tag{44}$$

which is unsolvable for $c \neq 0$. The case $\lambda \in \sigma(A_b) \cap \sigma(B)$ and $\lambda \notin \sigma(A_a)$ is treated similarly.

Now we suppose that

$$\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b) \cap \sigma(B).$$

Then the operator $\mathcal{A}$ has two linearly independent eigenvectors $U = (u_\lambda, 0, 0)$ and $V = (0, 0, v_\lambda)$. Note also that $\mathcal{A}$ has no eigenvectors $Y = (u, w, v)$, where w is different from zero. In this case, the values $w(-1)$ and $w(1)$ are always different from zero and hence the problems for u and v are unsolvable. We will prove that $X_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda)^2$ and $\dim X_\lambda = 3$. Let us consider the equation

$$(\mathcal{A} - \lambda)Y = c_1 U + c_2 V$$

with arbitrary constants c_1 and c_2, that is to say,

$$-\, u'' + qu - \lambda r u = c_1 r u_\lambda \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \qquad \ell_a u = 0, \quad u(0) = w(-1); \tag{45}$$

$$-\, w'' - \lambda h w = 0 \quad \text{in } \mathcal{J}, \qquad w'(-1) = 0, \quad w'(1) = 0; \tag{46}$$

$$-\, v'' + qv - \lambda r v = c_2 r v_\lambda \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \qquad v(0) = w(1), \quad \ell_b v = 0. \tag{47}$$

Reasoning as above, we establish that $w = c_0 w_\lambda$ and problems (45) and (47) admit solutions simultaneously if and only if the following equalities

$$c_1 = c_0 w_\lambda(-1) u'_\lambda(0), \qquad c_2 = -c_0 w_\lambda(1) v'_\lambda(0)$$

hold. Then the conditions $c_0 \neq 0$ and

$$c_1 = -\frac{w_\lambda(-1)u'_\lambda(0)}{w_\lambda(1)v'_\lambda(0)}\, c_2$$

ensure the existence of a root vector Y_* of $\mathcal{A}$. Furthermore there are no other root vectors, by reasoning similar to that in the previous case. Hence the subspace X_λ for a triple eigenvalue λ is generated by the eigenvectors U, V and the root vector Y_*. $\square$

5. Convergence of Spectra

Let us denote by

$$\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon < \cdots < \lambda_n^\varepsilon < \cdots$$

the eigenvalues of problem (1)–(3), i.e., the eigenvalues of $\mathcal{A}_\varepsilon$. Note that each eigenvalue λ_n^ε is simple. Let

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$$

be the eigenvalues of limit problem (13)–(16) (or also the operator $\mathcal{A}$), counted with algebraic multiplicities.

Theorem 3. *For each $n \in \mathbb{N}$, the eigenvalue λ_n^ε of problem (13)–(16) converges as $\varepsilon \to 0$ to the eigenvalue λ_n of (13)–(16) with the same number. That is, if λ is an eigenvalue of (13)–(16) with algebraic multiplicity m, then there exists a neighbourhood of λ which contains exactly m eigenvalues of (1)–(3) for ε small enough.*

Proof. The theorem follows from the norm resolvent convergence of $\mathcal{A}_\varepsilon$ proved in Theorem 1 and some general results on the approximation of eigenvalues of compact operators. Let K be a compact operator in a separable Hilbert space $\mathcal{H}$. Suppose that $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is a sequence of compact operators in $\mathcal{H}$ such that $K_\varepsilon \to K$ as $\varepsilon \to 0$ in the uniform norm. Let $\mu_1, \mu_2, \ldots$ be the nonzero eigenvalues of K ordered by decreasing magnitude taking account of algebraic multiplicities. Then for each $\varepsilon > 0$ there is an ordering of the eigenvalues $\mu_1(\varepsilon), \mu_2(\varepsilon), \ldots$ of K_ε such that $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_n(\varepsilon) = \mu_n$, for each natural number n. Suppose that μ is a nonzero eigenvalue of K with algebraic multiplicity m and Γ_μ is a circle centered at μ which lies in $\rho(K)$ and contains no other points of $\sigma(K)$. Then, there is an ε_0 such that, for $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, there are exactly m eigenvalues (counting algebraic multiplicities) of K_ε lying inside Γ_μ and all points of $\sigma(K_\varepsilon)$ are bounded away from Γ_μ [35, Ch.1], [36, Ch.XI-9], [37].

We apply these results to $K = \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})$ and $K_\varepsilon = \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon)$. Then we have

$$\sigma_p(\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})) = \left\{\frac{1}{\lambda_n - \zeta},\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \sigma_p(\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon)) = \left\{\frac{1}{\lambda_n^\varepsilon - \zeta},\ n \in \mathbb{N}\right\};$$

both eigenvalue sequences are ordered by decreasing magnitude. Since $\mathcal{A}_\varepsilon \to \mathcal{A}$ in the norm resolvent sense as $\varepsilon \to 0$, that is, $\|\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon) - \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})\| \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, we have the “number-by-number” convergence of the eigenvalues

$$\frac{1}{\lambda_n^\varepsilon - \zeta} \to \frac{1}{\lambda_n - \zeta}, \qquad \text{as } \varepsilon \to 0,$$

from which the desired conclusion follows. □

Remark 1. We expect that the estimate

$$|\lambda_n^\varepsilon - \lambda_n| \leqslant C_n\sqrt{\varepsilon}$$

to be correct for each $n \in \mathbb{N}$ and some constants C_n. However, it does not follow directly from bound (17), because the resolvents $\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})$ and $\mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon)$ are not in general normal operators.

6. Some Remarks On Eigenfunction Convergence

Since the multiplicity of eigenvalues of the limit operator is up to 3, the bifurcation pictures for multiple eigenvalues of (13)–(16) are quite complicated. The bifurcations of eigenvalues as well the eigensubspaces can be described by a more accurate asymptotic analysis. We omit the details here, because we will consider these questions in a forthcoming publication. However we can obtain some results on the limit behaviour of eigenfunctions that follow directly from the norm resolvent convergence $\mathcal{A}_\varepsilon \to \mathcal{A}$.

Let us return to the compact operators K and K_ε which appeared in the previous section. We consider the Riesz spectral projections

$$E(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\mu} \mathrm{R}_z(\mathcal{A})\,dz, \qquad E_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\mu} \mathrm{R}_z(\mathcal{A}_\varepsilon)\,dz.$$

The range $R(E(\mu))$ of $E(\mu)$ is the space of generalized eigenfunctions of K corresponding to μ and $R(E_\varepsilon(\mu))$ is the direct sum of the subspaces of generalized eigenfunctions of K_ε associated with the eigenvalues of K_ε inside Γ_μ. If $K_\varepsilon \to K$ as $\varepsilon \to 0$ in the norm, then $E_\varepsilon(\mu) \to E(\mu)$ in the norm, and therefore

$$\dim R(E_\varepsilon(\mu)) = \dim R(E(\mu)) = m,$$

where m is the algebraic multiplicity of μ.

Theorem 4. *Let $y_{\varepsilon,n}$ be the eigenfunction of (1)–(3) which corresponds to the eigenvalue λ_n^ε and $\|y_{\varepsilon,n}\|_{L_2(r,\mathcal{I})} = 1$.*

Suppose that $\lambda_n^\varepsilon \to \lambda_n$, where λ_n is a simple eigenvalue of $\mathcal{A}$ belonging to $\sigma(A_a)$. Then the eigenfunction $y_{\varepsilon,n}$ converges in $L_2(\mathcal{I})$ as $\varepsilon \to 0$ to the function

$$y(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{if } x \in \mathcal{I}_a, \\ 0, & \text{if } x \in \mathcal{I}_b \end{cases},$$

where u_n is an normalized eigenfunction of A_a associated with λ_n, that is,

$$-u_n'' + qu_n = \lambda_n r u_n \quad \text{in } \mathcal{I}_a, \quad \ell_a u_n = 0, \quad u_n(0) = 0, \qquad \|u_n\|_{L_2(r,\mathcal{I}_a)} = 1.$$

Similarly if λ_n belongs to $\sigma(A_b)$ and λ_n is simple, then $y_{\varepsilon,n} \to y$ in $L_2(\mathcal{I})$ as $\varepsilon \to 0$, where

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \mathcal{I}_a, \\ v_n(x), & \text{if } x \in \mathcal{I}_b \end{cases}$$

and v_n is an normalized eigenfunction of A_b with eigenvalue λ_n, i.e.,

$$-v_n'' + qv_n = \lambda_n r v_n \quad \text{in } \mathcal{I}_b, \quad v_n(0) = 0, \quad \ell_b v_n = 0, \qquad \|v_n\|_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} = 1.$$

Assume $\lambda_n^\varepsilon \to \lambda_n$, where λ_n is a simple eigenvalue of $\mathcal{A}$ belonging to $\sigma(B)$. Then the eigenfunction $y_{\varepsilon,n}$ converges in $L_2(\mathcal{I})$ to a solution y of the problem

$$-y'' + qy = \lambda_n r y \quad \text{in } \mathcal{I}\setminus\{0\}, \quad \ell_a y = 0, \quad \ell_b y = 0,$$
$$y(-0) = \theta w_n(-1), \quad y(+0) = \theta w_n(1),$$

where w_n is the corresponding eigenfunction of B such that $\|w_n\|_{L_2(h,\mathcal{J})} = 1$. Normalizing factor θ is given by

$$\theta = \Big(\|T_a(\lambda_n)w_n\|^2_{L_2(r,\mathcal{I}_a)} + \|T_b(\lambda_n)w_n\|^2_{L_2(r,\mathcal{I}_b)}\Big)^{-1}.$$

Proof. In the case when $K = \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A})$, $K_\varepsilon = \mathrm{R}_\zeta(\mathcal{A}_\varepsilon)$, λ is a unique point of $\sigma(\mathcal{A})$ lying inside Γ_λ, and ε is small enough, we see that $X_\lambda = R(E(\frac{1}{\lambda-\zeta}))$ is a subspace of generalized eigenfunctions of $\mathcal{A}$ corresponding to the eigenvalue λ, and the subspace $X^\varepsilon_\lambda = R(E_\varepsilon(\frac{1}{\lambda-\zeta}))$ is generated by all eigenfunctions of $\mathcal{A}_\varepsilon$ for which $\lambda^\varepsilon_n \to \lambda$ as $\varepsilon \to 0$. Then the norm resolvent convergence $\mathcal{A}_\varepsilon \to \mathcal{A}$ implies that the gap between X^ε_λ and X_λ tends to zero as $\varepsilon \to 0$ for each $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$. In particular, if λ_n is a simple eigenvalue of $\mathcal{A}$ with eigenvector Y_n and $Y_{\varepsilon,n}$ is an eigenvector of $\mathcal{A}_\varepsilon$ that corresponds to λ^ε_n, then $Y_{\varepsilon,n} \to Y_n$ in $\mathcal{L}$ as $\varepsilon \to 0$, provided $\|Y_{\varepsilon,n}\|_{\mathcal{L}} = \|Y_n\|_{\mathcal{L}} = 1$.

Assume λ_n is a simple eigenvalue of $\mathcal{A}$ and $\lambda_n \in \sigma(A_a)$. In view of Theorem 2, the subspace X_λ is generated by vector $Y_n = (u_n, 0, 0)$. Then $Y_{\varepsilon,n} \to Y_n$ as $\varepsilon \to 0$ in the norm of $\mathcal{L}$. If we set $Y_{\varepsilon,n} = (y^a_\varepsilon, w_\varepsilon, y^b_\varepsilon)$, then the eigenfunction $y_{\varepsilon,n}$ of (1)–(3) can be written as

$$y_{\varepsilon,n}(x) = \begin{cases} y^a_\varepsilon(x), & \text{if } x \in \mathcal{I}^\varepsilon_a,\\ w_\varepsilon(x/\varepsilon), & \text{if } x \in (-\varepsilon,\varepsilon),\\ y^b_\varepsilon(x), & \text{if } x \in \mathcal{I}^\varepsilon_b. \end{cases}$$

So we have

$$\begin{aligned}\|y_{\varepsilon,n} - y_n\|^2_{L_2(\mathcal{I})} &= \int_a^{-\varepsilon} |y^a_\varepsilon - u_n|^2\,dx + \int_\varepsilon^b |y^a_\varepsilon|^2\,dx\\ &+ \int_{-\varepsilon}^0 |w_\varepsilon(\tfrac{x}{\varepsilon}) - u_n(x)|^2\,dx + \int_0^\varepsilon |w_\varepsilon(\tfrac{x}{\varepsilon})|^2\,dx \leqslant c_1\|y^a_\varepsilon - u_n\|^2_{L_2(r,\mathcal{I}_a)}\\ &+ c_2\|y^b_\varepsilon\|^2_{L_2(r,\mathcal{I}_b)} + c_3\varepsilon\|w_\varepsilon\|^2_{L_2(h,\mathcal{J})} + \int_{-\varepsilon}^0 |u_n|^2\,dx \leqslant c_4\|Y_{\varepsilon,n} - Y_n\|^2_{\mathcal{L}} + c_5\varepsilon.\end{aligned}$$

The right-hand side tends to zero as $\varepsilon \to 0$, since $Y_{\varepsilon,n} \to Y_n$ in $\mathcal{L}$ and u_n is bounded on $\mathcal{I}_a$ as an element of $W^2_2(\mathcal{I}_a)$. The same proof works for the cases $\lambda_n \in \sigma(A_b)$ and $\lambda_n \in \sigma(B)$. □

Remark 2. Of course, in the case of multiple eigenvalues, we also have some information about the convergence of eigenfunctions. For instance, if we suppose that $\lambda \in \sigma(A_a) \cap \sigma(A_b)$, but λ is not an eigenvalue of B, and two eigenvalues λ^ε_n and $\lambda^\varepsilon_{n+1}$ tend to λ as $\varepsilon \to 0$, then the gap between the eigensubspace X_λ of $\mathcal{A}$ and the subspace $X^\varepsilon_\lambda = \operatorname{span}\{y_{\varepsilon,n}, y_{\varepsilon,n+1}\}$ vanishes as $\varepsilon \to 0$. Therefore, the eigenfunctions $y_{\varepsilon,n}$ and $y_{\varepsilon,n+1}$ converge in $L_2(\mathcal{I})$ to some linear combinations $c_1u_\lambda + c_2v_\lambda$, where u_λ and v_λ are eigenfunctions of A_a and A_b respectively that correspond to λ. However, without a deeper analysis of the problem, we will not know what the linear combinations are limit positions of vectors $y_{\varepsilon,n}$ and $y_{\varepsilon,n+1}$ in the plane X_λ.

References

1. T. Sarpkaya, *Wave forces on offshore structures*, Cambridge University Press, 2000.
2. A. N. Krylov, *On certain differential equations of mathematical physics having applications in technical questions*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Leningrad, 1932 (in Russian).
3. F. R. Gantmakher and M. G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems*, Gostekhizdat, Moscow, 1950; English transl., Amer. Math. Soc., 2002.
4. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Mathematical physics equations*, Nauka, Moscow, 1972; English transl., Courier Corporation, 2013.
5. S. P. Timoshenko, *Stability and vibrations of elements of a structure*, Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
6. E. Sánchez-Palencia, *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Springer, Berlin, 1980.
7. E. Sánchez-Palencia, *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*, In Trends and applications of pure mathematics to mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, pp. 346–368.
8. J. Sánchez Hubert and E. Sánchez-Palencia, *Vibration and coupling of continuous systems*, Springer, Berlin, 1989.
9. M. Lobo and E. Pérez, Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review, C. R., Méc., Acad. Sci. Paris **331** (2003), no. 4, 303–317. DOI: 10.1016/S1631-0721(03)00058-5
10. O. A. Oleinik, *Homogenization problems in elasticity. Spectra of singularly perturbed operators*, In: R. J. Knops, A. A. Lacey (Eds.), Nonclassical Continuum Mechanics, Cambridge Univ. Press, New York, 1987, pp. 81–95.
11. O. A. Oleinik, *On the eigenoscillations of bodies with concentrated masses*, In: Contemporary Problems of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1988, (in Russian).
12. O. A. Oleinik, *On the frequencies of the eigenoscillations of bodies with concentrated masses*, In: Functional and Numerical Methods of Mathematical Physics, Naukova Dumka, Kiev, 1988, (in Russian).
13. Ю. Д. Головатый, С. А. Назаров, О. А. Олейник, Т. С. Соболева, *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой*, Сиб. матем. журн. **29** (1988), no. 5, 71–91; **English version**: Yu. D. Golovatyĭ, S. A. Nazarov, O. A. Oleĭnik, and T. S. Soboleva, *Natural oscillations of a string with an additional mass*, Sib. Math. J. **29** (1988), no. 5, 744–760. DOI: 10.1007/BF00970268
14. Ю. Д. Головатый, С. А. Назаров, О. А. Олейник, *Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями*, Дифференциальные уравнения и функциональные пространства, Сборник статей. Посвящается памяти акад. Сергея Львовича Соболева, Тр. МИАН СССР, **192**, Наука, Москва, 1990, с. 42–60; **English version**: Yu. D. Golovatyj, S. A. Nazarov, and O. A. Oleinik, *Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions in problems on oscillations of a medium with concentrated perturbations*, Proc. Steklov Inst. Math. **192** (1992), 43–63.
15. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1990.
16. Ю. Д. Головатый, *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами*, Тр. ММО **54** (1992), 29–72; **English version**: Yu. D. Golovatyĭ, *Spectral properties of oscillatory systems with added masses*, Trans. Moscow Math. Soc. 1993, 23–59.

17. H. Hrabchak, *On Neumann spectral problem for system of linear elasticity with the singular perturbed density*, Visnyk Lviv. Univ., Ser. Mech. Math. **45** (1996), 124–140 (in Ukrainian).
18. Т. А. Мельник, С. А. Назаров, *Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями*, Алгебра и анализ **12** (2000), no. 2, 188–238; **English version**: T. A. Mel'nik and S. A. Nazarov, *Asymptotic analysis of the Neumann problem on the junction of a body and thin heavy rods*, St. Petersburg Math. J. **12** (2001), no. 2, 317–351.
19. T. A. Mel'nik, *Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses*, Math. Models Methods Appl. Sci. **11** (2001), no. 6, 1001–1027. DOI: 10.1142/S0218202501001215
20. G. A. Chechkin and T. A. Mel'nyk, *Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses*, Applicable Analysis, **91** (2012), no. 6, 1055–1095. DOI: 10.1080/00036811.2011.602634
21. M. Lobo and E. Pérez, *On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary*, Math. Models Methods Appl. Sci. **3** (1993), no. 2, 249–273. DOI: 10.1142/S021820259300014X
22. M. Lobo and E. Pérez, *Vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary: High frequency vibrations*, In: Spectral Analysis of Complex Structures, Hermann, 1995, pp. 85–101.
23. M. Lobo and E. Pérez, *Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary*, Math. Models Methods Appl. Sci. **5** (1995), no. 5, 565–585. DOI: 10.1142/S0218202595000334
24. Г. А. Чечкин, *Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "легких" концентрированных масс. Двумерный случай*, Изв. РАН. Сер. матем. **69** (2005), no. 4, 161–204. DOI: 10.4213/im652; **English version**: G. A. Chechkin, *Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions of an elliptic operator in a domain with many "light" concentrated masses situated on the boundary. Two-dimensional case*, Izv. Math. **69** (2005), no. 4, 805–846. DOI: 10.1070/IM2005v069n04ABEH001665
25. S. A. Nazarov and E. Pérez, *New asymptotic effects for the spectrum of problems on concentrated masses near the boundary*, C. R., Méc., Acad. Sci. Paris **337** (2009), no. 8, 585–590. DOI: 10.1016/j.crme.2009.07.002
26. Yu. D. Golovaty and A. S. Lavrenyuk, *Asymptotic expansions of local eigenvibrations for plate with density perturbed in neighbourhood of one-dimensional manifold*, Mat. Stud. **13** (2000), no. 1, 51–62.
27. Yu. D. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez, *On vibrating membranes with very heavy thin inclusions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **14** (2004), no. 7, 987–1034. DOI: 10.1142/S0218202504003520
28. Yu. Golovaty and H. Hrabchak, *Asymptotics of the spectrum of a Sturm-Liouville operator on networks with perturbed density*, Visnyk Lviv. Univ., Ser. Mech. Math. **67** (2007), 66–83.
29. Yu. Golovaty and H. Hrabchak, *On Sturm-Liouville problem on starlike graphs with "heavy" nodes*, Visnyk Lviv. Univ., Ser. Mech. Math. **72** (2010), 63–78.
30. G. A. Chechkin, M. E. Pérez, and E. I. Yablokova, *Non-periodic boundary homogenization and "light" concentrated masses*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 2, 321–348.
31. T. A. Mel'nyk, *Hausdorff convergence and asymptotic estimates of the spectrum of a perturbed operator*, Z. Anal. Anwend. **20** (2001), no. 4, 941–957. DOI: 10.4171/ZAA/1053

32. D. Mugnolo, R. Nittka, and O. Post, *Convergence of sectorial operators on varying Hilbert space*, Oper. Matrices **7** (2013), no. 4, 955–995. DOI: 10.7153/oam-07-54
33. F. Rösler, *A note on spectral convergence in varying Hilbert spaces*, Preprint, 2018, (arXiv: 1812.02525).
34. V. F. Lazutkin, *Semiclassical asymptotics of eigenfunctions*, In: Fedoryuk M. V. (eds) Partial Differential Equations V. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 34. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999, pp. 133–171. DOI: 10.1007/978-3-642-58423-7_4
35. I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Amer. Math. Soc. **18**, 1978. **Russian original version**: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамоспряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва, 1965.
36. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators II: Spectral theory*, Interscience, New York, 1963.
37. J. H. Bramble and J. E. Osborn, *Rate of convergence estimates for nonselfadjoint eigenvalue approximations*, Math. Comp. **27** (1973), no. 123, 525–549.
DOI: 10.1090/S0025-5718-1973-0366029-9 and 10.2307/2005658

Стаття: надійшла до редколегії 07.10.2019
доопрацьована 06.07.2020
прийнята до друку 23.12.2020

ПРО СПЕКТР СТРУН З δ'-ПОДІБНИМИ ЗБУРЕННЯМИ ГУСТИНИ МАСИ

Юрій ГОЛОВАТИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: yuriy.golovaty@lnu.edu.ua

Коливні системи з приєднаними масами почали досліджувати ще Пуассон та Бессель, і сьогодні маємо тисячі наукових праць, в яких вивчають коливні процеси у середовищах з неоднорідно розподіленими масами. Теорія сильно неоднорідних середовищ почала особливо активно розвиватися з появою композитних матеріалів, які володіють різноманітними корисними властивостями і широко застосовуються в сучасних технологіях. Важливою частиною цієї теорії є дослідження динамічних та спектральних задач для диференціальних операторів із коефіцієнтами, що містять сильні локальні збурення. Такі задачі вимагають нових підходів в теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, створення нових асимптотичних методів і нових обчислювальних схем.
Ми вивчаємо спектральні властивості операторів Штурма-Ліувілля з сингулярним збуренням вагової функції у випадку загальних крайових умов.

Збуренням є так звана δ'-подібна послідовність вигляду $\varepsilon^{-2}h(x/\varepsilon)$. Характерною особливістю таких задач є присутність залежної від малого параметра ε густини ρ_ε при спектральному параметрі, внаслідок чого самоспряжена операторна реалізація задачі можлива лише у вагових просторах Лебега, які теж залежать від параметра ε. Дослідження сімей операторів, які діють у різних просторах, пов'язане з багатьма труднощами математичної природи. По-перше, як трактувати збіжність таких сімей. По-друге, якщо оператори і збігаються в певному сенсі, то чи така збіжність гарантує збіжність спектрів та власних підпросторів, позаяк в цьому випадку не вдається застосувати класичні теореми теорії операторів. Багато дослідників уникали питання операторної збіжності у таких задач, будуючи формальні асимптотики власних значень і власних функцій та застосовуючи теорію квазімод. Такий підхід не завжди дає цілковитий опис граничної поведінки спектру, його граничної кратності та структури граничних власних підпросторів.
У цій статті застосовано інший підхід до задач з концентрованими масами. Відмовившись від переваг самоспряжених операторів, ми реалізували сингулярно збурену задачу як сім'ю деяких несамоспряжених матричних операторів $\mathcal{A}_\varepsilon$, що діють в тому самому гільбертовому просторі. Ми довели рівномірну резольвентну збіжність $\mathcal{A}_\varepsilon$ при as $\varepsilon \to 0$ і, як наслідок, довели, що їхні спектри збігаються в сенсі Гаусдорфа до спектра деякого оператора $\mathcal{A}$. Цікаво, що хоча оператори $\mathcal{A}_\varepsilon$ були подібними до самоспряжених і володіли дійсним дискретним і простим спектром, граничний оператор $\mathcal{A}$ виявився суттєво несамоспряженим з кратним спектром і кореневими підпросторами, що містили приєднані вектори. На мові самоспряженої операторної реалізації, ми отримали приклад сім'ї самоспряжених операторів T_ε з компактною резольвентою, що діють у деяких просторах H_ε і які "збігаються" до несамоспряженого оператора T_0 в просторі H_0. Тобто, спектри операторів T_ε збігаються в сенсі Гаусдорфа до спектру оператора T_0 із врахуванням алгебричної кратності, а граничне розташування власних підпросторів операторів T_ε можна описати лише за допомогою кореневих підпросторів оператора T_0.

Ключові слова: оператор Штурма-Ліувілля, приєднана маса, сингулярні збурення, спектральна задача, рівномірна резольвентна збіжність, збіжність за Гаусдорфом, несамоспряжений оператор.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 80–88
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 80–88
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.080-088

УДК 519.217

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ НОРМУЮЧОГО МНОЖНИКА РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ

Оксана ЯРОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

Розглядається рівняння відновлення в нелінійній апроксимації. Мета роботи – знайти нелінійні нормуючі функції.

Ключові слова: рівняння відновлення, нормуючий множник, нелінійна апроксимація.

Розглянемо рівняння відновлення в матричній формі

$$X^\varepsilon(t) = A^\varepsilon(t) + \int_0^t F^\varepsilon(du) X^\varepsilon(t-u),$$

де $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $A^\varepsilon(t)$, $X^\varepsilon(t)$ — сім'ї відповідно заданих невід'ємних матричнозначних функцій $F^\varepsilon(dt)$ — сім'ї заданих невід'ємних матричнозначних мір.

Функцію F^ε запишемо в такому вигляді

$$F^\varepsilon = F + \delta_1(\varepsilon)B^1 + \delta_2(\varepsilon)B^2 + \ldots + \delta_n(\varepsilon)B^n + o(\delta_n(\varepsilon)),$$

де $B^1, \ldots, B^n$ — матриці, $\delta_1(\varepsilon) \to 0, \ldots, \delta_n(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$.

У працях [1]–[3] функцію $\rho^{(\varepsilon)}$ визначено так

$$\rho^{(\varepsilon)} = \sum_{s=1}^{r} \frac{1 - L^\varepsilon_{w_s w_s}}{m_s},$$

де $w_1 \in E_1, \ldots, w_r \in E_r$ — фіксовані індекси,

$$m_s = \frac{p_i^{(s)}}{p_{w_s}^{(s)}} a_{ij}$$

2020 Mathematics Subject Classification: 60J25 і p^s — лівий власний вектор матриці F^s,

$$L^{\varepsilon}_{ij} = F^{\varepsilon}_{ij} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{n \in E_k \setminus \{w_k\}} F_{in}(\varepsilon) \cdot L_{nj}(\varepsilon).$$

Виконується слабка збіжність $L^{\varepsilon}(t)$ до $L(t)$, при $\varepsilon \to 0$. Крім того,

$$L_{ij} = L_{ij}(\infty) = 0, \qquad \text{при} \qquad i \in E_s, j \in E_k, s \neq k,$$

$$L_{w_s j} = \frac{p_i^{(s)}}{p_{w_s}^{(s)}}, \quad L_{iw_s} = 1, \quad \forall i, j \in E_s.$$

$$L_{ij} = F_{ij} + \sum_{n \in E_s \setminus \{w_s\}} F_{in} \cdot L_{nj}.$$

Введемо такі позначення

$$\pi_s = \sum_{i,j \in E_s} p_i^{(s)} \cdot a_{ij},$$

$$b^m_{sk} = \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_k}} p_i^{(s)} \cdot B^m_{ij}.$$

$$d^{nm}_{sk} = \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_k}} p_i^{(s)} \cdot (B^n V B^m)_{ij} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_k \\ l_1, l_2 \in E_l}} p_i^{(s} \cdot B^n_{il_1} V^{(l)}_{l_1 l_2} B^m_{l_2 j}.$$

$V^{(l)}$ — узагальнена обернена матриця до матриці $\left[I - F^l\right]$,

$$V^{(l)} \left(I - F^l\right) = \left(I - F^l\right) V^{(l)} = I - \Pi^{(l)},$$

де $\Pi^{(l)} = \left[\overrightarrow{1}^{(l)} \bigotimes \overrightarrow{p}^{(l)}\right]$ — власний проектор матриці F^l, $V = \operatorname{diag}\{V^{(1)}, \ldots, V^{(r)}\}$.

Теорема 1. *Нехай μ_s — перший номер, для якого $b^{\mu_s}_{ss} \neq 0$, $s = 1, \ldots, r$, $m = \min\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$. Якщо існує таке s, для якого $d^{11}_{ss} \neq 0$, $d^{22}_{ss} \neq 0$, то:*

1) *якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^m_{ss}}{\pi_s};$$

2) *якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^m_{ss} + \alpha d^{11}_{ss}}{\pi_s};$$

3) *якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = \beta\delta_m(\varepsilon)$, то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^m_{ss} + \alpha d^{11}_{ss} + \beta d^{22}_{ss} + (d^{11}_{ss} + d^{22}_{ss})\sqrt{\alpha\beta}}{\pi_s};$$

4) *якщо* $\delta_m(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, *то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_1^2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s};$$

5) *якщо* $\delta_m(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) \cdot \delta_2(\varepsilon)$, *то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b_{ss}^m + d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22}}{\pi_s}.$$

Доведення. Розглянемо рівняння

$$L_{ij}^{\varepsilon} = F_{ij}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{n \in E_k \setminus \{w_k\}} F_{in}(\varepsilon) \cdot L_{nj}(\varepsilon).$$

Підставимо функцію F^s. У підсумку отримаємо таке співвідношення:

$$L_{iw_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms} \cdot F_{iw_s} + \sum_{j \in E_m \setminus \{w_m\}} F_{ij} \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) B_{iw_s}^k + \\ + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j \in E_l \setminus \{w_l\}} \delta_k(\varepsilon) B_{ij}^k \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon}.$$

Перепишемо в такому вигляді:

$$L_{iw_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms} \cdot F_{iw_s} + \sum_{j \in E_m \setminus \{w_m\}} F_{ij} \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{j \in E_s} B_{ij}^k + \\ + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j \in E_l \setminus \{w_l\}} \delta_k(\varepsilon) B_{ij}^k \cdot \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right].$$

Домножимо на $p_i^{(m)}$ і підсумуємо по всіх $i \in E_m$.

$$\sum_{i \in E_m} p_i^{(m)} \cdot L_{iw_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms} \cdot p_{w_m}^{(m)} + \sum_{j \in E_m \setminus \{w_m\}} p_j^{(m)} \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{i,j \in E_s} p_i^{(m)} B_{ij}^k + \\ + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_m \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} p_i^{(m)} \cdot B_{ij}^k \cdot \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right].$$

Врахувавши, що $L_{w_m,w_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms}$, отримаємо

$$L_{w_m,w_s}^{\varepsilon} - \delta_{ms} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i \in E_m \\ i \in E_s}} \frac{p_i^{(m)} B_{ij}^k}{p_{w_m}^{(m)}} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_m \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p_i^{(m)}}{p_{w_m}^{(m)}} B_{ij}^k \cdot \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] = \\ = \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_m \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p_i^{(m)}}{p_{w_m}^{(m)}} B_{ij}^k \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right].$$

Приймемо $m = s$

$$1 - L^{\varepsilon}_{w_s w_s} = -\sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \frac{b^k_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p^{(s)}_i}{p^{(s)}_{w_s}} B^k_{ij} \cdot \left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right].$$

Якщо існує $s \in 1, \ldots, r$, то

$$b^1_{ss} = \sum_{i,j \in E_s} p^{(s)}_i B^1_{ij} \neq 0,$$
$$b^2_{ss} = \sum_{i,j \in E_s} p^{(s)}_i B^2_{ij} \neq 0,$$

та

$$1 - L^{\varepsilon}_{w_s w_s} = -\delta_1(\varepsilon) \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \delta_1(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p^{(s)}_i}{p^{(s)}_{w_s}} B^1_{ij} \left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right] -$$
$$- \delta_2(\varepsilon) \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p^{(s)}_i}{p^{(s)}_{w_s}} B^2_{ij} \left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right].$$

Нехай

$$\delta_1(\varepsilon)[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}] = o(\delta_1(\varepsilon)),$$
$$\delta_2(\varepsilon)[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}] = o(\delta_2(\varepsilon)).$$

Тоді

$$1 - L^{\varepsilon}_{w_s w_s} = -\delta_1(\varepsilon) \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \delta_2(\varepsilon) \frac{b^2_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - o(\delta_1(\varepsilon)) - o(\delta_2(\varepsilon)).$$

Отож,

$$\rho^{\varepsilon} = \sum_{s=1}^{r} \frac{1 - L^{\epsilon}_{w_s w_s}}{m_s} =$$
$$= -\delta_1(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s} m_s} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^2_{ss}}{p^{(s)}_{w_s} m_s} - o(\delta_1(\varepsilon)) =$$
$$= -\delta_1(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^1_{ss}}{\pi_s} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^2_{ss}}{\pi_s} - o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Тому

$$\rho^{\varepsilon} = -\delta_1(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^1_{ss}}{\pi_s} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^2_{ss}}{\pi_s} - o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Далі обчислимо C_{sk}^{ε}

$$
\begin{aligned}
C_{sk}^{\varepsilon} = \frac{L_{w_s w_k}^{\varepsilon} - \delta_{sk}}{\rho^{\varepsilon} m_s} = \\
&= -\left[\delta_1(\varepsilon)\frac{b_{sk}^1}{m_s p_{w_s}} + \delta_2(\varepsilon)\frac{b_{sk}^2}{m_s p_{w_s}} + o(\delta_1(\varepsilon))\right] \times \\
&\times \left[\delta_1(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^1}{\pi_s} + \delta_2(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^2}{\pi_s} + o(\delta_1(\varepsilon))\right]^{-1} = \\
&= -\delta_1(\varepsilon)\left[\frac{b_{sk}^1}{\pi_s} + \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}\frac{b_{sk}^2}{\pi_s} + o(1)\right]\cdot(\delta_1(\varepsilon))^{-1}\cdot\left[\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^1}{\pi_s} + \sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^2}{\pi_s} + o(1)\right].
\end{aligned}
$$

У підсумку, отримуємо

$$
C_{sk} = -\frac{b_{sk}^1}{\pi_s}\left[\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{sk}^1}{\pi_s}\right]^{-1}.
$$

Нехай $\mu_s > 1$ перший номер, для якого $b_{ss}^{\mu_s} \neq 0$. Тоді

$$
1 - L_{w_s w_s}^{\varepsilon} = -\delta_{\mu_s}(\varepsilon)\frac{b_{ss}^{\mu_s}}{p_{w_s}^{(s)}} - o(\delta_{\mu_s}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{n}\delta_k(\varepsilon)\sum_{l=1}^{r}\sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}}\frac{p_i^{(s)}}{p_{w_s}^{(s)}}\cdot B_{ij}^k\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right].
$$

Отож,

$$
\begin{aligned}
L_{iw_s}^{\varepsilon} - L_{iw_s} = \sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} F_{ij}\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] + \sum_{k=1}^{n}\delta_k(\varepsilon)\sum_{j\in E_k}B_{ij}^k + \\
+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\sum_{j\in E_l\setminus\{m_l\}}\delta_k(\varepsilon)B_{ij}^k\left[L_{iw_s}^{\varepsilon} - L_{iw_s}\right] = \\
= \sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} F_{ij}\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] + \delta_1(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}B_{ij}^1 + \delta_2(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)).
\end{aligned}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}}(\delta_{ij} - F_{ij})\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] = \\
= -\delta_{iw_m}\left[L_{w_s w_s}^{\varepsilon} - L_{w_s w_s}\right] + \delta_1(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}B_{ij}^1 + \delta_2(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)) = \\
= \delta_1(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}B_{ij}^1 + \delta_2(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)).
\end{aligned}
$$

Домножимо обидві частини на $V_{ki}^{(m)}$, $k \in E_m$ і підсумуємо по всіх $i \in E_m$.

$$\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} \left(\delta_{kj} - p_j^{(m)}\right)\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] = \\ = \delta_1(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B_{ij}^1 + \delta_2(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Приймемо $k = w_m$. Тоді

$$\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} p_j^{(m)}\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] = \\ = -\delta_1(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{w_m}^{(m)} B_{ij}^1 - \delta_2(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{w_m}^{(m)} B_{ij}^2 - o(\delta_1(\varepsilon)),$$

$$L_{kw_s}^{\varepsilon} - L_{kw_s} = \sum_{j\in E_m\setminus w_m} p_j^{(m)}\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] + \delta_1(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B_{ij}^1 + \\ + \delta_2(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)) = \\ = \delta_1(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}}\left[V_{ki}^{(m)} B_{ij}^1 - V_{w_m i}^{(m)} B_{ij}^1\right] + \\ + \delta_2(\varepsilon)\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}}\left[V_{ki}^{(m)} B_{ij}^2 - V_{w_m i}^{(m)} B_{ij}^2\right] + o(\delta_1(\varepsilon)) = \\ = \delta_1(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}\left[(V^{(m)}B^1)_{kj} - (V^{(m)}B^1)_{w_m j}\right] + \\ + \delta_2(\varepsilon)\sum_{j\in E_s}\left[(V^{(m)}B^2)_{kj} - (V^{(m)}B^2)_{w_m j}\right] + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Враховуючи те, що

$$b_{sl}^1 = \sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_l}} p_i^{(s)} B_{ij}^1 = 0,$$
$$b_{sl}^2 = \sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_l}} p_i^{(s)} B_{ij}^2 = 0,$$

отримаємо

$$\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B_{ij}^1\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] + \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B_{ij}^2\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] =$$

$$= \delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s \\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B_{ij}^1 \left[(V^{(l)}B^1)_{jk} - (V^{(l)}B^1)_{w_l k}\right] +$$

$$+ \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s \\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B_{ij}^2 \left[(V^{(l)}B^1)_{jk} - (V^{(l)}B^2)_{w_l k}\right] + o(\delta_1(\varepsilon)) =$$

$$= \delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s}} p_i^{(m)} (B^1V^{(l)}B^1)_{ik} + \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s}} p_i^{(m)} (B^2V^{(l)}B^2)_{ik} + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Тоді

$$L^{\varepsilon}_{w_s w_k} - \delta_{sk} = \delta_{\mu_s}(\varepsilon)\frac{b_{sk}^{\mu_k}}{p_{w_s}^{(s)}} + o(\delta_{\mu_s}(\varepsilon)) + \delta_1^2(\varepsilon)\frac{d_{sk}^{11}}{p_{w_s}^{(s)}} + \delta_2^2(\varepsilon)\frac{d_{sk}^{22}}{p_{w_s}^{(s)}} +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\left(\frac{d_{sk}^{11}}{p_{w_s}^{(s)}} + \frac{d_{sk}^{22}}{p_{w_s}^{(s)}}\right) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + o(\delta_2^2(\varepsilon)).$$

Отож, отримуємо

$$\rho_s^{\varepsilon} = -\delta_{\mu_s}(\varepsilon)\frac{b_{ss}^{\mu_s}}{\pi_s} - {}_1^2(\varepsilon)\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s} - \delta_2^2(\varepsilon)\frac{d_{ss}^{22}}{\pi_s} - \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\left(\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s} + \frac{d_{ss}^{22}}{\pi_s}\right) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + o(\delta_2^2(\varepsilon)).$$

Приймемо $m = \min \mu_1, \dots, \mu_r$.

Нехай існує s таке, що $d_{ss}^{11} \neq 0$ і $d_{ss}^{11} \neq 0$. Тоді

$$\rho^{\varepsilon} = -\sum_{s=1}^{r}\left(\delta_m(\varepsilon)\frac{b_{ss}^m}{\pi_s} + \delta_1^2\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s} + \delta_2^2\frac{d_{ss}^{22}}{\pi_s} + \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\frac{d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22}}{\pi_s}\right) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + o(\delta_2^2(\varepsilon)).$$

Розглянемо такі випадки.

1. Якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m}{\pi_s}.$$

2. Якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m + \alpha d_{ss}^{11}}{\pi_s}.$$

3. Якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = \beta\delta_m(\varepsilon)$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m + \alpha d_{ss}^{11} + \beta d_{ss}^{22} + (d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22})\sqrt{\alpha\beta}}{\pi_s}.$$

4. Якщо $\delta_m(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_1^2(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s}.$$

5. Якщо $\delta_m(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) \cdot \delta_2(\varepsilon)$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b_{ss}^m + d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22}}{\pi_s}.$$

Теорему доведено. □

Отримані результати дають змогу розглянути проблему великих відхилень у нелінійній апроксимації. В [4]–[7] випадкові процеси та марковські випадкові еволюції розглядаються з нормуючими множниками ε та ε^2. Новизна цієї праці полягає у знаходженні нелінійних нормуючих множників.

Список використаної літератури

1. Я. І. Єлейко, І. І. Ніщенко, *Гранична теорема для матричозначної випадкової еволюції*, Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **53** (1999), 102–106.
2. Я. І. Єлейко, І. І. Ніщенко, *Про існування малого параметра для напівмарковського процесу*, Мат. методи фіз.-мех. поля **41** (1998), no. 4, 95–98.
3. Я. І. Єлейко, В. М. Шуренков, *Про асимптотичне зображення перронового кореня матричнозначної стохастичної еволюції*, Укр. мат. журн. **48** (1996), no. 1, 35–43; **English version:** Ya. I. Eleiko and V. M. Shurenkov, *Asymptotic representation of the perron root of a matrix-valued stochastic evolution*, Ukr. Math. J. **48** (1996), no. 1, 38–47. DOI: 10.1007/BF02390981
4. В. С. Королюк, *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Доп. НАН України (2010), no. 6, 22–26.
5. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, Київ, Наукова думка, 1976. 184 с.
6. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії*, Укр. мат. журн. **62** (2010), no. 5, 643–650. **English version:** V. S. Korolyuk, *Problem of large deviations for Markov random evolutions with independent increments in the scheme of asymptotically small diffusion*, Ukr. Math. J. **62** (2010), no. 5, 739–747. DOI: 10.1007/s11253-010-0384-9
7. А. В. Свищук, *Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций*, Институт математики АН УССР, Киев, 1990, С. 102–111.

Стаття: надійшла до редколегії 04.04.2020
доопрацьована 01.09.2020
прийнята до друку 23.12.2020

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF THE NORMALIZATION FACTOR FOR RENEWAL EQUATION

Oksana YAROVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

The renewal equation in nonlinear approximation is considered. The purpose of the work is to find nonlinear normalization functions.

Key words: renewal equation, normalization factor, nonlinear approximation.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 89–105
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 89–105
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.089-105

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНІ ІНВЕСТИЦІЇ ТА СПОЖИВАННЯ В БІНОМІАЛЬНІЙ БЕЗАРБІТРАЖНІЙ ЦІНОВІЙ МОДЕЛІ

Сергій ПІДКУЙКО[1], **Микола БАБ'ЯК**[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів, Україна*
[2]*Department of Accounting and Finance*
Lancaster University Management School
Bailrigg, LA1 4YX, UK
e-mails: pidkuyko@gmail.com, mykola.babyak@gmail.com

Досліджується проблема знаходження оптимального споживання та оптимальних інвестицій у біноміальній безарбітражній ціновій моделі. Доведено існування та єдиність розв'язку оптимізаційної задачі, в якій інвестор максимізує очікувану корисність статків у кінці останнього періоду. Доведено існування та єдиність розв'язку оптимізаційної задачі, в якій інвестор максимізує очікувану корисність статків протягом усіх періодів, при цьому здійснюючи вибір щодо рівня споживання в кожному періоді. Доведено існування та єдиність розв'язку оптимізаційної задачі, коли корисність отримується від споживання протягом всіх періодів і від залишку грошей в ньому.

Ключові слова: безарбітражна біноміальна цінова модель, інвестиції, споживання, корисність.

Вступ

Безарбітражна методологія — один з двох шляхів знаходження ціни активів. Інший підхід, цінова модель капітальних активів, ґрунтується на взаємозв'язку коливань попиту та пропозиції серед інвесторів на ринку. Ця модель дає глибоке розуміння ринку в цілому, але не дає чітких кількісних результатів, які забезпечує безарбітражна методологія. В ідеалізованому повному ринку безарбітражні міркування стають особливо корисними. З іншого боку, більшість ринків неповні, і тому ціни не можуть бути визначені лише з умов безарбітражності. В праці розглянуто

2020 Mathematics Subject Classification: 91B99 проблему, яка лежить в основі цінової моделі капітальних активів, а саме максимізація очікуваної корисності від інвестицій.

1. Біноміальна безарбітражна цінова модель

Нагадаємо означення N-періодної біноміальної цінової моделі (див. [1]).

Означення 1. ***N-періодна біноміальна цінова модель***

(1) починається в момент часу $t=0$, завершується в момент часу $t=N$, і має N періодів — від $t=n$ до $t=n+1,\ \ n=0,\,\ldots,\,N-1$;

(2) має ринок акцій, на якому фіксовано величини $S_0,\ p,\ q,\ u,\ d$;

(3) кожна акція в момент часу $t=0$ коштує $S_0>0$;

(4) в момент часу $t=n+1,\ \ n=0,\,\ldots,\,N-1,$ підкидається монета (результат підкидання позначається $\omega_{n+1}\in\{H,T\}$) :

   (а) з ймовірністю $p\in(0,1)$ випадає $\omega_{n+1}=H$ і тоді ціна акції в момент часу $t=n+1$ дорівнює
$$S_{n+1}(\omega_1\ldots\omega_n H)=u\cdot S_n(\omega_1\ldots\omega_n);$$

   (б) з ймовірністю $q=1-p\in(0,1)$ випадає T і тоді ціна акції в момент часу $t=n+1$ набуває значення
$$S_{n+1}(\omega_1\ldots\omega_n T)=d\cdot S_n(\omega_1\ldots\omega_n);$$

   параметри u,d $(0<d<u)$ називаються, відповідно, *коефіцієнтами* (*множниками*) *зростання* та *спадання ціни* акції;

(5) має ринок грошей, на якому фіксовано відсоткову ставку r;

(6) на ринку грошей можна вкласти (інвестувати) і можна позичити (взяти кредит) довільну суму грошей:

   (а) вклавши в момент часу $t=n,\ \ \ n=0,\ldots,N-1$, суму розміром 1 інвестор у момент часу $t=n+1$ отримує суму $1+r$;

   (б) позичивши в момент часу $t=n,\ \ n=0,\,\ldots,\,N-1$, суму розміром 1, позичальник в момент часу $t=n+1$ має повернути суму $1+r$.

Міра в цій моделі стосовно ймовірностей p,q позначається $\mathbb{P}$. Відповідно, математичне сподівання та умовне математичне сподівання позначаються $\mathbb{E}$ та $\mathbb{E}_n$. Позначимо
$$\Omega=\{\omega=(\omega_1\ldots\omega_N)\mid\omega_i\in\{H,T\}\}.$$
Тоді для довільних елементарної події ω, події A та випадкової величини X матимемо:
$$\mathbb{P}(\omega)=\mathbb{P}(\omega_1\ldots\omega_N)=p^{\#H(\omega_1\ldots\omega_N)}q^{\#T(\omega_1\ldots\omega_N)},\quad \omega\in\Omega;$$
$$\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)=\sum_{(\omega_1\ldots\omega_N)\in A}p^{\#H(\omega_1\ldots\omega_N)}q^{\#T(\omega_1\ldots\omega_N)},\quad A\subset\Omega;$$
$$\mathbb{E}\big[X\big]=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)X(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}p^{\#H(\omega_1\ldots\omega_N)}q^{\#T(\omega_1\ldots\omega_N)}X(\omega_1\ldots\omega_N);$$
$$\mathbb{E}_n\big[X\big](\omega_1\ldots\omega_n)=\sum_{(\omega_{n+1}\ldots\omega_N)}p^{\#H(\omega_{n+1}\ldots\omega_N)}q^{\#T(\omega_{n+1}\ldots\omega_N)}X(\omega_1\ldots\omega_N),\quad n=0,\,\ldots,\,N;$$

$$\mathbb{E}_0\big[X\big] = \mathbb{E}\big[X\big], \quad \mathbb{E}_N\big[X\big] = X.$$

Означення 2. Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна біноміальна цінова модель. Цю модель будемо називати ***N-періодною біноміальною безарбітражною ціновою моделлю***, якщо параметри u, d, r задовольняють ***умови безарбітражності***

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Величини

$$\widetilde{p} = \frac{1 + r - d}{u - d}, \quad \widetilde{q} = \frac{u - 1 - r}{u - d} \tag{1}$$

називаються ***безризиковими ймовірностями*** в цій моделі.

Міра в цій моделі стосовно ймовірностей $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ позначається $\widetilde{\mathbb{P}}$ і називається ***безризиковою*** (або ***нейтральною до ризику***). Відповідно, математичне сподівання й умовне математичне сподівання стосовно цієї міри позначаються $\widetilde{\mathbb{E}}$ та $\widetilde{\mathbb{E}}_n$.

Означення 3. Процес $\{Y_n\}$ у біноміальній ціновій моделі називається ***адаптованим***, якщо $\forall n$ випадкова величина $Y_n = Y_n(\omega_1 \dots \omega_n)$ залежить лише від перших n підкидань (монети) $\omega_1 \dots \omega_n$.

Для доведення отриманих результатів нам знадобиться теорема про реплікацію в багатоперіодній біноміальній ціновій моделі (див. [1], стор. 12).

Теорема 1. *Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна біноміальна безарбітражна цінова модель з безризиковими ймовірностями (1). Нехай у цій моделі задано похідний цінний папір із функцією виплат*

$$V_N = V_N(\omega_1 \dots \omega_N).$$

Визначимо адаптований процес $V_0, \dots, V_N$ за формулою

$$V_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{1}{1+r}\big[\widetilde{p}\, V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \widetilde{q}\, V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)\big], \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{2}$$

Побудуємо (адаптований) портфельний процес $\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}$ за формулою:

$$\Delta_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Приймемо $X_0 = V_0$ і визначимо адаптований процес $X_0, \dots, X_N$ за формулою

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{3}$$

Тоді

$$X_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n) \quad \forall \omega_1 \dots \omega_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Означення 4. Випадкова величина $V_n(\omega_1 \dots \omega_n)$, що визначається формулою (2), називається ***ціною (вартістю) похідного цінного паперу в момент часу*** n, якщо перших n підкидань завершилися результатом $\omega_1, \dots, \omega_n$. Величина V_0 називається ***ціною (вартістю) похідного цінного паперу (в момент часу 0)***.

Означення 5. Формула (3) називається ***рівнянням поточного капіталу (статків, достатку)***.

Учасник ринку має початковий статок X_0 і бажає інвестувати у ринок акцій та грошовий ринок для того, щоб максимізувати очікувану корисність статків у момент часу N. Він має функцію корисності $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$, диференційовну, строго опуклу вгору і строго зростаючу, і хоче розв'язати таку задачу.

Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна біноміальна безарбітражна цінова модель. Визначимо дві оптимізаційні задачі.

Задача 1. $\forall X_0 \in (a, b)$ *знайти адаптований процес* $\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}$ *в цій моделі, що максимізує очікувану корисність*

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big]$$

за умов рівняння статку

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Задача 2. $\forall X_0 \in (a, b)$ *знайти випадкову величину* X_N *у цій моделі, що максимізує очікувану корисність*

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big]$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1 + r)^N}\right] = X_0.$$

Сформульовані оптимізаційні задачі еквівалентні (доведення див. [1], стор. 76).

Теорема 2. *Нехай* $X_0 \in (a, b)$, $\Delta^* = \{\Delta_0^*, \dots, \Delta_{N-1}^*\}$ — *адаптований стохастичний процес,* X_N^* *вартість поточного капіталу (статку) в момент часу* $t = N$, *що має початкову ціну* X_0 *і генерується портфельним процесом* Δ^*. *Тоді* Δ^* — *оптимальний розв'язок задачі 1 тоді й лише тоді, коли* X_N^* — *оптимальний розв'язок задачі 2.*

Теорема 2 розбиває задачу оптимальних інвестицій на два кроки: перший полягає у знаходженні оптимальної випадкової величини X_N, що є розв'язком задачі 2, другий — у знаходженні оптимального портфеля, що розпочинається з вартості X_0 і генерує X_N згідно з алгоритмом теореми про реплікацію в мультиперіодній біноміальній моделі.

Лема 1. *Нехай функція* $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ *має властивості:*

(1) $\mathcal{U}$ *строго опукла вгору;*
(2) $\mathcal{U}$ *не має локальних екстремумів;*
(3) $\mathcal{U} \in \mathcal{D}(a, b)$;
(4) $\mathcal{U}'(x) \to 0$, $x \to b_-$, $\mathcal{U}'(x) \to +\infty$, $x \to a_+$.

Тоді функція $\mathcal{U}' : (a, b) \to (0, +\infty)$ *строго спадна, неперервна й бієктивна. Зокрема, існує строго спадна обернена до* $\mathcal{U}'$ *функція*

$$\mathcal{I} : (0, +\infty) \to (a, b), \quad \mathcal{I} = \mathcal{U}^{-1}, \tag{4}$$

з такими властивостями:

$$\mathcal{I}(y) \to a, \; y \to +\infty, \quad \mathcal{I}(y) \to b, \; y \to 0_+. \tag{5}$$

Доведення.

Зауваження 1. $\mathcal{U}'$ строго спадна на (a,b).

Випливає зі строгої опуклості вгору функції $\mathcal{U}$ (див. [2]).

Зауваження 2. $\mathcal{U}' \in \mathcal{C}(a,b)$.

Згідно з зауваженням 1, внаслідок монотонності, $\mathcal{U}'$ може мати точки розриву лише першого роду (див. [2]). Натомість за теоремою Дарбу всі точки розриву похідної $\mathcal{U}'$ є точками розриву лише другого роду (див. [2]).

Зауваження 3. $\mathcal{U}'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Згідно з умовою (iv) леми

$$\exists x_1 \in (a,b) \quad \forall x \in (a,x_1] \quad \mathcal{U}'(x) > 0.$$

Припустимо, що

$$\exists x_2 \in (a,b): \quad \mathcal{U}'(x_2) < 0.$$

Тоді з зауваження 2 та теореми Больцано-Коші про проміжне значення отримуємо, що

$$\exists x_0 \in (x_1,x_2): \quad \mathcal{U}'(x_0) = 0.$$

Враховуючи зауваження 1 матимемо

$$\forall x \in (a,x_0) \quad \mathcal{U}'(x) > 0 \wedge \forall x \in (x_0,b) \quad \mathcal{U}'(x) < 0.$$

Звідси випливає, що точка x_0 є (строгим внутрішнім глобальним) мінімумом функції $\mathcal{U}$, що суперечить умові (ii) леми.

Зауваження 4. $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) = (0,+\infty)$.

Згідно з зауваженням 3 маємо включення $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) \subset (0,+\infty)$. Нехай $y \in (0,+\infty)$. За умовою (iv) леми

$$\exists y_1,y_2 \in \mathcal{U}'\big((a,b)\big): \quad y_1 < y < y_2.$$

Тоді з зауваження 2 та теореми Больцано-Коші про проміжне значення отримуємо, що

$$\mathcal{U}'\big((a,b)\big) \supset [y_1,y_2] \ni y.$$

Отже, доведено протилежне включення $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) \supset (0,+\infty)$.

Із зауважень 1 і 4 випливає твердження леми стосовно властивостей похідної $\mathcal{U}'$, з яких, зокрема, отримуємо (4) і (5). $\square$

Лема 2. *За умов і позначень леми 1* $\forall y > 0$ *функція*

$$f:(a,b) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \mathcal{U}(x) - yx,$$

має в точці $x^* = \mathcal{I}(y)$ *строгий (глобальний) максимум, тобто*

$$\mathcal{U}(x) - yx < \mathcal{U}(\mathcal{I}(y)) - y\mathcal{I}(y) \quad \forall x \in (a,b): \; x \neq x^*.$$

Доведення. Нехай $y > 0$. Згідно з лемою 1 похідна $\mathcal{U}'$ строго спадає на (a, b), до того ж $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) = (0, +\infty)$. Тоді

$$\exists! x^* \in (a, b): \quad \mathcal{U}'(x^*) = y,$$

отже, $x^* = \mathcal{I}(y)$, до того ж

$$\forall x \in (a, x^*) \quad \mathcal{U}'(x) > y \land \forall x \in (x^*, b) \quad \mathcal{U}'(x) < y. \tag{6}$$

Оскільки

$$f'(x) = \mathcal{U}'(x) - y,$$

то з (6) випливає твердження леми. □

Означення 6. Функцію $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ будемо називати ***властивою функцією корисності*** на інтервалі (a, b), якщо:

(1) $\mathcal{U}$ строго опукла вгору;
(2) $\mathcal{U}$ не має локальних екстремумів;
(3) $\mathcal{U} \in \mathcal{D}(a, b)$;
(4) $\mathcal{U}'(x) \to 0, \quad x \to b_-, \quad \mathcal{U}'(x) \to +\infty, \quad x \to a_+$.

Наступна теорема дає відповідь на питання про існування й єдиність розв'язку (оптимізаційної) задачі 2.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ $(0 < a < b)$ — властива функція корисності на інтервалі (a, b). Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель,*

$$X_0 \in \left(\frac{a}{(1+r)^N}, \frac{b}{(1+r)^N} \right). \tag{7}$$

Тоді на множині всіх випадкових величин $X_N \in (a, b)$ у цій моделі існує й до того ж єдиний строгий глобальний максимум задачі

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big] \to \max \tag{8}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}} \left[\frac{X_N}{(1+r)^N} \right] = X_0. \tag{9}$$

Доведення. Нехай Z позначає похідну Радона-Никодима міри $\widetilde{\mathbb{P}}$ стосовно міри $\mathbb{P}$, ζ — щільність (густина) ціни стану

$$Z(\omega) = Z(\omega_1 \ldots \omega_N) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \ldots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \ldots \omega_N)} = \left(\frac{\widetilde{p}}{p} \right)^{\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)} \left(\frac{\widetilde{q}}{q} \right)^{\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)},$$

$$\zeta(\omega) = \zeta(\omega_1 \ldots \omega_N) = \frac{Z(\omega)}{(1+r)^N},$$

де $\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)$, $\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)$ позначають, відповідно, кількість (випадань) H, T у наборі $\omega = \omega_1 \ldots \omega_N$. Використовуючи ці позначення, оптимізаційну задачу (8),(9) можна переписати так:

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big] = \sum_{m=1}^{M} p_m \mathcal{U}(x_m) \to \max, \tag{10}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[Z\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[\zeta X_N\right] = \sum_{m=1}^{M} p_m x_m \zeta_m = X_0, \tag{11}$$

де $M = 2^N$ — кількість всеможливих наборів підкидань монети в N-періодній біноміальній ціновій моделі, які позначимо $\omega^1, \ldots, \omega^M$. Відповідно,

$$\zeta_m = \zeta(\omega^m), \quad p_m = \mathbb{P}(\omega^m), \quad x_m = X_N(\omega^m), \quad m = 1, \ldots, M.$$

Для знаходження оптимального вектора $(x_1, \ldots, x_M)$ запишемо функцію Лагранжа для задачі (10),(11)

$$L = \sum_{m=1}^{M} p_m \mathcal{U}(x_m) - \lambda \left(\sum_{m=1}^{M} p_m \zeta_m x_m - X_0 \right).$$

Обчислимо частинні похідні L по x_m та прирівняємо їх до нуля

$$\frac{\partial L}{\partial x_m} = p_m \mathcal{U}'(x_m) - \lambda p_m \zeta_m = 0, \quad m = 1, \ldots, M.$$

Отже,

$$\mathcal{U}'(x_m) = \lambda \zeta_m, \quad m = 1, \ldots, M. \tag{12}$$

Згідно з лемою 1 існує обернена до $\mathcal{U}'$ строго спадна функція $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} : (0, +\infty) \to (a, b), \quad \mathcal{I} = \mathcal{U}'^{-1},$$

з властивостями

$$\mathcal{I}(y) \to a, \;\; y \to +\infty, \quad \mathcal{I}(y) \to b, \;\; y \to 0_+. \tag{13}$$

З (12) отримуємо, що

$$X_N(\omega^m) = x_m = \mathcal{I}\big(\lambda \zeta(\omega^m)\big), \quad m = 1, \ldots, M.$$

Отже,

$$X_N = \mathcal{I}(\lambda \zeta). \tag{14}$$

Для знаходження λ підставляємо (14) в (11)

$$\mathbb{E}\left[\zeta\, \mathcal{I}(\lambda \zeta)\right] = X_0. \tag{15}$$

Зауваження 5. $\exists! \lambda^* > 0$, що задовольняє (15).

Розглянемо функцію

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\zeta\, \mathcal{I}(\lambda \zeta)\right], \quad g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\zeta \lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{I}(\lambda \zeta)\right] = \frac{a}{(1+r)^N}\, \mathbb{E}\big[Z\big] = \frac{a}{(1+r)^N}. \tag{16}$$

У попередніх перетвореннях ми скористалися (13) та властивістю похідної Радона-Никодима $\mathbb{E}\big[Z\big] = 1$. Аналогічно

$$\lim_{\lambda \to 0_+} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\zeta \lim_{\lambda \to 0_+} \mathcal{I}(\lambda \zeta)\right] = \frac{b}{(1+r)^N}\, \mathbb{E}\big[Z\big] = \frac{b}{(1+r)^N}. \tag{17}$$

З (7), (16), (17), строгого спадання функції $\mathcal{I}$ та теореми Больцано-Коші про проміжне значення випливає зауваження 5.

Отже, доведено існування та єдиність критичної точки для функції Лагранжа в нашій задачі. Ця точка буде точкою строгого локального максимуму, оскільки матриця з частинних похідних другого порядку функції Лагранжа L додатно визначена (вона діагональна і всі елементи діагоналі — від'ємні). Зауважимо, що звідси, взагалі кажучи, не випливає, що ця точка неодмінно є глобальним екстремумом. Првильне таке твердження: *якщо функція $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ має єдиний строгий локальний екстремум у точці x_0, то у випадку $n = 1$ в цій точці f досягає свого глобального екстремуму, тоді як при $n > 1$ функція f може і не мати глобального екстремуму в точці x_0.* Строге доведення цього твердження (у вигляді теореми) запропоновано після доведення цієї теореми, оскільки, на думку авторів, воно є цікавим само по собі. Проте в нашому випадку знайдений (єдиний строгий) локальний екструмум буде також і глобальним екстремумом. Позначимо

$$X_N^* = \mathcal{I}(\lambda^* \zeta).$$

Зауваження 6. Нехай $X_N \neq X_N^*$. Тоді $\mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right]$.

За лемою 2

$$\forall m \in \{1, ..., M\} \quad \forall x \in (a, b) : \; x \neq \mathcal{I}\big(\lambda^* \zeta(\omega^m)\big)$$
$$\mathcal{U}(x) - \lambda^* \zeta(\omega^m)\, x < \mathcal{U}\left(\mathcal{I}\big(\lambda^* \zeta(\omega^m)\big)\right) - \lambda^* \zeta(\omega^m)\, \mathcal{I}\big(\lambda^* \zeta(\omega^m)\big).$$

Звідси отримуємо

$$\mathcal{U}(X_N) - \lambda^* \zeta\, X_N \leq \mathcal{U}\left(X_N^*\right) - \lambda^* \zeta\, X_N^*, \tag{18}$$

до того ж $\exists m \in \{1, ..., M\}$ таке, що для ω^m нерівність (18) — строга.

Переходячи до математичних сподівань в нерівності (18), отримуємо строгу нерівність

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] - \mathbb{E}\left[\lambda^* \zeta\, X_N\right] < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right] - \mathbb{E}\left[\lambda^* \zeta\, X_N^*\right].$$

Враховуючи (11), маємо

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] - \lambda^* X_0 < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right] - \lambda^* X_0 \implies \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right].$$

Зауваження 6 завершує доведення теореми. $\square$

Теорема 4. *Нехай $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{R}^n)$, $n > 1$. Якщо f має в $\mathbf{R}^n$ єдиний строгий локальний екстремум, то цей екстремум не обов'язково є глобальним екстемумом f у $\mathbf{R}^n$.*

Доведення. Розглянемо функцію $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, що визначається формулою

$$f(x) = x_n^2 + (x_n + 1)^3 \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n. \tag{19}$$

Зауваження 7. $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \to -\infty$, $t \to -\infty$, якщо $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$.

Випливає безпосередньо з визначення (19) функції f.

Зауваження 8. $x = 0$ єдина критична точка функції (19).

Множина критичних точок функції f задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} (x_n+1)^3 x_i = 0, & i = 1, \ldots, n-1, \\ 2x_n + 3(x_n+1)^2 \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2 = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння цієї системи отримуємо, що $x_n + 1 \neq 0$. Тоді з перших $n-1$ рівняння маємо $x_i = 0, \ \ i = 1, \ldots, n-1$. Тоді з останнього рівняння $x_n = 0$.

Зауваження 9. $x = 0$ є строгим локальним мінімумом функції (19).

Справді,

$$f(0) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)^n \setminus \{0\}.$$

Отже, з зауважень 8 і 9 випливає, що функція (19) має єдиний строгий локальний екстремум у точці $x = 0$. Цей екстремум не є локальним мінімумом функції f. Проте він не є глобальним мінімумом цієї функції, що випливає з зауваження 7. □

Сформулюємо теорему про реплікацію у мультиперіодній біноміальній моделі, в якій дериватив пов'язаний з серією (потоком) виплат (доведення див. [1], стор. 43).

Теорема 5. *Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель, $(C_0, \ldots, C_N)$ — довільний адаптований процес у цій моделі. Ціна V_n деривативу, за яким здійснюються виплати $C_n, \ldots, C_N$ в моменти часу $n, \ldots, N$ відповідно, в момент часу n становить*

$$V_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n \left[\sum_{k=n}^{N} \frac{C_k}{(1+r)^{k-n}} \right], \quad n = 0, \ldots, N,$$

зокрема, $V_N = C_N$. Адаптований стохастичний процес цін $V_n, \quad n = 0, \ldots, N$ задовольняє рівності

$$C_n(\omega_1 \ldots \omega_n) = V_n(\omega_1 \ldots \omega_n) - \frac{1}{1+r} \widetilde{\mathbb{E}}_n \left[V_{n+1} \right] (\omega_1 \ldots \omega_n).$$

Визначимо (адаптований) портфельний процес

$$\Delta_n(\omega_1 \ldots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n T)}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Приймемо $X_0 = V_0$ і розглянемо адаптований стохастичний процес $X_0, \ldots, X_N$, що визначається рівнянням статку

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Тоді

$$X_n(\omega_1 \ldots \omega_n) = V_n(\omega_1 \ldots \omega_n) \quad \forall (\omega_1 \ldots \omega_n), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Наступна теорема досліджує задачу оптимізації споживання для деривативу, визначеного в попередній теоремі про реплікацію. Процес споживання $C = \{C_0, \ldots, C_N\}$ — адаптований стохастичний процес, де C_n вказує на кількість коштів, які споживаються агентом у момент часу n. План споживання та інвестицій складається з пари (C, Δ), де $\Delta = \{\Delta_0, \ldots, \Delta_{N-1}\}$ — процес портфелів (визначається як в теоремі про реплікацію). Згідно з теоремою про реплікацію вартість деривативу в момент часу $n = 0$ становить

$$V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n}\right].$$

Враховуючи цю рівність, перейдемо до точного формулювання теореми про оптимальне споживання.

Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель. Позначимо

$$\mathfrak{C} = \{(C_0, \ldots, C_N) \mid C_n \in (a_n, b_n),\ \ n = 0, \ldots, N\},$$

де $(C_0, \ldots, C_N)$ — довільний адаптований процес у цій моделі.

Теорема 6. *Нехай функції*

$$\mathcal{U}_n : (a_n, b_n) \to \mathbf{R} \quad (0 \le a_n < b_n),\ \ n = 0, \ldots, N,$$

є властивими функціями корисності на інтервалах (a_n, b_n), $n = 0, \ldots, N$, *відповідно,*

$$X_0 \in \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n}, \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{(1+r)^n}\right). \tag{20}$$

Тоді на множині $\mathfrak{C}$ *існує й до того ж єдиний строгий глобальний максимум задачі*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n)\right] \to \max \tag{21}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n}\right] = X_0. \tag{22}$$

Доведення. Нехай Z позначає похідну Радона-Никодима міри $\widetilde{\mathbb{P}}$ стосовно міри $\mathbb{P}$, ζ — щільність (густина) ціни стану. Тоді

$$Z(\omega) = Z(\omega_1 \ldots \omega_N) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \ldots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \ldots \omega_N)} = \left(\frac{\widetilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)} \left(\frac{\widetilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)},$$

де $\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)$, $\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)$ позначають, відповідно, кількість (випадань) H, T у наборі $\omega = \omega_1 \ldots \omega_N$. Розглянемо адаптований стохастичний процес Радона-Никодима

$$Z_n = \mathbb{E}_n\big[Z\big], \quad n = 0, \ldots, N. \tag{23}$$

Оскільки процес $\{C_0, \ldots, C_N\}$ адаптований, то за властивостями умовних математичних сподівань

$$\mathbb{E}\big[ZC_n\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}_n\big[ZC_n\big]\big] = \mathbb{E}\big[C_n \mathbb{E}_n\big[Z\big]\big] = \mathbb{E}\big[Z_n C_n\big],\ \ n = 0, \ldots, N. \tag{24}$$

Позначимо

$$\zeta_n = \frac{Z_n}{(1+r)^n}, \quad n = 0, \ldots, N. \tag{25}$$

Отже, використовуючи (23), (24), (25) і зв'язок між математичними сподіваннями стосовно мір $\mathbb{P}$ та $\widetilde{\mathbb{P}}$, отримуємо

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{C_n}{(1+r)^n}\right]=\mathbb{E}\left[Z\sum_{n=0}^{N}\frac{C_n}{(1+r)^n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{Z_nC_n}{(1+r)^n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\zeta_nC_n\right].$$

Оптимізаційну задачу (21),(22) можна переписати так:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)\right]=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\mathcal{U}_n(c_n^k)\to\max \tag{26}$$

за умови

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\zeta_nC_n\right]=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\zeta_N^kc_n^k=X_0, \tag{27}$$

де $M_n=2^n$ — кількість всеможливих наборів з n послідовних підкидань монети, які позначимо $\omega_n^1,\cdots,\omega_n^{M_n}$,

$$c_n^k=C_n(\omega_n^k),\quad p_n^k=\mathbb{P}(\omega_n^k),\quad \zeta_n^k=\zeta_n(\omega_n^k),\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N.$$

Запишемо функцію Лагранжа для задачі (26),(27)

$$L=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\mathcal{U}_n(c_n^k)-\lambda\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\zeta_n^kc_n^k-X_0\right).$$

Обчислимо частинні похідні L по c_n^k та прирівняємо їх до нуля

$$\frac{\partial L}{\partial c_n^k}=p_n^k\mathcal{U}_n'(c_n^k)-\lambda p_n^k\zeta_n^k=0,\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N.$$

Отже,

$$\mathcal{U}'(c_n^k)=\lambda\zeta_n^k,\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N. \tag{28}$$

Згідно з лемою 1 існує обернена до $\mathcal{U}'$ (строго спадна) функція $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}:(0,+\infty)\to(a,b),\quad \mathcal{I}={\mathcal{U}'}^{-1},$$

що має властивості

$$\mathcal{I}(y)\to a,\quad y\to+\infty,\quad \mathcal{I}(y)\to b,\quad y\to 0_+. \tag{29}$$

Отже, з (28) отримуємо

$$C_n(\omega_n^k)=c_n^k=\mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n^k\right),\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N. \tag{30}$$

Тобто,

$$C_n=\mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right),\quad n=0,\ldots,N. \tag{31}$$

Для знаходження λ підставляємо (31) в (27)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\zeta_n\,\mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right]=X_0. \tag{32}$$

Зауваження 10. $\exists!\lambda^*>0$, що задовольняє рівність (32).

Розглянемо функцію

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n\, \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right], \quad g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n Z_n}{(1+r)^n}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n}. \tag{33}$$

У попередніх перетвореннях ми скористалися умовою (29), властивостями умовних математичних сподівань і властивістю похідної Радона-Никодима

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_n[Z]] = \mathbb{E}[Z] = 1.$$

Аналогічно

$$\lim_{\lambda\to+0} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda\to+0} \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{b_n Z_n}{(1+r)^n}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{(1+r)^n}. \tag{34}$$

З (20), (33), (34), строгого спадання функції $\mathcal{I}$ та теореми Больцано-Коші про проміжне значення випливає зауваження 10. Отже, доведено існування та єдиність критичної точки для функції Лагранжа в нашій задачі. Ця точка буде точкою строгого локального максимуму, оскільки матриця з частинних похідних другого порядку функції Лагранжа L додатно визначена (вона діагональна і всі елементи діагоналі — від'ємні). Доведемо, що в знайденій точці досягається строгий глобальний максимум. Позначимо

$$C_n^* = \mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n\right), \quad n = 0, \ldots, N.$$

Зауваження 11. Нехай $\{C_0, \ldots, C_N\} \neq \{C_0^*, \ldots, C_N^*\}$. Тоді

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n)\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*)\right].$$

За лемою 2

$$\forall n = 0, \ldots, N \quad \forall k = 1, \ldots, M_n \quad \forall x \in (a, b) : \ x \neq \mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n^k\right)$$
$$\mathcal{U}_n(x) - \lambda^*\zeta_n^k\, x < \mathcal{U}_n\left(\mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n^k\right)\right) - \lambda^*\zeta_n^k\, \mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n^k\right).$$

Звідси отримуємо

$$\mathcal{U}_n(C_n) - \lambda^*\zeta_n^k\, C_n \leq \mathcal{U}(C_n^*) - \lambda^*\zeta_n^k\, C_n^*, \quad n = 0, \ldots, N, \tag{35}$$

до того ж $\exists n \in \{0, \ldots, N\},\ k \in \{1, \ldots, M_n\}$ такі, що для ω_n^k нерівність (35) — строга.

Підсумуємо по n нерівності (35). Переходячи до математичних сподівань, отримуємо строгу нерівність

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n)\right] - \lambda^*\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*)\right] - \lambda^*\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n^*\right].$$

Враховуючи (27), матимемо

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)\right]-\lambda^*X_0<\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}(C_n^*)\right]-\lambda^*X_0 \implies$$

$$\implies \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)\right]<\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n^*)\right].$$

Зауваження 11 завершує доведення теореми. □

Наступна теорема (про оптимальне споживання і залишковий статок) — це дослідження проблеми, коли корисність отримується від споживання коштів протягом кожного періоду біноміальної моделі і від кількості грошей, які залишаються в кінці останнього періоду N. Ця проблема є узагальненням попередньої задачі оптимального споживання: тепер учасник ринку має право не лише споживати C_n в момент часу $n=0,\dots,N$, а й мати в майбутньому можливий залишок грошей V_N-C_N, якщо $V_N\neq C_N$.

Нехай (N,S_0,u,d,r,p,q) — N-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель. Позначимо

$$\mathfrak{C}=\{(C_0,\dots,C_N,V_N)\mid C_n\in(a_n,b_n),\ \ n=0,\,\dots,\,N;\ \ V_N-C_N\in(c,d)\},$$

де, відповідно, $(C_0,\dots,C_N)$ — довільний адаптований процес, V_N — довільна випадкова величина в цій моделі.

Теорема 7. *Нехай функції*

$$\mathcal{U}:(c,d)\to\mathbf{R}\ \ (0\le c<d),\quad \mathcal{U}_n:(a_n,b_n)\to\mathbf{R}\ \ (0\le a_n<b_n),\ \ n=0,\,\dots,\,N,$$

є властивими функціями корисності на інтервалах (c,d) та (a_n,b_n) $n=0,\,\dots,\,N$, відповідно,

$$X_0\in\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{(1+r)^n}+\frac{c}{(1+r)^N},\ \sum_{n=0}^{N}\frac{b_n}{(1+r)^n}+\frac{d}{(1+r)^N}\right).\tag{36}$$

Тоді на множині $\mathfrak{A}$ існує й до того ж єдиний строгий глобальний максимум задачі

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)+\mathcal{U}(V_N-C_N)\right]\to\max\tag{37}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{C_n}{(1+r)^n}+\frac{V_N}{(1+r)^N}\right]=X_0.\tag{38}$$

Доведення. Позначимо $W=V_N-C_N$. Тоді оптимізаційна задача (37), (38) перепишеться так:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)+\mathcal{U}(W)\right]\to\max\tag{39}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{C_n}{(1+r)^n}+\frac{W}{(1+r)^N}\right]=X_0.\tag{40}$$

Нехай Z — похідна Радона-Никодима міри $\widetilde{\mathbb{P}}$ відносно міри $\mathbb{P}$

$$Z = Z(\omega) = Z(\omega_1 \dots \omega_N) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \dots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \dots \omega_N)} = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{H(\omega_1 \dots \omega_N)} \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{T(\omega_1 \dots \omega_N)},$$

де $\#H(\omega_1 \dots \omega_N)$, $\#T(\omega_1 \dots \omega_N)$ позначають, відповідно, кількість (випадань) H, T у наборі $\omega = \omega_1 \dots \omega_N$. Розглянемо адаптований стохастичний процес Радона-Никодима

$$Z_n = \mathbb{E}_n\big[Z\big], \quad n = 0, \dots, N, \tag{41}$$

і нехай

$$\zeta_n = \frac{Z_n}{(1+r)^n}, \quad n = 0, \dots, N.$$

Тоді, використовуючи адаптованість процесу $(C_0, \dots, C_N)$, властивості умовних математичних сподівань і зв'язок між математичними сподіваннями стосовно мір $\mathbb{P}$ та $\widetilde{\mathbb{P}}$, отримуємо

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n} + \frac{W}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{ZC_n}{(1+r)^n} + \frac{ZW}{(1+r)^N}\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{Z_nC_n}{(1+r)^n} + \frac{ZW}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n + \zeta_N W\right].$$

Перепишемо оптимізаційну задачу (39),(40) у вигляді

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \mathcal{U}_n(c_n^k) + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \mathcal{U}(w_N^k) \to \max \tag{42}$$

за умови

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n + \zeta_N W\right] = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \zeta_n^k c_n^k + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \zeta_n^k w_N^k = X_0. \tag{43}$$

де $M_n = 2^n$ — кількість всеможливих наборів з n послідовних підкидань монети, які позначимо $\omega_n^1, \cdots, \omega_n^{M_n}$. Відповідно,

$$c_n^k = C_n(\omega_n^k), \quad p_n^k = \mathbb{P}(\omega_n^k), \quad \zeta_n^k = \zeta_n(\omega_n^k), \quad n = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M_n;$$
$$w_N^k = W(\omega_N^k), \quad k = 1, \dots, M_N.$$

Запишемо функцію Лагранжа для задачі (42),(43)

$$L = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \mathcal{U}_n(c_n^k) + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \mathcal{U}(w_N^k) - \lambda\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \zeta_n^k c_n^k + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \zeta_N^k w_N^k - X_0\right).$$

Обчислюючи частинні похідні L по c_n^k, w_N^k та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо такі рівності:

$$\mathcal{U}_n'(c_n^k) = \lambda \zeta_n^k, \quad n = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M_n; \tag{44}$$
$$\mathcal{U}'(w_N^k) = \lambda \zeta_N^k, \quad k = 1, \dots, M_N. \tag{45}$$

Згідно з лемою 1 існують обернені до $\mathcal{U}'_n, \mathcal{U}'$ строго спадні функції

$$\mathcal{I}_n : (0,+\infty) \to (a_n, b_n), \quad \mathcal{I}_n = {\mathcal{U}'_n}^{-1}, \quad \mathcal{I}_n(y) \to a_n, \ y \to +\infty, \quad \mathcal{I}_n(y) \to b_n, \ y \to 0_+;$$
$$\mathcal{I} : (0,+\infty) \to (c, d), \quad \mathcal{I} = \mathcal{U}'^{-1}, \quad \mathcal{I}(y) \to c, \ y \to +\infty, \quad \mathcal{I}(y) \to d, \ y \to 0_+.$$

Отже, з (44) і (45) отримуємо

$$C_n(\omega_n^k) = c_n^k = \mathcal{I}_c\left(\lambda\zeta_n^k\right), \quad n = 0, \ldots, N, \quad k = 1, \ldots, M_n;$$
$$W(\omega_N^k) = w_N^k = \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_N^k\right), \quad k = 1, \ldots, M_N.$$

Тобто

$$C_n = \mathcal{I}_n\left(\lambda\zeta_n\right), \quad n = 0, \ldots, N; \qquad W = \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right). \tag{46}$$

Для знаходження λ підставляємо (46) в (43)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \mathcal{I}_n\left(\lambda\zeta_n\right) + \zeta_n \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_N\right)\right] = X_0. \tag{47}$$

Зауваження 12. $\exists! \lambda^* > 0$, що задовольняє рівність (47).

Розглянемо функцію

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \mathcal{I}_n\left(\lambda\zeta_n\right) + \zeta_n \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_N\right)\right], \quad g : (0,+\infty) \to \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{I}_n\left(\lambda\zeta_n\right) + \zeta_n \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_N\right)\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} a_n\zeta_n + c\,\zeta_N\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n Z_n}{(1+r)^n} + \frac{cZ}{(1+r)^N}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n} + \frac{c}{(1+r)^N}. \tag{48}$$

У попередніх перетвореннях ми скористалися властивостями функцій $\mathcal{I}_n, \mathcal{I}$, властивостями умовних математичних сподівань і властивістю похідної Радона-Никодима

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_n[Z]] = \mathbb{E}[Z] = 1.$$

Аналогічно

$$\lim_{\lambda\to+0} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda\to+0} \mathcal{I}_n\left(\lambda\zeta_n\right) + \zeta_n \lim_{\lambda\to+0} \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_N\right)\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} b_n\zeta_n + d\,\zeta_N\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{b_n Z_n}{(1+r)^n} + \frac{dZ}{(1+r)^N}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{(1+r)^n} + \frac{d}{(1+r)^N}. \tag{49}$$

З (36), (48), (49), строгого спадання функцій $\mathcal{I}_n, \mathcal{I}$ та теореми Больцано-Коші про проміжне значення випливає зауваження 12. Отже, доведено існування та єдиність критичної точки для функції Лагранжа в нашій задачі. Ця точка буде точкою строгого локального максимуму, оскільки матриця з частинних похідних другого порядку функції Лагранжа L додатно визначена (вона діагональна і всі елементи діагоналі — від'ємні). Доведемо, що в знайденій точці досягається строгий глобальний максимум. Позначимо

$$C_n^* = \mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n\right), \quad n = 0, \ldots, N; \qquad W^* = \mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N\right).$$

Зауваження 13. Нехай $\{C_0, \ldots, C_N, V_N\} \neq \{C_0^*, \ldots, C_N^*, V_N^*\}$. Тоді

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(V_N - C_N)\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(V_N^* - C_N^*)\right].$$

За лемою 2

$$\forall n = 0, \ldots, N \quad \forall k = 1, \ldots, M_n \quad \forall x \in (a_n, b_n): \; x \neq \mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n^k\right)$$
$$\mathcal{U}_n(x) - \lambda^* \zeta_n^k \, x < \mathcal{U}_n\left(\mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n^k\right)\right) - \lambda^* \zeta_n^k \, \mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n^k\right);$$

$$\forall k = 1, \ldots, M_N \quad \forall x \in (c, d): \; x \neq \mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N^k\right)$$
$$\mathcal{U}(x) - \lambda^* \zeta_N^k \, x < \mathcal{U}\left(\mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N^k\right)\right) - \lambda^* \zeta_N^k \, \mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N^k\right).$$

Звідси отримуємо

$$\mathcal{U}_n(C_n) - \lambda^* \zeta_n \, C_n \leq \mathcal{U}_n(C_n^*) - \lambda^* \zeta_n \, C_n^*, \quad n = 0, \ldots, N; \tag{50}$$
$$\mathcal{U}(W) - \lambda^* \zeta_N \, W \leq \mathcal{U}(W^*) - \lambda^* \zeta_N \, W^*. \tag{51}$$

До того ж $\exists n \in \{0, \ldots, N\}$, $k \in \{1, \ldots, M_n\}$ такі, що для ω_n^k принаймні одна з нерівностей (50) або (51) — строга (випливає з умови зауваження 13).

Підсумуємо по n нерівності (50) та додамо нерівність (51). Переходячи до математичних сподівань, отримуємо строгу нерівність

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] - \lambda^* \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n + \zeta_N W\right] <$$
$$< \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(W^*)\right] - \lambda^* \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n^* + \zeta_N W^*\right].$$

Враховуючи (43), матимемо

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] - \lambda^* X_0 < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(W^*)\right] - \lambda^* X_0 \implies$$
$$\implies \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(W^*)\right].$$

Остання нерівність еквівалентна нерівності у твердженні зауваження 13. $\square$

Список використаної літератури

1. S. Shreve, *Stochastic calculus for finance*, I, Springer, New York, 2004.
2. С. І. Підкуйко, *Математичний аналіз*, І, Галицька Видавнича Спілка, Львів, 2004.

Стаття: надійшла до редколегії 07.05.2018
доопрацьована 20.12.2020
прийнята до друку 23.12.2020

OPTIMAL INVESTMENT AND CONSUMPTION IN THE BINOMIAL NO-ARBITRAGE ASSERT-PRICING MODEL

Serhii PIDKUYKO[1], **Mykola BABIAK**[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
[2]*Department of Accounting and Finance*
Lancaster University Management School
Bailrigg, LA1 4YX, UK
e-mails: pidkuyko@gmail.com, mykola.babyak@gmail.com

An optimal consumption and investment problem in the binomial no-arbitrage asset-pricing model is considered. The existence and uniqueness of the solution of the optimization problem where the investor maximizes the expected utility of wealth at the end of the last period is proved. The existence and uniqueness of the solution of the optimization problem where the investor maximizes the expected utility of wealth during all periods while making choice of the level of consumption in each period is proved. The existence and uniqueness of the solution of the optimization problem when the utility derived from consumption both during all periods and the balance of money in the latter one.

Key words: binomial asset-pricing model, investment, consumption, utility.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 106–122
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 106–122
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.106-122

УДК 539.3, 539.4, 539.5

GENERALIZATION OF THE EQUIVALENT AREA METHOD FOR THE CASE OF SHORT FATIGUE CRACKS IN A THREE-DIMENSIONAL BODY

Nataliya YADZHAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: nataliya.yadzhak@lnu.edu.ua

In industry, structural elements with small cracks are widely used; however, little research has been done on relatively simple methods for lifetime evaluation of such structural elements. This study proposes a generalization of the equivalent area method for a case of small fatigue cracks using an alternative representation of the relation between the crack propagation rate and the crack tip opening. A tension problem for a three-dimensional body with an elliptical crack has been solved analytically by applying the generalized equivalent area method and numerically by the Runge-Kutta method. The comparison of the obtained solutions has shown a good correlation of the results that confirms the potential application of the generalized equivalent area method to short crack problems.

Key words: short cracks, fatigue fracture of three-dimensional bodies, elliptical crack, equivalent area method, opening of the fracture process zone

1. Introduction

For a simplified determination of residual lifetime of materials and structural elements, the equivalent area method can be applied, which helps to calculate lifetime for different problems, such as long cracks [1, p. 85-89], [2], elliptical edge cracks [1, p. 87-89] and creep cracks [3].

However, in structural elements under operation, mostly small cracks prevail, since structural elements with long cracks are subject to repair or replacement. Even though structural elements with short cracks are mostly under operation, the approximated investigation methods for such cases are relatively little developed. In this study, an attempt has been made to formulate such method for a case of small cracks; namely, to

---

2020 Mathematics Subject Classification: 74R10, 74S30 generalize the equivalent area method which has been formulated earlier [1, p. 85-89] for the long cracks.

2. Mathematical Model for Fatigue Growth of a Small Crack with a Convex Contour

Consider a three-dimensional body with a plane small crack of an initial area S_0 subject to cyclic loading of an amplitude p and a period of cycle T (fig. 1). The external loading is applied in a way that the stress-strain state is symmetric about the crack plane. In this case, the stress-strain state in the fracture process zone in front of the crack tip can be described only by its opening δ_I [4, p. 29-30].

The problem is to determine the number of load cycles $N = N_*$, when as result of fatigue fracture the crack rises to the critical size $S = S_*$ and the body collapses.

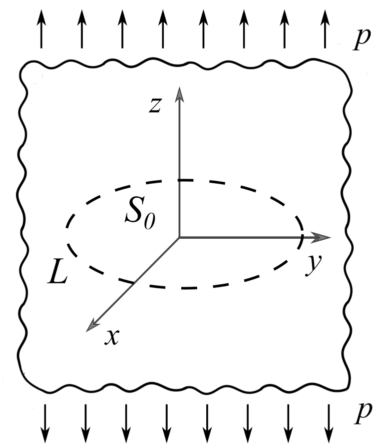

Fig. 1. Three-dimensional body with a small plane crack

Since the crack size is small and the self-similarity conditions are not met [4, p. 29], the energy approach in deformation parameters [2] is used to solve the problem.

Taking into account that under fatigue loading, the crack grows by small jumps of size ΔS_c over a large number of cycles ΔN_c, the crack growth can be considered to be continuous from the initial size $S = S_0$ to the final one $S = S_*$ [5]. Then the crack growth rate V can be written as follows:

$$V = \frac{dS}{dN} \approx \frac{\Delta S_c}{\Delta N_c}.$$

For each crack jump ΔS_c, the energy balance has the following form [2, 6]:

$$A = W + \Gamma, \tag{1}$$

where A is the work of external forces, W the deformation energy, and Γ the fracture energy of a body for the crack area change.

The deformation energy W generated with the crack propagation on a jump size ΔS_c, consists of the following components [5]:

$$W = W_s + W_p^{(1)}(S) - W_p^{(2)}(t),$$

where W_S is the elastic component of W; $W_p^{(1)}(S)$ is the part of the work of plastic deformations that depends only on the crack area S; $W_p^{(2)}(t)$ is the part of the work of plastic deformations that depends only on time t (respectively, the number of loading cycles $N = tT^{-1}$) and is generated by the body during its unloading and compression of the fracture process zone.

From the condition of the energy rate balance [2,6]

$$\frac{\partial A}{\partial N} = \frac{\partial W}{\partial N} + \frac{\partial \Gamma}{\partial N}$$

and with respect to the energy balance (1), we obtain [6]

$$\frac{\partial}{\partial S}\left[\Gamma - \left(A - W_s - W_p^{(1)}\right)\right]\frac{dS}{dN} - \frac{\partial W_p^{(2)}}{\partial N} = 0. \tag{2}$$

Then from equation (2), the crack growth rate can be derived [6]

$$\frac{dS}{dN} = \left[\frac{\partial W_p^{(2)}}{\partial N}\right] \Bigg/ \frac{\partial}{\partial S}\left[\Gamma - \left(A - W_s - W_p^{(1)}\right)\right]. \tag{3}$$

According to [2,5], the denominator in (3) can be rewritten in the form

$$\frac{\partial}{\partial S}\left[\Gamma - \left(A - W_s - W_p^{(1)}\right)\right] = \gamma_f - L^{-1}\int\limits_L \sigma_t(\xi)\delta_{t\,\max}(0,\xi)d\xi, \tag{4}$$

where L is the crack contour; γ_f the specific fracture energy at fatigue crack propagation that is determined by the formula $\gamma_f = \sigma_t\delta_c$; σ_t the average strain in the fracture process zone; $\delta_{t\,\max}(0,\xi)$ the maximal opening $\delta_t(0,\xi)$ of the fracture process zone near the crack contour per cycle for the stress σ_t; δ_c the critical opening of the fracture process zone, and ξ is the coordinate on the crack contour L.

To determine the work of plastic deformations $W_p^{(2)}(t)$ generated by the body during its unloading and compression of the fracture process zone, let us first calculate the length of the crack jump during its fatigue propagation [7, p. 133]:

$$l_{fp} \approx \alpha_0 \Delta\delta_t(0,\xi) = \alpha_0\left[\delta_{t\,\max}(0,\xi) - \delta_{t\,\min}(0,\xi)\right],$$

where α_0 is a constant determined from an experiment, and $\delta_{t\,\min}(0,\xi)$ is the minimal opening $\delta_t(0,\xi)$ of the fracture process zone per cycle.

Since the opening $\delta_t(x,\xi)$ changes little in a small neighbourhood of the crack contour and it is considered to be constant over the variable x [7],

$$\delta_t(x,\xi) \approx \delta_t(0,\xi) \text{ at } 0 \le x \le x_*, \tag{5}$$

the work of plastic deformations $W_p^{(2)}(t)$ can be expressed by the formula [8]:

$$W_p^{(2)}(N) = \alpha_0 N\left(\int\limits_L \sigma_t[\delta_{t\,\max}(0,\xi) - \delta_{t\,\min}(0,\xi)]^2 d\xi - W_0^{(2)}\right), \tag{6}$$

where $W_0^{(2)}$ is the energy per cycle that does not initiate fatigue fracture of the material, defined as [8]

$$W_0^{(2)} = \int\limits_L \sigma_t(\xi) N(\delta_{th\,\max} - \delta_{th\,\min})^2 d\xi,$$

δ_{thmax} and δ_{thmin} is the maximal and the minimal values of the lower threshold of the opening of the fracture process zone near the crack contour δ_{th} at which the crack does not propagate.

Then, the combination of (6), (4) and (3) gives the following formula for the fatigue crack growth rate [8]:

$$\frac{dS}{dN} = \frac{\alpha_0(1-R_\delta)^2 \int\limits_L \sigma_t \left[\delta^2_{t\,\max}(0,\xi) - \delta^2_{th\,\min}\right] d\xi}{\sigma_t\delta_{fc} - L^{-1}\int\limits_L \sigma_t(\xi)\delta_{t\,\max}(0,\xi) d\xi}, \tag{7}$$

where δ_{fc} is the critical value of the fracture process zone δ_t under fatigue loading.

Initial and final conditions for this problem are the following:

$$N = 0, \quad S(0) = S_0; \tag{8}$$

and, respectively,

$$N = N_*, \quad S(N_*) = S_*. \tag{9}$$

The critical area value S_*, at which the fracture occurs, can be expressed from the critical crack opening displacement criterion [4, p. 139]:

$$\delta_t(S_*) = \delta_{fc}. \tag{10}$$

Hence, the mathematical model (7)–(10) allows calculating the period of subcritical growth of a small fatigue crack with a convex contour.

3. Generalization of the Equivalent Area Method for Small Cracks

The application of the mathematical model (7)–(10) for determination of residual lifetime for cracks of arbitrary contours involves mathematical difficulties [2]. In order to simplify the solution process, let us generalize the equivalent area method for the case of short fatigue cracks.

Suppose that the energy values $W_p^{(1)}$ and $W_p^{(2)}$ slightly differ for two arbitrary small cracks of convex contours L and equal area S under the condition of homogenous tensile stresses p. In this regard, one of these configurations can be replaced by a circle of radius r and equal length $S = \pi r^2$. According to the assumption, a crack of an arbitrary convex contour L and an equal length has the energy values $W_p^{(1)}$ and $W_p^{(2)}$ that only slightly differ from the corresponding values for a circular crack $W_p^{(1)(c)}$ and $W_p^{(2)(c)}$ [2].

Thus, the character of the area change for a crack with an arbitrary convex contour L and a crack of a circular contour with the equal area S are close. This concept is in agreement with the ideas described in [1, p. 85-89].

Let us use this approach to the problem in consideration. Based on the equivalent area method, let us substitute the small plane crack of a convex contour for a circular crack of the initial radius r_0 and the equal area [1, p. 85]:

$$S_0 = S_0^{(c)}, \tag{11}$$

where S_0 is the initial area of the plane crack, and $S_0^{(c)} = \pi r_0^2$ is the area of the equivalent circular crack.

From relation (11), the value of the initial radius of the equivalent short crack can be obtained [1, p. 87]:

$$r_0 = \sqrt{S_0/\pi}.$$

The growth rate of the circular crack based on (7) can be written in the following form as a function of the opening of its fracture process zone [8]:

$$V = \alpha_0 \left(1 - R^2\right)^2 \frac{\left(\delta_I^{(c)}\right)^2 - \delta_{th}^2}{\delta_{Ic} - \delta_I^{(c)}}, \tag{12}$$

where R is the load ratio, and $\delta_I^{(c)}$ is the opening of the fracture process zone of the circular crack.

Consequently, the solution of the problem, similarly to [3], can be reduced to the following mathematical model:

$$\frac{dr}{dN} = \alpha_0 \left(1 - R^2\right)^2 \frac{\left(\delta_I^{(c)}\right)^2 - \delta_{th}^2}{\delta_{Ic} - \delta_I^{(c)}} \tag{13}$$

with initial

$$N = 0,\ r(0) = r_0 = \sqrt{S_0/\pi} \tag{14}$$

and final conditions

$$N = N_*, \quad r\left(N_*\right) = r_*. \tag{15}$$

The critical value of the circular crack radius r_* can be found using the critical crack opening displacement criterion (10):

$$\delta_I^{(c)}\left(r_*\right) = \delta_{Ic}. \tag{16}$$

Thus, the problem is reduced to the determination of the opening of the fracture process zone for a circular crack.

4. Evaluation of the Opening of the Fracture Process Zone in Front of the Contour of a Circular Crack

Consider an infinite elastic body with an inner disc-shaped crack of radius a (fig. 2) subject to tension at infinity by uniformly distributed loading of intensity p, directed orthogonally to the crack face [4, p. 199].

During the loading process, a plastic zone appears in the neighbourhood of the crack contour in the form of a plain ring of the size $R - a$, where R is the boundary radius between the regions of elastic and plastic deformations [4, p. 199].

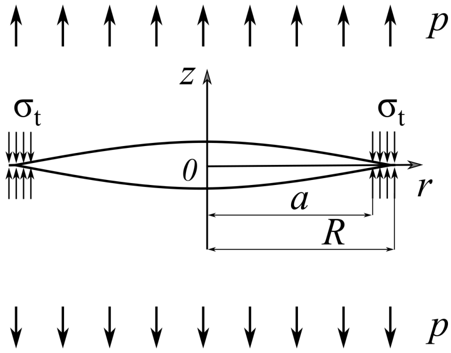

FIG. 2. Uniaxial tension of a tree-dimensional body with a disc-shaped crack [4, p. 199]

The opening of the fracture process zone δ_I for the generalized Sack's problem is given by the formula [4, p. 200]:

$$\delta_I = \frac{8a\sigma_t(1-\nu^2)\cdot\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{p}{\sigma_t}\right)^2}\right)}{\pi E}, \tag{17}$$

where ν is Poisson's ratio, σ_t the yield stress, and E Young's modulus.

Based on formula (17), the following expression can be obtained via numerical analysis for determination of the opening of the fracture process zone:

$$\delta_I = \frac{4ap^2(1-\nu^2)}{\pi\sigma_t E\sqrt[4]{1-\left(\frac{p}{\sigma_t}\right)^2}}, \tag{18}$$

or in the SIF parameters

$$\delta_I = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{\sigma_t E\sqrt[4]{1-\left(\frac{p}{\sigma_t}\right)^2}}, \tag{19}$$

where the stress intensity factor (SIF) K_I for Sack's problem is given by [9, p. 131]:

$$K_I = \frac{2\sqrt{a}p}{\sqrt{\pi}}. \tag{20}$$

A comparison of the openings of the fracture process zone obtained by the proposed formula (18) and (17), conducted for a specimen from steel 65Г (analogue to 1066) with the following properties: $E = 2\cdot 10^5$ MPa, $\sigma_t = 910$ MPa [10], shows that the proposed formula models quite well the exact relation between the opening of the fracture process zone and the crack size for different load values for the generalized Sack's problem.

To solve the generalised Sack's problem and determine the critical loading under uniaxial loading of a three-dimensional body, the following relation can be used [4, p. 202]:

$$p_* = \begin{cases} \sigma_t, & a < a_*; \\ \sigma_t \sqrt{2a_*/a}\,\sqrt{1 - a_*/2a}\,, & a > a_*. \end{cases} \tag{21}$$

Relation (19) can be also employed to determine the critical loading of a three-dimensional body. It is known [4, p. 201] that the critical crack size for the generalised Sack's problem is calculated by the formula:

$$a_* = \frac{\pi E \delta_I}{8\sigma_t(1-\nu^2)}. \tag{22}$$

Then having substituted (22) into the obtained formula for determination of the opening of the fracture process zone in front of a crack contour (18) and having grouped the dimensionless loading values p_*/σ_t and crack sizes a/a_*, we obtain the following expression for the critical loading:

$$\frac{1}{16}\left(\frac{p_*}{\sigma_t}\right)^8\left(\frac{a}{a_*}\right)^4 + \left(\frac{p_*}{\sigma_t}\right)^2 = 1. \tag{23}$$

Fig. 3 presents the comparison of the solutions obtained by formulas (21) and (23). It is shown that formula (23) is correct for solving of the generalized Sack's problem and contrary to (21), models the relation between the stress and the crack size by one relation in the whole range of the dimensionless crack size. Thus, formula (23) is valid both for spontaneous fracture ($a/a_* > 1$) and for subcritical crack growth ($a/a_* < 1$).

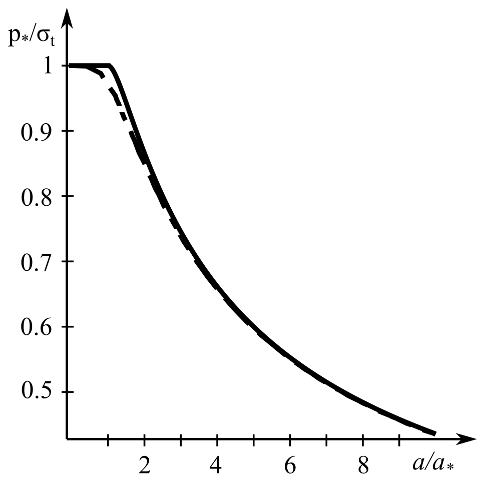

FIG. 3. Solution comparison of the generalized Sack's problem: solid line is the exact solution by the formula (21), dashed line solution by (23)

In addition, let us conduct a numerical experiment based on the generalized Sack's problem for the steel 65Г (analogue to 1066) using the proposed formula for determination of the opening of the fracture process zone (19). On Griffith's problem, it has been verified [8, 11, 12] that the approach to present the crack growth rate via the opening in its tip is invariant contrary to the employment of a stress intensity factor. Let us use this approach to Sack's problem for a three-dimensional body.

It is considered that the crack sizes are kept within the range $1 \leq a \leq 10$ mm. The material properties (steel 65Г (analogue to 1066) tempered at 600 ℃) [10] $R = 0.1$, $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_t = 910$ MPa, $\nu = 0.3$, $\Delta K_{th} = 7.4$ MPa$\sqrt{\text{m}}$, $\Delta K_{fc} = 118$ MPa$\sqrt{\text{m}}$ are used to calculate the initial data and experimental parameters: $K_{th} = 8.2$ MPa$\sqrt{\text{m}}$, $K_{fc} = 131.1$ MPa$\sqrt{\text{m}}$, $\delta_c = 8.99 \cdot 10^{-5}$ m, $\delta_{th} = 3.54 \cdot 10^{-7}$ m, $\alpha_0 = 0.197$.

The experiment is conducted for five crack propagation series at different fatigue loading values p: *1* – 500 MPa, *2* – 700 MPa, *3* – 800 MPa, *4* – 850 MPa, *5* – 875 MPa.

For each loading series, we find the stress intensity factor by formula (20), the opening of the fracture process zone by formula (19) and the crack growth rate using (12).

Based on the obtained values, graphical relations are built between the crack growth rate and the SIF $V \sim K_I$ (fig. 4) as well as between the crack growth rate and the opening of the fracture process zone in front of the crack contour $V \sim \delta_I$ (fig. 5).

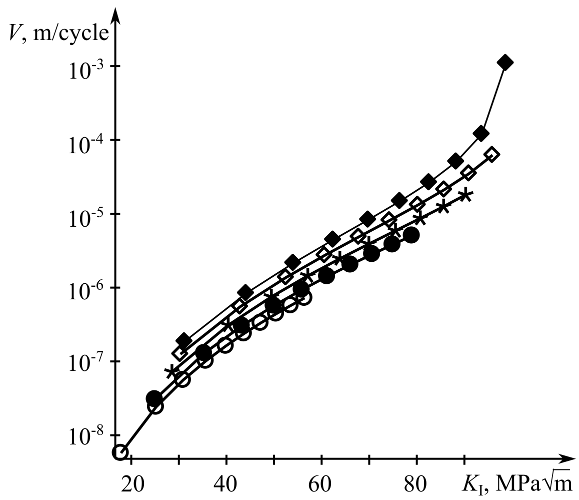

FIG. 4. Relation between the crack growth rate V and the stress intensity factor K_I at the series of loading p: *1* (♦) – 875 MPa, *2* (◇) – 850 MPa, *3* (*) – 800 MPa, *4* (•) – 700 MPa, *5* (○) – 500 MPa

Fig. 4 shows that points obtained at different load levels are located on parallel curves. Thus, one value of SIF corresponds to several values of crack growth rate V at different load levels p. This difference in the results emerges due to plasticity, since the plasticity zone formation for the case of small cracks is not considered in the SIF-approach contrary to the δ_I-approach. Higher divergence level is observed for higher load levels due to the increase of the plasticity zone and expressed in formula (19) by the factor $\sqrt[4]{1-(p/\sigma_p)^2}$.

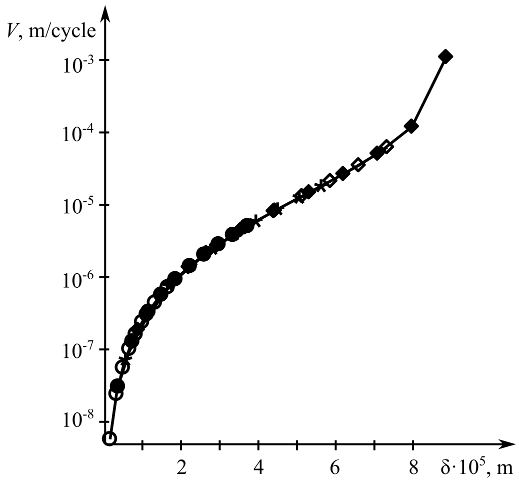

FIG. 5. Relation between the crack growth rate V and the opening of the fracture process zone δ_I at the series of loading p: ♦ – 875 MPa, ⋄ – 850 MPa, * – 800 MPa, • – 700 MPa, ○ – 500 MPa

On the contrary to the fig. 4, one value of the opening of the fracture process zone δ_I corresponds to one value of the crack growth rate V, as all the values for different load levels are located on a single curve (fig. 5). This indicates the invariant character of the crack growth rate representation in the coordinates $V \sim \delta_I$ towards the load level.

Thus, for the three-dimensional problem, the obtained result is similar to the one for the plane problem: the representation of the crack growth rate via the opening of the fracture process zone δ_I is invariant on the contrary to the rate representation using the stress intensity factor K_I.

5. Generalization of the Equivalent Area Method for Small Cracks (Continuation)

Let us return to the equivalent area method for short cracks. Considering that the opening of the fracture process zone in front of the crack contour $\delta_I^{(c)}$ can be calculated by formula (19) proposed above, a formula for determination of subcritical crack growth period N_* is obtained from expression (13) taking into account the relations (19), (20) and the boundary conditions (14), (15):

$$N_* = \frac{\pi E\sigma_t \sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}{\alpha_0(1-R^2)^2} \int_{r_0}^{r_*} \frac{\delta_I \pi E\sigma_t \sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2} - 4rp^2\left(1-\nu^2\right)}{16r^2p^4(1-\nu^2)^2 - \left(\delta_{th}\pi E\sigma_t \sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}\right)^2} dr. \quad (24)$$

After integration, the relation between the period of subcritical crack growth N_* and crack radius r can be represented as

$$N_* = \frac{\pi E\sigma_t \sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}{8\alpha_0 p^2\left(1-\nu^2\right)\left(1-R^2\right)^2}\left[\frac{\delta_{Ic}}{\delta_{th}}\ln\left|\frac{4rp^2\left(1-\nu^2\right)-\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}{4rp^2\left(1-\nu^2\right)+\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}\right.\right.$$
$$\times\left.\frac{4\sqrt{S_0/\pi}\,p^2(1-\nu^2)+\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}{4\sqrt{S_0/\pi}\,p^2(1-\nu^2)-\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}\right|- \tag{25}$$
$$\left.-\ln\left|\frac{16r^2p^4\left(1-\nu^2\right)^2-\left(\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}\right)^2}{16S_0/\pi\;p^4\left(1-\nu^2\right)^2-\left(\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}\right)^2}\right|\right].$$

The critical value of the crack radius r_*, obtained by the critical crack opening displacement criterion (16) using the formula for the opening of the fracture process zone (18),

$$r_* = \frac{\delta_{Ic}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}{8p^2(1-\nu^2)}, \tag{26}$$

corresponds to the following lifetime of the body:

$$N_* = \frac{\pi E\sigma_t \sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}{8\alpha_0 p^2\left(1-\nu^2\right)\left(1-R^2\right)^2}$$
$$\times\left[\frac{\delta_{Ic}}{\delta_{th}}\ln\left|\frac{\delta_{Ic}-\delta_{th}}{\delta_{Ic}+\delta_{th}}\cdot\frac{4\sqrt{S_0/\pi}\,p^2\left(1-\nu^2\right)+\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}{4\sqrt{S_0/\pi}\,p^2\left(1-\nu^2\right)-\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}}\right|\right. \tag{27}$$
$$\left.-\ln\left|\frac{\left(\delta_{Ic}^2-\delta_{th}^2\right)\left(\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}\right)^2}{16S_0/\pi\;p^4(1-\nu^2)^2-\left(\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t\,)^2}\right)^2}\right|\right].$$

Thus, formulas (25) and (27) give the solution for the problem of cyclical tension of a three-dimensional body with a small crack of an arbitrary convex contour using the equivalent area method through the radius of an equivalent circle crack.

6. Solution of the Problem of Cyclical Tension of a Body with a Small Elliptical Crack Contour Using the Equivalent Area Method

In order to verify the accuracy of the proposed approach for the approximate lifetime evaluation of structural elements using the equivalent area method, let us consider a specific example: a uniform three-dimensional body with an inner small elliptical crack with semiaxes a_0 and b_0 (fig. 6). The body is subject to uniformly distributed cyclic tension p applied at the infinity. The problem is to determine a period of subcritical growth $N = N_*$ when the crack grows to the critical values a_*, b_* and the body collapses.

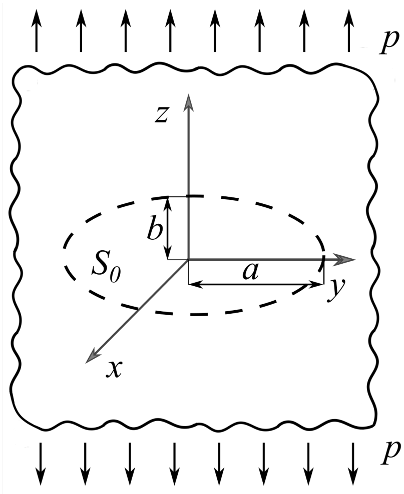

FIG. 6. Three-dimensional body with an elliptical crack [3]

Introduce a cartesian coordinate system $Oxyz$ so that the crack is located on the plane $z = 0$, axis x coincides with the major semiaxis of the ellipse $2a$ and axis y with the minor semiaxis $2b$.

The solution of the problem is sought by two methods: the generalized equivalent area method and the numerical Runge-Kutta method, and the obtained results are compared.

Based on the equivalent area method [1, p. 85–89], the elliptical crack with semiaxes a_0 and b_0 is substituted by a circular crack of an equal area and initial radius r_0:

$$S_0^{(e)} = S_0^{(c)}, \tag{28}$$

where $S_0^{(e)} = \pi a_0 b_0$ is the initial area of the elliptical crack, and $S_0^{(c)} = \pi r_0^2$ is the initial area of an equivalent circular crack (fig. 7).

From relation (28), the value of the initial radius of an equivalent circular crack can be obtained:

$$r_0 = \sqrt{a_0 b_0}. \tag{29}$$

Similarly to the previous case, the solution of the problem is reduced to the mathematical model (13)–(15) taking into account the initial condition (29).

Then from relation (24) after integration in the range of (29) and (26), a formula for determination of the period of subcritical crack growth N_* depending on the radius r can be derived:

$$N_* = \frac{\pi E\sigma_t \sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}{8\alpha_0 p^2(1-\nu^2)(1-R^2)^2}\left[\frac{\delta_{Ic}}{\delta_{th}}\ln\left|\frac{4rp^2(1-\nu^2)-\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}{4rp^2(1-\nu^2)+\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}\right.\right.$$
$$\left.\times\frac{4\sqrt{a_0b_0}p^2(1-\nu^2)+\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}{4\sqrt{a_0b_0}p^2(1-\nu^2)-\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}\right| \tag{30}$$
$$\left.-\ln\left|\frac{16r^2p^4(1-\nu^2)^2-\left(\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}\right)^2}{16a_0b_0p^4(1-\nu^2)^2-\left(\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}\right)^2}\right|\right].$$

The critical value of the crack radius r_*, found in (30), corresponds to the following lifetime of the body:

$$N_* = \frac{\pi E\sigma_t \sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}{8\alpha_0 p^2(1-\nu^2)(1-R^2)^2}$$
$$\times\left[\frac{\delta_{Ic}}{\delta_{th}}\ln\left|\frac{\delta_{Ic}-\delta_{th}}{\delta_{Ic}+\delta_{th}}\cdot\frac{4\sqrt{a_0b_0}p^2(1-\nu^2)+\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}{4\sqrt{a_0b_0}p^2(1-\nu^2)-\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}}\right|\right. \tag{31}$$
$$\left.-\ln\left|\frac{(\delta_{Ic}^2-\delta_{th}^2)\left(\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}\right)^2}{16a_0b_0p^4(1-\nu^2)^2-\left(\delta_{th}\pi E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}\right)^2}\right|\right].$$

Hence, formulas (30) and (31) represent the solution of the problem of cyclic tension of a three-dimensional body with an elliptical crack using the equivalent area method as a function of a radius of an equivalent circular crack.

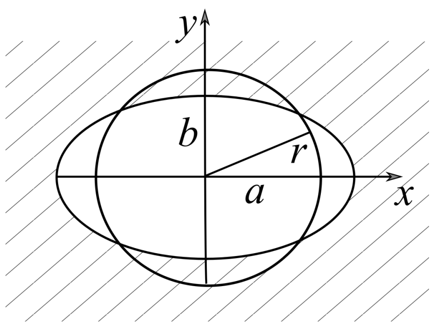

FIG. 7. Elliptical and equivalent circular crack [1, p. 86]

7. Lifetime Calculation of a Body with an Elliptical Crack by the Runge-Kutta Method

Finally, let us find an exact solution of the problem of cyclic tension of a three-dimensional body with an elliptical crack.

It is known [1, p. 85], [3] that for long cracks, the form of an elliptical crack only slightly differs from the elliptical in the process of its constant motion. Hence, the propagation of such crack can be modelled through the motion in the direction of its two semiaxes.

Under assumption that a small fatigue crack in the process of its growth also remains elliptical, the equation of motion for this crack dS/dN, that characterises the area change with change of the number of the loading cycles, can be reduced to two equations: equations that describe the change of the major and minor semiaxes of the ellipse.

In this case to solve the problem, the kinetics of crack motion in both semiaxes has to be known. Thus, analogically to (13), we obtain:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dN} = f\left(\delta_{Ia}^{(e)}\right); \\ \dfrac{db}{dN} = f\left(\delta_{Ib}^{(e)}\right), \end{cases} \tag{32}$$

where $f\left(\delta_{Ia}^{(e)}\right)$ and $f\left(\delta_{Ib}^{(e)}\right)$ are the functions that describe the growth rate of an elliptical crack through the opening of the fracture process zone in front of its contour $\delta_{Ia}^{(e)}$ and $\delta_{Ib}^{(e)}$ in the direction of the major a and minor b semiaxes of the ellipse.

The functions $f\left(\delta_{Ia}^{(e)}\right)$ and $f\left(\delta_{Ib}^{(e)}\right)$, build analogically to (12), have the form:

$$\begin{aligned} f\left(\delta_{Ia}^{(e)}\right) &= \alpha_0\left(1-R^2\right)^2 \frac{\left(\delta_{Ia}^{(e)}\right)^2 - \delta_{th}^2}{\delta_{Ic} - \delta_{Ia}^{(e)}}; \\ f\left(\delta_{Ib}^{(e)}\right) &= \alpha_0\left(1-R^2\right)^2 \frac{\left(\delta_{Ib}^{(e)}\right)^2 - \delta_{th}^2}{\delta_{Ic} - \delta_{Ib}^{(e)}}, \end{aligned} \tag{33}$$

where according to (19), the openings of the fracture process zone are given by:

$$\delta_{Ia}^{(e)} = \frac{\left(K_{Ia}^{(e)}\right)^2 (1-\nu^2)}{\sigma_t E \sqrt[4]{1-\left(\frac{p}{\sigma_t}\right)^2}}; \quad \delta_{Ib}^{(e)} = \frac{\left(K_{Ib}^{(e)}\right)^2 (1-\nu^2)}{\sigma_t E \sqrt[4]{1-\left(\frac{p}{\sigma_t}\right)^2}}. \tag{34}$$

It is known, that the stress intensity factor for an inner elliptical crack changes along its contour in the following way [1, p. 99], [11, p. 88]:

$$K_I = p\frac{\sqrt{\pi b}}{E(k)} \sqrt[4]{\sin^2\beta + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\beta}, \tag{35}$$

where β is the angular parameter, $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, and $E(k)$ is the elliptic integral of second order:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta} d\theta. \tag{36}$$

The coordinates of an arbitrary point on the crack contour are given by the angular parameter β and the semiaxes by the relations [1, p. 88]:

$$x = a\cos\beta, \;\; y = b\sin\beta. \tag{37}$$

Then based on (37) and (35), the SIF has the following forms for the major semiaxis of the ellipse at $x = a$:

$$K_{Ia}^{(e)} = \frac{pb\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}E(k)}, \tag{38}$$

and for the minor semiaxis at $y = b$, respectively

$$K_{Ib}^{(e)} = \frac{p\sqrt{\pi b}}{E(k)}. \tag{39}$$

Taking into consideration functions (33), the opening of the fracture process zone (34) and the SIFs (38), (39), we obtain from system (32):

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dN} = \dfrac{\alpha_0\left(1-R^2\right)^2}{a(E(k))^2 E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}} \cdot \dfrac{\left(\pi b^2 p^2\left(1-\nu^2\right)\right)^2 - \left(a(E(k))^2\delta_{th}E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}\right)^2}{a(E(k))^2\delta_{Ic}E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2} - \pi b^2 p^2\left(1-\nu^2\right)}; \\ \dfrac{db}{dN} = \dfrac{\alpha_0\left(1-R^2\right)^2}{(E(k))^2 E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}} \cdot \dfrac{\left(\pi b p^2\left(1-\nu^2\right)\right)^2 - \left((E(k))^2\delta_{th}E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2}\right)^2}{(E(k))^2\delta_{Ic}E\sigma_t\sqrt[4]{1-(p/\sigma_t)^2} - \pi b p^2\left(1-\nu^2\right)}. \end{cases} \tag{40}$$

For the sake of simplicity, the integral $E(k)$, introduced by formula (36), can be expanded to series by the parameter k [3]:

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right]. \tag{41}$$

The solution of obtained system (40) with consideration of initial conditions:

$$N = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0$$

is sought numerically by the Runge-Kutta method.

The calculation is performed for steel 65Г (analogue to 1066) with the following properties [10]: $\alpha_0 = 0.197$, $\nu = 0.3$, $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_t = 910$ MPa, $\Delta K_{th} = 7.4$ MPa$\sqrt{\text{m}}$; $\Delta K_{fc} = 118$ MPa$\sqrt{\text{m}}$, load ratio $R = 0.1$, having applied loading $p = 900$ MPa to a cracked body with the initial crack sizes $a_0 = 1$ mm, $b_0 = 0.5$ mm.

According to the critical crack opening displacement criterion (10),

$$\delta_{Ia}^{(e)}\left(a_*, b_*\right) = \delta_{Ic}, \quad \delta_{Ib}^{(e)}\left(a_*, b_*\right) = \delta_{Ic},$$

critical sizes of the elliptical crack for the considered problem are $a_* = 7$ mm, $b_* = 7$ mm. The corresponding critical size of the equivalent circular crack due to (26) is also $r_* = 7$ mm.

As can be seen from the fig. 8, the curves that describe the relation of subcritical growth period of an elliptical crack N_* on its area S_*, obtained using the approximate generalised equivalent area method and the exact numerical Runge-Kutta method, are quite close. This indicates high accuracy of the generalized equivalent area method.

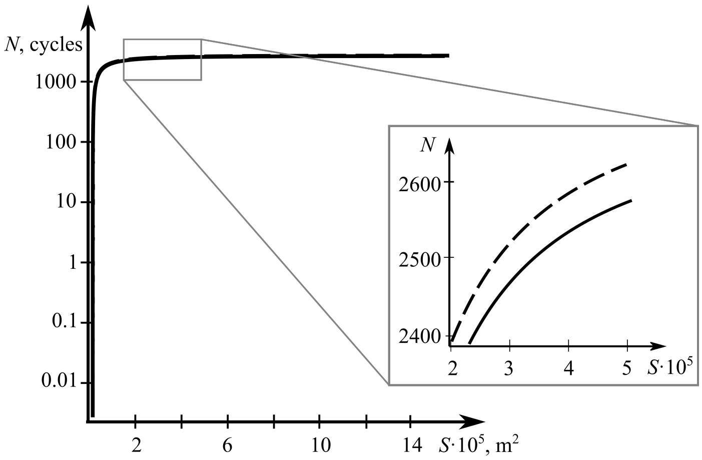

FIG. 8. Relation of subcritical growth period of an elliptical crack N_* on its area S_*: dashed line is obtained by the generalised equivalent area method, solid line by the Runge-Kutta method

Hence, the generalized equivalent area method can be applied to solve a problem of fatigue tension of a three-dimensional body with an elliptical crack that significantly simplifies the solution process compared to the exact method as well as enables to obtain an analytical relation $N_* \sim S_*$.

8. Conclusions

This study proposes a generalization of the equivalent area method, that is widely used to solve the problems with long cracks, for a case of short cracks. Firstly, a formula has been obtained to express the crack growth rate as a function of opening of the fracture process zone in front of the crack contour, and the invariancy of this approach has been shown for a three-dimensional cracked body. Secondly, the equivalent area method has been generalized for a case of short cracks. Based on the problem of fatigue tension of a three-dimensional body with an elliptical crack, it has been shown that the solution by the generalized equal area method with employment of the proposed relation between the crack growth rate and the opening of the fracture process zone differs little from the exact solution obtained numerically by the Runge-Kutta method.

Acknowledgements

I would like to thank Prof. Andreykiv for his valuable commentary and guidance.

References

1. O. E. Andreykiv and A. I. Darchyk, *Fatigue fracture and lifetime of constructions*, Naukova Dumka, Kyiv, 1992, 184 p. (Russian).
2. M. Shata and Z. O. Terletska, *An energy approach in mechanics of fatigue macrocrack propagation*, Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity, **2** (1999), 141–148 (Ukrainian).
3. O. Andreikiv and N. Sas, *Subcritical growth of a plane crack in a three-dimensional body under the conditions of high-temperature creep*, Materials Science **44** (2008), no. 2, 163–174.
4. V. V. Panasyuk, *Mechanics of quasibrittle fracture of materials*, Naukova Dumka, Kyiv, 1991, 416 p. (Russian).
5. O. E. Andreykiv and N. B. Sas, *Mathematical model for determination of the period of subcritical crack propagation under high temperature creep in solid bodies*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine **5** (2006), 47–52 (Ukrainian).
6. O. E. Andreikiv and N. B. Sas, *Fracture mechanics of metallic plates under the conditions of high-temperature creep*, Materials Science **42** (2006), no. 2, 210–219.
7. O. E. Andreykiv, V. R. Skalskyi, and I. Ya. Dolinska, *Slow fracture of materials under local creep*, Publishing center of the National Ivan Franko University of Lviv, Lviv, 2017, 399 p. (Ukrainian).
8. O. Andreykiv, N. Shtayura, and R. Yarema, *Energy-based approach to evaluation of short fatigue crack growth rate in plates*, Strength of Materials **49** (2017), no. 6, 778–787.
9. V. V. Panasyuk, O. E. Andreykiv, and V. Z. Parton, *Fracture mechanics and strengh of materials*, vol. **1**, Naukova Dumka, Kyiv, 1988, 488 p. (Russian).
10. O. P. Datsyshyn, T. M. Lenkovskyi, and A. Y. Glazov, *Specimen for the determination of fatigue thresholds under cyclic transverse shear*, Materials Science **55** (2020), no. 4, 492–501.
11. O. E. Andreikiv, A. R. Lysyk, N. S. Shtayura, and A. V. Babii, *Evaluation of the residual service life of thin-walled structural elements with short corrosion-fatigue cracks*, Materials Science **53** (2018), no. 4, 514–521.
12. O. E. Andreikiv and N. S. Shtayura, *Computational models of fatigue cracks growth in metallic materials under the action of force and physicochemical factors*, Materials Science **54** (2019), no. 4, 465–476.

Стаття: надійшла до редколегії 25.11.2020
доопрацьована 11.12.2020
прийнята до друку 23.12.2020

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ЕКВІВАЛЕНТНИХ ПЛОЩ НА ВИПАДОК МАЛИХ ВТОМНИХ ТРІЩИН У ТРИВИМІРНИХ ТІЛАХ

Наталія ЯДЖАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: nataliya.yadzhak@lnu.edu.ua

В інженерній практиці широко експлуатуються елементи конструкцій з малими тріщинами, проте відносно прості методи оцінки довговічності таких конструктивних елементів розроблено недостатньо. Запропоновано узагальнення методу еквівалентних площ на випадок малих втомних тріщин із використанням альтернативного представлення залежності швидкості росту тріщини від розкриття зони передруйнування біля контуру тріщини. Розв'язано задачу втомного розтягу тривимірного тіла з еліптичною тріщиною під впливом втомних навантажень аналітично за допомогою методу еквівалентних площ і чисельно методом Рунге-Кутта. Порівняння отриманих розв'язків доведено добру збіжність результатів, що підтверджує можливість використання узагальненого методу еквівалентних площ для розв'язання задач з малими тріщинами.

Ключові слова: малі тріщини, втомне руйнування тривимірних тіл, еліптична тріщина, метод еквівалентних площ, розкриття зони передруйнування.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 123–124
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 123–124
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.123-124

ТОПОЛОГІЯ У ЛЬВІВСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Двадцять четвертого лютого 2020 року о 15 годині в ауд. імені Стефана Банаха (ауд. 377) головного корпусу Львівського національного університету імені Івана Франка відбулися науково популярні лекції присвячені розвитку топології у Львівському університеті.

1. **Вступне слово та анонс лекцій**
2. **"Історія львівської топології"**
   Ярослав Притула, доцент кафедри математичного та функціонального аналізу.
   Історії львівської топології передує геометрія. Відомо, що геометрія — це наука правильних міркувань на неправильних рисунках. Топологія ж показує, наскільки ці рисунки мають бути неправильними.
3. **"Зиґмунд Янішевський (1888–1920)"**
   Тарас Банах, завідувач кафедри геометрії і топології.
   Зиґмунд Янішевський — творець теорії континуумів, стратег розвитку польської математики, співзасновник журналу "Fundamenta Mathematicae". Отримав освіту в найкращих університетах Європи (Цюріх, Ґетінген, Париж, Мюнхен, Марбург, Ґрац). У 1913 р. отримав габілітацію у Львівському університеті, а з 1918 р. працював у Варшавськму університеті. Помер у 1920 р., похований на Личаківському кладовищі у Львові.
4. **"Іван Миколайович Песін (1930–1993)"**
   Михайло Зарічний, професор кафедри геометрії і топології.
   Іван Песін зробив вагомий внесок не лише в розвиток теорії квазіконформних відображень, але також в теорію функцій дійсної змінної та геометричну топологію. Широкий науковий світогляд, глибокі знання та нестандартний тип мислення дозволяли йому формулювати нові цікаві задачі та пропонувати підходи до їх розв'язання. Його плідні математичні ідеї втілювалися в в наукових пошуках учнів, серед яких два доктора та три кандидати фізико-математичних наук.

4. **“Про Львівський топологічний семінар та його засновника Ігоря Йосиповича Гурана”**
   Олег Гутік, доцент кафедри геометрії і топології.
   Ігор Гуран — представник нового покоління львівських топологів, які започаткували потужну топологічну школу в Львові зі світовим іменем. Його життєвий та науковий шлях, наукові результати, діти-учні та 40-річна легенда-семінар “Топологія та застосування” покриті гумористичними оповідками та легендами.

Олег Гутік

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

електронний варіант статті та резюме на веб-сторінку

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 20 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)" (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2020**.

Номери формул ставити з правого боку та нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).

2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.

3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.

4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.

6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248

8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.

9. V. Bovdi, *Free subgroups in group rings*, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.

10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.

11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.