УДК 517.946

Г.П.Бойко

ЗОВНІШНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ І НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

У роботах [2], [3] розглянуто зовнішні узагальнені задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в просторі R^3. Задачі узагальнені в тому сенсі, що їх розв'язки набувають узагальнених граничних значень. Доведено теореми про зображення розв'язків задач, теореми єдиності.

Ми розглядаємо зовнішні узагальнені (в тому ж сенсі) задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в R^n.

1. Нехай Ω – область в R^n, розміщена зовні замкненої поверхні S класу C^∞; $\nu(y)$ – одиничний вектор зовнішньої до S нормалі $n(y)$ в точці $y \in S$; S_ε – поверхня, паралельна до S і перебуває на віддалі ε від неї, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$; $D(S)$ – простір нескінченно диференційованих (основних) функцій на S; $D'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ (простір узагальнених функцій). Через $A[\varphi]$ позначаємо дію узагальненої функції A на основну функцію φ. Вважаємо, що початок координат перебуває всередині поверхні S. Основну функцію $\varphi(y)$, визначену на S, продовжимо таким чином:

$$\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x_\varepsilon = y + \varepsilon\nu(y), \quad y \in S .$$

2. Спочатку розглянемо випадок $n \geq 3$.

Зовнішня узагальнена задача Діріхле. Нехай $F \in D'(S)$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умови:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\, \varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = F[\varphi] \tag{1}$$

для кожної

$$\varphi \in D(S), \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \qquad (2)$$

Зовнішня узагальнена задача Неймана. Нехай $B \in D'(S)$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = B[\varphi] \qquad (3)$$

для кожної $\varphi \in D(S)$,

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \qquad (4)$$

Позначимо через $\omega(x,y)$ фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в R^n,

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |x-y|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log|x-y|, & n = 2, \end{cases}$$

де σ_n – площа поверхні одиничної сфери в R^n.

На основі властивостей узагальнених функцій легко довести леми.

Лема 1. Перетворення, задане співвідношенням

$$G[g] = F[\varphi_g], \qquad (5)$$

де $g \in D(S)$; φ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\, dS_x = g(y) - C_g, \qquad (6)$$

$$C_g = \frac{1}{\Sigma} \int_S g(y)\, dS_y;$$

Σ – площа поверхні S, є ізоморфізм просторів $V'(S) = \{V \in D'(S) : V[\varphi_0] = 0\}$ і $W'(S) = \{W \in D'(S) : W[1] = 0\}$.

Обернене перетворення визначається співвідношенням

$$F[\varphi] = G\left[\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\, dS_x\right] \qquad (7)$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Л е м а 2. Перетворення, задане співвідношенням

$$H[g] = B[\psi_g], \tag{8}$$

де $g \in D(S)$, ψ_g - розв'язок інтегрального рівняння

$$-\psi(y) + 2\int_S \psi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(y,x) dS_x = g(y), \tag{9}$$

е ізоморфізм простору $D'(S)$ на себе. Обернене перетворення визначається таким чином:

$$B[\psi] = H[-\psi(y) + 2\int_S \psi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(y,x) dS_x] \tag{10}$$

для кожної $\psi \in D(S)$.

Згідно з лемами 1,2 для відповідних задач Діріхле і Неймана мають місце такі результати.

Т е о р е м а 1. Нехай $F \in V'(S)$, узагальнена функція G визначена з формул (5), (6), тоді функція

$$u(x) = 2G[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)], \quad x \in \Omega, \ y \in S \tag{11}$$

е розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Т е о р е м а 2. Нехай $F \in D'(S)$,

$$G[g] = F[\varphi_g] - F[\varphi_o^*] \int_S \varphi_g(t) \omega_o(t) dS_t, \tag{12}$$

де $g \in D(S)$, φ_g - розв'язок інтегрального рівняння (6),

$$\omega_o(t) = |t|^{2-n}, \qquad \varphi_o^*(y) = \frac{\varphi_o(y)}{\int_S \varphi_o(t) \omega_o(t) dS_t},$$

тоді функція

$$u(x) = 2G[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)] + F[\varphi_o^*] \omega_o(x), \ x \in \Omega, \ y \in S \tag{13}$$

е розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Т е о р е м а 3. Нехай $B \in D'(S)$, узагальнена функція H визначена з формул (8), (9), тоді функція

$$v(x) = 2H[\omega(x,y)], \quad x\in\Omega,\ y\in S \tag{14}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Т е о р е м а 4. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле єдиний.

Т е о р е м а 5. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Неймана єдиний.

Доведення теорем 4 і 5 проводиться так само, як доведення теореми 2 із [2].

3. У випадку $n = 2$ в постановці зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана умови (2) і (4) заміняємо умовою обмеженості розв'язку на безмежності.

Справедливі такі твердження.

Т е о р е м а 6. Нехай $F\in D'(S)$,

$$G[g] = F[\varphi_g] - F[\widetilde{\varphi}_0]\int_S \varphi_g(t)\,dS_t,$$

де $g\in D(S)$, φ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$-\pi\varphi(\zeta) + \int_S \varphi(z)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\,dS_z = g(\zeta) - C'_g,$$

$$C'_g = \frac{1}{\Sigma}\int_S g(\zeta)\,dS_\zeta, \qquad \widetilde{\varphi}_0(\zeta) = \frac{\varphi_0(\zeta)}{\int_S \varphi_0(t)\,dS_t},$$

тоді функція

$$u(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z-\zeta|\right] + F[\widetilde{\varphi}_0], \quad z\in\Omega,\ \zeta\in S$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Т е о р е м а 7. Нехай $B\in B'(S)$,

$$H[g_0] = B[\psi_g],$$

де $g\in D(S)$, ψ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$\pi\psi(\zeta) + \int_S \psi(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,dS_z = g(\zeta),$$

тоді функція

$$v(z) = H[\log|z-\zeta|] + const, \qquad z \in \Omega,\ \zeta \in S$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Т е о р е м а 8. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле єдиний. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Неймана єдиний з точністю до довільної адитивної константи.

Одержані результати переносяться на випадок лінійного диференціального рівняння другого порядку з нескінченно диференційованими коефіцієнтами.

Л і т е р а т у р а

1. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.

2. Г у п а л о Г. С., Ф е д а к-Ш а б а т І. Г. Зовнішня узагальнена задача Діріхле. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

3. Г у п а л о Г. С., Я к о б ч у к О. А. Зовнішня узагальнена задача Неймана. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

УДК 517.946

Г.П.Бойко

ПРО ЗВ'ЯЗОК ЗОВНІШНІХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ І НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

У [5] розглядаються узагальнені задачі Діріхле, Неймана, Амеріо для рівняння Лапласа в обмеженій області на площині. Встановлюється зв'язок між розв'язками задач Діріхле та Неймана. Доводиться, що розв'язок узагальненої задачі Діріхле є розв'язком деякої узагальненої задачі Неймана і навпаки.

Ми встановлюємо зв'язок між розв'язками зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в R^n, а також розглядаємо зовнішню узагальнену задачу Амеріо, використовуючи основні позначення і