$$osc(u, K_\rho) \leq C(1 + r_0^\gamma)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^\alpha,$$

де $C = C(n, \beta, a_1, a_2, S, t_i, \varkappa, M_0)$, тобто $u(x)$ задовольняє умові Гельдера в початку координат.

Література

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.

2. Колодій І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь. У цьому ж віснику.

3. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. - "Математический сборник", 1964, т. 65, № 4.

4. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. I, М., 1969.

УДК 517.946

Л.М.Макаренко, М.І.Іванчов

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Відомо, що фундаментальні розв'язки рівнянь $\Delta u = 0$ та $\Delta u - K^2 u = 0$ $(K = const > 0)$ відрізняються своєю поведінкою на нескінченності: перший прямує до нуля на нескінченності за степеневим законом, другий - за експоненціальним.

У цій роботі ми вивчаємо властивості фундаментального розв'язку рівняння

$$\Delta u - \frac{u}{|x|^\alpha} = 0, \qquad \alpha = const > 0, \tag{1}$$

в області, що не містить початок системи координат. Для визначеності рівняння (1) розглядатимемо в області $\Omega : \{|x| > 1,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\}$.

Означення фундаментального розв'язку рівняння (1) та його існування встановлено в [2]. Сформулюємо деякі властивості його фундаментального розв'язку.

Т е о р е м а 1. Фундаментальний розв'язок $G(x,y)$ рівняння (1) не є функцією тільки від $|x-y|$, $\left(|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}\right)$.

Д о в е д е н н я від супротивного.

Т е о р е м а 2. Функція $G(x,y)$ є симетричною, тобто

$$G(x,y)=G(y,x).$$

Д о в е д е н н я проводиться так само, як це зроблено в [2].

Для встановлення поведінки фундаментального розв'язку на нескінченності спочатку доведемо таку теорему.

Т е о р е м а 3. Рівняння (1) має розв'язок $\omega(x)$ з такою асимптотикою при великих r, $r=|x|$:

$$\omega(x)=\begin{cases} c r^{-\frac{n-1}{2}+\frac{\alpha}{4}} e^{-k r^{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(1+O\left(r^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\right), & k=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{коли} \quad \alpha<2, \\ c r^{-\frac{n-2}{2}-\frac{\sqrt{n^2-4n+8}}{2}}, & \text{коли} \quad \alpha=2, \\ c r^{-n+2}\left(1+O\left(r^{-\alpha+2}\right)\right), & c=const, \quad \text{коли} \quad \alpha>2. \end{cases}$$

Д о в е д е н н я. Розв'язок $\omega(x)$ рівняння (1) будемо шукати у вигляді $\omega=\omega(r)$, де $r=|x|$. Тоді для $\omega(r)$ одержимо рівняння

$$\omega''+\frac{n-1}{r}\omega'-\frac{\omega}{r^{\alpha}}=0. \tag{2}$$

Від змінних (r,ω) перейдемо до змінних (t,y) за формулами

$$t=\varphi(r), \qquad \omega(t)=a(t)y(t),$$

де

$$\varphi(r)=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}r^{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad a(t)=ct^{-\frac{\beta}{2}}, \quad \beta=\frac{n-1-\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Для нової невідомої функції $y(t)$ одержимо рівняння

$$y''-(1-\gamma t^{-2})y=0, \qquad \text{де} \qquad \gamma=\frac{(2n-2-\alpha)(6-2n-\alpha)}{4(2-\alpha)^2}. \tag{3}$$

Поведінка на нескінченності розв'язку рівняння (3) легко встановлюється за допомогою методу послідовних наближень, а звідси вже випливає твердження теореми у випадку $\alpha < 2$. Коли $\alpha = 2$, розв'язок $\omega(r)$ рівняння (2) виписується явно. У випадку $\alpha > 2$ спрощуємо рівняння (2) за допомогою заміни $\omega(r) = a(r) y(r)$, а потім з використанням методу послідовних наближень легко одержується потрібна оцінка.

Теорема 3 дає змогу оцінити поведінку на нескінченності фундаментального розв'язку рівняння (I).

Т е о р е м а 4. Для довільного $y_0 \in \Omega$ має місце оцінка

$$G(x,y_0) \leq C_0 |x|^{-\frac{n-1}{2}+\frac{\alpha}{4}} e^{-k|x|^{1-\frac{\alpha}{2}}}, \qquad \text{коли } \alpha < 2,$$

$$G(x,y_0) \leq C_0 |x|^{-\frac{n-2}{2}-\frac{\sqrt{n^2-4n+8}}{2}}, \qquad \text{коли } \alpha = 2,$$

$$G(x,y_0) \leq C_0 |x|^{-n+2}, \qquad \text{коли } \alpha > 2.$$

Для доведення досить скористатись теоремою 3 та результатами роботи [3].

Знайдені властивості фундаментального розв'язку рівняння (I) можна використати, зокрема, для уточнення теореми існування обмежених розв'язків задачі Діріхле для лінійних еліптичних рівнянь в необмежених областях [1]. Наприклад, умови існування обмеженого розв'язку задачі

$$\Delta u - \frac{u}{|x|^\alpha} = f(x), \qquad x \in \Omega,$$
$$u(x)|_S = \varphi(x)|_S,$$

де S – границя області Ω, у випадку $n=3$ мають вигляд

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^p}, \quad \text{де} \quad p = \begin{cases} 2+\frac{\alpha}{4}-\frac{2-\alpha}{2}\left(\left[\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right]+1\right), & \text{коли} \quad \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{5}-1), & \text{коли} \quad \alpha = 2, \\ 2+\varepsilon, \quad \varepsilon = const > 0, & \text{коли} \quad \alpha > 2, \end{cases}$$

При цьому припускаються виконаними умови гладкості функції f , φ і границі S .

Подібне дослідження властивостей фундаментального розв'язку та встановлення умов існування обмеженого розв'язку задачі Діріхле можна провести і для більш загальних еліптичних рівнянь другого порядку за такою ж схемою.

Література

1. Іванчов М. І. Про задачу Діріхле в необмежених областях. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1971, вип. 6.

2. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.

3. Meyers N. Serrin J. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations. J. of Math. and Mech., 1960, 9, N4.

УДК 513.88

О.Г.Сторож

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ОПЕРАТОРІВ, СПОРІДНЕНИХ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ

Нехай $l[y]$ - диференціальний вираз

$$l[y] = y^{(n)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y, \quad (1)$$

де коефіцієнти $p_2(x), \ldots p_n(x)$ - сумовані на інтервалі $[0; 1]$, а

$$U_\nu = U_{\nu 0} + U_{\nu 1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots 2n,$$

де

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(0), \quad (2)$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(1), \quad (3)$$

причому $n-1 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0; \quad n-1 \geqslant k_{n+1} \geqslant \ldots \geqslant k_{2n} \geqslant 0$

$k_{\nu+2} < k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots n-2, n+1, \ldots 2n; \quad |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0, \ \nu = 1, \ldots 2n,$