УДК 517.512

Г.П.Губанов, Б.В.Ковальчук

ПРО ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ЛІПШИЦЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ, ЩО НАЙЛІПШІ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

1. Нехай H^{α} - клас 2π-періодичних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця порядку α $(0<\alpha\leq 1)$

$$|f(t)-f(z)|\leq|t-z|^{\alpha}$$

За допомогою трикутної матриці чисел $\Lambda=\left\{\lambda_i^{(n-1)}\right\}$ ($i=0,1,2\ldots$ $\ldots, n$; $\lambda_0^{(n-1)}=1$; $\lambda_n^{(n-1)}=0$) кожній функції з цього класу поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$T_n(f;x;\Lambda)=\frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{2nq} f(x_k)U_n(\lambda;x_k-x), \qquad (1)$$

де

$$U_n(\lambda;t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{(n-1)}\cos it\geq 0, \quad 0\leq t\leq 2\pi,$$

побудованих на основі тригонометричних поліномів (n - 1)-го порядку, найліпших у заданій системі точок $x_k=\frac{k\pi}{nq}$, $k=\overline{1,2nq}$, $q\geq 1$.

Якщо $\lambda_i^{(n-1)}=1$, $q=1$, то поліноми (1) перетворюються в тригонометричні поліноми, розглянуті в [1,2], а при $q=1$ одержимо поліноми, які ми вивчали у [3] з іншої точки зору. Асимптотичні вирази верхніх меж відхилень функції $f(x)\in H^{\alpha}$ від тригонометричних поліномів, найліпших у заданій системі рівновіддалених точок $x_k=\frac{k\pi}{n}$, $k=\overline{1,2n}$, одержані в [1-3]. Розглянемо аналогічну задачу для поліномів (1) і наведемо асимптотичні формули для величин

$$E_n(\Lambda;x;\alpha)=\sup_{f(x)\in H^{\alpha}}\left|f(x)-T_n(f;x;\Lambda)\right|, \qquad (2)$$

$$E_n(\Lambda;\alpha) = \max_{x\in[0,2\pi]} E_n(\Lambda;x;\alpha). \tag{3}$$

Т е о р е м а 1. Нехай $u=nqx$, $\lambda_0^{(n-1)}=1$, $\Delta\lambda_i^{(n-1)}=\lambda_i^{(n-1)}-\lambda_{i+1}^{(n-1)}$, $0\le i\le n-1$. Тоді при $0<\alpha<1$

$$E_n(\Lambda;x;\alpha)=\frac{2}{(nq)^{\alpha}}\sum_{|k\pi-u|\le\pi nq}|k\pi-u|^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{n-2}\Delta\lambda_i^{(n-1)}\sin\frac{2i-1}{2nq}|k\pi-u|+$$

$$+O\left\{\sum_{i=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_i^{(n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+|\lambda_{n-1}^{(n-1)}|\right\},$$

а при $\alpha=1$

$$E_n(\Lambda;1)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\Delta\lambda_i^{(n-1)}}{i+\frac{1}{2}}+O\left\{\sum_{i=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_i^{(n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-2}|\Delta\lambda_i^{(n-1)}|+\frac{\lambda_{n-1}^{(n-1)}}{n}\right\}.$$

Теорему І можна застосувати для оцінки величин (2) і (3) при наближенні функцій класу Ліпшиця середніми Чезаро, для яких, як відомо,

$$\Lambda=\Lambda(\delta)=\lambda_i^{(n-1)}(\delta)=\begin{cases}\dfrac{A_{n-i-1}^{\delta}}{A_{n-1}^{\delta}} & \text{при } 0\le i\le n-1,\\[2ex] 0 & \text{при } i>n-1,\end{cases}$$

де δ – ціле додатне число, а $A_p^{\delta}=\binom{p+\delta}{p}$.

Дійсно, коли $\delta\ge 1$, то ядро

$$U_n^{\delta}(\Lambda;t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{(n-1)}(\delta)\cos it$$

невід'ємне і для цілих $\delta\ge 1$ (при $\alpha=1$) одержимо

$$E_n(\Lambda(\delta);1)=\frac{2}{\pi}\delta\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

звідки при $\delta = 1$ випливає результат з роботи [2].

Нехай тепер $0 < \alpha < 1$, $\delta \geqslant 1$. Тоді

$$E_n(\Lambda; x; \alpha) = \frac{2}{(nq)^{\alpha}} \sum_{|k\pi - u| \leq \pi n q} |k\pi - u|^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta \lambda_i^{(n-1)}(\delta) \sin \frac{2i-1}{2nq} |k\pi - u| + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4)$$

Зокрема, при $\delta = 1$ з (4) одержимо

$$E_n(\Lambda(1); \alpha) = C_1(\alpha) n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

де

$$C_1(\alpha) = \frac{4 \cdot 1!}{q^{1-\alpha}} \max_u \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\pi - u|^{\alpha-2} \sin^2 \frac{|k\pi - u|}{2q}. \quad (5)$$

Можна також дістати асимптотичні формули для $\delta = 2, 3, 4 \ldots$ Наприклад,

$$E_n(\Lambda(2); \alpha) = C_2(\alpha) n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

де

$$C_2(\alpha) = \frac{4 \cdot 2!}{q^{2-\alpha}} \max_u \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\pi - u|^{\alpha-3} \left\{ \frac{|k\pi - u|}{2q} - \frac{1}{2} \sin \frac{|k\pi - u|}{2q} \right\}. \quad (6)$$

і

$$E_n(\Lambda(3); \alpha) = C_3(\alpha) n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

де

$$C_3(\alpha) = \frac{4 \cdot 3!}{q^{3-\alpha}} \max_u \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\pi - u|^{\alpha-4} \left\{ \frac{|k\pi - u|}{4q^2} - \sin^2 \frac{|k\pi - u|}{2q} \right\}. \quad (7)$$

2. Позначимо через $H_1^{(\alpha,\beta)}$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ клас 2π -періодичних відносно x, y функцій $f(x,y)$, що задовольняють нерівність $|f(t; z) - f(x; y)| \leq |t - x|^{\alpha} + |z - y|^{\beta}$. Нехай дана неперервна з періодом 2π відносно x, y функція $f(x,y)$ і нехай задана система точок $(x_k; y_l)$, де

$$x_k = \frac{k\pi}{mp}, \quad k = \overline{1, 2mp}, \quad p \geqslant 1; \quad y_l = \frac{l\pi}{nq}, \quad l = \overline{1, 2nq}, \quad q \geqslant 1. \quad (8)$$

За допомогою матриці чисел $\Lambda=\left\{\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}\right\}$ $(0\le i\le m;\ 0\le j\le n;\ \lambda_{0,0}^{(m-1,n-1)}=1,$ $\lambda_{m,0}^{(m-1,n-1)}=\lambda_{0,n}^{(m-1,n-1)}=0)$ кожній функції класу $H_1^{(\alpha,\beta)}$, $0<\alpha,\beta\le 1$ поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$T_{mn}(f;x;y;\Lambda)=\frac{1}{mpnq}\sum_{k=1}^{2mp}\sum_{l=1}^{2nq} f(x_k;y_l)\,U_{mn}(\Lambda;x-x_k;y-y_l), \qquad (9)$$

де

$$U_{mn}(\Lambda;t;z)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mu_{i,j}\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}\cos it\cos jz\ge 0,\quad 0\le t,z\le 2\pi,$$

$$\mu_{0,0}=\frac{1}{4},\ \mu_{i,0}=\mu_{0,j}=\frac{1}{2},\ \mu_{i,j}=1,\ i>0,\ j>0,$$

[illegible]ованих на основі тригонометричних поліномів порядку $(m-1)$ по x і $(n-1)$ по y, найліпших у заданій системі точок (8). При $p=q=1$ з (9) одержимо тригонометричні поліноми, розглянуті нами раніше в роботі [3], а при $\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}=1$, $p=q=1$ (9) перетворюються в тригонометричні поліноми, найліпші у системі точок [4,5]

$x_k=\frac{k\pi}{m}$, $y_l=\frac{l\pi}{n}$, $1\le k\le 2m$, $1\le l\le 2n$.

Позначимо

$$E_{mn}(\Lambda;x,y;\alpha,\beta)=\sup_{f\in H_1^{(\alpha,\beta)}}\left|f(x;y)-T_{mn}(f;x;y;\Lambda)\right|, \qquad (10)$$

$$E_{mn}(\Lambda;\alpha,\beta)=\max_{x,y\in[0,2\pi]}E_{mn}(\Lambda;x;y;\alpha,\beta). \qquad (11)$$

Т е о р е м а 2. Нехай $u=mpx$, $v=nqy$, $\lambda_{00}^{(m-1,n-1)}=1$, $\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}=\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}-\lambda_{i+1,0}^{(m-1,n-1)}$, $0\le i\le m-1$; $\Delta\lambda_{0j}^{(m-1,n-1)}=\lambda_{0j}^{(m-1,n-1)}-\lambda_{0,j+1}^{(m-1,n-1)}$, $0\le j\le n-1$.

Тоді при $0<\alpha,\beta<1$

$$E_{mn}(\Lambda;x;y;\alpha,\beta)=\frac{2}{(mp)^{\alpha}}\sum_{|k\pi-u|\le\pi mp}|k\pi-u|^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{m-2}\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}\sin\frac{2i-1}{2mp}|k\pi-u|+$$

$$+\frac{2}{(nq)^{\beta}}\sum_{|l\pi-v|\le\pi nq}|l\pi-v|^{\beta-1}\sum_{j=0}^{n-2}\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}\sin\frac{2j-1}{2nq}|l\pi-v|+$$

$$+O\left\{\sum_{i=0}^{m-2}\frac{|\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+|\lambda_{m-1,0}^{(m-1,n-1)}|\right\}+O\left\{\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}|}{(j+\frac{1}{2})^2}+|\lambda_{0,n-1}^{(m-1,n-1)}|\right\},$$

а при $\alpha=\beta=1$

$$E_{mn}(\Lambda;1;1)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}}{i+\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}}{j+\frac{1}{2}}+O\left\{\sum_{i=0}^{m-2}\frac{|\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-2}|\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}|+\frac{\lambda_{m-1,0}^{(m-1,n-1)}}{m}\right\}+O\left\{\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}|}{(j+\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}|\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}|+\frac{\lambda_{0,n-1}^{(m-1,n-1)}}{n}\right\}.$$

Застосуємо теорему 2 для оцінки величин (10) і (11) при наближенні функцій класу $H_1^{(\alpha,\beta)}$, $0<\alpha,\beta\le 1$ середніми Чезаро, для яких

$$\Lambda=\Lambda(\delta,\nu)=\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}(\delta,\nu)=\begin{cases}\dfrac{A_{m-i-1}^{\delta}A_{n-j-1}^{\nu}}{A_{m-1}^{\delta}A_{n-1}^{\nu}} & \text{при } 0\le i\le m-1,\ 0\le j\le n-1,\\ 0 & \text{при } i>m-1,\ j>n-1,\end{cases}$$

де δ, ν – цілі додатні числа, а $A_p^{z}=\binom{p+z}{p}$.

Якщо $\delta\ge 1,\ \nu\ge 1$, то ядро $U_{mn}^{\delta\nu}(\Lambda;t;z)$ невід'ємне і для цілих $\delta\ge 1$, $\nu\ge 1$ (при $\alpha=\beta=1$) одержимо

$$E_{mn}(\Lambda(\delta;\nu);1;1)=\frac{2}{\pi}\delta\frac{\ln m}{m}+\frac{2}{\pi}\nu\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{m}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

звідки при $\delta=\nu=1$ одержимо результат з роботи [2].

Нехай тепер $0<\alpha,\beta<1$, $\delta=\nu=1$. Тоді

$$E_{mn}(\Lambda(1,1);\alpha,\beta)=C_1(\alpha)m^{-\alpha}+C_1(\beta)n^{-\beta}+O(m^{-\alpha})+O(n^{-\beta}),$$

де $C_1(\tau)$ визначається за формулою (5).

Відповідні асимптотичні формули для величин (10) і (11) можна одержати для $\delta = 2,3,4\ldots$; $\nu = 2,3,4\ldots$, наприклад,

$$E_{mn}(\Lambda(2;2);\alpha,\beta) = C_2(\alpha)m^{-\alpha} + C_2(\beta)n^{-\beta} + O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}),$$

$$E_{mn}(\Lambda(3;3);\alpha,\beta) = C_3(\alpha)m^{-\alpha} + C_3(\beta)n^{-\beta} + O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}),$$

де $C_2(\tau)$ і $C_3(\tau)$ визначаються відповідно за формулами (6) і (7).

Л і т е р а т у р а

1. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні періодичних функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. - В кн.: Друга наукова конференція молодих математиків України. Київ, "Наукова думка", 1966.
2. Г у б а н о в Г. П. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, некоторыми тригонометрическими полиномами. - "Прикладная механика, оборудование и электропривод", 1970, № 3.
3. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1969, вип. 4.
4. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій двох змінних поліномами, найкращими в заданій системі точок. - ДАН УРСР, 1966, № 1.
5. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Приближение функций двух переменных тригонометрическими полиномами в заданной системе точек. - В кн.: Первая республиканская математическая конференция молодых исследователей. Вып. 2. Киев, "Наукова думка", 1965.