При цьому припускаються виконаними умови гладкості функції f, φ і границі S.

Подібне дослідження властивостей фундаментального розв'язку та встановлення умов існування обмеженого розв'язку задачі Діріхле можна провести і для більш загальних еліптичних рівнянь другого порядку за такою ж схемою.

Література

1. Іванчов М. І. Про задачу Діріхле в необмежених областях. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1971, вип. 6.
2. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
3. Meyers N. Serrin J. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations. J. of Math. and Mech., 1960, 9, N4.

УДК 513.88

О.Г.Сторож

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ОПЕРАТОРІВ, СПОРІДНЕНИХ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ

Нехай $\ell[y]$ - диференціальний вираз

$$\ell[y] = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y, \tag{1}$$

де коефіцієнти $p_2(x), \ldots p_n(x)$ - сумовані на інтервалі $[0; 1]$, а

$$U_\nu = U_{\nu 0} + U_{\nu 1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots 2n,$$

де

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(0), \tag{2}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(1), \tag{3}$$

причому $n-1 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0; \quad n-1 \geqslant k_{n+1} \geqslant \ldots \geqslant k_{2n} \geqslant 0$

$k_{\nu+2} < k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots n-2, n+1, \ldots 2n; \quad |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0, \ \nu = 1, \ldots 2n,$

а крайові форми $U_1, \dots U_n$ – лінійно незалежні. Нехай тепер $\varphi_1 \dots \varphi_{2n}$, $\chi_1, \dots \chi_p$, $\psi_1, \dots \psi_p$ – деякі функції в $L_2(0,1)$.

Визначимо оператор T умовами $D(T)=\{y\in L_2(0,1): y, y', \dots y^{(n-1)}$ – абсолютно неперервні

$$\ell[y]\in L_2(0,1),\ U_\nu(y)=\int_0^1 y\overline{\varphi}_\nu\,dx,\ \nu=1,\dots n\}, \tag{4}$$

$$Ty=t[y]\overset{df}{=}\ell[y]+\sum_{\nu=n+1}^{2n}U_\nu(y)\varphi_\nu+\sum_{q=1}^{p}\Big(\int_0^1 y\overline{\psi}_q\,dx\Big)\chi_q,\ y\in D(T). \tag{5}$$

T -оператор, споріднений до диференціальних, породжених виразом $\ell[y]$ [1]. У цій статті виводяться асимптотичні формули для власних значень і власних функцій оператора T у випадку $n=2\mu$.

Розглянемо комплексну площину C. Нехай $\lambda\in C$. Приймемо $\lambda=-\rho^n$.

Розділимо всю комплексну ρ -площину на $2n$ сектори S_k $k=0,1,\dots 2n-1$, що визначаються нерівностями

$$\frac{k\pi}{n}\le \arg\rho\le\frac{(k+1)\pi}{n}.$$

Через T_k позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho=-c$), який утворюється з S_k зсувом $\rho\to\rho+c$ ($c\in C$). Надалі вважатимемо, що ρ міститься в деякій фіксованій області $T_k\subset C$. Нехай $\omega_1, \dots \omega_n$ - всі різні корені степеня n з числа -1, занумеровані так, що

$$Re((\rho+c)\omega_1)\le Re((\rho+c)\omega_2)\le\dots\le Re((\rho+c)\omega_n),\ \forall\rho\in T_k.$$

Це можливо (див. [2]).

Спочатку виведемо асимптотичні формули для розв'язків рівняння

$$t[y]+\rho^n y=0. \tag{6}$$

Воно розв'язується так. Введемо позначення

$$\begin{cases} U_\nu(y)=a_{\nu-n}, & \nu=n+1,\dots 2n,\\ \int_0^1 y\overline{\psi}_q\,dx=a_{n+q}, & q=1,\dots p. \end{cases} \tag{7}$$

Рівняння (6) після підстановки в нього співвідношень (7) перетворюється в неоднорідне диференціальне рівняння, розв'язок якого залежить від постійних $a_1, \dots, a_{n+p}$, від яких позбуваємось, враховуючи (7). Тепер, використовуючи асимптотичні формули для розв'язків рівняння

$\ell[y]+\rho^n y=0$ і лему Рімана-Лебега, одержуємо теорему I.

Теорема 1. Рівняння $t[y]+\rho^n y=0$ при досить великих ρ має n лінійно незалежних розв'язків $y_1,\dots,y_n$, які разом з їхніми похідними до порядку $n-1$ виражаються формулами

$$\begin{cases} y_i^{(k)}=(\rho\omega_i)^k\left[e^{\rho\omega_i t}+O(1)\right], & i=1,\dots\mu, \\ y_i^{(k)}=(\rho\omega_i)^k\left[e^{\rho\omega_i t}+e^{\rho\omega_i}O(1)\right], & i=\mu+1,\dots n, \end{cases} \tag{8}$$

де $n=2\mu$, а ρ належить деякій фіксованій області $T_k\subset C$. Причому всі вирази $O(1)$, що фігурують у (8) аналітичні по ρ і при $\rho\to\infty$ прямують до нуля рівномірно по t.

Введемо позначення

$$\gamma_{\nu i}\overset{\text{df}}{=}U_\nu(y_i)-\int_0^1 y_i\bar{\varphi}_\nu\,dx. \tag{9}$$

Власні числа оператора T, очевидно, корені рівняння

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ & \cdots & \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Але з формул (8) і леми Рімана-Лебега випливають такі оцінки:

$$\gamma_{\nu i}=\begin{cases} (\rho\omega_i)^{k_\nu}(\alpha_\nu+O(1)), & i=1,\dots\mu-1, \\ (\rho\omega_i)^{k_\nu}\left[(\alpha_\nu+O(1))+e^{\rho\omega_i}(\beta_\nu+O(1))\right], & i=\mu,\ \mu+1, \\ (\rho\omega_i)^{k_\nu}e^{\rho\omega_i}(\beta_\nu+O(1)), & i=\mu+2,\dots n. \end{cases} \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (10), одержимо рівняння для знаходження власних чисел оператора Γ, яке за формою абсолютно збігається з рівнянням для знаходження власних значень деякого диференціального оператора, яке розв'язано в [2]. Використовуючи викладену там методику, яка базується на теоремі Руше, дістаємо такий результат.

Теорема 2. Означимо числа θ_{-1}, θ_0, θ_1 так:

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} \ldots \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1}, & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1}, & (\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1)\omega_{\mu+1}^{k_1}, & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1}, \ldots & \beta_1\omega_n^{k_n} \\ \cdot & & & & \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} \ldots \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n}, & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n}, & (\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n)\omega_{\mu+1}^{k_n}, & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n}, \ldots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

де $\omega_1, \ldots \omega_n$ - всі різні корені степеня n з -1, занумеровані так, що $Re(\rho\omega_1) \leq \ldots \leq Re(\rho\omega_n)$, $\forall \rho \in S_0$. Нехай $\theta_{-1} \neq 0$, $\theta_1 \neq 0$. Тоді власні значення оператора T при досить великих $|\lambda|$ утворюють дві нескінченні послідовності λ'_k, λ''_k, $k = N, N+1, \ldots$, де N - ціле число

$$\begin{aligned} \lambda'_k &= (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + o(1) \right], \\ \lambda''_k &= (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + o(1) \right], \end{aligned} \qquad (12)$$

де [illegible] $= 2\mu$, а ξ', ξ'' - корені рівняння $\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0$,

$\ln_0 \xi$ означає яке-небудь фіксоване значення натурального логарифма, верхній знак у формулах (12) відповідає парному, а нижній - непарному μ. У випадку $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$ всі власні значення, починаючи з деякого, прості, у випадку $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} = 0$, починаючи з деякого, прості або двократні.

Для простоти розглянемо тільки прості власні значення оператора T. Для них ранг матриці $(\gamma_{\nu i})$ дорівнює $n-1$. Нехай, наприклад, не всі мінори елементів першого рядка визначника цієї матриці дорівнюють нулю. Тоді власна функція y виражається так:

$$y = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots\ldots & y_n \\ \gamma_{21} & \ldots\ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \ldots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Підставляючи в (13) замість y_i, $\gamma_{\nu i}$ їхні значення (8) та (11), а замість $\rho - \rho'_k$ (де $\rho'^{\,n}_k = -\lambda'_k$), одержимо

$$\tilde{y}_k = \begin{vmatrix} e^{\rho'_k\omega_1 t}[1]\dots e^{\rho'_k\omega_{\mu-1}t}[1],\ e^{\rho'_k\omega_\mu t}[1], & e^{-\rho'_k\omega_\mu t}[1],\ e^{\rho'_k\omega_{\mu+2}(t-1)}[1]\dots e^{\rho'_k\omega_n(t-1)}[1] \\ \omega_1^{k_2}[\alpha_2]\dots\omega_{\mu-1}^{k_2}[\alpha_2],\ \omega_\mu^{k_2}([\alpha_2]+\xi'[\beta_2]), & \omega_{\mu+1}^{k_2}([\alpha_2]+\frac{1}{\xi'}[\beta_2]),\ \omega_{\mu+2}^{k_2}[\beta_2],\dots\omega_n^{k_n}[\beta_n] \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \omega_1^{k_n}[\alpha_n]\dots\omega_{\mu-1}^{k_n}[\alpha_n],\ \omega_\mu^{k_n}([\alpha_n]+\xi'[\beta_n]), & \omega_{\mu+1}^{k_n}([\alpha_n]+\frac{1}{\xi'}[\beta_n]),\ \omega_{\mu+2}^{k_n}[\beta_n],\dots\omega_n^{k_n}[\beta_n] \end{vmatrix} + o(1), \qquad (14)$$

де $[a] \overset{df}{=} a + o(1)$ і $\tilde{y}_k$ - власна функція, що відповідає власному значенню $\lambda = \lambda'_k$, а $\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i)$, $k = 1, 2, \dots$ (за умови, що у випадку $n = 4q$ береться верхній знак, а при $n = 4q + 2$ - нижній). Формула для власної функції y''_k, що відповідає значенню $\lambda = \lambda''_k$, одержується, якщо в (14) замінити ξ' на ξ'' (зокрема ρ'_k заміниться на $\rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i$). Аналогічні результати мають місце і для непарного n.

Література

1. Л я н ц е В. Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. - "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", 1972, вып. 16.

2. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., "Наука", 1969.

УДК 517.913

Г.С.Костенко

ЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, ІНТЕГРОВАНІ В ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Нехай

$$Uf = \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (1)$$

інфінітезімальний оператор шуканої групи перетворень, відносно якої рівняння