Подібними міркуваннями можна в рівнянь вигляду (I) та (5) виділяти рівняння в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, розв'язки граничних задач для яких будуть зображатись рядами з використанням вибраних спеціальних функцій.

Література

I. Костенко В. Г., Веселовська О. О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1972, вип. 7.

2. Маньжаловский В. П. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях. Изд-во Харьковского ун-та, 1959.

УДК 518:512.35

Г.Г.Цегелик

ЗАСТОСУВАННЯ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ДЛЯ ВИДІЛЕННЯ ОБЛАСТЕЙ, В ЯКИХ КВАЗІПОЛІНОМИ НЕ ПЕРЕТВОРЮЮТЬСЯ В НУЛЬ

Розглянемо квазіполіном

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu\nu} z^{\mu} e^{-\lambda_\nu z}, \qquad (I)$$

де $A_{\mu\nu}$ - довільні комплексні числа, а $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$.

Позначимо через E множину пар індексів (μ,ν), для яких $A_{\mu\nu}\neq 0$. Побудуємо в площині $\xi\eta$ точки $C_{\mu\nu}$ з координатами $\xi=\mu$, $\eta=\lambda_\nu$, $(\mu,\nu)\in E$, і позначимо через $\overline{Q}_f$ опуклу оболонку множини точок $C_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E$. Для кожної точки $C_{\mu\nu}\in\overline{Q}_f$ побудуємо в просторі $\xi\eta\zeta$ точку $P_{\mu\nu}(\mu,\lambda_\nu,-\ln a_{\mu\nu})$, де $a_{\mu\nu}=|A_{\mu\nu}|$. Опуклу оболонку множини точок $P_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E$, позначимо через $\overline{\mathfrak{P}}_f$.

Нехай

$$\varkappa(\xi,\eta)=\inf_{(\xi,\eta,\zeta)\in\overline{\mathfrak{P}}_f}\zeta .$$

Тоді поверхню, яка описується в просторі $\xi\eta\zeta$ рівнянням

$$\zeta = \varkappa(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\overline{Q}_f,$$

назвемо діаграмою Ньютона $\mathcal{V}_f$ квазіполінома (1).

З означення випливає, що діаграма Ньютона $\mathcal{V}_f$ є відкритою опуклою вниз багатогранною поверхнею.

Нехай

$$T_{\mu\nu} = exp[-\varkappa(\mu,\lambda_\nu)], \quad (\mu,\lambda_\nu)\in\overline{Q}_f.$$

Квазіполіном

$$\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{(\mu,\lambda_\nu)\in\overline{Q}_f} T_{\mu\nu} z^{\mu} e^{-\lambda_\nu z}$$

назвемо мажорантою Ньютона квазіполінома (1).

Легко бачити, що $T_{\mu\nu}>0$, $(\mu,\lambda_\nu)\in\overline{Q}_f$ і $a_{\mu\nu}\leq T_{\mu\nu}$.

Відношення

$$R_{k\ell} = \frac{T_{k-1,\ell}}{T_{k\ell}} \quad і \quad \widetilde{R}_{k\ell} = \left(\frac{T_{k,\ell-1}}{T_{k\ell}}\right)^{\frac{1}{\lambda_\ell-\lambda_{\ell-1}}}$$

назвемо (k,ℓ)-ми числовими нахилами $\mathfrak{M}_f(z)$ відповідно в напрямі осей $O\xi$ і $O\eta$; відношення

$$D_{k\ell} = \frac{R_{k+1,\ell}}{R_{k\ell}} \quad і \quad \widetilde{D}_{k\ell} = \frac{\widetilde{R}_{k,\ell+1}}{\widetilde{R}_{k\ell}}$$

назвемо (k,ℓ)-ми відхиленнями $\mathfrak{M}_f(z)$ відповідно в напрямі тих же осей.

З опуклості вниз діаграми $\mathcal{V}_f$ випливає, що $D_{k\ell}\geq 1$ і $\widetilde{D}_{k\ell}\geq 1$ для всіх $(k,\lambda_\ell)\in\overline{Q}_f$. Зокрема, $D_{k\ell}>1$ і $\widetilde{D}_{k\ell}>1$, якщо точка $P_{k\ell}$ лежить у вершині $\mathcal{V}_f$.

Будемо надалі для простоти вважати, що многокутник $\overline{Q}_f$ збігається з прямокутником $\overline{P}$ з вершинами $A(0,0)$, $B(m,0)$, $C(m,\lambda_n)$ і $D(0,\lambda_n)$. Якщо це не так, то замість опуклої вниз багатогранної поверхні $\mathcal{V}_f$ – діаграми Ньютона, заданої на многокутнику $\overline{Q}_f$, можна розглядати опуклу вниз багатогранну поверхню $\mathcal{V}_f^*$, задану на прямокутнику $\overline{P}$. Причому на многокутнику $\overline{Q}_f$ поверхні $\mathcal{V}_f$ і $\mathcal{V}_f^*$ збігаються. Відповідно й мажоранту Ньютона (2) потрібно розглядати на прямокутнику $\overline{P}$.

Із зробленого припущення випливає, що коефіцієнти $\mathfrak{M}_f(z)$ визначені для всіх пар індексів (μ, ν) $(\mu = 0, 1, \ldots, m;\ \nu = 0, 1, \ldots, n)$.

Для визначення коефіцієнтів $\mathfrak{M}_f(z)$ через коефіцієнти квазіполінома (1) можна одержати формули аналогічно як і в [3].

Для коефіцієнтів $\mathfrak{M}_f(z)$ [1,2], числових нахилів і відхилень справедливі такі співвідношення:

$$\frac{T_{k+\mu,\ell}}{T_{k\ell}} = R_{k+1,\ell}^{-\mu} \prod_{i=1}^{\mu-1} D_{k+i,\ell}^{-\mu+i}; \qquad \frac{T_{k-\mu,\ell}}{T_{k\ell}} = R_{k\ell}^{\mu} \prod_{i=1}^{\mu-1} D_{k-i,\ell}^{-\mu+i};$$

$$\frac{T_{k,\ell+\nu}}{T_{k\ell}} = \widetilde{R}_{k,\ell+1}^{-(\lambda_{\ell+\nu}-\lambda_\ell)} \prod_{j=1}^{\nu-1} \widetilde{D}_{k,\ell+j}^{-(\lambda_{\ell+\nu}-\lambda_{\ell+j})}; \tag{3}$$

$$\frac{T_{k,\ell-\nu}}{T_{k\ell}} = \widetilde{R}_{k\ell}^{\lambda_\ell-\lambda_{\ell-\nu}} \prod_{j=1}^{\nu-1} \widetilde{D}_{k,\ell-j}^{-(\lambda_{\ell-j}-\lambda_{\ell-\nu})}$$

де (k, ℓ) — деяка фіксована пара індексів, $(k, \lambda_\ell) \in \overline{P}$.

Нехай точка $P_{k\ell}$ лежить у вершині $\mathcal{V}_f^*$ $(0 < k < m;\ 0 < \ell < n)$ і два числа $u_{k\ell} > 1$ та $v_{k\ell} > 1$ такі, що

$$D_{k\ell} > u_{k\ell}^2 > 1, \quad \widetilde{D}_{k\ell} > v_{k\ell}^{2} > 1. \tag{4}$$

Тоді завжди можна підібрати такі числа $p_{k\pm\mu,\ell} \geq 0$ $(\mu > 0)$ і $q_{k\pm\mu,\ell\pm\nu} \geq 0$ $(\mu \geq 0, \nu > 0)$, що для відхилень мажоранти Ньютона $D_{k+\mu,\ell}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m-k-1;\ D_{m\ell} = \infty)$; $D_{k-\mu,\ell}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, k-1;\ D_{0\ell} = \infty)$, $\widetilde{D}_{k\pm\mu,\ell+\nu}$ $(\mu \geq 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n-\ell-1;\ \widetilde{D}_{k\pm\mu,n} = \infty)$ і $\widetilde{D}_{k\pm\mu,\ell-\nu}$ $(\mu \geq 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, \ell-1;\ \widetilde{D}_{k\pm\mu,0} = \infty)$ будуть виконуватись нерівності

$$\begin{aligned} &D_{k\pm\mu,\ell} \geq u_{k\ell}^{p_{k\pm\mu,\ell}} \geq 1, \\ &\widetilde{D}_{k\pm\mu,\ell\pm\nu} \geq v_{k\ell}^{q_{k\pm\mu,\ell\pm\nu}} \geq 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Останні нерівності виконуються завжди, наприклад при $p_{k\pm\mu,\ell} = 0$ і $q_{k\pm\mu,\ell\pm\nu} = 0$.

Побудуємо таку функцію

$$H_{kl}(u,v) = \sum_{\substack{(\mu,\lambda_\nu)\in D\\ (\mu,\nu)\neq(k,l)}} b_{\mu\nu}\, u^{\alpha_{\mu l}}\, v^{\beta_{\mu\nu}} - 1 ,$$

де

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} \left(\tilde R_{\mu l}/\tilde R_{kl}\right)^{\lambda_l-\lambda_\nu} & \text{при} \quad \nu<l, \\ \left(\tilde R_{k,l+1}/\tilde R_{\mu,l+1}\right)^{\lambda_\nu-\lambda_l} & \text{при} \quad \nu>l, \\ 1 & \text{при} \quad \nu=l; \end{cases}$$

$$\alpha_{\mu l} = -|\mu-k| - \sum_{i=1}^{|\mu-k|-1} \left(|\mu-k|-i\right) p_{k+i\,\mathrm{sign}(\mu-k),\,l} ;$$

$$\beta_{\mu\nu} = -|\lambda_l-\lambda_\nu| - \sum_{j=1}^{|\nu-l|-1} \left(|\lambda_\nu-\lambda_{l+j\,\mathrm{sign}(\nu-l)}|\right) q_{\mu,\,l+j\,\mathrm{sign}(\nu-l)} .$$

Т е о р е м а. Якщо при $0<k<m$, $0<l<n$ для відхилень мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z)$ виконуються умови (4), (5), де (u_{kl}, v_{kl}) – розв'язок рівняння $H_{kl}(u,v)=0$ і перетин кільця $R_{kl} u_{kl} \le |z| \le \frac{R_{k+1,l}}{u_{kl}}$ зі смугою $-\ln\frac{\tilde R_{k,l+1}}{v_{kl}} \le Re(z) \le -\ln \tilde R_{kl} v_{kl}$ непустий, то квазіполіном (1) не перетворюється в нуль в області

$$\left\{R_{kl}u_{kl} \le |z| \le \frac{R_{k+1,l}}{u_{kl}},\ -\ln\frac{\tilde R_{k,l+1}}{v_{kl}} \le Re(z) \le -\ln \tilde R_{kl} v_{kl}\right\}. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що в деякій точці $z_0 = x_0 + iy_0$ області (6) $f(z_0)=0$. Тоді, позначивши $|z_0| = r_0$, одержимо

$$0 \le -1 + \sum_{\substack{(\mu,\nu)\in E\\ (\mu,\nu)\neq(k,l)}} \frac{a_{\mu\nu}}{a_{kl}}\, r_0^{\mu-k} e^{-x_0(\lambda_\nu-\lambda_l)} \le$$

$$\leq \sum_{(\mu,\lambda_\nu)\in\overline{P}} \frac{T_{\mu\nu}}{T_{kl}} z_0^{\mu-k} e^{-x_0(\lambda_\nu-\lambda_l)} - 2$$

Використавши формули (3) та умови (4), (5), і те, що

$$R_{kl} u_{kl} \leq z_0 \leq \frac{R_{k+1,l}}{u_{kl}}, \quad \widetilde{R}_{kl} v_{kl} \leq e^{-x_0} \leq \frac{\widetilde{R}_{k,l+l}}{v_{kl}},$$

одержимо протиріччя

$$0 = H_{kl}(u_{kl}, v_{kl}) > 0.$$

Аналогічно як і в [4] можна сформулювати теореми при $k=n$, $l=0$ і $k=n$, $l=m$ для визначення правої та лівої границі нулів квазіполінома.

Приклад. Розглянемо множину квазіполіномів $f(z)$, для яких

$$\mathfrak{M}_f(z) = 1 + 8z + z^2 + 8e^{-z} + 64ze^{-z} + 8z^2e^{-z} + \\ + e^{-2z} + 8ze^{-2z} + z^2e^{-2z} \qquad (7)$$

є мажорантою Ньютона.

Числові нахили та відхилення $\mathfrak{M}_f(z)$ відповідно в напрямі осей $O\xi$ і $O\eta$ такі:

$$R_{0\nu}=0,\ R_{1\nu}=\frac{1}{8},\ R_{2\nu}=8,\ R_{3\nu}=\infty,\ D_{0\nu}=D_{2\nu}=\infty,\ D_{1\nu}=64;$$

$$\widetilde{R}_{\mu 0}=0,\ \widetilde{R}_{\mu 1}=\frac{1}{8},\ \widetilde{R}_{\mu 2}=8,\ \widetilde{R}_{\mu 3}=\infty,\ \widetilde{D}_{\mu 0}=\widetilde{D}_{\mu 2}=\infty,\ \widetilde{D}_{\mu 1}=64,$$

де $\mu, \nu = 0, 1, 2$.

Приймемо $k = l = 1$. Функція $H_{11}(u,v)$ для даного прикладу набере вигляду

$$H_{11}(u,v) = -1 + b_{00}u^{-1}v^{-1} + b_{10}v^{-1} + b_{20}u^{-1}v^{-1} + b_{01}u^{-1} + \\ + b_{21}u^{-1} + b_{02}u^{-1}v^{-1} + b_{12}v^{-1} + b_{22}u^{-1}v^{-1}.$$

Обчисливши коефіцієнти $b_{\mu\nu}$, одержуємо рівняння

$$H_{11}(u,v) = -1 + \frac{2}{u} + \frac{2}{v} + \frac{4}{uv} = 0,$$

розв'язком якого, наприклад, буде пара чисел $u=6,\ v=4$.

Оскільки умови теореми виконуються, то одержуємо, що множина квазіполіномів $f(z)$, для яких функція (7) є мажорантою Ньютона, не перетворюється в нуль в області

$$\left\{ \frac{3}{4} \le |z| \le \frac{4}{3},\ -\ln 2 \le Re(z) \le \ln 2 \right\}.$$

Література

1. Костовский А. Н. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львовского ун-та, 1967.
2. Костовський О. М., Цегелик Г. Г. Побудова мажорант та діаграм Ньютона рядів Діріхле. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1971, вип. 6.
3. Кардаш А. І., Костовський О. М., Чулик І. І. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. -"Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1967, вип. 3.
4. Цегелик Г. Г. Численный метод локализации нулей квазиполиномов. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1970, т. 10, № 4.

УДК 515.69

А.О.Кощетянський

СФЕРИЧНА КОЛІНЕАЦІЯ

Всім оптичним явищам, які спостерігаються в природі, притаманні відхилення від теоретичних основ геометричної оптики. Геометрична модель може лише з певним наближенням відтворити оптичний процес (схему). Але така модель або не враховує певні спотворення, викликані природними умовами процесу, або враховує їх з деяким наближенням. Тому в геометричні моделі цих процесів доцільно ввести доповнення, пропоновані в [1] . Зокрема в центральну колінеацію (одна з основних схем моделей оптичних