УДК 517.946

І.М.Колодій

ЛОКАЛЬНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ГЕЛЬДЕРОМ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У цій роботі розглядаються еліптичні рівняння з виродженням виду

$$\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x),$$
$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad u_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \tag{1}$$
$$A(x, u, u_x) = (A_1(x, u, u_x), \dots, A_n(x, u, u_x)),$$

в обмеженій області Ω n-мірного евклідового простору E^n. Вивчаються якісні властивості узагальнених розв'язків (узагальнені розв'язки в розумінні інтегральної тотожності).

Відомо [1], [2], що узагальнений розв'язок рівняння (1), *a priori* лише з простору С.Л.Соболева, при відповідних припущеннях на функції, що характеризують рівняння, локально обмежений. При додаткових умовах узагальнений розв'язок буде неперервний за Гельдером. Для узагальнених розв'язків можна доводити нерівність Харнкака, теореми типу Ліувілля, теореми про усувну особливість, аналогічні відповідним теоремам для гармонічних функцій. У цій статті установлена локальна оцінка модуля неперервності узагальненого розв'язку, тобто доведено, що узагальнений розв'язок неперервний за Гельдером у точці. Результат нашої роботи анонсований в [1].

Нехай K_r – куб $(x : |x_i| < r,\ i = 1, \dots, n)$; $\bar{\mu} = \bar{\mu}(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$, $\mu_i(x)$ – невід'ємні вимірні функції в Ω; $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar{\mu}, \Omega)$ $W^1_\beta(\bar{\mu}, \Omega)$ – повні нормовані простори (означення див. у [1]).

Л е м а 1. Нехай функції $\lambda_i(x) \geq 0$, $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_r)$, $t_i \geq 1$, а числа t_i, β задовольняють умови $t_i(\beta - 1) \geq 1$, $n + \sum_{i=1}^{n} t_i^{-1} > \beta > 1$. Тоді:

1) якщо $u(x) \in W_\beta^1(\bar\lambda, K_r)$ і $\sum_{i=1}^n t_i^{-1} - n t_j^{-1} < \beta$, $j=1,\dots,n$,

то має місце нерівність

$$\Big(r^{-n}\int_{K_r}|u|^{k\beta}dx\Big)^{\frac{1}{k}} \le C\Big[\sum_{i=1}^n\Big(r^{-n}\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}}\sum_{i=1}^n r^{-n+\beta}\int_{K_r}\lambda_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx + \Big(r^{-n}\int_N|u|dx\Big)^\beta\Big],$$

де $1 \le k \le n\big(n-\beta+\sum_{i=1}^n t_i^{-1}\big)^{-1}$, $\operatorname{mes} N \ge C_0 \operatorname{mes} K_r$, $C_0 > 0$, $C = C(n, t_i, \beta, C_0)$

2) якщо $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_\beta^1(\bar\lambda, K_r)$, $\Lambda(x) \in L_s(K_r)$, $\Lambda(x) \ge 0$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \le \frac{\beta}{n}$,

$s \ge 1$, то має місце оцінка

$$\int_{K_r}\Lambda(x)|u|^\beta dx \le Cr^\theta \prod_{i=1}^n\Big(\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}\Big(\int_{K_r}\Lambda^s(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}}\sum_{i=1}^n\int_{K_r}\lambda_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx,$$

де

$$\theta = n\Big(\frac{\beta}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{t_i}\Big) \ge 0, \qquad C = C(n, t_i, \beta).$$

Твердження леми 1 випливають із теорем про вкладання просторів $W_{\bar r}^1(K_r)$ і $\overset{\circ}{W}{}_{\bar r}^1(K_r)$, $\bar r = (r_1,\dots,r_n)$, в $L_p(K_r)$ з застосуванням нерівності Гельдера.

Зважаючи на те, що теорема про локальну обмеженість узагальнених розв'язків рівняння (1) доведена, можна вважати, що в кубі K_{r_0} (r_0 - достатньо мале) $\operatorname{vrai\,max}_{K_{r_0}}|u| = M_0$, $A = A(x, u_x)$, $B = B(x, u_x)$, причому $A(x,\bar p)$, $B(x,\bar p)$, $\bar p = (p_1,\dots,p_n)$ задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned}
&A(x,p)\bar p \ge a_1\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)|p_i|^\beta - g(x),\\
&|B(x,\bar p)| \le \sum_{i=1}^n c_i(x)|p_i|^{\beta-1} + f(x),\\
&|A(x,\bar p)| \le a_2\sum_{i=1}^n \mu_i(x)|p_i|^{\beta-1} + l(x),\\
&\sum_{i=1}^n \mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)\,|A_i(x,\bar p)|^{\frac{\beta}{\beta-1}} \le a_3\sum_{i=1}^n \mu_i(x)|p_i|^\beta + l_0(x),
\end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta \ge 2$ (або $g(x)=0$) з тими ж умовами на коефіцієнти, що і в роботі [2].

Лема 2 (основна). Нехай $U(x)$ – узагальнений розв'язок рівняння (2), в кубі K_r, $r \le r_0$, а $\varkappa$ така додатна константа, що

$$H(\rho)=P(\rho)M(\rho)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\rho^{-n}\int_{K_\rho}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\rho^{-n}\int_{K_\rho}\mu_i^{s}(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}}\le\varkappa,$$

при будь-якому $\rho\in(0,r_0]$. Тоді або $osc(u,K_{\frac{r}{4}})\le cr^{\gamma}$, $\gamma=\theta(4\beta)^{-1}$, $C=C(n,s,\beta,t_i,a_1,a_2,M_0)$, або $osc(u,K_{\frac{r}{4}})\le\zeta\, osc(u,K_{\frac{r}{2}})$, де константа $\zeta=\zeta(n,\beta,a_1,a_2,s,t_i,\varkappa,M_0)\in(0,1)$.

Доведення. Можна вважати, що $\underset{K_r}{vraimax}(\pm u)=M$. Можливі лише два випадки: $M<r^{\gamma}$, або $M\ge r^{\gamma}>0$. У першому випадку $osc(u,K_{\frac{r}{4}})\le osc(u,K_r)=2M<2r^{\gamma}$. У другому випадку буде показано, що при $r^{\gamma}\le c$, де c – достатньо мале, існує константа $\zeta=\zeta(n,\beta,a_1,a_2,t_i,s,\varkappa)\in(0,1)$, що $osc(u,K_{\frac{r}{4}})\le\zeta\, osc(u,K_r)$. Якщо ж $r^{\gamma}>c$, то $osc(u,K_{\frac{r}{4}})\le 2M_0<2M_0c^{-1}r^{\gamma}$. Отже, досить розглянути випадок $M\ge r^{\gamma}>0$ при $r^{\gamma}\le c$. Позначимо через v ту із функцій $1\pm uM^{-1}$, яка не менша від одиниці на множині $N\subset K_r$, міра якої не менша від $\frac{1}{2}mes K_r$. Легко бачити, що в кубі K_r функція $v(x)$ є узагальненим розв'язком рівняння

$$div\,\widetilde{A}(x,v_x)=\widetilde{B}(x,v_x), \tag{3}$$

де функції $\widetilde{A}(x,v_x)=M^{1-\beta}(\pm A(x,\pm Mv_x))$, $\widetilde{B}(x,v_x)=M^{1-\beta}(\pm B(x,\pm Mv_x))$ задовольняють умовам (2), в яких функції $g(x)$, $f(x)$, $\ell(x)$, $\ell_0(x)$ замінено на функції $\widetilde{g}(x)=M^{-\beta}g(x)$, $\widetilde{f}(x)=M^{1-\beta}f(x)$, $\widetilde{\ell}(x)=M^{1-\beta}\ell(x)$, $\widetilde{\ell}_0(x)=M^{-\beta}\ell_0(x)$.

Інтегральна тотожність для рівняння (3) має вигляд

$$\int_{K_r}\big(\widetilde{A}(x,v_x)\varphi_x+\widetilde{B}(x,v_x)\varphi\big)dx=0, \tag{4}$$

для довільної функції $\varphi(x)\in\overset{0}{W}{}^{1}_{\beta}(\bar{\mu},K_r)$. Справедлива також лема з [4].

Л е м а 3. На півпрямій $v>0$ існує два рази неперервно диференційована функція $z(v)\geq 0$, що має такі властивості: а) $z''(v)\geq (z'(v))^2$, $z'(v)\leq 0$; б) $z(v)\sim \ln v$ при $v\to +0$; в) $z(v)=0$ при $v\geq 1$.

Для функції $w=z(v+\varepsilon)$ справедливі нерівності

$$\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|w_{x_i}|^{\beta}dx\leq C z^{n-\beta}M(z), \tag{5}$$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_{\frac{z}{4}}} w^{\beta}\leq C\left[1+H\left(\tfrac{z}{2}\right)\right]^{\frac{1}{m-1}}\left[\left(z^{-n}\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}} w^{k\beta}dx\right)^{\frac{1}{k}}+z^{\gamma}\right]. \tag{6}$$

Методика доведення оцінок (5), (6) близька до відповідної методики з роботи [3].

Оскільки $w=0$ на множині N, то з п. 1 леми 1 випливає, що

$$\left(z^{-n}\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}} w^{k\beta}dx\right)^{\frac{1}{k}}\leq C P\left(\tfrac{z}{2}\right) z^{-n+\beta}\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|w_{x_i}|^{\beta}dx. \tag{7}$$

Об'єднуючи оцінки (5)-(7), одержимо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_{\frac{z}{4}}} w^{\beta}\leq C\left[1+H\left(\tfrac{z}{2}\right)\right]^{\frac{1}{m-1}}\left[1+H(z)\right]\leq C\left(1+H(z)\right)^{\frac{m}{m-1}}\leq C(1+\varkappa)^{\frac{m}{m-1}}=C_1.$$

Отже, $z^{\beta}(v+\varepsilon)\leq C_1$ в $K_{\frac{z}{4}}$. Виберемо $\varepsilon=\varepsilon(n,\beta,t_i,s,a_1,a_2,\varkappa,M_0)\in(0,1)$ настільки малим, щоб $z^{\beta}(2\varepsilon)>C_1$. Зауважимо, що вибір $\varepsilon>0$ зроблено незалежно від z. Доведемо, що $v\geq\varepsilon$. Дійсно, якщо припустити протилежне, тобто $v<\varepsilon$, то внаслідок монотонності функції $z(v+\varepsilon)$: $z^{\beta}(2\varepsilon)<z^{\beta}(v+\varepsilon)\leq C_1$; одержане протиріччя показує, що $v\geq\varepsilon$ в кубі $K_{\frac{z}{4}}$. Звідси випливає [3] оцінка п. 2 леми 2. З леми 2 маємо наступну теорему [3], [4].

Т е о р е м а 1. Нехай $U(x)$ - узагальнений розв'язок рівняння (1), (2) в кубі K_z, $z\leq z_0$, а $\varkappa$ така додатна константа, що $H(\rho)\leq\varkappa$ для будь-якого $\rho\in(0,z_0]$. Тоді при $\alpha=\min\left(\gamma,\log_{\frac{1}{4}}\zeta\right)\in(0,1)$ і довільному $\rho\in(0,z_0]$ справедлива оцінка

$$osc(u, K_\rho) \le C(1+r_0^{\tau})\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\alpha},$$

де $C = C(n, \beta, a_1, a_2, S, t_i, \varkappa, M_0)$, тобто $u(x)$ задовольняє умові Гельдера в початку координат.

Література

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.

2. Колодій І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь. У цьому ж віснику.

3. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. - "Математический сборник", 1964, т. 65, № 4.

4. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. I, М., 1969.

УДК 517.946

Л.М.Макаренко, М.І.Іванчов

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Відомо, що фундаментальні розв'язки рівнянь $\Delta u = 0$ та $\Delta u - k^2 u = 0$ $(k = const > 0)$ відрізняються своєю поведінкою на нескінченності: перший прямує до нуля на нескінченності за степеневим законом, другий - за експоненціальним.

У цій роботі ми вивчаємо властивості фундаментального розв'язку рівняння

$$\Delta u - \frac{u}{|x|^{\alpha}} = 0, \qquad \alpha = const > 0, \tag{1}$$

в області, що не містить початок системи координат. Для визначеності рівняння (1) розглядатимемо в області $\Omega : \{|x| > 1,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\}$.

Означення фундаментального розв'язку рівняння (1) та його існуван-