Підставляючи в (13) замість y_i, $\gamma_{\nu i}$ їхні значення (8) та (11), а замість $\rho - \rho'_k$ (де $\rho_k'^{\,n} = -\lambda'_k$), одержимо

$$\tilde{y}_k = \begin{vmatrix} e^{\rho'_k \omega_1 t}[1] \dots e^{\rho'_k \omega_{\mu-1} t}[1], e^{\rho'_k \omega_\mu t}[1], & e^{-\rho'_k \omega_\mu t}[1], e^{\rho'_k \omega_{\mu+2}(t-1)}[1] \dots e^{\rho'_k \omega_n (t-1)}[1] \\ \omega_1^{k_2}[\alpha_2] \dots \omega_{\mu-1}^{k_2}[\alpha_2], \omega_\mu^{k_2}([\alpha_2] + \xi'[\beta_2]), & \omega_{\mu+1}^{k_2}([\alpha_2] + \frac{1}{\xi'}[\beta_2]), \omega_{\mu+2}^{k_2}[\beta_2], \dots \omega_n^{k_n}[\beta_n] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \omega_1^{k_n}[\alpha_n] \dots \omega_{\mu-1}^{k_n}[\alpha_n], \omega_\mu^{k_n}([\alpha_n] + \xi'[\beta_n]), & \omega_{\mu+1}^{k_n}([\alpha_n] + \frac{1}{\xi'}[\beta_n]), \omega_{\mu+2}^{k_n}[\beta_n], \dots \omega_n^{k_n}[\beta_n] \end{vmatrix} + O(1), \quad (14)$$

де $[a] \overset{df}{=} a + O(1)$ і $\tilde{y}_k$ – власна функція, що відповідає власному значенню $\lambda = \lambda'_k$, а $\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i)$, $k = 1, 2, \dots$ (за умови, що у випадку $n = 4q$ береться верхній знак, а при $n = 4q + 2$ – нижній). Формула для власної функції y''_k, що відповідає значенню $\lambda = \lambda''_k$, одержується, якщо в (14) замінити ξ' на ξ'' (зокрема ρ'_k заміниться на $\rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i)$). Аналогічні результати мають місце і для непарного n.

Література

1. Янцо В. Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. – "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", 1972, вып. 16.

2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., "Наука", 1969.

УДК 517.913

Г.С.Костенко

ЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, ІНТЕГРОВАНІ В ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Нехай

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (1)$$

інфінітезімальний оператор шуканої групи перетворень, відносно якої рівняння

$$y^{(IV)}+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0 \tag{2}$$

інваріантне. Тоді для $\xi(x,y)$ і $\eta(x,y)$ аналогічно як і в [1] одержуємо систему рівнянь в частинних похідних

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0,\qquad 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0,$$

$$3\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y}-2\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}+A\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{A'}{2}\xi=0, \tag{3}$$

$$4\frac{\partial^4\eta}{\partial x^3\partial y}-\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+2A\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}-A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+3B\frac{\partial\xi}{\partial x}+B'\xi=0,$$

$$\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+A\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+B\frac{\partial\eta}{\partial x}-Cy\frac{\partial\eta}{\partial y}+4Cy\frac{\partial\xi}{\partial x}+C\eta+C'y\xi=0,$$

звідки

$$\xi(x,y)=\xi(x),\quad \eta(x,y)=\left(\tfrac{3}{2}\xi'(x)+\alpha_0\right)y+\eta_0(x),$$

причому $\xi(x)$ повинна задовольняти систему рівнянь

$$\begin{aligned}&5\xi'''+2A\xi'+A'\xi=0,\\&5\xi^{(IV)}+2A\xi''+3B\xi'+B'\xi=0,\\&3\xi^{(V)}+3A\xi'''+3B\xi''+8C\xi'+2C'\xi=0,\end{aligned} \tag{4}$$

і необхідно, щоб $\eta_0(x)$ була розв'язком рівняння (2), у зв'язку з чим природно її прийняти рівною нулеві.

Система (4) з довільно заданими $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$, взагалі кажучи, несумісна. Щоб знайти умови на коефіцієнти $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$ за виконання яких система (4) буде сумісною, досить останню розв'язати як систему рівнянь першого порядку відносно A, B, C з довільно заданою достатньо неперервно диференційованою функцією $\xi(x)$. У результаті одержимо

$$A(x)=\xi^{-2}(x)\left(\mu-5\xi''(x)\xi(x)+\tfrac{5}{2}\xi'^2(x)\right),$$

$$B(x)=\xi^{-3}(x)\left(\lambda-2\mu\xi'(x)+10\xi''(x)\xi'(x)\xi(x)-5\xi'^3(x)-5\xi'''(x)\xi^2(x)\right), \tag{5}$$

$$C(x)=\xi^{-4}(x)\Big[\nu+\frac{3}{2}\mu\Big(\frac{3}{2}\xi'^2(x)-\xi''(x)\xi(x)\Big)-\frac{3}{2}\lambda\,\xi'(x)-$$

$$-\frac{3}{2}\Big(\xi^{(IV)}(x)\xi^3(x)-3\xi'''(x)\xi'(x)\xi^2(x)-\frac{7}{2}\xi''^2(x)\xi^2(x)+\frac{17}{2}\xi''(x)\xi'^2(x)\xi(x)-\frac{27}{8}\xi'^4(x)\Big)\Big],$$

де μ , λ , ν – довільні дійсні сталі.

Отже, якщо $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$ задовольняють умови (5), то $\xi(x)$ є розв'язком системи (4), а рівняння (2) інваріантне відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами

$$U_1 f=\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{3}{2}\xi'(x)y\frac{\partial f}{\partial y},\qquad U_2 f=y\frac{\partial f}{\partial y},\tag{6}$$

для яких дужка Пуассона $(U_1 U_2)f=0$. Ця група перетворень має канонічну форму [3]

$$U_1 f=\frac{\partial f}{\partial \zeta},\qquad U_2 f=\frac{\partial f}{\partial \chi},\tag{6a}$$

причому

$$\chi=\ln\xi^{-\frac{3}{2}}(x)\,y,\qquad \zeta=\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau.\tag{7}$$

З змінних (7) рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), набирає вигляду

$$\frac{d^4\chi}{d\zeta^4}+4\frac{d^3\chi}{d\zeta^3}\frac{d\chi}{d\zeta}+3\Big(\frac{d^2\chi}{d\zeta^2}\Big)^2+6\frac{d^2\chi}{d\zeta^2}\Big(\frac{d\chi}{d\zeta}\Big)^2+\mu\frac{d^2\chi}{d\zeta^2}+\Big(\frac{d\chi}{d\zeta}\Big)^4+\mu\Big(\frac{d\chi}{d\zeta}\Big)^2+\lambda\frac{d\chi}{d\zeta}+\nu=0.\tag{8}$$

Приймаючи спочатку $\dfrac{d\chi}{d\zeta}=z$, а потім $\dfrac{dz}{d\zeta}=p$, з (8) одержимо рівняння

$$p^2\frac{d^2p}{dz^2}+p\frac{dp}{dz}+4pz\frac{dp}{dz}+3p^2+6z^2p+\mu p+z^4+\mu z^2+\lambda z+\nu=0,\tag{9}$$

розв'язки якого існують у формі

$$p=\alpha z^2+\beta z+\gamma,\tag{10}$$

якщо

$$\begin{gathered}6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1=0,\qquad \beta(2\alpha^2+3\alpha+1)=0,\\ 7\alpha\beta^2+8\alpha^2\gamma+14\alpha\gamma+7\beta^2+6\gamma+\mu(\alpha+1)=0,\\ \beta^3+8\alpha\beta\gamma+10\beta\gamma+\mu\beta+\lambda=0,\qquad 2\alpha\gamma^2+3\gamma^2+\beta^2\gamma+\mu\gamma+\nu=0.\end{gathered}\tag{11}$$

Остання система алгебраїчних рівнянь має такі розв'язки:

1) $\alpha=-1,\quad \gamma=-\frac{1}{2}\left(\beta^2+\mu+\frac{\lambda}{\beta}\right),$ де $\beta\neq 0$ – довільний корінь рівняння

$$\beta^6+2\mu\beta^4+(\mu^2-4\nu)\beta^2-\lambda^2=0; \tag{12}$$

2) $\alpha=-\frac{1}{2},\quad \gamma=-\frac{1}{2}(7\beta^2+\mu),$ де $\beta\neq 0$ – довільний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned}&20\beta^3+2\mu\beta-\lambda=0,\\ &21\beta^4+3\mu\beta^2+\nu=0;\end{aligned} \tag{13}$$

3) $\alpha=-\frac{1}{3},\quad \gamma=-\frac{3}{10}\mu,\quad \beta=0,$ якщо $\lambda=0$ і $\nu=\frac{9}{100}\mu^2$.

Розглянемо спочатку перший випадок. Нехай $\beta_{1,2}=\pm\beta_1$ – два дійсні корені рівняння (12), $\gamma_{1,2}=-\frac{1}{2}\left(\beta_1^2+\mu\pm\frac{\lambda}{\beta_1}\right)$ і $\alpha=-1$. Тоді (10) стане рівнянням з роздільними змінними

$$\frac{dz}{\left(z\mp\frac{\beta_1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu\pm\frac{\lambda}{\beta_1}\right)}=-d\zeta, \tag{10}$$

інтегруванням якого з врахуванням (7) і того, що $\chi=\int z\,d\zeta$, одержимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), фундаментальну систему розв'язків

$$\begin{aligned}&y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\cos a_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\sin a_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\\ &y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\cos a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\sin a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\end{aligned} \tag{14$_1$}$$

якщо

$$a_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\right)>0,\qquad a_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\right)>0;$$

$$\begin{aligned}&y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}+a_1\right)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right],\quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right],\\ &y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\cos a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\sin a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\end{aligned} \tag{14$_2$}$$

якщо

$$-a_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\right)<0,\qquad a_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\right)>0;$$

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{\beta_1}{2}+a_1\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big], \qquad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{\beta_1}{2}-a_1\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big],$$

$$(14_3)$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big], \qquad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[-\Big(\frac{\beta_1}{2}+a_2\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big],$$

якщо $-a_1^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)<0, \qquad -a_2^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)<0.$

У тому випадку, коли хоча б одне з чисел a_1, a_2 дорівнює нулеві, у формулах (14) ($k=1,2,3$) $y_i(x)$ ($i=1,2,3,4$) потрібно брати у вигляді

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big), \qquad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau, \quad (15_1)$$

якщо $a_1=0$;

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big), \qquad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau, \quad (15_2)$$

якщо $a_2=0$.

Нехай $\beta=p_1+iq_1$ – комплексний корінь рівняння (12). Тоді, використовуючи (10), аналогічно до попереднього одержимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big]\cos\Big(-\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau,$$

$$y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big]\cos\Big(\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau, \qquad (16)$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big]\sin\Big(-\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau,$$

$$y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau\Big]\sin\Big(\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau,$$

де

$$r=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_1^2-q_1^2}{2}+\mu+\frac{p_1\lambda}{p_1^2+q_1^2}\right)^2+q_1^2\left(p_1-\frac{\lambda}{p_1^2+q_1^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi=arctg\,\frac{2q_1[p_1(p_1^2+q_1^2)-\lambda]}{(p_1^2+q_1^2)(p_1^2-q_1^2)+2\mu(p_1^2+q_1^2)+2\lambda p_1}.$$

У другому випадку система (13) буде мати хоча б один спільний корінь, якщо її результат

$$\begin{vmatrix} 20 & 0 & 2\mu & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 2\mu & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 2\mu & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 2\mu & -\lambda \\ 21 & 0 & 3\mu & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 3\mu & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 3\mu & 0 & \nu \end{vmatrix}=0. \qquad (17)$$

Нехай $\beta_1\neq 0$ – дійсний розв'язок системи (13), $\gamma_1=-\frac{1}{2}(7\beta_1^2+\mu)$, $\alpha=-\frac{1}{2}$. Тоді, використовуючи (10), спочатку знаходимо (за виконання умов (5) і (17)) три лінійно незалежні розв'язки рівняння (2), що дає можливість (пониження порядку) знайти для цього рівняння і фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)exp\left(\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\cos\sqrt{6\beta_1^2+\mu}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)exp\left(\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\sin\sqrt{6\beta_1^2+\mu}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)exp\left(\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right),\qquad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)exp\left(-3\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right), \qquad (18_1)$$

якщо $6\beta_1^2+\mu>0$;

$$y_1(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\operatorname{ch}\sqrt{-(6\beta_1^2+\mu)}\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_2(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\operatorname{sh}\sqrt{-(6\beta_1^2+\mu)}\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\qquad y_4(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-3\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\tag{18$_2$}$$

якщо $6\beta_1^2+\mu<0$;

$$y_1(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\Big(\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)^2,\quad y_2(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\qquad y_4(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-3\beta_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\tag{18$_3$}$$

якщо $6\beta_1^2+\mu=0$.

Нехай $\beta=p_1+iq_1$ – комплексний розв'язок системи (13), $\alpha=-\frac{1}{2}$; $\gamma=-\frac{1}{2}\left[7(p_1+iq_1)^2+\mu\right]$. Тоді, використовуючи (10), знаходимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5) і (17), таку фундаментальну систему розв'язків:

$$y_1(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\Big\{\exp\Big[\Big(p_1-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\cos\Big(q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau+$$
$$+\exp\Big[\Big(p_1+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\cos\Big(-q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big\},$$

$$y_2(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(p_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\cos q_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,\tag{19}$$

$$y_3(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\Big\{\exp\Big[\Big(p_1-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\sin\Big(q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau-$$
$$-\exp\Big[\Big(p_1+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\sin\Big(-q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big\},$$

$$y_4(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(p_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\sin q_1\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,$$

де

$$r=\left[36(p_1^2+q_1^2)^2+12\mu(p_1^2-q_1^2)+\mu^2\right]^{\frac{1}{4}},\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{12p_1q_1}{6(p_1^2-q_1^2)+\mu}.$$

Нарешті розглянемо третій випадок: $\alpha = -\frac{1}{5}$, $\beta = 0$, $\gamma = -\frac{3}{10}\mu$, якщо разом з цим $\lambda = 0$, $\nu = \frac{9}{100}\mu^2$. Тоді, враховуючи (10), одержимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\cos\sqrt{\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \qquad y_2(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\sin\sqrt{\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\cos^3\sqrt{\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \qquad y_4(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\sin^3\sqrt{\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \qquad (20_1)$$

якщо $\mu > 0$;

$$y_1(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{ch}\sqrt{-\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \qquad y_2(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{sh}\sqrt{-\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{ch}^3\sqrt{-\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \qquad y_4(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{sh}^3\sqrt{-\frac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau; \qquad (20_2)$$

якщо $\mu < 0$;

$$y_1(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x), \qquad y_2(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\Big(\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)^2, \qquad y_4(x) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\Big(\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)^3, \qquad (20_3)$$

якщо $\mu = 0$.

Таким чином, умови (5) за довільного вибору достатньо неперервно диференційованої функції $\xi(x)$ і сталих μ, ν, λ дають можливість побудувати деякий клас лінійних однорідних звичайних рівнянь четвертого порядку виду (2), фундаментальна система розв'язків яких може бути знайдена у замкнутій формі. Легко переконатись, що цей клас рівнянь містить в собі рівняння зі сталими коефіцієнтами ($\xi(x) = 1$) і рівняння Ейлера ($\xi(x) = x$.)

Зауважимо, що загальне лінійне однорідне рівняння четвертого порядку відомою заміною зводиться до рівняння виду (2).

Література

1. Костенко Е. С. О групповых свойствах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. – "Дифференциальные уравнения", 1972, т. 8, № 4.

2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.

3. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У цій роботі встановлено, що з одержаної в [1] сукупності лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантної відносно групи перетворень, з еліптичною траєкторією

$$\left\{\frac{m^2\psi_3}{2}-\frac{m[(m^2y^2-x^2)\psi_1-2mxy\psi_2]}{m^2y^2+x^2}\right\}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+$$

$$+2\,\frac{2mxy\psi_1+(m^2y^2-x^2)\psi_2}{m^2y^2+x^2}\,\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+ \qquad (1)$$

$$+\left\{\frac{\psi_3}{2}+\frac{(m^2y^2-x^2)\psi_1-2mxy\psi_2}{m(m^2y^2+x^2)}\right\}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{my\psi_4+x\psi_5}{\sqrt{m^2y^2+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+\frac{my\psi_5-x\psi_4}{m\sqrt{m^2y^2+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\psi_6u-\psi_7=0,$$

де $\psi_1,\ldots,\psi_7$ – довільні функції від $m^2y^2+x^2$, можна виділити рівняння зі змінними коефіцієнтами, граничні задачі для яких у відповід-