УДК 517.94

О.І.Бобик, О.В.Копушанський, В.М.Поліщук

ЕФЕКТИВНІ ОЗНАКИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ПЕРШОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ В НЕОПУКЛИХ ОБЛАСТЯХ

У цій роботі розглядається питання єдиності розв'язку першої граничної задачі в неопуклій області для лінійного диференціального рівняння еліптичного типу

$$Lu=\sum_{ij=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+2\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u=f(x) \tag{1}$$

у випадку довільного за знаком коефіцієнта $c(x)$. Границя S області D кусково гладка, а радіус кривини $R(s)$ її невипуклої частини задовольняє умову $\min\limits_{S} R(s)=R_0>0$.

Дослідження проводились методом захисних нерівностей. Відомо [3], що коли знайдуться функції B_j ($j=1,2$), які в області D задовольняють нерівність

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}>C^*+B_1^2+B_2^2, \tag{2}$$

де

$$C^*=\max_{x\in D}\max_{\varphi_1^2+\varphi_2^2=1}\varphi^*A^{-1}\varphi\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{2}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}+C\right),$$

A^{-1} – обернена матриці $A=\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{2}$, $\varphi^*=(\varphi_1\varphi_2)$, $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$,

то перша гранична задача для рівняння (1) має єдиний розв'язок.

Побудуємо, як і в [3], бісектрису $Б_D$ області D і поле $\vec{\beta}$, що складається з відрізків, які сполучають точки $Б_D$ з найближчими точками на S. Зробимо заміну $B_j=\omega(t,s)\cos(t,\hat{}\,x_j)$ ($j=1,2$), де t – зміщення по напрямку поля β від границі S до бісектриси $Б_D$, а s – довжина дуги границі, відлічувана від певної початкової точки. Тоді нерівність (2) матиме вигляд

$$\frac{d\omega}{dt}+\omega\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\cos(t,\hat{x}_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cos(t,\hat{x}_2)\right]>C^*+\omega^2. \qquad (3)$$

Побудуємо область D', що містить D, так, щоб віддаль між S і границею області D' по нормалі до S дорівнювала R_0. Аналогічно [1] будуємо поле $\vec{\beta}'$. Тоді нерівність (3) набуває вигляду

$$\frac{d\omega}{dt}>C^*+\omega^2 \qquad (4)$$

в опуклій частині області D і вигляду

$$\frac{d\omega}{dt}+\frac{\omega}{R_0+t}>C^*+\omega^2 \qquad (5)$$

в підобластях, де поле $\vec{\beta}'$ - непаралельне. Якщо нерівність (5) задовольняється на функціях $\omega<0$, то там тим більше виконується нерівність (4). Функція ω внаслідок розривності B_j на бісектрисі повинна задовольняти умову $\omega|_{Б_D}=0$.

Т е о р е м а І. Нехай внутрішній діаметр d області D задовольняє умовам

$$\left[\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{d}\right]^2>C^* \quad і \quad R_0>\frac{\mu_0 d}{2(\mu_1-\mu_0)}, \qquad (6)$$

де μ_0 і μ_1 - перші додатні нулі функцій Бесселя відповідно нульового і першого порядків. Тоді перша гранична задача для рівняння (І) має не більше одного розв'язку з класу C^2 в D і неперервно диференційованого в $D\cup S$.

Д о в е д е н н я. Приймемо

$$\omega=\alpha(t)\frac{J_0'(at+b)}{J_0(at+b)},$$

де функція $\alpha(t)$ і сталі a і b будуть визначені далі, $t\in[0,g(s)]$, $g(s)$ - довжина відрізка, що належить полю $\vec{\beta}$ і проходить через точку $(t,s)\in D$. На бісектрисі $t=g(s)$ на S $-t=0$.

Підставимо ω в (5) і, використавши рівняння Бесселя нульового порядку, одержимо

$$\left(\alpha'+\frac{\alpha}{R_0+t}-\frac{\alpha a}{at+b}\right)\frac{J_0'}{J_0}-\alpha a-(\alpha a+\alpha^2)\frac{J_0'^2}{J_0^2}>c^*.$$

Прийнявши $\alpha=-a$ і вибравши a і b так, щоб при $0\leq t\leq g(\delta)$ аргумент $(at+b)\in[\mu_0,\mu_1]$, матимемо, що функція

$$\omega=-\frac{\mu_1-\mu_0}{g(\delta)}\cdot\frac{J_0'\left[\frac{\mu_1-\mu_0}{g(\delta)}t+\mu_0\right]}{J_0\left[\frac{\mu_1-\mu_0}{g(\delta)}t+\mu_0\right]}<0$$

задовольняє нерівність (5), якщо

$$\left[\frac{\mu_1-\mu_0}{g(\delta)}\right]^2+\frac{\frac{\mu_1-\mu_0}{g(\delta)}R_0-\mu_0}{(R_0+t)\left(\frac{\mu_1+\mu_0}{g(\delta)}t+\mu_0\right)}\cdot\frac{\mu_1-\mu_0}{g(\delta)}\cdot\frac{J_0'}{J_0}>c^*.$$

Останнє співвідношення виконується внаслідок умов (6).

Т е о р е м а 2. Якщо для області D виконується нерівність

$$\left[\frac{\mu_0}{R_0}\;\frac{\ln\frac{\mu_1}{\mu_0}}{\ln\frac{R_0+\frac{\delta}{2}}{R_0}}\right]^2>c^*,$$

то перша крайова задача для рівняння (1) має не більше одного розв'язку, двічі неперервно диференційованого в D і неперервно диференційованого в $D\cup S$.

Д о в е д е н н я. Шукаємо функцію ω у вигляді

$$\omega=\alpha(t)\frac{J_0'[\gamma(t)]}{J_0[\gamma(t)]},$$

де $\alpha(t)$ і $\gamma(t)$ - невідомі поки що функції.

Доведення проводимо аналогічно, як і в теоремі 1.

Ці результати можна узагальнити на n -вимірний випадок. Нерівність (5) тоді запишеться у вигляді

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{n-1}{R_0+t}\,\omega > c^* + \omega^2 . \tag{5'}$$

Т е о р е м а 3. Нехай внутрішній діаметр області D задовольняє умовам

$$\left[\frac{\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1}}{\frac{d}{2}}\right]^2 > c^* \quad і \quad R_0 > \frac{n-1}{2n}\,\frac{\mu_{\frac{n}{2}-1}\, d}{\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1}} , \tag{7}$$

де $\mu_{\frac{n}{2}-1}$ і $\mu_{\frac{n}{2}}$ $(\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1} > 0)$ – перші додатні нулі функцій Бесселя відповідно $\frac{n}{2}-1$ і $\frac{n}{2}$ порядків, що на $[\mu_{\frac{n}{2}-1}, \mu_{\frac{n}{2}}]$ функції $J_{\frac{n}{2}}$, $J_{\frac{n}{2}-1}$ є різних знаків. Тоді перша гранична задача для (1) має не більше одного розв'язку, двічі неперервно диференційованого в D і неперервно диференційованого в $D \cup S$.

Д о в е д е н н я. Виберемо

$$\omega = \alpha(t)\,\frac{\frac{d}{dt}\left[(at+b)^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(at+b)\right]}{(at+b)^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(at+b)} \tag{8}$$

і підставимо в (5'). Тоді, використавши відповідні співвідношення для функцій Бесселя [2], одержимо, що при

$$\alpha = -1, \quad a = \frac{\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1}}{g(b)} \quad і \quad b = \mu_{\frac{n}{2}-1}$$

функція (8) задовольняє (5') за рахунок умов (7).

Для функції ω вигляду

$$\omega = \alpha(t)\,\frac{\frac{d}{dt}\left[r_{(t)}^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(r(t))\right]}{r_{(t)}^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(r(t))}$$

аналогічно доводиться така теорема.

Т е о р е м а 4. Якщо для області D виконується

$$\left\{\frac{\frac{n-1}{n}\left[\mu_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{n-1}}-\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}\right]^2}{\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{1}{n-1}}\ \frac{d}{2}}\right\}^2 > c^*$$

і

$$R_0 > \frac{\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}\ \frac{d}{2}}{\mu_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{n-1}}-\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}},$$

де $\mu_{\frac{n}{2}-1}$ і $\mu_{\frac{n}{2}}$ вибрані як і в теоремі 3, то перша крайова задача для рівняння (I) має не більше одного розв'язку, двічі неперервно диференційовного в D і неперервно диференційованого в $D\cup S$.

Одержані результати справедливі для рівнянь вищих порядків, якщо для них має місце теорема про захисну нерівність.

Л і т е р а т у р а

1. Б о б и к Е. И. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. Автореф. канд. дисс. Львов, 1967.
2. В а т с о н Дж. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
3. С к о р о б а г а т ь к о В. Я. Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Изд-во Львовского ун-та, 1961.

УДК 517.946

І.М.Колодій

ОЦІНКА МАКСИМУМУ МОДУЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У цій роботі розглядаємо еліптичні рівняння з виродженням вигляду

$$\operatorname{div} A(x,u,u_x) = B(x,u,u_x), \tag{1}$$

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ A=(A_1,\dots,A_n),\ u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$