Т е о р е м а 4. Якщо для області D виконується

$$\left\{\frac{\frac{n-1}{n}\left[\mu_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{n-1}}-\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}\right]^2}{\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{1}{n-1}}\ \frac{d}{2}}\right\}^2 > c^*$$

і

$$R_0 > \frac{\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}\ \frac{d}{2}}{\mu_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{n-1}}-\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}},$$

де $\mu_{\frac{n}{2}-1}$ і $\mu_{\frac{n}{2}}$ вибрані як і в теоремі 3, то перша крайова задача для рівняння (I) має не більше одного розв'язку, двічі неперервно диференційовного в D і неперервно диференційованого в $D \cup S$.

Одержані результати справедливі для рівнянь вищих порядків, якщо для них має місце теорема про захисну нерівність.

Л і т е р а т у р а

1. Б о б и к Е. И. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. Автореф. канд. дисс. Львов, 1967.
2. В а т с о н Дж. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
3. С к о р о б а г а т ь к о В. Я. Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Изд-во Львовского ун-та. 1961.

УДК 517.946

І.М.Колодій

ОЦІНКА МАКСИМУМУ МОДУЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У цій роботі розглядаємо еліптичні рівняння з виродженням вигляду

$$\operatorname{div} A(x,u,u_x) = B(x,u,u_x), \qquad (1)$$

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ A=(A_1,\dots,A_n),\ u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Результат даної роботи анонсований у [1].

Нехай Ω – обмежена область в n-вимірному евклідовому просторі E^n, $x=(x_1,\dots,x_n)$; $\bar\mu=\bar\mu(x)=(\mu_1(x),\dots,\mu_n(x))$, де $\mu_i(x)$, $i=1,\dots,n$ – невід'ємні вимірні функції в Ω. Позначимо через $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ і $W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$, $\beta>1$ лінеали функцій із $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$ і $W^1_1(\Omega)$, для яких скінченні відповідні величини

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)}=\sum_{i=1}^n\Big(\int_\Omega\mu_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx\Big)^{\frac{1}{\beta}},\quad \|u\|_{W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)}=\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)}+\|u\|_{L_1(\Omega)}$$

Вимагатимемо, щоб для будь-якої функції $u(x)\in W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ виконувалась нерівність

$$\int_\Omega|u_x|\,dx\le c\sum_{i=1}^n\Big(\int_\Omega\mu_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx\Big)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Зауважимо, що ця нерівність виконується, коли $\mu_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(\Omega)$, $t_i(\beta-1)\ge1$. Можна показати [5], що $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ і $W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ – повні нормовані простори.

Лема. Нехай функції $\lambda_i(x)\ge0$, $\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(K_z)$, $K_z=x:|x_i|<z$, $i=1,\dots,n)$, $t_i\ge1$, а числа β, t_i задовольняють умови $t_i(\beta-1)\ge1$, $n+\sum_{i=1}^n t_i^{-1}>\beta>1$. Тоді, якщо $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda,K_z)$, то справедлива оцінка

$$\Big(z^{-n}\int_{K_z}|u|^{k\beta}dx\Big)^{\frac{1}{k}}\le c\prod_{i=1}^n\Big(z^{-n}\int_{K_z}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^n z^{-n+\beta}\int_{K_z}\lambda_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx,$$

де $\quad k\le n\big(n-\beta+\sum_{i=1}^n t_i^{-1}\big)^{-1},\quad c=c(n,t_i,\beta).$

Твердження леми випливає із теореми про вкладання простору $\overset{\circ}{W}{}^1_{\bar\gamma}(K_z)$, $\bar\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ в $L_p(K_z)$ з застосуванням нерівності Гельдера.

Розглянемо рівняння (1) в області Ω. Припустимо, що функції $A(x,u,\bar p)=(A_1(x,u,\bar p),\dots,A_n(x,u,\bar p))$, $B(x,u,\bar p)$, $\bar p=(p_1,\dots,p_n)$, визначені для всіх значень u , $\bar{p}$ і $x \in \Omega$, а також, що $A(x, u, u_x)$, $B(x, u, u_x)$ вимірні при довільній функції $u(x) \in W_1^1(\Omega)$. Нехай для будь-яких u , $\bar{p}$ і $x \in \Omega$ виконуються нерівності

$$A(x,u,\bar{p})\bar{p} \geq a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|p_i|^{\beta} - d(x)|u|^{\beta} - g(x),$$

$$|B(x,u,\bar{p})| \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(x)|p_i|^{\beta-1} + \omega(x)|u|^{\beta-1} + f(x),$$

$$|A(x,u,\bar{p})| \leq a_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)|p_i|^{\beta-1} + b(x)|u|^{\beta-1} + \ell(x), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-\frac{1}{\beta-1}}(x)|A_i(x,u,\bar{p})|^{\frac{\beta}{\beta-1}} \leq a_3 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)|p_i|^{\beta} + b_0(x)|u|^{\beta} + \ell_0(x),$$

де a_1 , a_2 , a_3 - додатні константи; $\lambda_i(x) \leq \mu_i(x)$, $d(x)$, $g(x)$, $c_i(x)$, $\omega(x)$, $f(x)$, $b(x)$, $\ell(x)$, $b_0(x)$, $\ell_0(x)$ - невід'ємні функції;

$$\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega),\ t_i \geq 1;\ \ d(x),\ g(x),\ \omega(x),\ f(x),\ c_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x),$$

$$\lambda_i^{1-\beta}(x)\mu_i^{\beta}(x),\ b^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x),\ \ell^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x),\ b_0(x),\ \ell_0(x), \tag{3}$$

належать $L_s(\Omega)$, $s \geq 1$, причому числа β , t_i , s задовольняють нерівності

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < \frac{\beta}{n}, \quad n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} > \beta > 1, \quad t_i(\beta-1) \geq 1.$$

Зауважимо, що дві останні нерівності в (2) виконуються, коли

$$|A_i(x,u,\bar{p})| \leq a_2\mu_i(x)|p_i|^{\beta-1} + b(x)|u|^{\beta-1} + \ell(x).$$

О з н а ч е н н я. Функція $u(x) \in W_{\beta}^{1}(\bar{\mu}, \Omega)$ називається узагальненим розв'язком рівняння (1) в області Ω за умов (2), (3), якщо для довільної функції $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_{\beta}^{1}(\bar{\mu}, \Omega)$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} (A\varphi_x + B\varphi)\,dx = 0. \tag{4}$$

Т е о р е м а. Нехай $u(x)$ – узагальнений розв'язок рівняння (I) в кубі K_{2r} (число r – достатньо мале). Тоді

$$\operatorname*{vraimax}_{K_r} |u|^{\beta} \le C\left[M(2r)P(2r) + r^{\frac{\theta}{s}}\right]^{\frac{m}{m-1}} \left[\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{2r}} |u|^{s'\beta}dx\Big)^{\frac{1}{s'}} + \varkappa^{\beta}(2r)\right], \tag{5}$$

де $\theta = n\left(\frac{\beta}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right) > 0$, $m = \frac{k}{s'} > 1$, $k \le n\left(n-\beta+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}$,

$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$,

$$M(\rho) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\rho^{-n}\int\limits_{K_\rho}\big(\mu_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x)\big)^{s}dx\Big)^{\frac{1}{s}}, \quad P(\rho) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\rho^{-n}\int\limits_{K_\rho}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}},$$

$$\varkappa(\rho) = \left(\rho^{\frac{\theta}{4}}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\ell^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)}{\mu_i^{\frac{1}{\beta-1}}(x)}\right\|_{L_s(K_\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\rho^{\frac{\theta}{4}}\|f(x)\|_{L_s(K_\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} + \left(\rho^{\frac{\theta}{4}}\|g(x)\|_{L_s(K_\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$C = C(a_1, a_2, n, \beta, t_i, s)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\bar{u} = |u| + \varkappa$, $\varkappa = \varkappa(2r)$. Для фіксованих чисел $q \ge 1$ і $\ell > \varkappa$ визначимо функції

$$v = F(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^{q}, & \varkappa \le \bar{u} \le \ell, \\ q\ell^{q-1}\bar{u} - (q-1)\ell^{q}, & \ell \le \bar{u}, \end{cases}$$

$$G(u) = \left[F(\bar{u})(F'(\bar{u}))^{\beta-1} + q^{\beta-1}\varkappa^{\beta q-\beta+1}\right]\operatorname{sign} u, \quad -\infty < u < +\infty$$

Приймемо, що $\varphi(x) = \eta^{\beta}G(u)$ де $\eta = \prod\limits_{i=1}^{n}\eta_{\rho,\sigma}(|x_i|)$, $\eta_{\rho,\sigma}(|x_i|)$ дорівнює одиниці при $|x_i| \le \rho$, нулю при $|x_i| \ge \rho+\sigma$, лінійне при $\rho < |x_i| < \rho+\sigma$. Майже всюди в K_{2r} $\varphi_x = \beta\eta^{\beta-1}\eta_x G(u) + \eta^{\beta}G'(u)u_x$.

Для функцій $F(\bar{u})$ і $G(u)$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} &|G(u)| \le F(\bar{u})(F'(\bar{u}))^{\beta-1}, \quad \bar{u}F'(\bar{u}) \le qF(\bar{u}), \\ &(F'(\bar{u}))^{\beta} \le G'(u) \le \frac{\beta q-\beta+1}{q}(F'(\bar{u}))^{\beta} \end{aligned} \tag{6}$$

Підставимо функцію $\varphi(x)$ в (4) і врахуємо нерівності (6). Тоді

$$
\begin{aligned}
a_1\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|(\varrho v)_{x_i}|^{\beta}dx &\le (a_1+a_0\beta)\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)|\varrho_x v|\,dx+\\
&+q^{\beta-1}\int\limits_{K_{2r}}\overline{\omega}(x)|\varrho v|^{\beta}dx+\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}c_i(x)|\varrho v_{x_i}|^{\beta-1}|\varrho v|\,dx+\\
&+\beta q^{\beta}\int\limits_{K_{2r}}\overline{d}(x)|\varrho v|^{\beta}dx+\int\limits_{K_{2r}}\overline{b}(x)|\varrho_x v||\varrho v|^{\beta-1}dx,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

де

$$
\overline{d}(x)=d(x)+\varkappa^{-\beta}g(x),\quad \overline{\omega}(x)=\omega(x)+\varkappa^{1-\beta}f(x),\quad \overline{b}(x)=b(x)+\varkappa^{1-\beta}e(x).
$$

У правій частині (7) застосуємо нерівність Юнга, потім ліву частину одержаної нерівності, оцінимо за лемою; в результаті одержимо оцінку

$$
\begin{aligned}
\Big(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}|v|^{k\beta}dx\Big)^{\frac{1}{k}} &\le Cq^{\beta}\Big\{\Big(\frac{r}{\sigma}\Big)^{\beta}P(2r)M(2r)+r^{\theta}\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}\cdot\\
&\cdot\Big[\Big(\int\limits_{K_{2r}}d^{s}(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}}+\Big(\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{c_i^{\beta}(x)}{\lambda_i^{\beta-1}(x)}\Big)^{s}dx\Big)^{\frac{1}{s}}+\Big(\int\limits_{K_{2r}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)}{\mu_i^{\frac{1}{\beta-1}}(x)}\Big)^{s}dx\Big)^{\frac{1}{s}}+\Big(\int\limits_{K_{2r}}\omega^{s}(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}}\Big]+\\
&+r^{\theta}\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}r^{\frac{\theta}{n}}\Big\}\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}|v|^{s'\beta}dx\Big)^{\frac{1}{s'}}.
\end{aligned}
$$

Перейдемо до границі у цій нерівності при $\ell\to\infty$ і врахуємо, що r – достатньо мале. Тоді

$$
\Big(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}(\overline{v}^{\beta})^{k\beta}dx\Big)^{\frac{1}{k}}\le Cq^{\beta}\Big(\frac{r}{\sigma}\Big)^{\beta}\Big[P(2r)M(2r)+r^{\frac{\theta}{n}}\Big]\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}(\overline{v}^{\beta})^{s'\beta}dx\Big)^{\frac{1}{s'}}
$$

Позначимо $z=\overline{v}^{\,\beta}$, $m=\frac{k}{s'}>1$, $qs'=p$. У цих позначеннях остання нерівність має вигляд

$$
\Big(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}z^{mp}dx\Big)^{\frac{1}{mp}}\le C^{\frac{s'}{p}}\Big(\frac{p}{s'}\Big)^{\frac{\beta s'}{p}}\Big(\frac{r}{\sigma}\Big)^{\frac{\beta s'}{p}}\Big[P(2r)M(2r)+r^{\frac{\theta}{n}}\Big]^{\frac{s'}{p}}\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}z^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}}
$$

Приймемо

$$p = s'm^{\nu}, \ \nu = 0, 1, 2, \dots, \ \rho + \sigma = \rho_{\nu} = (1 + 2^{-\nu}) r, \ \ \rho = \rho_{\nu+1},$$

$$\textcircled{H}_{\nu} = \Big(r^{-n} \int\limits_{K_{\rho_\nu}} z^{s'm^{\nu}} dx \Big)^{\frac{1}{s'm^{\nu}}} .$$

Тоді

$$\textcircled{H}_{\nu+1} \leq C^{\frac{\nu+1}{m^{\nu}}} \Big[P(2r) M(2r) + r^{\frac{\beta}{2}} \Big]^{\frac{1}{m^{\nu}}} \textcircled{H}_{\nu} \leq$$

$$\leq C^{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu+1}{m^{\nu}}} \Big[P(2r) M(2r) + r^{\frac{\beta}{2}} \Big]^{\frac{m}{m-1}} \Big(r^{-n} \int\limits_{K_{2r}} z^{s'} dx \Big)^{\frac{1}{s'}} .$$

Спрямувавши ν до ∞ і вертаючись до функції $u(x)$, одержимо оцінку (5).

Література

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.

2. Кружков С. Н. Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений. - ДАН СССР, 1963, т. 150, № 4.

3. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. - "Математический сборник", 1964, т. 65, № 4.

4. Кружков С. Н. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1963, т. 150, № 3.

5. Кружков С. Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. - "Математический сборник", 1968, т. 77, № 3.

6. Moser J. A new proof of the Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.- „Comm. Pure Appl. Math," 1960, v. 13, N3.

7. Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equations. - „Acta Math.", 1964, v. 111, N3-4.