УДК 517.512

У.А.Мишковець

ПРО ОДИН КРИТЕРІЙ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР'Є

Тригонометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$, де A_n - комплексні числа; λ_n - довільна послідовність дійсних чисел за умови

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 < \infty \tag{1}$$

являє собою ряд Фур'є деякої майже періодичної функції Безіковича (B^2 - майже періодична функція).

Т е о р е м а. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ є ряд Фур'є B^2 майже періодичної функції. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \tag{2}$$

збігається тоді і лише тоді, коли існує монотонна послідовність $p_n \to \infty$ така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 p_n^2 < \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2} < \infty. \tag{4}$$

Достатність. Покажемо, що при виконанні умов (3) і (4), ряд (2) збігається.

Збіжність чи розбіжність ряду (2) не залежить від того, в якому порядку записані його члени. Нехай члени ряду (2) пронумеровані в порядку спадання $|A_n| \searrow 0$. У цьому випадку послідовність $1/|A_n| \to \infty$ монотонна.

Не порушуючи загальності допускаємо, що $|A_n| < 1$.

Функції x^{α}, $x \in (0,1)$, де α параметр, $\alpha \in (0,1)$ при $\alpha > \alpha_0$, мають таку властивість: $x^{\alpha} < x^{\alpha_0}$. Тому

$$\frac{1}{x^{\alpha}} > \frac{1}{x^{\alpha_0}},$$

$$\frac{1}{x^{\alpha}} > \frac{1}{\sqrt{x}}; \qquad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

При $x_n = |A_n| < 1$ маємо

$$\frac{1}{|A_n|^{\alpha}} > \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \qquad \frac{1}{2} < \alpha < 1 \tag{5}$$

Враховуючи нерівність (5), одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\right)^2 < \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{|A_n|^{\alpha}}\right)^2 \tag{6}$$

Нехай монотонна послідовність $p_n \to \infty$ така

$$\frac{1}{|A_n|^{\alpha}} \leq p_n \tag{7}$$

Тоді з нерівностей (6) і (7) маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 p_n^2 . \tag{8}$$

Якщо умова (3) виконується, то ряд (2) збігається.

Покажемо, що монотонна послідовність (7) задовольняє умову (4). Справді

$$\frac{1}{p_n} \leq |A_n|^{\alpha}.$$

Оскільки $|A_n| < 1$ і $1/2 < \alpha < 1$, то справедлива нерівність

$$\frac{1}{p_n^2} \leq |A_n|^{2\alpha} < |A_n| .$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| .$$

Необхідність. Запишемо нерівність, аналогічну нерівності (5),

$$\frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \geqslant \frac{1}{|A_n|^{\beta}},$$

коли $0 < \beta \leqslant \frac{1}{2}$ і $|A_n| < 1$. З цієї нерівності одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{|A_n|^{\beta}}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| . \tag{9}$$

Якщо ряд (2) збігається, то, як випливає з нерівності (9), існує монотонна послідовність $0 < \rho_n \leqslant 1/|A_n|^{\beta} \to \infty$, що ряд (3) збігається.

Залишається показати збіжність ряду (4). Це випливає з нерівностей

$$|A_n|^{\beta} \leqslant \frac{1}{\rho_n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{2\beta} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n^2},$$

при $\beta = 1/2$.

Доведена теорема доповнює один результат С.Б.Стечкіна [1] про абсолютну збіжність ряду Фур'є функції з простору Гільберта L^2.

Література

1. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. – ДАН СССР, 1955, т. 102.