

УДК 539.385

О.П.Піддубняк

КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ШАРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО
КРУГОВОЮ ЩІЛИНОЮ^х

1. Розглядається осесиметрична контактна задача теорії пружності для шару, що займає область $-h_2 \leq z \leq h_1$, містить у площині $z=0$ внутрішню (радіусом $z \leq a_0$) або зовнішню (радіусом $z \geq a_0$) плоску щілину і піддається крученню двома опівосними з щілиною плоскими штампамі по ділянках $0 \leq z \leq a_1$, $z=h_1$ та $0 \leq z \leq a_2$, $z=-h_2$ за умови жорсткого зчеплення штампів з пружним тілом. Поверхні шару поза штампамі і щілина вільні від навантажень. Підобласті $0 \leq z \leq h_1$ і $-h_2 \leq z \leq 0$ заповнені ізотропними матеріалами з модулями зсуву μ_1 і μ_2 .

Задача зводиться до знаходження зміщень $u_0(z, z) = u(z, z)$, що задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u = \begin{cases} u_1 & z > 0 \\ u_2 & z < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

у відповідних областях при таких граничних умовах

$$u_i(z, z_i) = \epsilon_i z, \quad 0 \leq z < a_i, \quad \tau_{\theta z}^{(i)}(z, z_i) = 0, \quad z > a_i \quad (1.2)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(z, 0) = 0 \quad \begin{cases} 0 \leq z < a_0 & - \text{задача I} \\ z > a_0 & - \text{задача II} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_i(z, z) = 0, \quad z_i = (-1)^{i+1} h_i, \quad i = 1, 2$$

^х Робота виконана під керівництвом проф. Д.В.Гриліцького.

і умовах опряження

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(1)}(z, 0) &= \tau_{\theta z}^{(2)}(z, 0) \\ u_1(z, 0) &= u_2(z, 0) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (z > a_0, \quad \text{задача I}) \quad \text{або} \\ (0 \leq z \leq a_0, \quad \text{задача II}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

де ε_1 і ε_2 - кути закручування штампів (задача I - випадок внутрішньої щілини, задача II - випадок зовнішньої щілини).

2. Використовуючи метод роботи [4], задачі I і II зводяться до регулярної системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, розв'язок якої шукається методом послідовних наближень.

Контактні напруження під штампами визначаються за формулою

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(z, z_i) = \frac{4\mu_i \rho_i}{\pi \sqrt{1-\rho_i^2}} \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \varepsilon_j \left[\Phi_{ij}^{(1)} - (1-2\rho_i^2) \Phi_{ij}^{(2)} - \frac{1}{3}(1+4\rho_i^2-8\rho_i^4) \Phi_{ij}^{(3)} \right],$$

$$(\rho_i = \frac{z}{a_i}, \quad 0 \leq z < a_i, \quad i=1,2), \quad (2.1)$$

а коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень $\tau_{\theta z}$ у вершині щілини має вигляд [6]

$$K_{II} = \lim_{z \rightarrow a_0} [\sqrt{2\pi s} \tau_{\theta z}(z, 0)] = 4\mu_1 \beta_2 \sqrt{\frac{a_0}{\pi}} \sum_{n=1}^3 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \varepsilon_i \Phi_{oi}^{(n)}. \quad (2.2)$$

При цьому кути повороту штампів ε_1 , ε_2 зв'язані з моментами кручення M_1 , M_2 співвідношенням

$$M_i = 16a_i^3 \mu_i \sum_{n=1}^3 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \frac{\Phi_{ij}^{(n)} \varepsilon_j}{2n+1} \quad (i=1,2). \quad (2.3)$$

У формулах (2.1) - (2.3) позначено:

для задачі I

$$s = z - a_0, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{(1)} &= \delta_{ij} + \frac{1}{3} F_{ij}^{(2)} \rho_j^3 - \frac{1}{30} F_{ij}^{(4)} \rho_j^5 + \frac{1}{840} F_{ij}^{(6)} \rho_j^7 - \frac{1}{135} \beta_j F_{oi}^{(3)} F_{oj}^{(3)} \rho_o^3 \rho_j^3 + \\ &+ \sum_{n=1}^2 \left\{ \frac{1}{9} F_{in}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \rho_n^3 \rho_j^3 - \frac{1}{90} [F_{in}^{(2)} F_{nj}^{(4)} (\rho_n^5 \rho_j^3 + \rho_n^3 \rho_j^5) + F_{in}^{(4)} F_{nj}^{(2)} \rho_n^5 \rho_j^3] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{ij}^{(2)} &= -\frac{1}{18} \delta_i^2 \delta_j^3 (F_{ij}^{(4)} - 0,1 F_{ij}^{(6)} \delta_j^2 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^2 F_{in}^{(4)} F_{nj}^{(2)} \delta_n^3), \quad \mathcal{F}_{ij}^{(3)} = \frac{1}{360} F_{ij}^{(6)} \delta_i^2 \delta_j^3, \\
\mathcal{F}_{0j}^{(4)} &= \frac{2}{9} \delta_0^3 \delta_j^3 (F_{0j}^{(3)} - 0,1 F_{0j}^{(5)} \delta_j^2 + \frac{1}{420} F_{0j}^{(7)} \delta_j^4 + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^2 F_{0n}^{(3)} F_{nj}^{(2)} \delta_n^3), \\
\mathcal{F}_{0j}^{(2)} &= -\frac{1}{45} \delta_0^3 \delta_j^3 (F_{0j}^{(5)} - 0,1 F_{0j}^{(7)} \delta_j^2), \quad \mathcal{F}_{ij}^{(3)} = \frac{1}{1260} F_{ij}^{(7)} \delta_0^5 \delta_j^3, \\
F_{00}^{(p)} &= 2[\beta_1 J_p(d) + \beta_2 J_p(-d) - J_p(1)], \quad F_{\alpha}^{(p)} = 2[J_p(d_j) - J_p(-d_j)] \quad (i \neq j), \\
F_{ii}^{(p)} &= (-1)^i 2\{\beta J_p[(-1)^i d] - J_p(1)\}, \quad F_{ij}^{(p)} = 4\beta_j J_p(0) \quad (i \neq j), \\
J_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-\beta)^m C_n^m \psi[n+1, p+1, \frac{1}{2}(1+x) + (n-m)d_1 + md_2] \frac{1}{x}, \\
\psi(N, q, p) &= \frac{q!}{2^{q+1}} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,N} (n+p)^{-q}, \quad C_{q,N} = 1, \quad C_{m,N} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [k(N+1) - m] C_{m-k,N} \\
(m \geq 1), \quad \beta_i &= \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2, \quad d_i = \frac{h_i}{H}, \quad \delta_n = \frac{a_n}{H} \quad (n=0,1,2), \quad H = h_1 + h_2, \\
d &= d_1 - d_2, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2;
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

для задачі II $S = a_0 - 2$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{ij}^{(4)} &= \delta_{ij} \left\{ 1 - \frac{\zeta(3)}{3\pi} \lambda_j^3 + \frac{\zeta(5)}{10\pi} \lambda_j^5 + \left[\frac{\zeta(3)}{3\pi} \right]^2 \lambda_j^6 - \frac{3\zeta(7)}{112\pi} \lambda_j^7 \right\} + \delta_0 \left[\frac{\zeta(3, \frac{1}{2})}{3\pi} \right]^2 \lambda_{0i}^3 \lambda_j^3, \\
\mathcal{F}_{ij}^{(2)} &= \delta_{ij} \left[\frac{\zeta(5)}{6\pi} \lambda_j^5 - \frac{\zeta(7)}{8\pi} \lambda_j^7 \right], \quad \mathcal{F}_{ij}^{(3)} = \delta_{ij} \frac{\zeta(7)}{16\pi} \lambda_j^7, \\
\mathcal{F}_{0j}^{(4)} &= \frac{\zeta(3, \frac{1}{2})}{3\pi} \lambda_j^3 - \frac{\zeta(5, \frac{1}{2})}{10\pi} \lambda_j^5 - \frac{\zeta(3)\zeta(3, \frac{1}{2})}{9\pi^2} \left[\lambda_j^6 + \sum_{n=1}^2 (1 - \beta_n) \lambda_j^3 \lambda_{0n}^3 \right] + \frac{3\zeta(7, \frac{1}{2})}{112\pi} \lambda_j^7, \\
\mathcal{F}_{0j}^{(2)} &= -\frac{\zeta(5, \frac{1}{2})}{6\pi} \lambda_j^5 + \frac{\zeta(7, \frac{1}{2})}{8\pi} \lambda_j^7, \quad \mathcal{F}_{ij}^{(3)} = \frac{\zeta(7, \frac{1}{2})}{16\pi} \lambda_j^7, \\
\lambda_j &= \frac{a_j}{h_j}, \quad \lambda_{0j} = \frac{a_0}{h_0}, \quad i, j = 1, 2, \quad \zeta(k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-k}, \quad \zeta(k, 1) = \zeta(k).
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

У формулах (2.4) і (2.5) знехтувано величинами малості $O(\delta^2)$ і $O(\lambda^6)$ де $\delta = \max_{j=0,1,2} \{\delta_j\}$, $\lambda = \max_{n=1,2} \{\lambda_n, \lambda_{0n}\}$. Параметри δ_j і λ_n, λ_{0n} задовольняють умовам

$$\frac{4}{9} [F_{00}^{(4)}]^2 \delta_0^{10} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{4}{9} [\delta_i^6 + (1-\beta_i)^2] [F_{0i}^{(3)}]^2 \delta_0^2 + \sum_{j=1}^2 [F_{ij}^{(2)}]^2 \delta_j^6 \right\} < 1 \quad (\text{задача I}) \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left\{ 1 + \frac{49}{84} (1-\beta_i)^2 \lambda_i^6 + \left[\frac{49}{84} + (1-\beta_i)^2 \lambda_{0i}^6 \right] \right\} < \left[\frac{\pi}{85(3)} \right]^2 \quad (\text{задача II}) \quad (2.7)$$

В умовах крихкого руйнування фіксована щільна стає рухомо-рівноважною тріщиною, радіус a_0^* якої знаходиться з рівняння [3]

$$\sqrt{8a_0^*} \mu_1 \beta_2 \sum_{n=1}^3 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+n} \varepsilon_i \Phi_{0i}^{(n)} + L = 0, \quad (2.8)$$

де L - стала, залежна від пружних характеристик шару.

За певних значень $a_0, a_1, a_2, h_1, h_2, \mu_1, \mu_2$ одержуються деякі нові та відомі результати [1, 2, 4, 5]. Задачі значно спрощуються у випадку однорідного пружного шару ($\beta = 0$).

3. Для ілюстрації розв'язку задач наводиться приклад, коли $h_1 = h_2$, $a_0 = a_1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $M_2 = 0$. Табл. 1 характеризує залежність кутів повороту штампів $\theta_i = \varepsilon_i / \varepsilon_\infty$ від параметрів λ_i ($i=1, 2$). Тут $\varepsilon_\infty = M_1 / (\frac{16}{3} \mu a_1^3)$ - кут, що відповідає задачі кручення однорідного півпростору [7], $\lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_{02} = 2\delta_0 = 2\delta_1$, $\lambda_2 = 2\delta_2$. В табл. 2 подано значення коефіцієнтів інтенсивності дотичних напружень у площині

щільни $K_0 = (\sqrt{\pi}/4\mu\sqrt{a_0})(K_{III}/\varepsilon_\infty)$ та під штампам $K_i = (\sqrt{\pi}/4\mu\sqrt{a_i}) \cdot \sum_{n=1}^3 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \theta_j \Phi_{ij}^{(n)}$ ($i=1, 2$) залежно від параметрів λ_1 і λ_2 .

Т а б л и ц я 1

Значення кутів повороту штампів
залежно від параметрів λ_1

λ_1	λ_2	Задача I		Задача II	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
0,1	0,1	1,0000	0,0000	1,0001	0,0000
0,1	0	1,0000	-	1,0001	-
0,2	0,2	1,0000	0,0003	1,0001	0,0012
0,2	0	1,0000	-	1,0001	-
0,4	0,4	1,0001	0,0032	1,0037	0,0121
0,4	0	1,0001	-	1,0036	-
0,8	0,8	1,0006	0,0238	0,9314	0,1097
0,8	0	1,0034	-	0,9193	-

Т а б л и ц я 2

Значення коефіцієнтів інтенсивності напружень
залежно від параметрів λ_1

λ_1	λ_2	Задача I			Задача II		
		K_0	K_1	K_2	K_0	K_1	K_2
0,1	0,1	0,0000	1,0000	0,0000	0,0005	1,0000	0,0000
0,1	0	0,0000	1,0000	-	0,0005	1,0000	-
0,2	0,2	0,0005	1,0000	0,0001	0,0035	1,0000	0,0011
0,2	0	0,0005	1,0000	-	0,0035	1,0000	-
0,4	0,4	0,0047	0,9995	0,0004	0,0334	1,0004	0,0071
0,4	0	0,0055	0,9995	-	0,0338	1,0004	-
0,8	0,8	0,3726	0,9976	0,0002	0,9711	1,0080	0,0011
0,8	0	0,3876	1,0000	-	1,2911	1,0087	-

Л і т е р а т у р а

1. Г р и л і ц ь к и й Д. В. Кручення двохарового пружного середовища. - "Прикладна механіка", 1961, т. 7, вип. I.
2. П р о ц е н к о В. С. Кручение упругого полупространства, ослабленного плоской круглой щелью. - "Известия АН СССР, МТТ", 1969, № 6.
3. С а л г а н и к Р. Л. Об осесимметричных трещинах продольного сдвига. - ПМТФ, 1962, № 3.

4. У ф д и д Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М., "Наука", 1967.

5. У ф д и д Я. С. Кручение упругого слоя двумя штампами. - ДАН СССР, 1969, т. 186, № 5.

6. Irwin L. R. *Fracture. Handbuch der Physik. Bd. 6.* Springer-Verlag, Berlin, 1958.

7. Reissner E., Sagoci H. F. *Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space*, I. J. Appl. Phys. 1944, v 15, N 9.

УДК 539.311

Г.Т.Гудим

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ НА ТОНКОСТІННОМУ ВКЛЮЧЕННІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ^{*}

1. Розглянемо пружну рішмову двох спаяних ізотропних півплощин з різними матеріалами з тонкостінним пружним включенням довжиною $2a$ і товщиною $2h$, що розміщене на прямій лінії

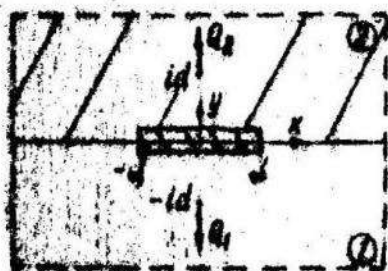


Рис. 1

опан матеріалів під дією двох зосереджених сил $Q_1 = -iq_1$ та $Q_2 = iq_2$, прикладених відповідно у точках $-id$, id (рис.1).

Завначимо, що постановка задачі, формули для обчислення характеристик напруженого стану і числовий аналіз за допомогою зображення розв'язку інтегро-диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду для випадку однорідного поля напружень на безмежності наведені в [4]. Аналогічна задача у менш загальній постановці розглядається в [5].

Следовно цієї задачі в [4] маємо ключове рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = na \int_{-1}^1 \varphi(t) dt + \Phi(x) \quad (|x| \leq 1), \quad (1.1)$$

а також співвідношення для визначення напружень на лінії $y=0$

^{*} Робота виконана під керівництвом проф. Д.В.Гришцького.