$$v(z) = H[\log|z-\zeta|] + \mathrm{const}, \qquad z \in \Omega,\ \zeta \in S$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Т е о р е м а 8. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле єдиний. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Неймана єдиний з точністю до довільної адитивної константи.

Одержані результати переносяться на випадок лінійного диференціального рівняння другого порядку з нескінченно диференційованими коефіцієнтами.

Л і т е р а т у р а

1. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
2. Г у п а л о Г. С., Ф е д а к-Ш а б а т І. Г. Зовнішня узагальнена задача Діріхле. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.
3. Г у п а л о Г. С., Я к о б ч у к О. А. Зовнішня узагальнена задача Неймана. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

УДК 517.946

Г.П.Бойко

ПРО ЗВ'ЯЗОК ЗОВНІШНІХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ І НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

У [5] розглядаються узагальнені задачі Діріхле, Неймана, Амеріо для рівняння Лапласа в обмеженій області на площині. Встановлюється зв'язок між розв'язками задач Діріхле та Неймана. Доводиться, що розв'язок узагальненої задачі Діріхле є розв'язком деякої узагальненої задачі Неймана і навпаки.

Ми встановлюємо зв'язок між розв'язками зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в R^n, а також розглядаємо зовнішню узагальнену задачу Амеріо, використовуючи основні позначення і постановки задач, введені в [4]. Розглядаємо випадок $n \geq 3$, хоч результати переносяться і на випадок $n = 2$.

Т е о р е м а 1. Нехай $F \in D'(S)$,

$$M[p] = 2G\left[\frac{\partial}{\partial n_y} v_p(y)\right] + F[\varphi_0^*] \int_S p(t) \frac{\partial \omega_0(t)}{\partial n_t} dS_t \quad (1)$$

для кожної $p \in D(S)$, узагальнена функція G, функція $\varphi_0^*(y)$ визначаються теоремою 2 [4].

$$v_p(y) = \int_S p(t) \frac{\partial}{\partial n_t} \omega(t,y) dS_t, \quad \omega_0(t) = |t|^{2-n} \quad (2)$$

Якщо функція $u(x)$ є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле, то вона задовольняє такою умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = M[\varphi] \quad (3)$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Із леми 1 [4] та (1), (2) випливає, що

$$M[p] = F\left[\widetilde{\varphi}_p(y) + \varphi_0^*(y)\left(\int_S \widetilde{\varphi}_p(t) \frac{\partial \omega_0(t)}{\partial n_t} dS_t - \int_S \widetilde{\varphi}_p(t) \omega_0(t) dS_t\right)\right] \quad (4)$$

для кожної $p \in D(S)$, де $\widetilde{\varphi}_p$ – розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y) dS_x = 2\frac{\partial}{\partial n_y} v_p(y). \quad (5)$$

В и с н о в о к 1. Якщо гармонійна в області Ω функція $u(x)$ набуває на S узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$, то її нормальна похідна набирає узагальнених граничних значень $M \in D'(S)$ (узагальнена функція M визначається згідно з формулами (4), (5)). При цьому, якщо $F \in V'(S)$, то $M \in W'(S)$.

Т е о р е м а 2. Нехай $B \in D'(S)$,

$$K[p] = 2H\left[\int_S p(x) \omega(x,y) dS_x\right] \quad (6)$$

для кожної $p \in D(S)$, узагальнена функція H визначається лемою 2 з [4]. Якщо функція $v(x)$ є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана, то вона задовольняє також умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} v(x_\varepsilon)\, \psi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = K[\psi] \qquad (7)$$

для кожної $\psi \in D(S)$.

Зауважимо, що згідно з лемою 2 із [4] і (6),

$$K[p] = B[\widetilde{\psi}_p] \qquad (8)$$

для кожної $p \in D(S)$, де $\widetilde{\psi}_p$ - розв'язок інтегрального рівняння

$$-\psi(y) + 2\int_S \psi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(y,x)\, dS_x = 2\int_S p(x)\, \omega(x,y)\, dS_x \,. \qquad (9)$$

В и с н о в о к 2. Якщо нормальна похідна гармонійної в області Ω функції $v(x)$ набуває на S узагальнених граничних значень $B \in D'(S)$, то сама функція $v(x)$ набуває узагальнених граничних значень $K \in D'(S)$ (узагальнена функція K визначається за (8), (9)).

В и с н о в о к 3. Функція (13) із [4] є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле [4], а також розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана при $B \equiv M$. Функція (14) із [4] є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана, а також розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле при $F \equiv K$.

На основі тверджень теорем 1,2 легко довести леми.

Л е м а 1. Для довільної узагальненої функції $H \in D'(S)$ існують узагальнена функція $G \in W'(S)$ і константа L такі, що

$$H[\omega(x,y)] - G\left[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\right] = L\,\omega_0(x)\,, \quad x \in \Omega,\ y \in S. \qquad (10)$$

Л е м а 2. Для довільної $G \in W'(S)$ існує узагальнена функція $H \in D'(S)$ така, що

$$G\left[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\right] = H[\omega(x,y)]\,, \quad x \in \Omega,\ y \in S. \qquad)$$

Назвемо функцію $u(x)=H[\omega(x,y)]$ узагальненим потенціалом типу простого шару, а функцію $u(x)=G[\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)]$ – узагальненим потенціалом типу подвійного шару. Із теореми 2 із [4], теореми 1 і леми 2 випливає, що розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа зображається як у вигляді узагальненого потенціалу типу подвійного шару, так і у вигляді узагальненого потенціалу типу простого шару. Згідно з теоремою 3 із [4], теоремою 2 і лемою 1 це твердження справедливе також для зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Зовнішня узагальнена задача Амеріо. Нехай F, $B\in D'(S)$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = F[\varphi], \quad \varphi\in D(S), \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = B[\varphi], \quad \varphi\in D(S), \tag{13}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)=0. \tag{14}$$

Теорема 3. Для існування розв'язку зовнішньої узагальненої задачі Амеріо необхідно і досить, щоб

$$B[\omega(x,y)]-F[\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)]=0, \quad x\in\bar{\Omega},\ y\in S \tag{15}$$

Якщо умова (15) виконується, то функція

$$u(x)=F[\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)]-B[\omega(x,y)],\ x\in\Omega,\ y\in S \tag{16}$$

є розв'язком задачі (12)-(14).

Доведення. Нехай існує розв'язок задачі (12)-(14). Згідно з теоремою 2 із [4], функція $u(x)=2H[\omega(x,y)]$, $x\in\Omega$, $y\in S$, де $H[g] = B[\psi_g]$ для кожної $g \in D(S)$, ψ_g - розв'язок інтегрального рівняння

$$-\psi(y) + 2\int_S \psi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(x,y)\, dS_x = g(y),$$

задовольняє умови (13), (14), а за теоремою 2 також і умову (12) при

$F[p] = 2H[\int_S p(x)\omega(x,y)\, dS_x]$ для кожної $p \in D(S)$.

Тоді при $x \bar{\in} \Omega$ згідно з формулою Гріна

$$B[\omega(x,y)] - F[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)] =$$

$$= H[-\omega(x,y) + 2\int_S \omega(x,t) \frac{\partial}{\partial n_t} \omega(t,y)\, dS_t - 2\int_S \omega(t,y) \frac{\partial}{\partial n_t} \omega(x,t)\, dS_t] = 0$$

Перевіркою, використовуючи (15), встановлюємо, що функція (16) задовольняє рівняння Лапласа і умови (12)-(14).

Література

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.

2. Гупало Г. С., Федак-Шабат І. Г. Зовнішня узагальнена задача Діріхле. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

3. Гупало Г. С., Якобчук О. А. Зовнішня узагальнена задача Неймана. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

4. Бойко Г. П. Зовнішні узагальнені задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9.

5. Szmydt Z. Le rapport mutuel des problemes generalises de Dirichlet et de Neumann. - "Ann. Polon. Math", 1966, w 18.