з граничних "прямих" матиме вигляд смужки висотою, що дорівнює малій осі еліпса перетину з площиною зображення проектуючого циліндра діаметром, рівним діаметру осереддя. Друга гранична пряма має вигляд прямої і може бути побудована як і в центральній колінеації з центром в центрі осереддя (сфери).

Отже, така колінеація може служити наближеною моделлю оптичного явища в більшості випадків побудови зображень в оці людини, а також реєструючих оптичних приладів, але без врахування додаткових спотворень-ілюзій.

Л і т е р а т у р а

1. К о п н я с т и н с ь к и й А. О. Про геометрію оптичних ілюзій.- "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

УДК 513.015.6

С.В.Дениско

ПРО ОДИН КЛАС НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ

Нехай S - прямолінійна конгруенція, рівняння якої у векторній формі має вигляд

$$\overline{R} = \overline{z}(u^1, u^2) + \lambda \overline{m}(u^1, u^2),$$

де $\overline{m}$ - одиничний вектор і $\overline{z}(u^1, u^2)$ - радіус-вектор опорної поверхні, яку називатимемо поверхнею $\mathcal{P}$.

Розглянемо тепер прямолінійну конгруенцію S_ε, що визначається рівнянням

$$\overline{R} = \overline{z}(u^1, u^2) + \varepsilon \overline{a}(u^1, u^2) + \lambda \overline{m}(u^1, u^2),$$

де $\overline{a}(u^1, u^2)$ - деяка вектор-функція точки поверхні $\mathcal{P}$; ε - нескінченно малий параметр.

Нехай конгруенція S перетворюється в конгруенцію S_ε так, що для будь-яких u^1, u^2, λ точка (u^1, u^2, λ) конгруенції S переходить у точку (u^1, u^2, λ) конгруенції S_ε.

Для зручності лінійчасті поверхні конгруенції S, які при перетворенні конгруенції S в конгруенцію S_ε піддаються нескінченно малому згинанню, називатимемо поверхнями Φ, а їх лінії перетину з опорною поверхнею $\mathcal{P}$ – лініями φ.

Для того, щоб лінійчаста поверхня конгруенції S була поверхнею Φ необхідно і достатньо, щоб

$$\bar{m}d\bar{a} = 0, \quad d\bar{z}d\bar{a} = 0, \quad d\bar{m}d\bar{a} = 0, \tag{1}$$

де d – символ диференціювання вздовж лінії перетину лінійчастої поверхні з поверхнею $\mathcal{P}$.

Мають місце теореми.

Т е о р е м а 1. Кожна сім'я заданої на поверхні $\mathcal{P}$ сітки не може складатись з ліній φ, якщо: 1) поверхня $\mathcal{P}$ – фокальна поверхня конгруенції S; 2) у кожній точці поверхні $\mathcal{P}$ вектор $\bar{a}$ перебуває у дотичній до поверхні $\mathcal{P}$ площині; 3) жодна сім'я сітки з векторними лініями поля вектора α_i, трансверсального вектора поля вектора $\bar{a}$, не утворює ортогональної сітки.

Д о в е д е н н я. Зважаючи на 1), 2), умови (1) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{gathered} g_{ij}\nabla_z a^i m^j du^z = 0, \qquad g_{iz}\nabla_s a^i du^z du^s = 0, \\ (g_{ij}\nabla_z a^i \nabla_s m^j + \pi_{iz} a^i \pi_{js} m^j) du^z du^s = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

де g_{ij}, π_{ij} – відповідно перший та другий основні тензори поверхні $\mathcal{P}$; ∇_z – символ коваріантного диференціювання, яке здійснюється за допомогою тензора g_{ij}.

Нехай задана на поверхні $\mathcal{P}$ сітка складається з ліній φ. Вважатимемо, що ця сітка є координатною сіткою на поверхні $\mathcal{P}$. Тоді з перших двох рівнянь системи (2) матимемо

$$g_{ij}\nabla_1 a^i m^j = 0, \quad g_{ij}\nabla_2 a^i m^j = 0,$$
$$g_{i1}\nabla_1 a^i = 0\,, \quad g_{i2}\nabla_2 a^i = 0. \tag{3}$$

Скористаємось тепер основним диференціальним рівнянням векторного поля на поверхні [1]:

$$\nabla_2 a^i = \alpha_2 \tilde{a}^i + A_2 a^i, \tag{4}$$

де $\tilde{a}^i$ - доповняльний вектор вектора $\bar{a}$; A_2 - логарифмічний градієнт модуля вектора $\bar{a}$. З врахуванням (4) рівності (3) запишуться

$$\alpha_1 \tilde{a}^i m_i + A_1 a^i m_i = 0, \quad \alpha_2 \tilde{a}^i m_i + A_2 a^i m_i = 0,$$
$$\alpha_1 \tilde{a}_1 + A_1 a_1 = 0, \qquad \alpha_2 \tilde{a}_2 + A_2 a_2 = 0. \tag{5}$$

З перших двох рівностей системи (5), оскільки вектори $\bar{a}$, $\bar{\tilde{a}}$, $\bar{m}$ компланарні, маємо

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & A_1 \\ \alpha_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Згідно з вимогою (3) та умовою (6) дві останні рівності системи (5) можна зобразити у такому вигляді:

$$\tilde{a}_1 + \frac{A_1}{\alpha_1} a_1 = 0,$$

$$\tilde{a}_2 + \frac{A_1}{\alpha_1} a_2 = 0.$$

Звідки

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_1 & a_1 \\ \tilde{a}_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

що неможливо, бо вектори $\bar{\tilde{a}}$, $\bar{a}$ взаємно перпендикулярні.

Теорему доведено.

Т е о р е м а 2. Нехай: 1) конгруенція S утворена нормалями поверхні $\mathcal{P}$; 2) вектор зміщення $\bar{a}$ утворює на поверхні $\mathcal{P}$ поле вектора сталої довжини, векторні лінії якого разом з асимптотичними лініями поверхні $\mathcal{P}$ становлять ортогональну сітку; 3) лінії φ утворюють сітку.

Тоді: а) поверхня $\mathcal{P}$ – розгортна; б) одна сім'я ліній φ складається з трансверсалей поля вектора $\bar{a}$; в) друга сім'я ліній φ складається з векторних ліній поля вектора $\bar{a}$.

Д о в е д е н н я. Внаслідок вимог 1), 2) умови (1) запишуться таким чином:

$$\pi_{ij}a^i du^j = 0, \quad g_{is}\nabla_j a^s du^i du^j = 0, \qquad (7)$$
$$\pi_{is}\nabla_j a^s du^i du^j = 0.$$

З першої рівності системи (7), якщо врахувати вимогу 3), матимемо

$$\pi_{ij}a^i = 0. \qquad (8)$$

Звідки випливає, оскільки хоча б одна з координат a^1, a^2 відмінна від нуля, що

$$\pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 = 0,$$

а тому має місце а).

З врахуванням (4) і (8) друга та третя рівності системи (7) перепишуться у вигляді

$$(\alpha_j\tilde{a}_i + A_j a_i)du^i du^j = 0, \qquad (9)$$
$$\pi_{is}\alpha_j\tilde{a}^s du^i du^j = 0.$$

Оскільки вектор $\bar{a}$ сталої довжини, то

$$A_j = 0. \qquad (10)$$

Крім цього, з вимоги 2) виходить, що вектор $\tilde{\bar{a}}$ дотикається асимптотичних ліній поверхні $\mathcal{P}$, яка є розгортною. Тому друга рівність системи (9) є тотожність.

Отже, лінії φ визначатиме тільки перша рівність системи (9). Ця рівність в силу (10) розпадається на дві рівності

$$\alpha_j du^j = 0, \quad \tilde{a}_i du^i = 0,$$

з яких і випливає справедливість тверджень б), в).

Т е о р е м а 3. Нехай поверхня $\mathcal{P}$ є фокальною поверхнею конгруенції S, а вектор зміщення $\bar{a}$ в кожній точці поверхні $\mathcal{P}$ нормальний до цієї поверхні. Тоді поверхня $\mathcal{P}$ - розгортна, а лінії φ на поверхні $\mathcal{P}$ є її прямолінійні твірні.

Д о в е д е н н я. Згідно з умовами теореми рівняння (I) запишуться

$$\begin{gathered}\pi_{ij} m^i du^j = 0, \qquad \pi_{ij} du^i du^j = 0, \\ \pi_{is}(\partial_j |\bar{a}| m^s - |\bar{a}| \nabla_j m^s) du^i du^j = 0.\end{gathered} \tag{II}$$

З другої рівності системи (II) випливає, що лінії φ є асимптотичними лініями на поверхні $\mathcal{P}$, а кожна лінія на поверхні $\mathcal{P}$ не може бути лінією φ, оскільки поверхня $\mathcal{P}$ не може бути площиною.

Нехай лінії φ утворюють сітку. Тоді з першої рівності системи (II) матимемо

$$\pi_{ij} m^i = 0,$$

звідки випливає, що

$$\pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 = 0.$$

У такому разі поверхня $\mathcal{P}$ - розгортна, що неможливо. Дійсно, на розгортній поверхні $\mathcal{P}$ асимптотичні лінії не утворюють сітки. А це суперечить нашому припущенню, що лінії φ утворюють сітку.

Нехай тепер лінії φ утворюють на поверхні $\mathcal{P}$ тільки одну однопараметричну сім'ю ліній. Розглянемо спочатку той випадок, коли перша рівність системи (II) не є тотожністю.

Оскільки лінії φ - асимптотичні лінії, з першої рівності системи (II) випливає, що вектор $\bar{m}$ дотикається лінії φ.

Внаслідок цієї ж рівності та основного рівняння векторного поля $\bar{m}$ третя рівність системи (II) перепишеться таким чином:

$$\mu_i \tilde{m}^s \pi_{sj} du^i du^j = 0.$$

Звідки, оскільки вектори $\bar{m}$, $\tilde{\bar{m}}$ не колінеарні, маємо

$$\mu_i du^i = 0,$$

а це означає, що трансверсалі векторного поля $\bar{m}$ є лініями φ.

Таким чином, вектор $\bar{m}$ дотикається лінії φ і переноситься паралельно вздовж цієї лінії. У такому разі лінії φ є геодезичними. Але вони також асимптотичні лінії. Тому лінії φ є прямими, що неможливо, бо вектор $\bar{m}$ дотикається лінії φ.

Якщо ж перша рівність системи (II) є тотожність, то, як було доведено вище, поверхня $\mathcal{P}$ - розгортна. Тому третя рівність системи (II) також тотожність.

Отже, тільки другою рівністю системи (II) визначатимуться лінії φ. Оскільки ця рівність визначає також асимптотичні лінії розгортної поверхні $\mathcal{P}$, то нашу теорему доведено.

Література

1. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.