Література

1. Костенко Е. С. О групповых свойствах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. – "Дифференциальные уравнения", 1972, т. 8, № 4.

2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.

3. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У цій роботі встановлено, що з одержаної в [1] сукупності лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантної відносно групи перетворень, з еліптичною траєкторією

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{m^2\psi_3}{2}-\frac{m[(m^2y^2-x^2)\psi_1-2mxy\psi_2]}{m^2y^2+x^2}\right\}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\\
&+2\,\frac{2mxy\psi_1+(m^2y^2-x^2)\psi_2}{m^2y^2+x^2}\,\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\\
&+\left\{\frac{\psi_3}{2}+\frac{(m^2y^2-x^2)\psi_1-2mxy\psi_2}{m(m^2y^2+x^2)}\right\}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{my\psi_4+x\psi_5}{\sqrt{m^2y^2+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\\
&+\frac{my\psi_5-x\psi_4}{m\sqrt{m^2y^2+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\psi_6u-\psi_7=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\psi_1,\ldots,\psi_7$ – довільні функції від $m^2y^2+x^2$, можна виділити рівняння зі змінними коефіцієнтами, граничні задачі для яких у відповідних областях (еліпс, еліптичне кільце, зовнішність еліпса) розв'язуються в явному вигляді.

Наприклад, при $\psi_1 = \Psi_1$, $\psi_2 = \psi_4 = \psi_7 = 0$,

$$\psi_3 = \frac{2(1-m\psi_1)}{m^2}, \qquad \psi_5 = \chi - \frac{1-2m\psi_1}{\sqrt{m^2y^2+x^2}},$$

$$\psi_6 = \frac{\ell^2}{m^2y^2+x^2}(1-2m\psi_1) + \frac{1}{\psi^4}\left\{B + D\left[\int \frac{d(m^2y^2+x^2)}{\psi^2(m^2y^2+x^2)}\right]^{-2}\right\} - \tag{2}$$

$$-\frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi',$$

де ψ, χ – довільно задані функції від аргумента $m^2y^2+x^2$, B і D – довільні сталі, рівняння (1) перетворюється в

$$\left\{1 - m\psi_1 - \frac{m(m^2y^2-x^2)\psi_1}{m^2y^2+x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4mxy\psi_1}{m^2y^2+x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} +$$

$$+\left\{\frac{1-m\psi_1}{m^2} + \frac{(m^2y^2-x^2)\psi_1}{m(m^2y^2+x^2)}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x\left[\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\chi - (1-2m\psi_1)\right]}{m^2y^2+x^2}\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+\frac{y\left[\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\chi - (1-2m\psi_1)\right]}{m^2y^2+x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \left\{\frac{\ell^2}{m^2y^2+x^2}(1-2m\psi_1) + \frac{B}{\psi^4} + \right. \tag{1$_1$}$$

$$\left. + \frac{D}{\psi^4}\left[\int \frac{d(m^2y^2+x^2)}{\psi^2(m^2y^2+x^2)}\right]^{-2} - \frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi'\right\}u = 0,$$

яке в системі координат $x = r\cos\varphi$, $y = \frac{2}{m}\sin\varphi$ матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}(1-2m\psi_1)\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \chi\frac{\partial u}{\partial r} + \left\{\frac{\ell^2}{r^2}(1-2\psi_1 m) + \frac{B}{\psi^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{D}{\psi^4}\left[\int \frac{dr}{\psi^2(r)}\right]^{-2} - \frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi'\right\}u = 0. \tag{3}$$

Якщо знаходити частковi розв'язки рiвняння (3) у формi

$$U_l = R(r)e^{il\varphi}, \qquad (4)$$

то для визначення $R(r)$ одержимо

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \chi(r)\frac{dR}{dr} + \left\{\frac{B}{\psi^4(r)} + \frac{D}{\psi^4(r)}\left[\int\frac{dr}{\psi^2(r)}\right]^{-2} - \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\chi^2(r) + \frac{1}{2}\chi'\right\}R = 0.$$

Останнє рiвняння мiстить в собi двi довiльно заданi функцiї $\psi(r)$ та $\chi(r)$ i, як показано в [2], завжди зводиться до рiвняння Бесселя.

Таким чином, для рiвняння (1') розв'язки граничних задач у вiдповiдних областях (елiпс, елiптичне кiльце, зовнiшнiсть елiпса) будуть зображатись подвiйними рядами по тригонометричних функцiях та функцiях Бесселя.

Аналогiчно з рiвняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{\frac{m^2\psi_3}{2} - \frac{m[(m^2y^2-x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2]}{m^2y^2+x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ 2\,\frac{2mxy\psi_1 + (m^2y^2-x^2)\psi_2}{m^2y^2+x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \left\{\frac{\psi_3}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(m^2y^2-x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2}{m(m^2y^2+x^2)}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{my\psi_4 + x\psi_5}{\sqrt{m^2y^2+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \psi_6 u = 0 \qquad (5)$$

при $$\psi_6 = \frac{l^2}{x^2+m^2y^2}(1-2m\psi_1) - \lambda + \frac{1}{\psi^4}\left\{B + D\left[\int\frac{d(x^2+m^2y^2)}{\psi^2(x^2+m^2y^2)}\right]^{-2}\right\} -$$

$$- \frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi'$$

i тих же самих $\psi_1, \ldots, \psi_5$, що й в (2), одержуємо рiвняння в частинних похiдних зi змiнними коефiцiєнтами, змiшанi задачi для яких у цилiндричних областях з елiптичними напрямними можна зобразити потрiйними рядами по тригонометричних функцiях та функцiях Бесселя.

Подібними міркуваннями можна в рівнянь вигляду (I) та (5) виділяти рівняння в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, розв'язки граничних задач для яких будуть зображатись рядами з використанням вибраних спеціальних функцій.

Література

I. Костенко В. Г., Веселовська О. О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1972, вип. 7.

2. Манжаловский В. П. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях. Изд-во Харьковского ун-та, 1959.

УДК 518:512.35

Г.Г.Цегелик

ЗАСТОСУВАННЯ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ДЛЯ ВИДІЛЕННЯ ОБЛАСТЕЙ, В ЯКИХ КВАЗІПОЛІНОМИ НЕ ПЕРЕТВОРЮЮТЬСЯ В НУЛЬ

Розглянемо квазіполіном

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu\nu}\, z^{\mu} e^{-\lambda_\nu z}, \qquad (I)$$

де $A_{\mu\nu}$ - довільні комплексні числа, а $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$.

Позначимо через E множину пар індексів (μ,ν), для яких $A_{\mu\nu}\neq 0$. Побудуємо в площині $\xi\eta$ точки $C_{\mu\nu}$ з координатами $\xi=\mu$, $\eta=\lambda_\nu$, $(\mu,\nu)\in E$, і позначимо через $\overline{Q}_f$ опуклу оболонку множини точок $C_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E$. Для кожної точки $C_{\mu\nu}\in\overline{Q}_f$ побудуємо в просторі $\xi\eta\zeta$ точку $P_{\mu\nu}(\mu,\lambda_\nu,-\ln a_{\mu\nu})$, де $a_{\mu\nu}=|A_{\mu\nu}|$. Опуклу оболонку множини точок $P_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E$, позначимо через $\overline{\mathfrak{P}}_f$.

Нехай

$$\varkappa(\xi,\eta)=\inf_{(\xi,\eta,\zeta)\in\overline{\mathfrak{P}}_f}\zeta\,.$$